第十屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA10-509

作品名稱：你泥中有我，我泥中有你——一個數學上的對偶命題

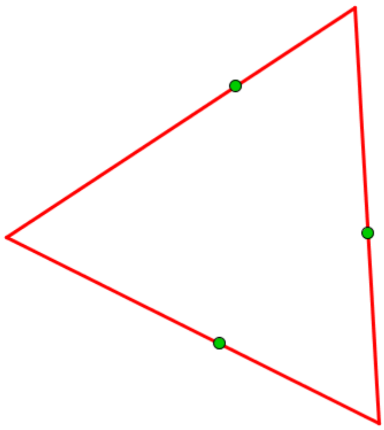
姓名：林東成

關鍵字：正ｎ邊形的外心

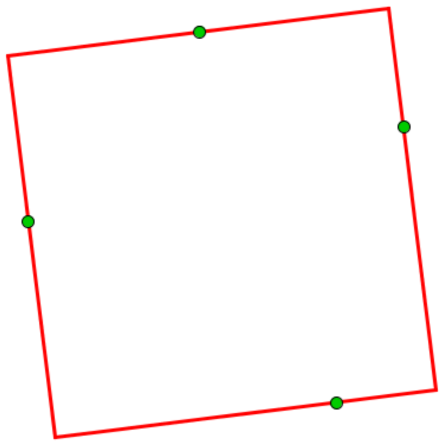
你泥中有我，我泥中有你——一個數學上的對偶命題

壹、　研究動機

在學習複數的單元中，我們發現圓上三等分點，可形成正三角形；五等分點，可形成正五邊形。那麼，若給定的三個點是平面上不共線相異三點，可否通過一個正三角形呢？（如圖一）不共線相異四點，可否通過一個正方形呢？（如圖二）這個想法引發了我們一連串的探索。



圖一



圖二

貳、　研究目的

一、探討平面上不共線的三點，可否存在正三角形，使得各線上恰含有前述三點中的一點。

二、探討平面上任三點不共線的四點，可否存在正方形，使得各線上恰含有前述四點中的一點。

三、探討平面上任三點不共線的五點，可否存在正五邊形，使得各線上恰含有前述五點中的一點。

四、探討平面上任三點不共線的 n 點，可否存在正 n 邊形，使得各線上恰含有前述 n 點中的一點。

五、探討平面上任兩線不平行、不共點的三線，可否存在正三角形，使得各頂點恰在前述三線中的一線。

六、探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的四線，可否存在正方形，使得各頂點恰在前述四線中的一線。

七、探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的五線，可否存在正五邊形，使得各頂點恰在前述五線中的一線。

八、探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的 n 線，可否存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線。

九、探討平面上 n 條平行線，可否存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線。

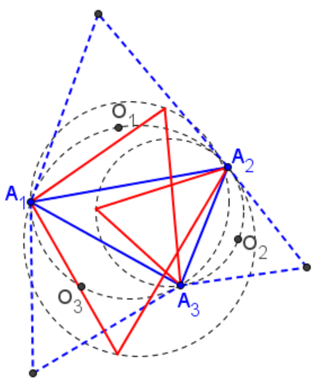
十、探討平面上 n 個同心圓，可否存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 圓中的一圓。

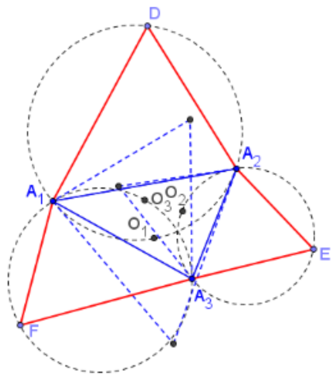
參、 研究設備及器材

Geogebra 軟體、*GSP* 軟體、*Cabri* 軟體

肆、 研究過程及方法

本文通篇以外心貫穿，最主要是因為我們發現外心可以提供我們與正多邊形內角相關的角度，而為什麼要向內作而不是向外呢？如下圖所示，在作完外心之後，再利用圓內接四邊形對角互補的概念作得的三個紅色部分，以向內作外心與我們的所求──正三角形比較相似，於是我們利用向內作外心的方法，並加以修正。





一、平面上不共線的三點，可存在正三角形，使得各線上恰含有前述三點中的一點

（一）想法：

向內作外心

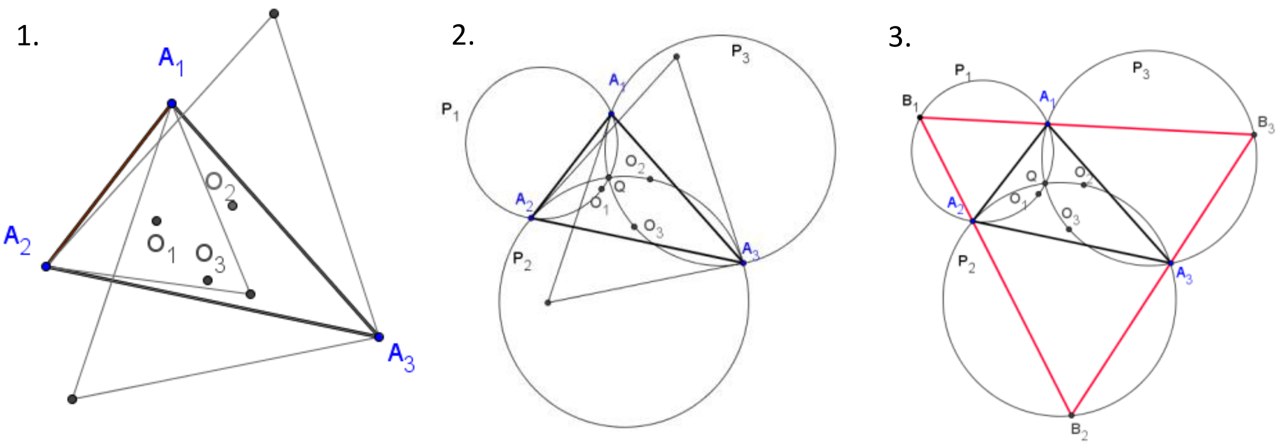
↓ 發現與正三角形內角互補

作圓 P_i

↓

作出正三角形

（二）作圖方法(1~3)：



1.以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊向內作出正三角形取其外心 O_1 ，同理作出 O_2 、O_3 。

2.作出通過 A_1 、O_1 、 A_2 的圓 P_1 ，同理作出 P_2 、 P_3 。

3.在 P_1 上取一點 B_1 ，連 $\overrightarrow{B_1A_2}$ 交 P_2 於 B_2 ，同理作出 B_3 ，則 $\Delta B_1B_2B_3$ 即為所求。

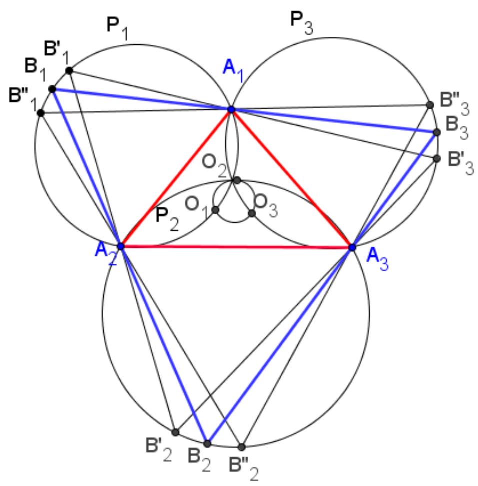
（三）證明

詳細證明請見附錄一-（一）

（四）存在性探討

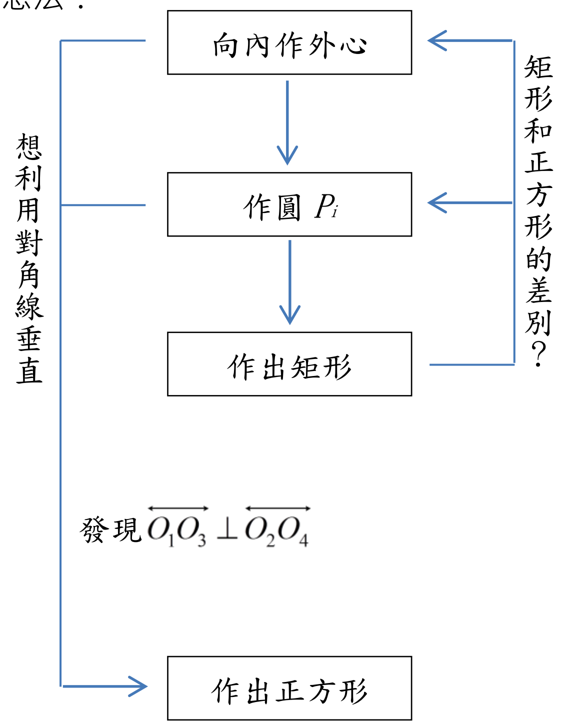
由於 P_1 、 P_2 、 P_3 三圓共點，故三角形任意三點必可作出無限多個正三角形通過。而在此我們要證明有無限多個正三角形通過之，需要兩個正三角形當生成元。

當我們畫出兩個正三角形之後，於 $B'_1\,B''_1$ 弧上取一點 B_1 ，則作 $\overrightarrow{B_1A_2}$ 必交 $B'_2\,B''_2$ 弧於 B_2 ，因為直線 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ 的斜率必介於 $\overleftrightarrow{B'_1\,B'_2}$ 和 $\overleftrightarrow{B''_1\,B''_2}$ 之間，同理可在 $B'_3\,B''_3$ 弧上找到 B_3 ，而此 $\Delta B_1B_2B_3$ 三內角又為六十度，故必為正三角形，則得知在 $B'_1\,B''_1$ 弧上，有無限多點可以構造出正三角形，即「只要可以作出兩個正三角形通過，就可以確定存在無限多個正三角形通過」。



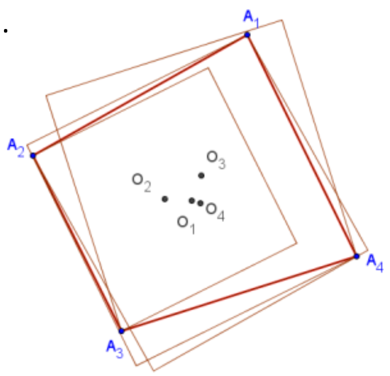
二、平面上任三點不共線的四點，可存在正方形，使得各線上恰含有前述四點中的一點

（一）想法：

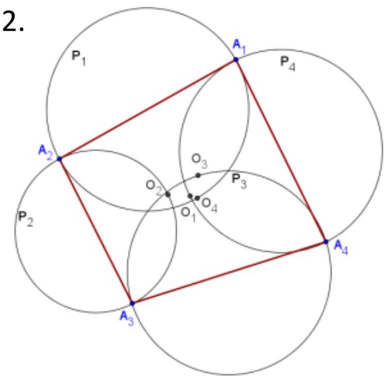


（二）作圖方法(1~5)：

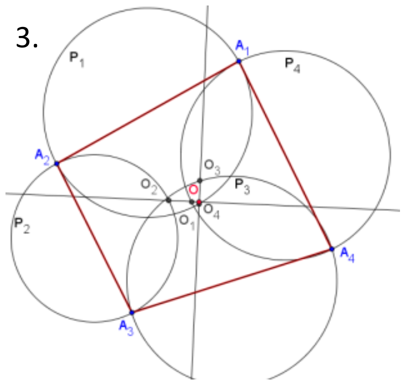
1.



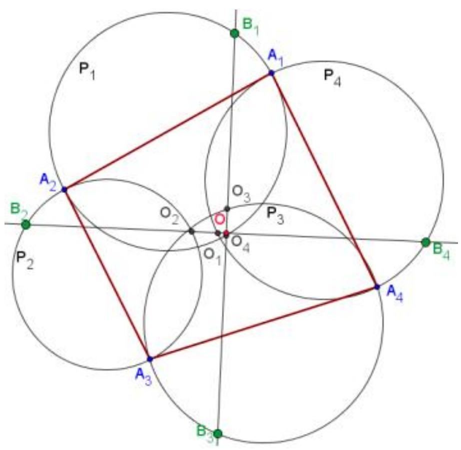
2.



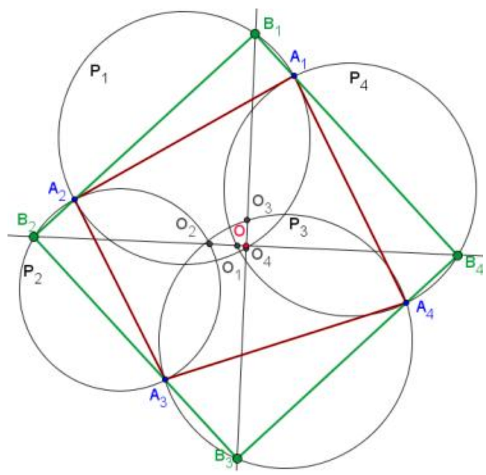
3.



4.



5.



1.分別以 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 、 $\overline{A_4A_1}$ 為邊長，向內作正方形。

2.求出其外心 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 ，並分別過 $\Delta A_1O_1A_2$ 、 $\Delta A_2O_2A_3$ 、 $\Delta A_3O_3A_4$ 、 $\Delta A_4O_4A_1$ 作外接圓 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 。

3.連接 $\overleftrightarrow{O_1O_3}$ 、 $\overleftrightarrow{O_2O_4}$ ，其交點為 O 。

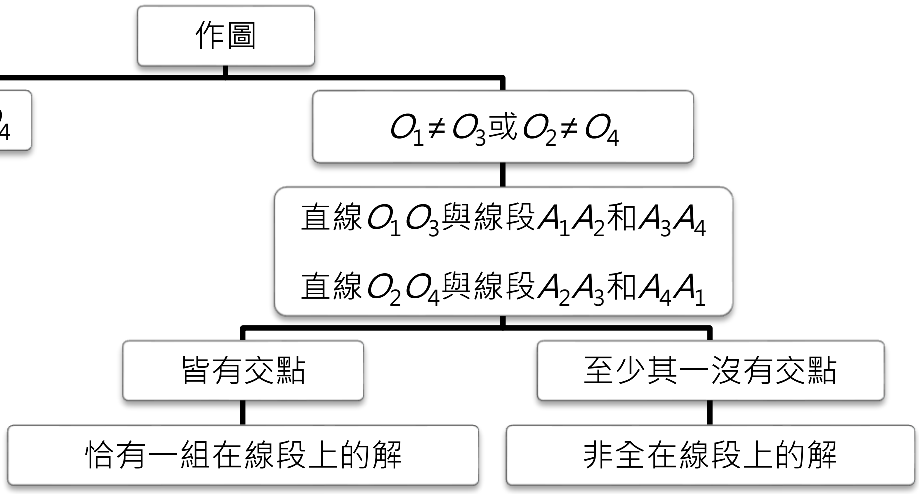
4.而 $\overleftrightarrow{O_1O_3}$ 分別交 P_1 、 P_3 、於 B_1 、 B_3 ，且 $\overleftrightarrow{O_2O_4}$ 分別交 P_2 、 P_4 於 B_2 、 B_4 。

5.連 $\overline{B_1B_2}$ 、 $\overline{B_2B_3}$ 、 $\overline{B_3B_4}$ 、 $\overline{B_4B_1}$ ，則四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即為所求之正方形。

（三）證明

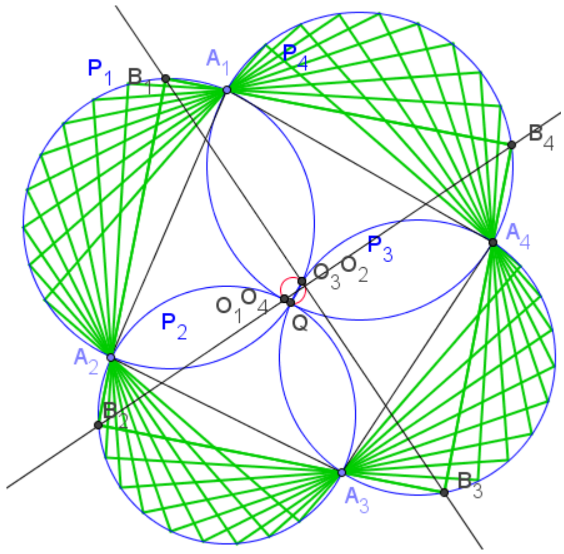
詳細證明請見附錄一-（二）

（四）存在性探討



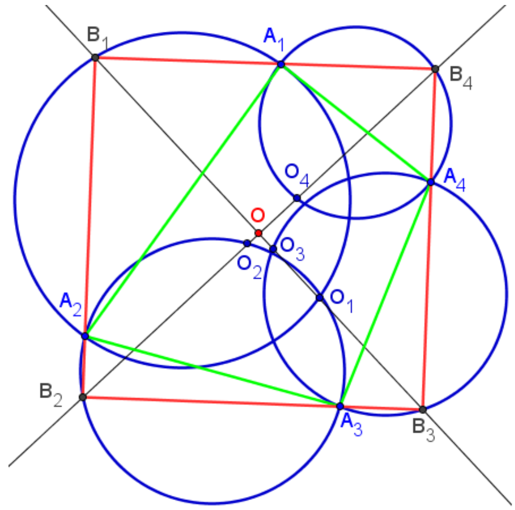
1. $O_1=O_3 \wedge O_2=O_4$ ：

因為 $O_1=O_3$、$O_2=O_4$，所以 $\overleftrightarrow{O_1O_3}$、$\overleftrightarrow{O_2O_4}$ 有無限多條，即可作出無限多個正方形。

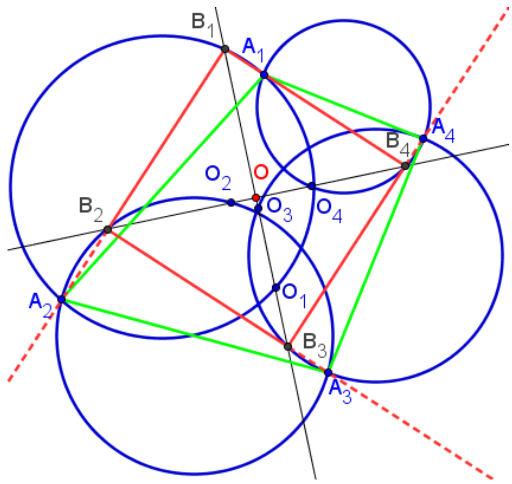


2. $\overleftrightarrow{O_1O_3}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_3A_4}$ 是否有交點，$\overleftrightarrow{O_2O_4}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 和 $\overline{A_4A_1}$ 是否有交點：

(1)皆有交點：B_i 都會落在原四邊形的外面，作出線段上的解。

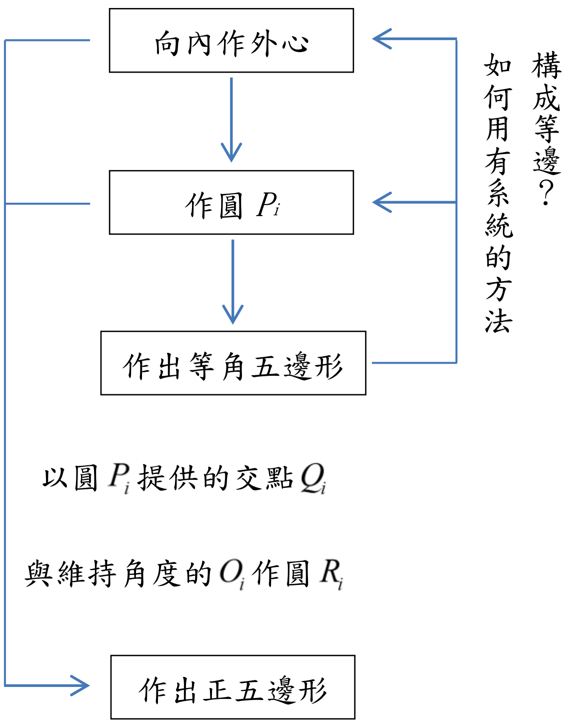


(2)至少其一無交點：B_i 會有落在原四邊形內部，作出非全在線段上的解。



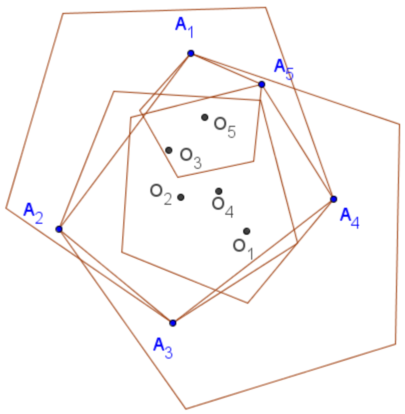
三、 平面上任三點不共線的五點，可存在正五邊形，使得各線上恰含有前述五點中的一點

(一) 想法：

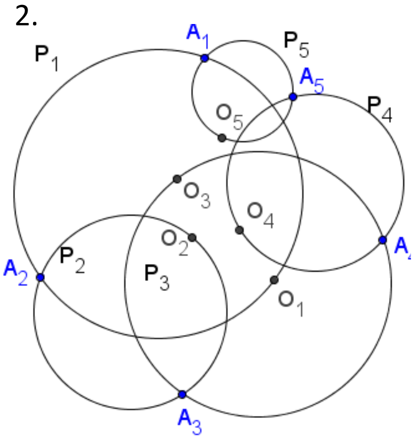


（二）作圖方法(1~6)：

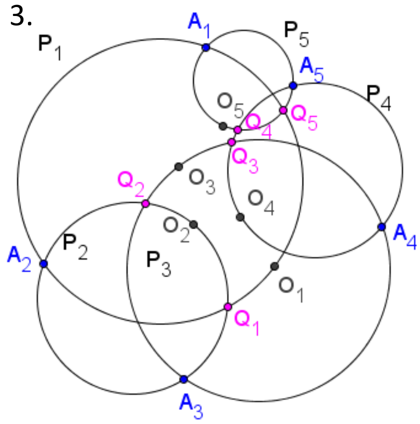
1.



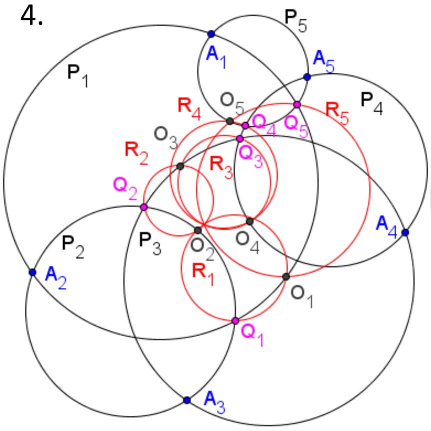
2.



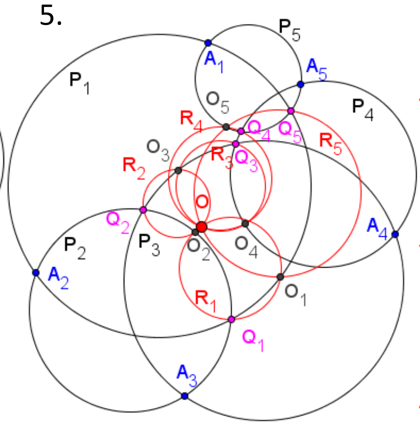
3.



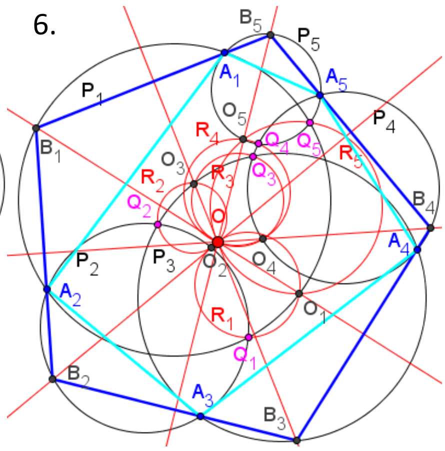
4.



5.



6.



1. 以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊向內作出正五邊形並取其外心 O_1 ，同理作出 O_2 、O_3、O_4 、O_5 。
2. 作出通過 A_1 、O_1 、 A_2 的外接圓 P_1 ，同理作出 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 。
3. 取圓 P_1 與圓 P_2 的交點 Q_1 ，同理作出 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 、 Q_5 。
4. 並作出通過 O_1 、 Q_1 、 O_2 的圓 R_1 ，同理作出 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 。
5. 取圓 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 的共同交點 O 。
6. 作 $\overleftrightarrow{OO_1}$ 、$\overleftrightarrow{OO_2}$ 、$\overleftrightarrow{OO_3}$ 、$\overleftrightarrow{OO_4}$ 、$\overleftrightarrow{OO_5}$ 分別與圓 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 、P_5 交於 B_1 、B_2 、B_3 、B_4 、B_5 ，則五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 即為所求。

(三)證明

詳細證明請見附錄一-(三)

1. O、O_i、B_i **共線**

取 $O_1' = O$ 為縮放中心，

以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊作出的正五邊形放大至其頂點

皆在五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 上

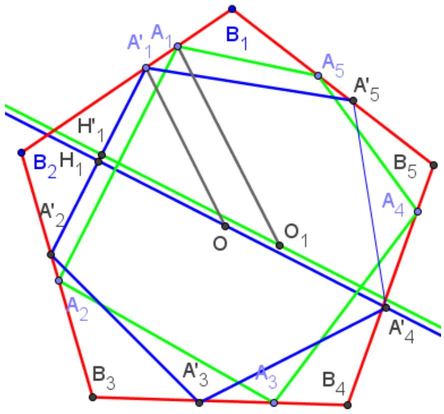
得到 $\Delta A_1H_1O_1 \sim \Delta A_1'H_1'O_1'$

則 $\Delta A_1B_1O_1 \sim \Delta A_1'B_1O_1'$

即 $\overline{O_1'B_1} // \overline{O_1B_1}$

即可得知 O、O_1、B_1 共線。

而同理可得 O、O_2、B_2，O、O_3、B_3，O、O_4、B_4，O、O_5、B_5 共線



2. O **必落在圓** R_i **上**

(1) O、Q_i 在 $\overleftrightarrow{O_iO_{i+1}}$ 異側

設 O 不在圓 R_i 上，但 $\angle B_1OB_2 = 72°$，

即 $\angle O_1OO_2 = 108°$

又

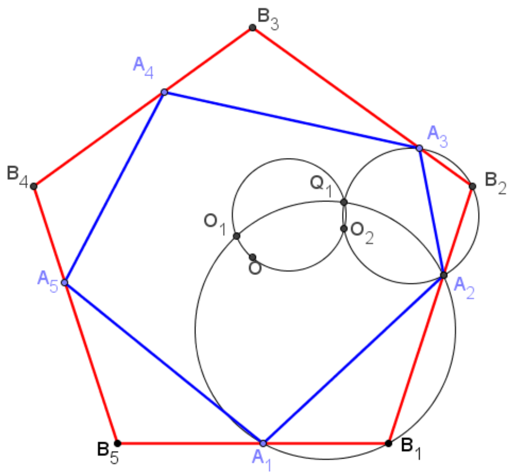
$\angle O_1Q_1O_2$

$= \angle O_1Q_1A_2 - \angle O_2Q_1A_2$

$= (180° - \angle O_1A_1A_2) - \angle O_2A_3A_2$

$= 72°$

矛盾，故得知 O 在圓 R_i 上。



(2) O、Q_i 在 $\overleftrightarrow{O_iO_{i+1}}$ 同側

設 O 不在圓 R_i 上，但 $\angle B_1OB_2 = 72°$

又

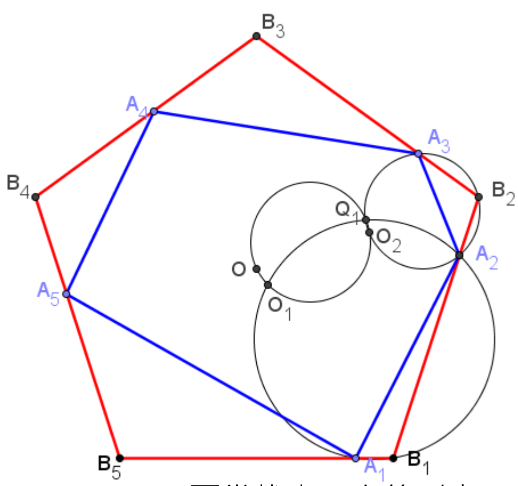
$\angle O_1Q_1O_2$

$= \angle O_1Q_1A_2 - \angle O_2Q_1A_2$

$= (180° - \angle O_1A_1A_2) - \angle O_2A_3A_2$

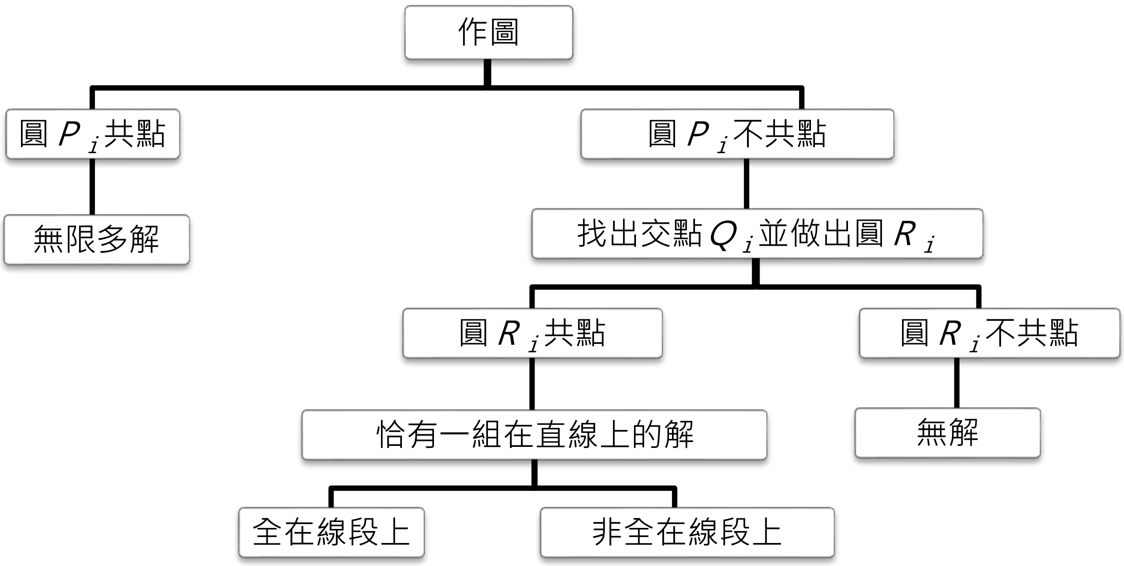
$= 72°$

矛盾，故得知 O 在圓 R_i 上。



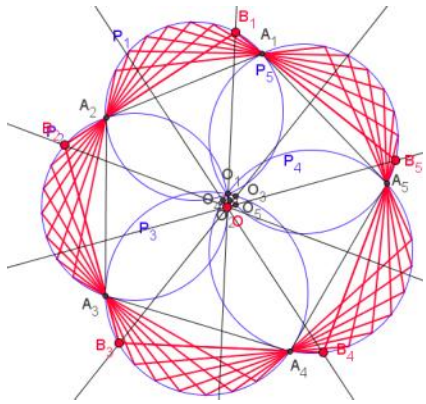
由上述證明得知：有無限個等角五邊形 $K_1K_2K_3K_4K_5$，而當找出 O 之後，以 O 為外心的等角五邊形即為正五邊形。

(四)存在性探討



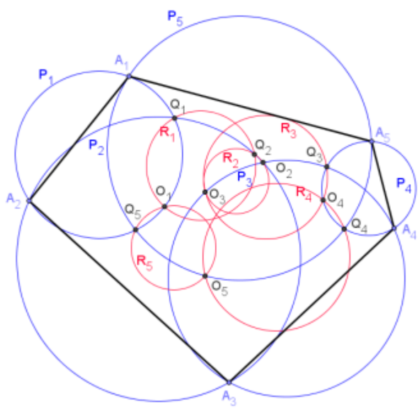
1. 圓 P_i 共點：

   此時，圓 $R_i(i=1,2,3,4,5)$ 重合，所以此時的 O 有無限多個，必存在無限多個正五邊形。



2. 圓 R_i 不共點：

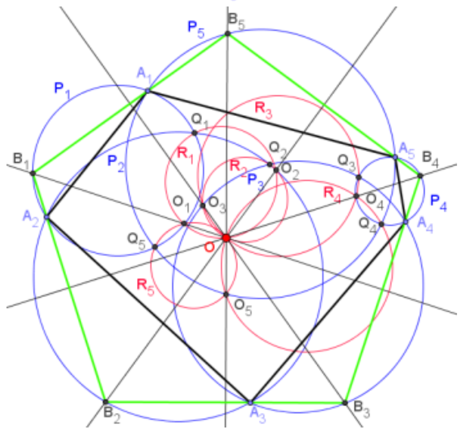
   此時不存在 O ，即不存在正五邊形。



3.圓 R_i 共點

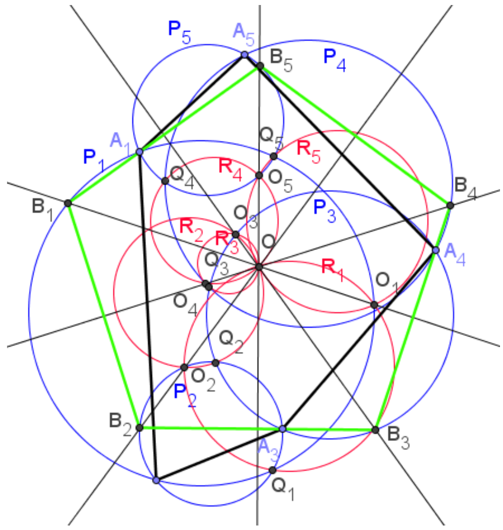
(1)交點全在線段上：

B_i 都會落在原五邊形的外面，作出線段上的解。



(2)交點不全在線段上：

B_i 會有落在原五邊形內部，作出非全在線段上的解。



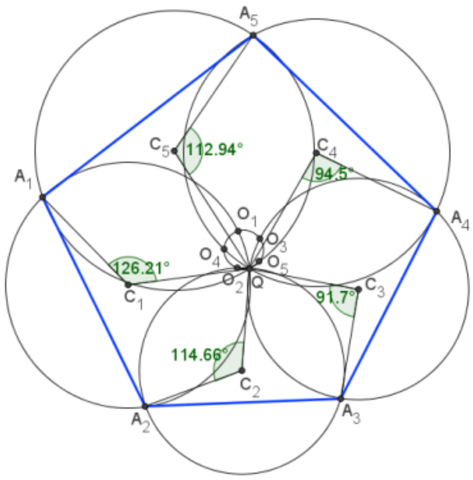
探討 在作圖的過程中，我們發現好像多一個點，作圖方法就有所改變；而當我們進一步摸索後，似乎發現奇邊形要透過外心 O 來求得頂點，而偶邊形卻不是，故我們便猜測奇邊形和偶邊形的作圖方法相異。

（五）端點範圍作圖及證明

1.作法

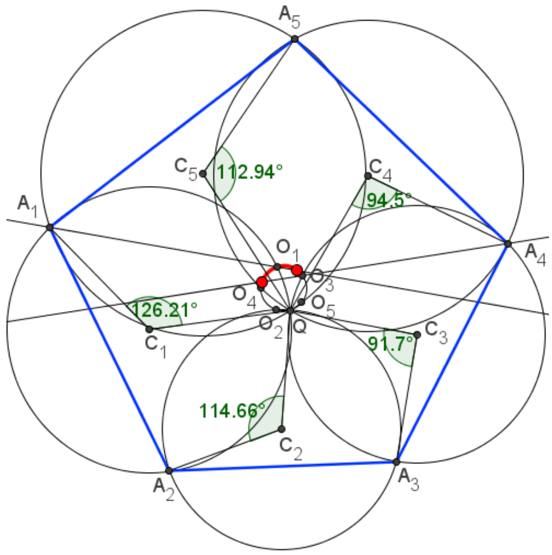
令 C_i 為圓 $\mathrm{P_i}$ 的圓心

(1)比較 $\angle QC_1A_1$、$\angle QC_2A_2$、$\angle QC_3A_3$、$\angle QC_4A_4$、$\angle QC_5A_5$ 的大小



(2)最大者連 $\overleftrightarrow{A_iO_i}$ 與外心軌跡圓 R 的交點

(3)最小者連 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_i}$ 與外心軌跡圓 R 的交點即可得到所求的端點範圍



2.證明

當外心 O 從 Q 轉到 O 時

圓心角 $\angle QC_0O=\theta$

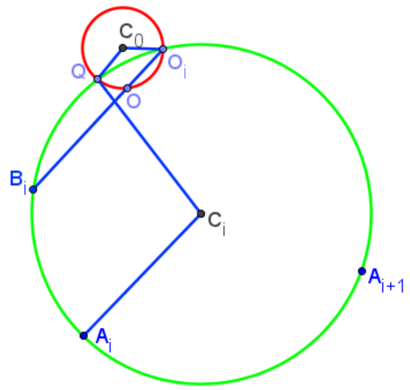
$\angle QC_0O=2\angle QO_iO=\angle QC_iB_i$

所以當 $\angle QC_iB_i$ 越大時代表越晚成立

連 $\overleftrightarrow{A_iO_i}$ 與外心軌跡圓 R 的交點

所以越小時代表越早不成立

連 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_i}$ 與外心軌跡圓 R 的交點



四、 **平面上任三點不共線的奇數點，可存在正 n 邊形，使得各線上恰含有前述 n 點中的一點**

（一）作法

1.以 $\overline{A_1A_2}$ 向內作出正 n 邊形並取其外心 O_1 ，同理作出 O_2 、O_3 、O_4 、$\cdots$ 、O_n 。

2.作出通過 A_1 、O_1 、A_2 的外接圓 P_1 ，同理作出 P_2 、P_3 、P_4 、$\cdots$ 、P_n 。

3.取圓 P_1 與圓 P_2 的交點 Q_1 ，並作出通過 O_1 、Q_1 、O_2 的圓 R_1 ，同理作出 R_2 、R_3 、R_4 、$\cdots$ 、R_n 。

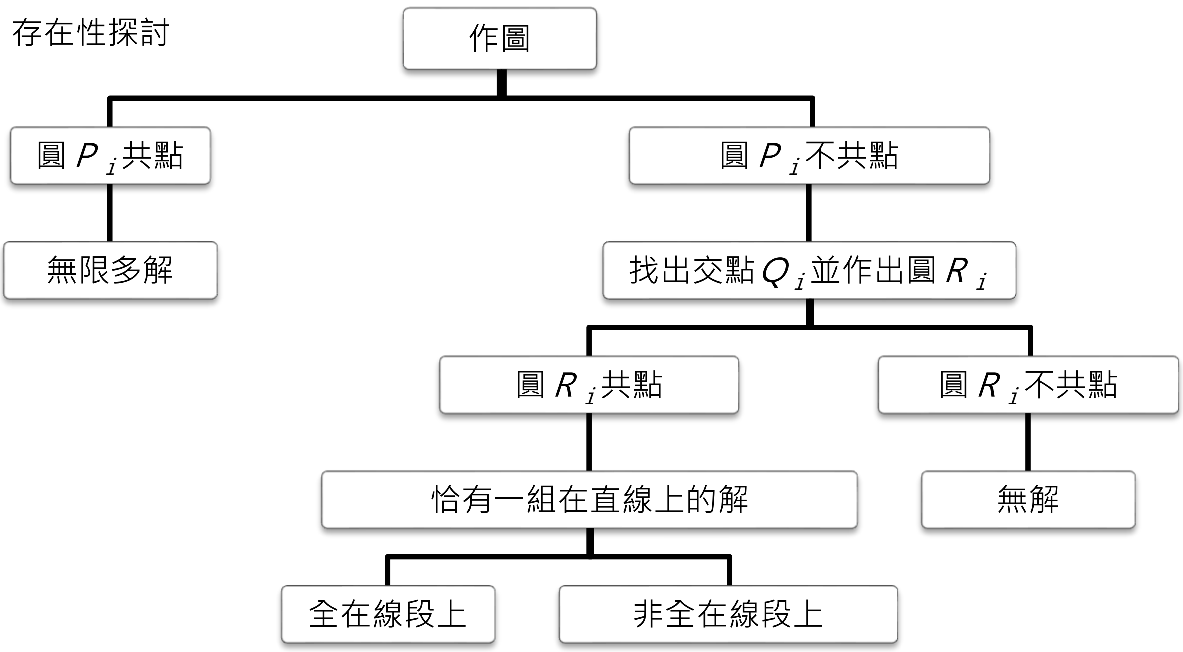
4.取圓 R_1 、R_2 、R_3 、R_4 、$\cdots$ 、R_n 的共同交點 O 。

5.作 $\overleftrightarrow{OO_1}$ 、$\overleftrightarrow{OO_2}$ 、$\overleftrightarrow{OO_3}$ 、$\overleftrightarrow{OO_4}$ 、$\cdots$ 、$\overleftrightarrow{OO_n}$ 分別與圓 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 、$\cdots$ 、P_n 交於 B_1 、B_2 、B_3 、B_4 、$\cdots$ 、B_n ，則 n 邊形 $B_1B_2B_3B_4\cdots B_{n-1}B_n$ 即為所求。

（二）證明

詳細證明請見附錄一-（四）

（三）存在性探討



五、 平面上任三點不共線的偶數點，可存在正 n 邊形，使得各線上恰含有前述 n 點中的一點

(一)作法：

1.給定平面上 n 個點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 $\cdots$ 、 A_n

2.分別以 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 、 $\cdots$ 、 $\overline{A_nA_1}$ 為邊長，向內作正 n 邊形。

3.求出其外心 O_1 、 O_2 、 O_3 、 $\cdots$ 、 O_n 。

4.連接 $\overleftrightarrow{O_1O_{\frac{n}{2}+1}}$ 、 $\overleftrightarrow{O_2O_{\frac{n}{2}+2}}$ 、 $\cdots$ 、 $\overleftrightarrow{O_{\frac{n}{2}}O_n}$

5.$\overleftrightarrow{O_1O_{\frac{n}{2}+1}}$ 、 $\overleftrightarrow{O_2O_{\frac{n}{2}+2}}$ 、 $\cdots$ 、 $\overleftrightarrow{O_{\frac{n}{2}}O_n}$ 的共同交點為 O

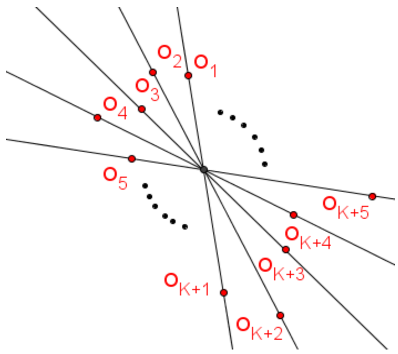
6.$\overleftrightarrow{O_1O_{\frac{n}{2}+1}}$ 、 $\overleftrightarrow{O_2O_{\frac{n}{2}+2}}$ 、 $\cdots$ 、 $\overleftrightarrow{O_{\frac{n}{2}}O_n}$ 分別交圓 P_1 、 $P_{\frac{n}{2}+1}$ 、 P_2 、 $P_{\frac{n}{2}+2}$ 、 $\cdots$ 、 P_n 於 B_1 、 $B_{\frac{n}{2}+1}$ 、 B_2 、 $B_{\frac{n}{2}+2}$ 、 $\cdots$ 、 B_n 。

7.連 $\overline{B_1B_2}$ 、 $\overline{B_2B_3}$ 、 $\overline{B_3B_4}$ 、 $\cdots$ 、 $\overline{B_nB_1}$ ，則 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 即為所求之正 n 邊形。

(二)證明：O_i 、 O 、 $O_{\frac{n}{2}+i}$ 共線

設 $L_i=\overleftrightarrow{OB_i}\,(i=1,2,\cdots,n)$

L_i 和 L_{i+1} 的夾角為 $\dfrac{360^\circ}{n}$



而 L_i 與 $L_{\frac{n}{2}+i}$ 的夾角為 $\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{360^\circ}{n}\right)$ ，

亦即 O_i 、 O 、 $O_{\frac{n}{2}+i}$ 共線

由以上得知偶數邊形對邊外心連線交圓 P_i 即可得到 B_i

(三)存在性探討

- 作圖(令 $n=2k$)
  - $O_i=O_{k+i}$
    - 無限多解
  - $O_i\neq O_{k+i}$
    - 直線 O_iO_{k+i} 與線段 A_iA_{i+1} 和 $A_{k+i}A_{k+i+1}$
      - 皆有交點
        - 恰有一組在線段上的解
      - 至少其一沒有交點
        - 非全在線段上的解

六、 平面上任兩線不平行的不共點三線，可存在正三角形，使得各頂點恰在前述三線中的一線

（一）想法：

已知在平面上能
自行固定兩個點

↓

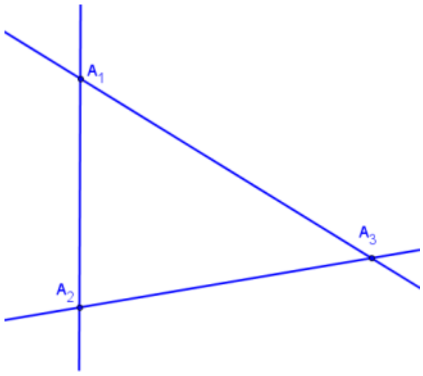
剩下一點待找出

↓

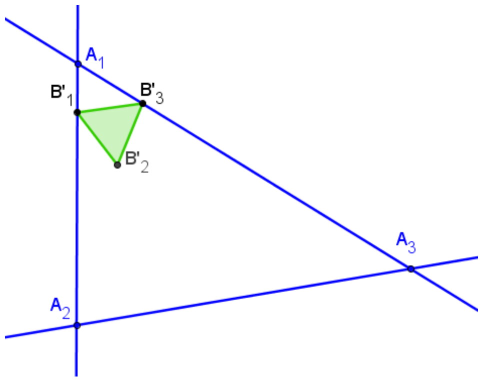
利用縮放的方法
直接作出正三角形

（二）作圖方法(1~4)：

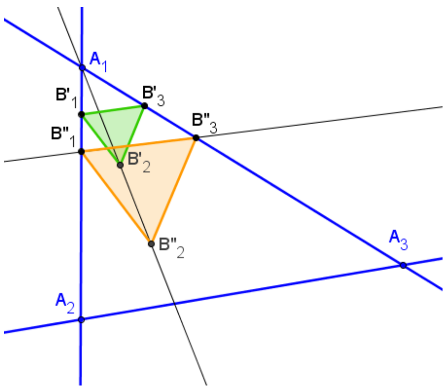
1.



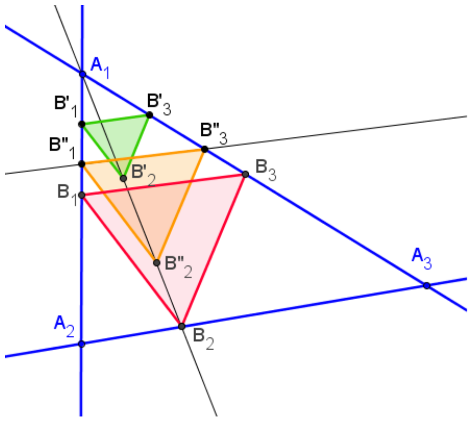
2.



3.



4.



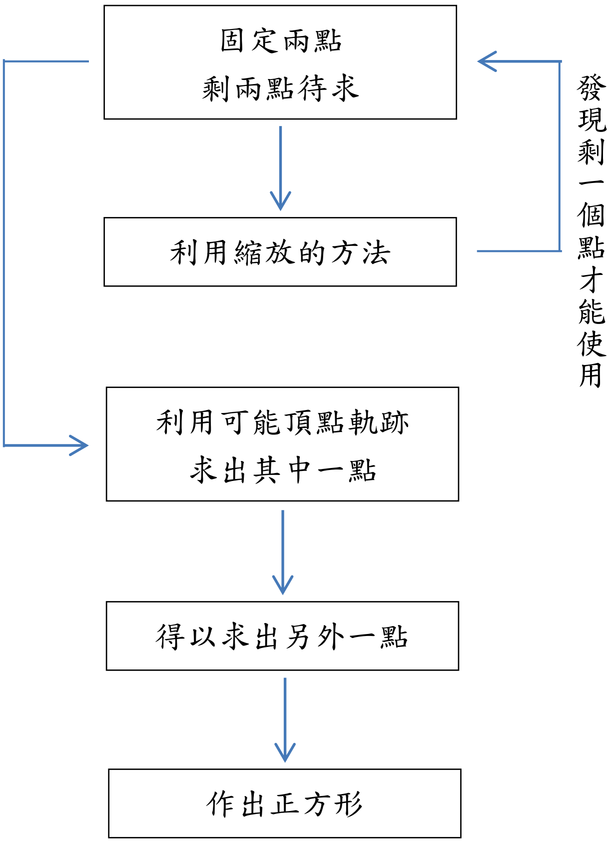
1. 在 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_1A_3}$ 各取一點 B'_1 、 B'_3 ，並向內作出正 $\Delta B'_1B'_2B'_3$ 。
2. 在 $\overline{A_1A_2}$ 在取一點 B''_1 並在 $\overline{A_1A_3}$ 上取一點 B''_3 使得 $\overline{B''_1B''_3} // \overline{B'_1B'_3}$ ，同理 $\overline{B''_1B''_2} // \overline{B'_1B'_2}$ ， $\overline{B''_2B''_3} // \overline{B'_2B'_3}$ 。
3. 連 $\overleftrightarrow{B'_2B''_2}$ 交 $\overline{A_2A_3}$ 於 B_2 ，則 B_2 即為所求的一個頂點
4. 利用 B_2 作出正 $\Delta B_1B_2B_3$ 。

（三）證明

詳細證明請見附錄一-（五）

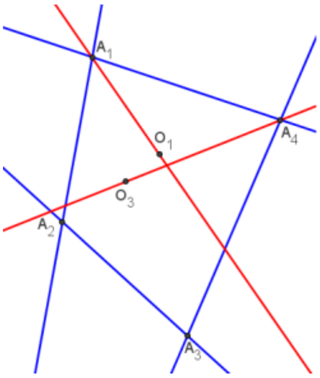
七、探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的四線，可存在正方形，使得各頂點恰在前述四線中的一線

(一)想法：

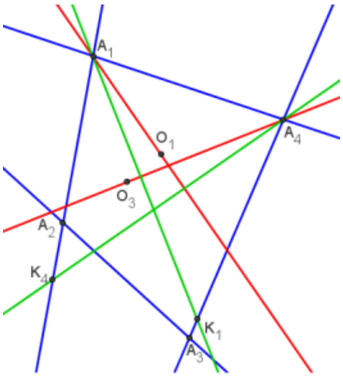


(二)作圖方法(1~5)：

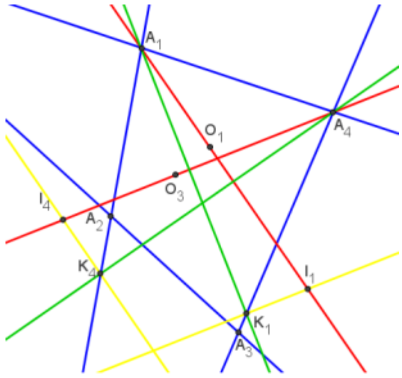
1.



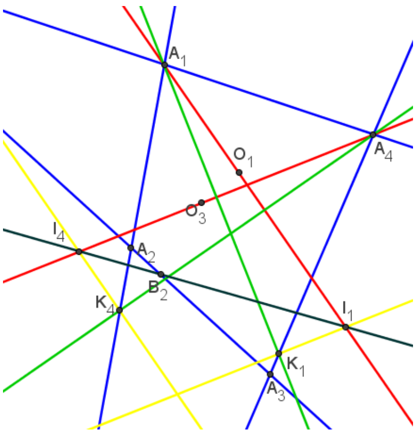
2.



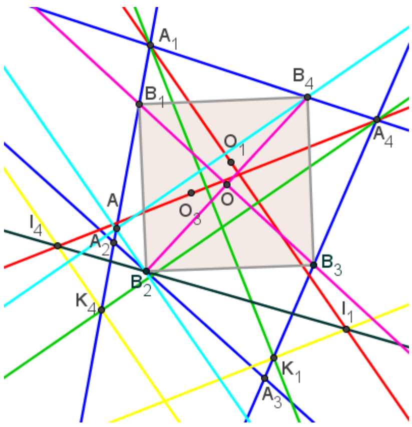
3.



4.



5.



1.以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊向內作出外心 O_1，以 $\overline{A_3A_4}$ 為邊向內作出外心 O_3，連接 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$、$\overleftrightarrow{A_4O_3}$。

2.過 A_1 作 $\overleftrightarrow{A_4O_3}$ 的垂直線交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 K_1，過 A_4 作 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$ 的垂直線交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 K_4。

3.過 K_1 作 $\overleftrightarrow{A_4O_3}$ 的平行線交 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$ 於 I_1，過 K_4 作 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$ 的平行線交 $\overleftrightarrow{A_4O_3}$ 於 I_4。

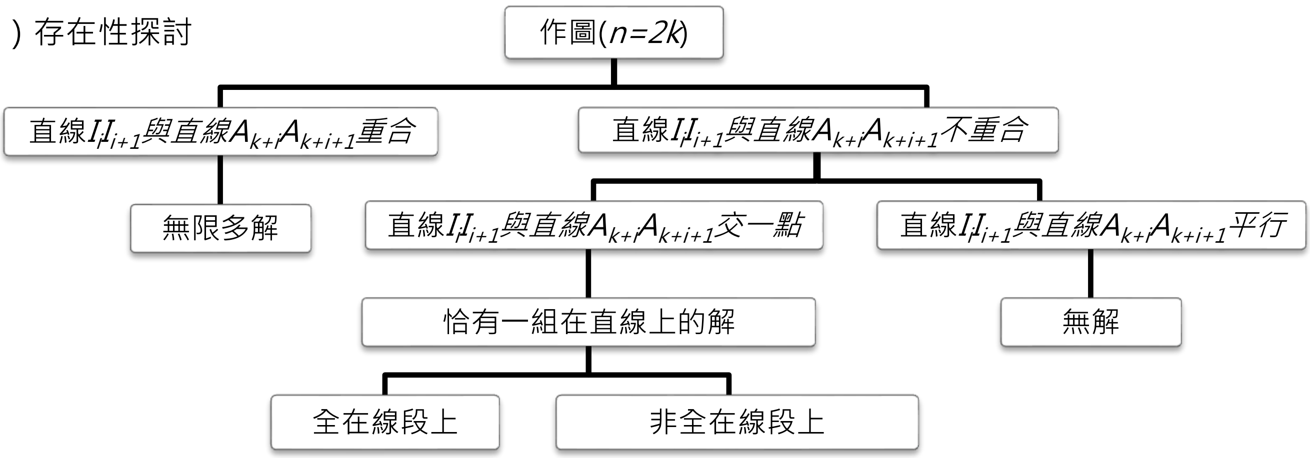
4.連接 $\overleftrightarrow{I_1I_4}$ 交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 B_2。

5.過 B_2 平行 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$ 交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於一點 A，過其交點作 $\overleftrightarrow{AB_2}$ 的垂直線交 $\overleftrightarrow{A_4A_1}$ 於 B_4，作 $\overleftrightarrow{B_2B_4}$ 中垂線交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 B_1、B_3，則四邊形 $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$ 即為所求。

（三）證明

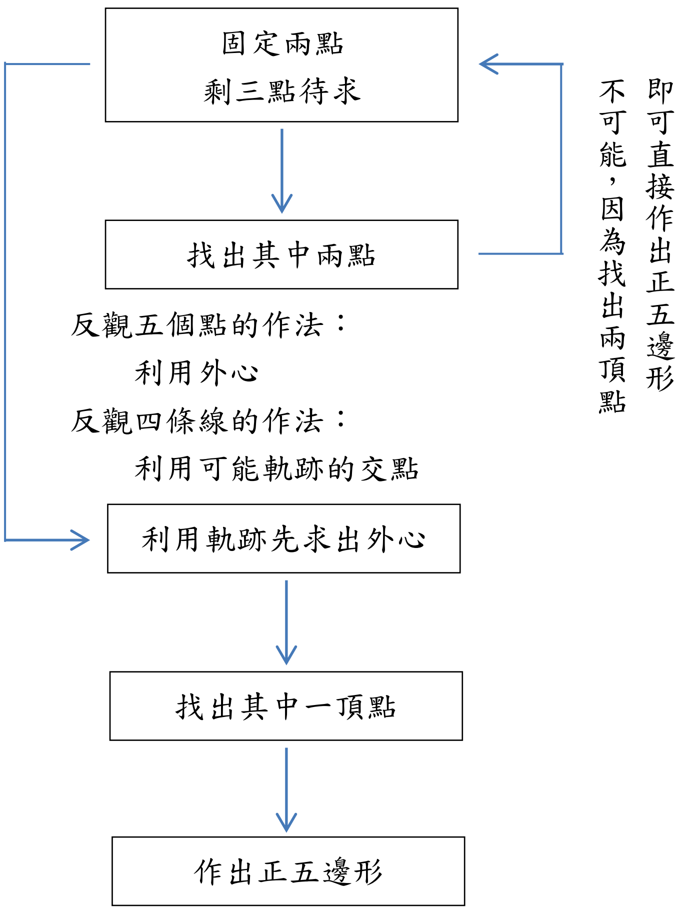
詳細證明請見附錄一-（六）

（四）存在性探討



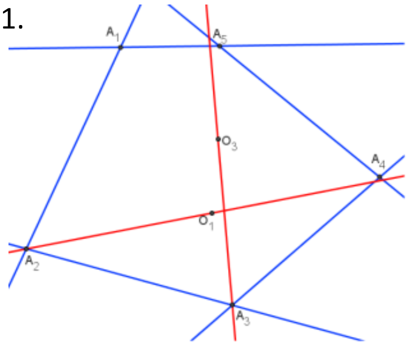
八、平面上任兩線不平行、任三線不共點的五線，可存在正五邊形，使得各頂點恰在前述五線中的一線

（一）想法：

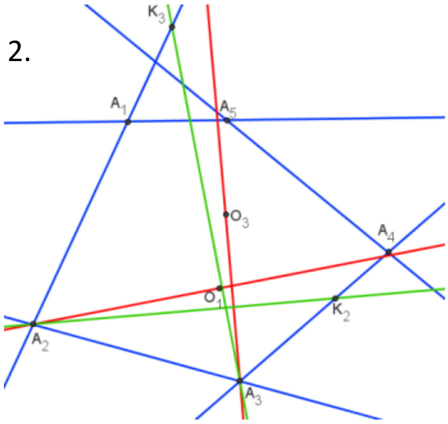


（二）作圖方法(1~8)：

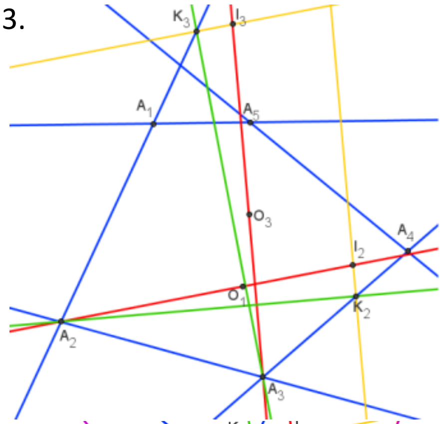
1.



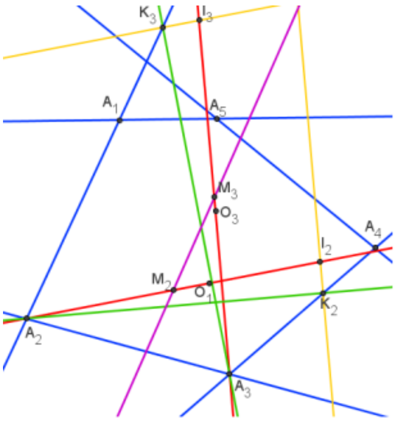
2.



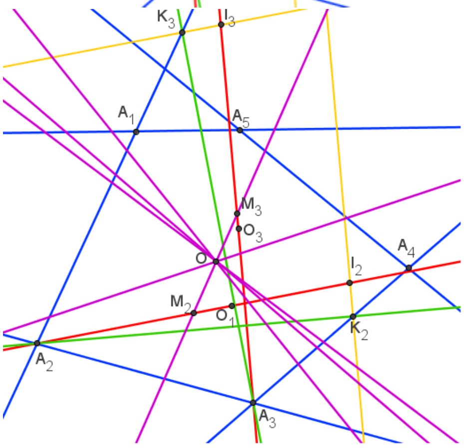
3.



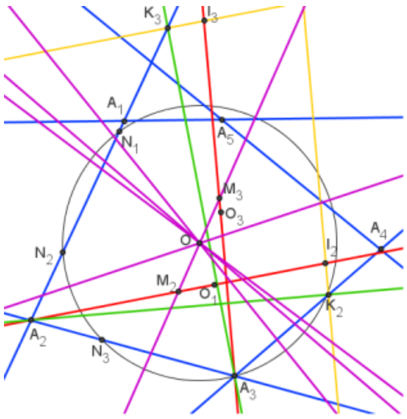
4.



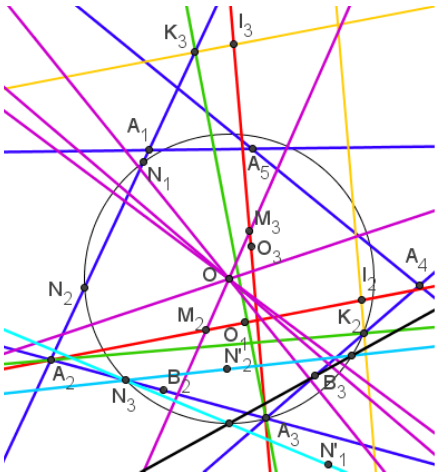
5.



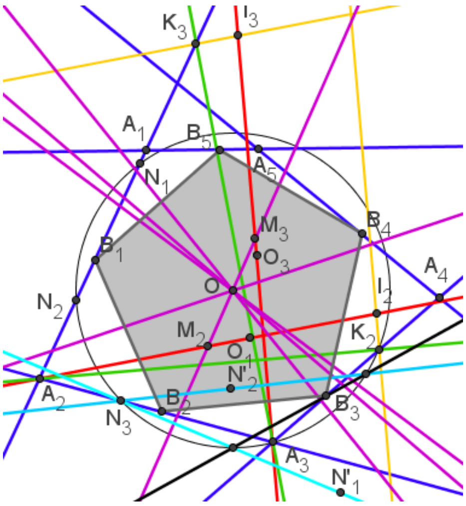
6.



7.



8.



1.以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊向內作正五邊形的外心 O_1，$\overline{A_3A_4}$ 為邊向內作正五邊形外心 O_3，連 $\overleftrightarrow{A_2O_1}$、$\overleftrightarrow{A_3O_3}$

2.過 A_2 作 $\overleftrightarrow{A_3O_3}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 K_2，過 A_3 作 $\overleftrightarrow{A_2O_1}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 K_3

3.過 K_2 作 $\overleftrightarrow{A_3O_3}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_2O_1}$ 於 I_2，過 K_3 作 $\overleftrightarrow{A_2O_1}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_3O_3}$ 於 I_3

4.作 $\overline{A_2I_2}$、$\overline{A_3I_3}$ 中點 M_2、M_3，連 $\overleftrightarrow{M_2M_3}$

5.依此作法依序作完，共同交點 O 即為正五邊形的外心

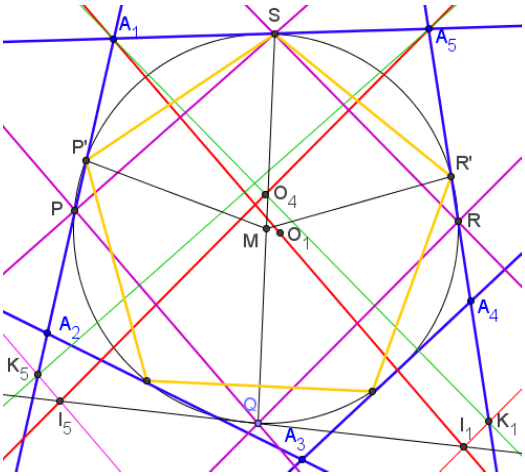
6.取一適當半徑，以 O 為圓心作圓，交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 N_1、N_2，交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 N_3

7.以 N_3 為旋轉中心，將 $\overleftrightarrow{N_3N_1}$、$\overleftrightarrow{N_3N_2}$ 順時針轉正五邊形的內角，與圓的交點相連，與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 交點即為 B_3

8.再以 O 為中心將 B_3 旋轉，得其他頂點，將各個頂點連接即為正五邊形

（三）證明

1.**$\overline{QS}$ 中點為三頂點在三線上的正五邊形的外心**



Q 為 $\overleftrightarrow{I_1I_5}$ 上的動點

$\overleftrightarrow{QR} // \overleftrightarrow{I_5A_5}$ ∴ $\angle QRK_1 = 54°$ 得知

$\angle SRA_5 = 36°$，$\angle SMR' = 2\angle SRA_5 = 72°$

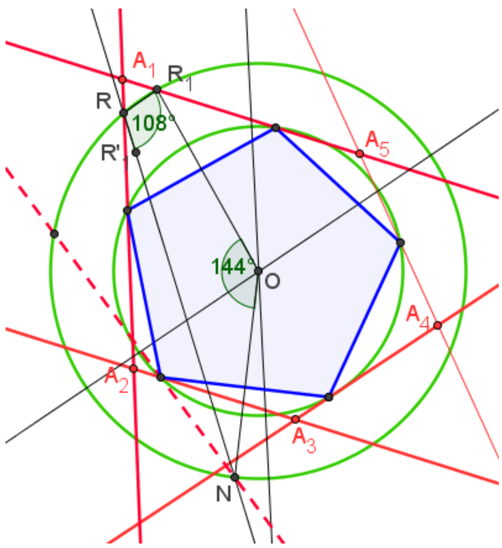
同理可得 $\angle SMP' = 72°$

故 M 為正五邊形三頂點在三線上的外心

2.**該外心軌跡為 $\overleftrightarrow{M_1M_5}$**

此證明其實只是動量守恆觀念的轉換，詳細證明請見附錄一-（七）

3. **端點的軌跡**



∵ $\angle R_1RN = 108°$ ∴ $\angle R_1ON = 144°$

又 $\overline{R_1O} = \overline{NO}$

∴ $\overline{R_1O}$ 逆時針旋轉 $144°$ 可得 $\overline{NO}$

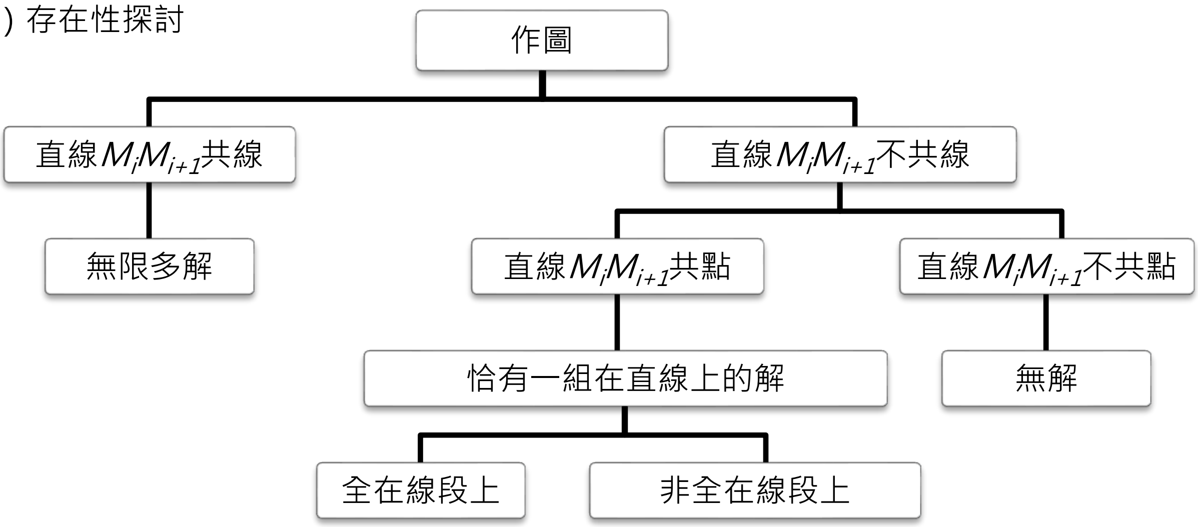
且 R_1 的軌跡為一直線

∴ N 的軌跡為一直線

故由上述證明得知

利用軌跡的方法可作出正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$

（三）存在性探討



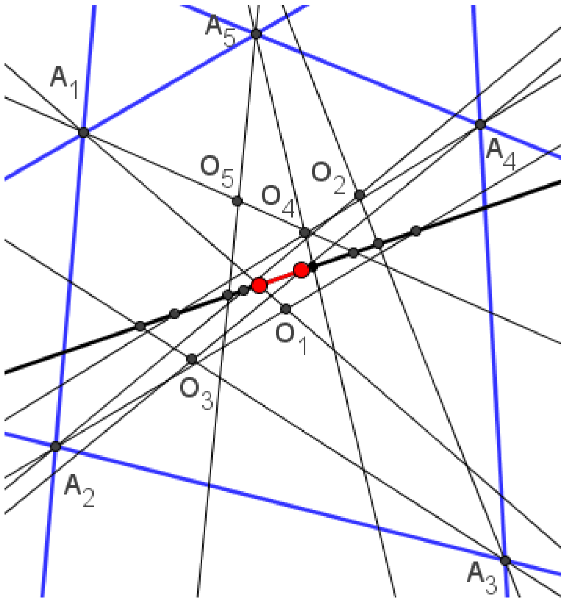
（四）端點範圍作法及證明

1.作法

(1)連 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$、$\overleftrightarrow{A_2O_2}$、$\overleftrightarrow{A_3O_3}$、$\overleftrightarrow{A_4O_4}$、$\overleftrightarrow{A_5O_5}$ 與外心軌跡的交點

(2)連 $\overleftrightarrow{A_1O_5}$、$\overleftrightarrow{A_2O_1}$、$\overleftrightarrow{A_3O_2}$、$\overleftrightarrow{A_4O_3}$、$\overleftrightarrow{A_5O_4}$ 與外心軌跡的交點

(3)在(1)及(2)中所作出來的五個點中各取一點，並使此兩點的距離為最小值，則此兩點即為端點，而得以求出端點範圍。



2.證明

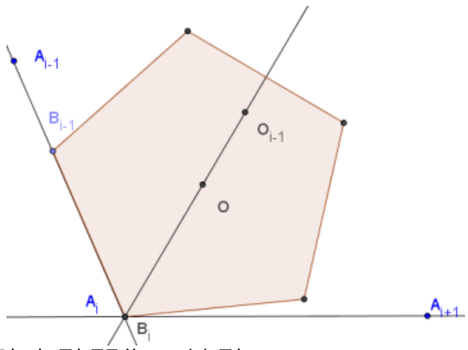
當 B_i 順時針移動時，與 A_i 重合

$B_{i-1} \in \overleftrightarrow{A_{i-1}A_i}$

$\therefore \overline{B_iB_{i-1}}$ 跟 $\overleftrightarrow{A_iA_{i-1}}$ 重合

所以

$\angle B_{i-1}B_iO = \angle B_{i-1}B_iO_{i-1} = \angle A_{i-1}A_iO_{i-1}$



$\therefore B_i$ 順時針移動時，O 最先碰到 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 與外心軌跡交點即為一端點

逆時針同理。

$\therefore B_i$ 逆時針移動時，O 最先碰到 $\overleftrightarrow{A_iO_i}$ 與外心軌跡交點即為另一端點

所以端點範圍為兩者各取一點，並使兩點間的距離為最小值。

九、 **平面上任兩線不平行、任三線不共點的奇數條線，可存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線**

（一）作法

1.以 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 、 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 為邊長向內作正 n 邊形外心 O_{i-1} 、 O_{i+1} ，連 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 。

2.過 A_i 作 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 於 K_i ，過 A_{i+1} 作 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 於 K_{i+1}

3.過 K_i 作 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 於 I_i ，過 K_{i+1} 作 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 於 I_{i+1}

4.作 $\overline{A_iI_i}$ 、 $\overline{A_{i+1}I_{i+1}}$ 中點 M_i 、 M_{i+1} ，連 $\overleftrightarrow{M_iM_{i+1}}$

依此作法依序作完，所共同交點為 O 即為正 n 邊形的外心

5.取一適當半徑，以 O 為圓心作圓，交 $\overleftrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 於 N_{i-1} 、 N_i ，交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 N_{i+1}

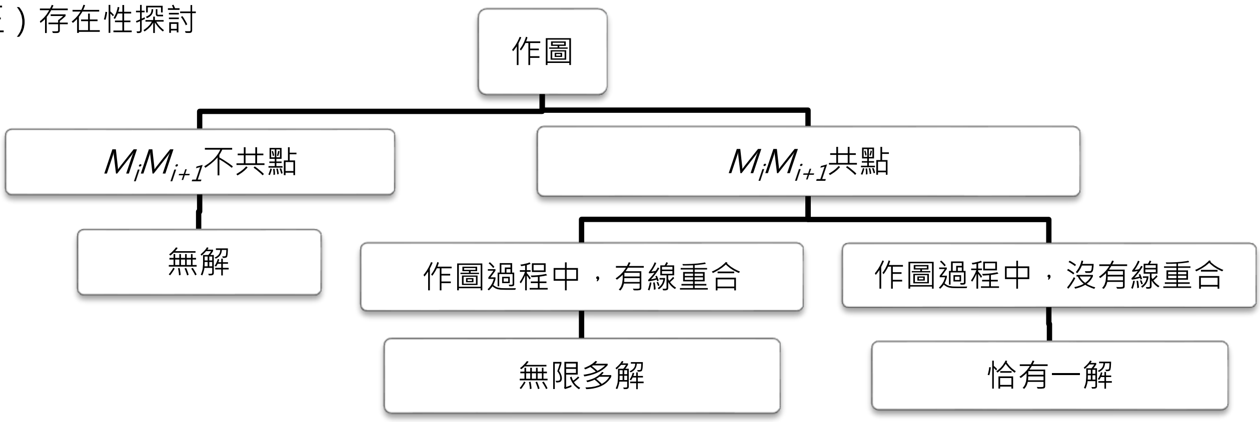
6.以 N_{i+1} 為旋轉中心，將 $\overleftrightarrow{N_{i+1}N_{i-1}}$ 、 $\overleftrightarrow{N_{i+1}N_i}$ 順時針轉正 n 邊形的內角，與圓的交點，相連，與 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 交點即為 B_{i+1}

7.再以 O 為中心將 B_{i+1} 旋轉，得其他頂點，將各個頂點連接即為正 n 邊形

（二）證明

詳細證明請見附錄一-（八）

（三）存在性探討



十、 **平面上任兩線不平行、任三線不共點的偶數條線，可存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線**

（一）作法

1.以 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 、 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 為邊長向內作正 n 邊形外心 O_{i-1} 、 O_{i+1} ，連 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 。

2.過 A_i 作 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 於 K_i ，過 A_{i+1} 作 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 於 K_{i+1}

3.過 K_i 作 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 於 I_i ，過 K_{i+1} 作 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 於 I_{i+1}

4.連 $\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_{\frac{n}{2}+i}A_{\frac{n}{2}+i+1}}$ 於 $B_{\frac{n}{2}+i}$

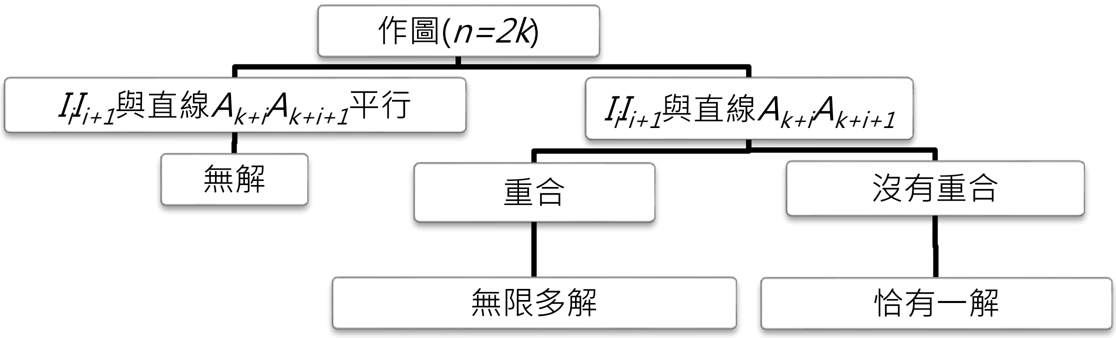
5.過 $B_{\frac{n}{2}+i}$ 平行 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 一點，過其交點作 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 B_i

6.以 $B_{\frac{n}{2}+i}$ 、 B_i 的中點 O 為中心將 $B_{\frac{n}{2}+i}$ 、 B_i 旋轉得其他頂點，將頂點連接即為正 n 邊形

（二）證明

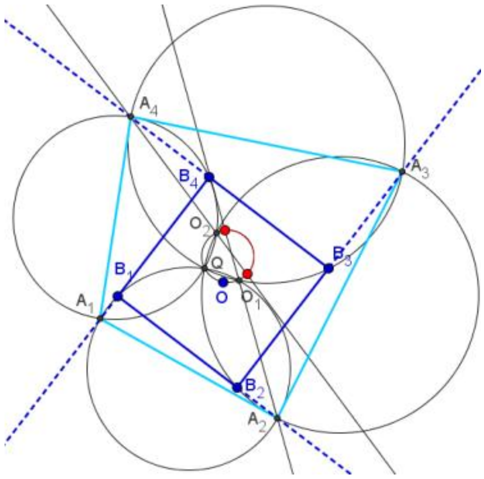
詳細證明請見附錄一-（九）

（三）存在性探討

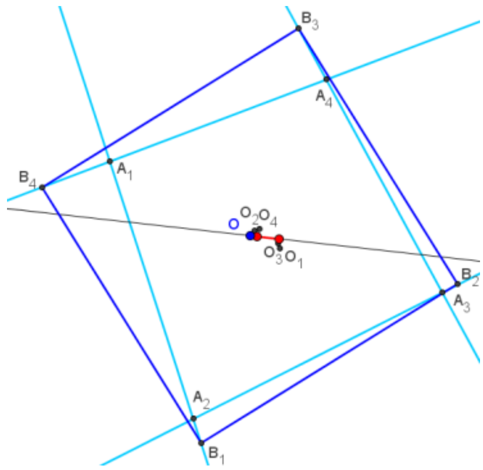


十一、**若放寬限制：點 B_i 可以在 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 上，對於無限多解的探討：**

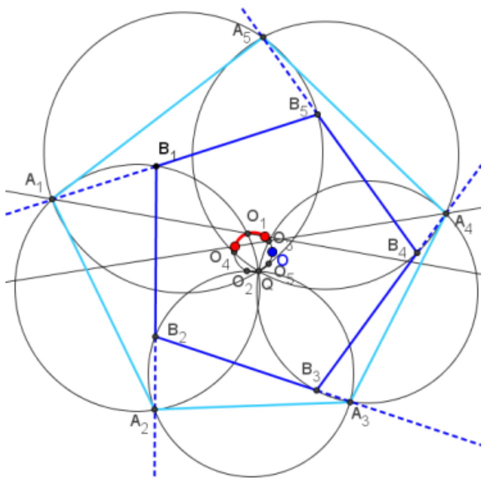
1．四個點：



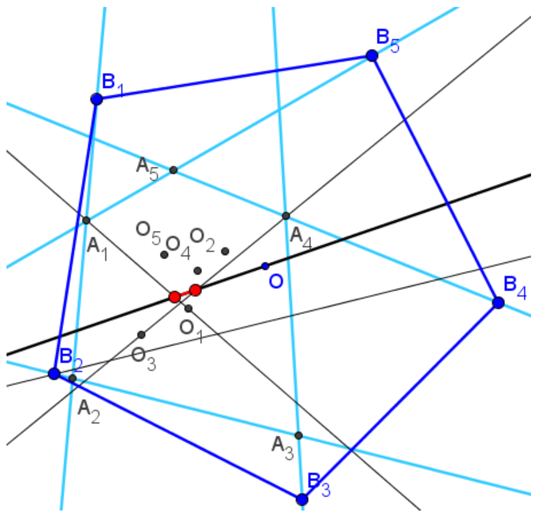
1．四條線：



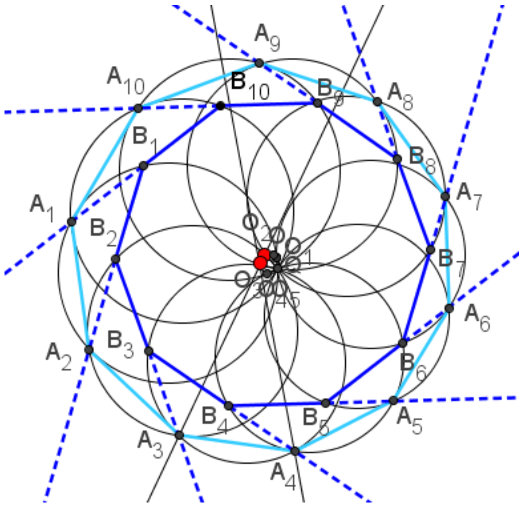
2．五個點：



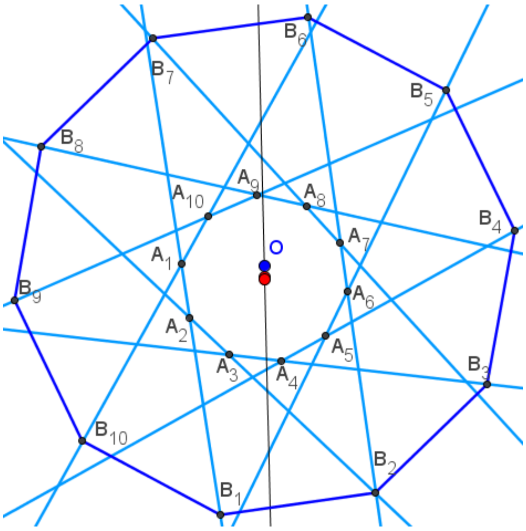
2．五條線：



3． n 個點（舉十邊形為例）：



3． n 條線(舉十邊形為例)：



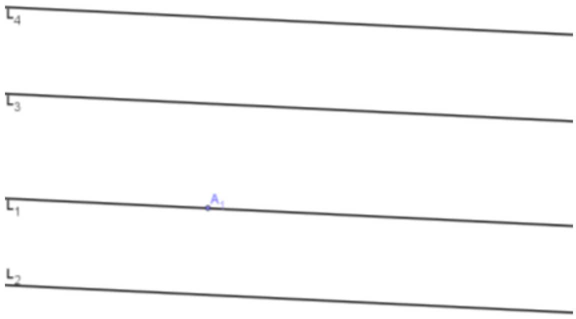
十二、平面上 n 條平行線，可否存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線

(一)作法：以 $n=4$ 為例:

1.給定平面上四條平行線

並命名L_1 、L_2 、L_3 、L_4

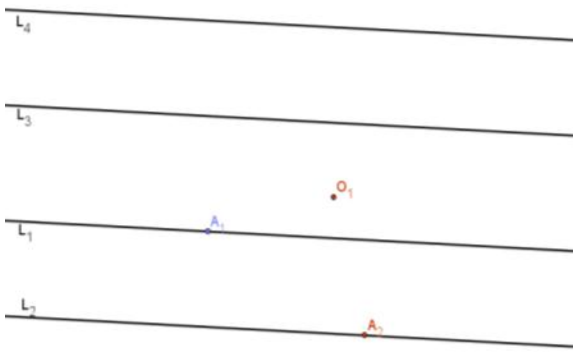
並在L_1取一點A_1



2.在L_2取一點A_2

並依據外心對兩點的相對位置

作出O_1

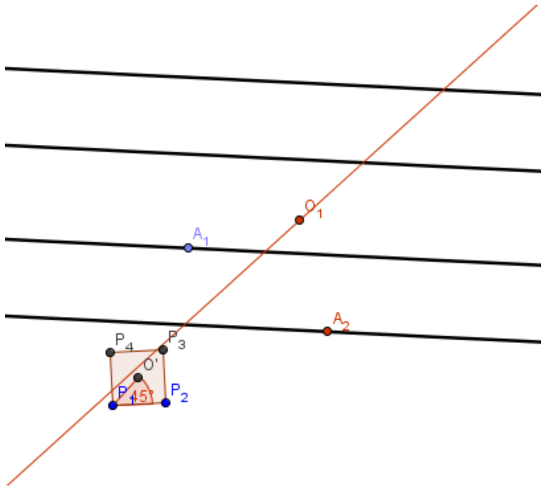


3.作出一個正方形作輔助

取有向角P_2P_1O'

作一條直線過O_1

與平行線有向夾角為P_2P_1O'



4.同理在L_3、 L_4取一點A_3、 A_4

並依據外心對兩點的相對位置

作出O_2、 O_3

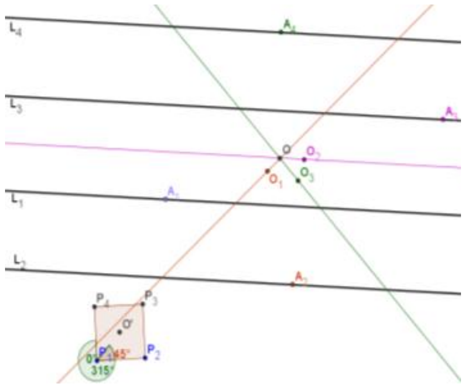
取有向角P_3P_1O'、P_4P_1O'

各作一條直線過O_2、 O_3

與平行線有向夾角分別為

P_3P_1O'、P_4P_1O'

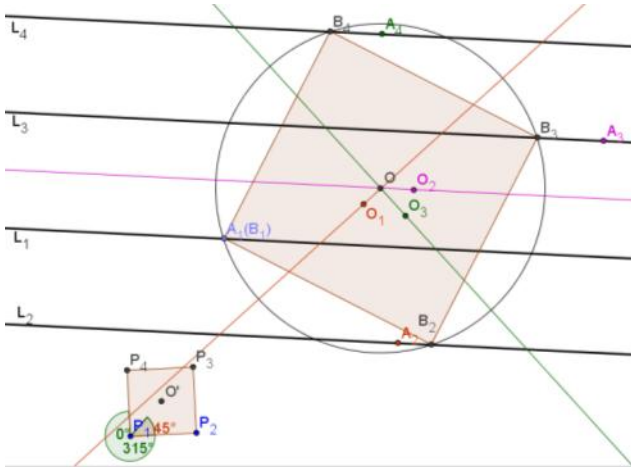
取通過O_1、 O_2、 O_3的三線共同交於一點外心 O



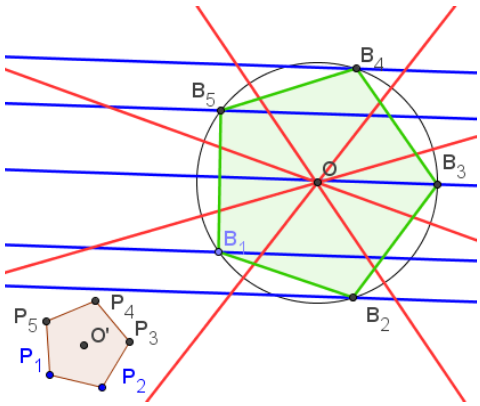
5.以O為圓心過A_1作圓

取圓與平行線的交點

得正方形$B_1B_2B_3B_4$

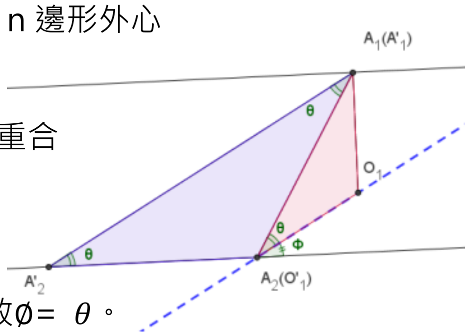


※註：(當$n = 5$的情形)



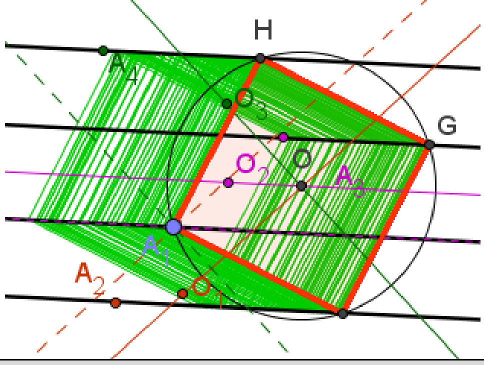
（二）證明:

A_2 為直線上動點，O_1 為以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊長所作出的正 n 邊形外心
易知 O_1 所成的軌跡為一條直線，而必存在 A_2'
使得以 $\overline{A_1'A_2'}$ 為邊長所作的正 n 邊形外心 O_1' 與 A_2 重合
令$\angle A_1A_2O_1=\angle A_1'A_2'O_1'=\angle A_2'A_1'O_1'=\theta$
$\overleftrightarrow{O_1A_2}$與平行線的銳夾角為$\phi$
因為$\angle A_1A_2O_1=\angle A_2'A_1'O_1'$得知$\overleftrightarrow{O_1A_2}$// $\overleftrightarrow{A_1'A_2'}$ ，故$\phi=\ \theta$。

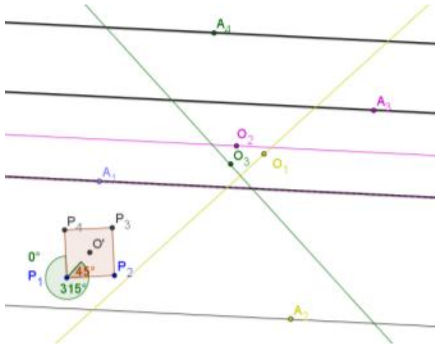


(三)存在性探討:

一組無限多解



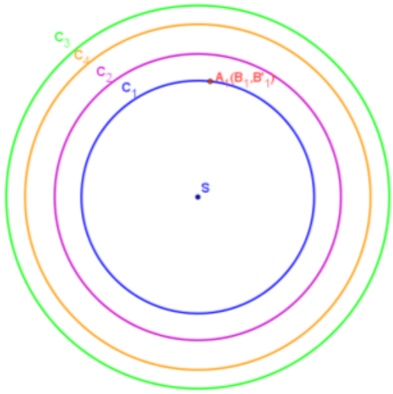
無解



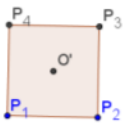
十三、平面上 n 個同心圓，可否存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 圓中的一圓

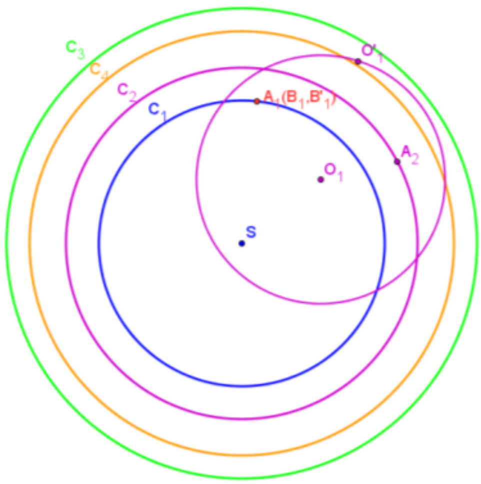
（一）作法：以 $n=4$ 為例

1.給定平面上四個同心圓
並命名C_1 、C_2 、C_3 、C_4
並在C_1取一點A_1



2.作出一個正方形作輔助
在C_2取一點A_2
並依據外心對兩點的相對位置作出O'_1
同理以A_1、S 為兩點，作出O_1
以O_1為圓心，過O'_1作一圓R_1





3.同理

在C_3、 C_4取一點A_3、 A_4

並依據外心對兩點的相對位置作

出O'_2、 O'_3，同理，

以A_2、S 為兩點，作出O_2

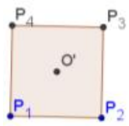
以A_3、S 為兩點，作出O_3

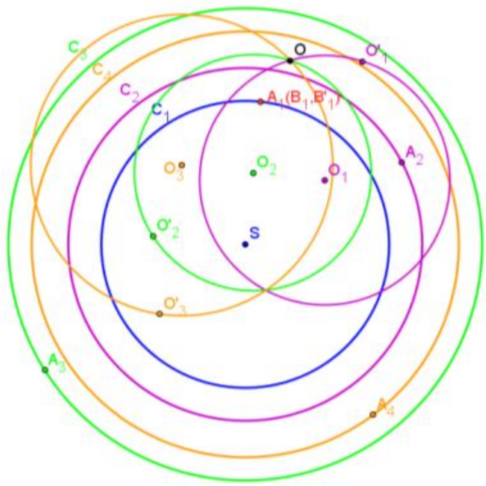
以O_2、O_3為圓心，過O'_2、O'_3作一

圓R_2、R_3

並取

R_1、R_2、R_3 共同交點即為外心





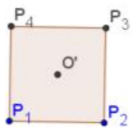
4.以O 為圓心過A_1作圓

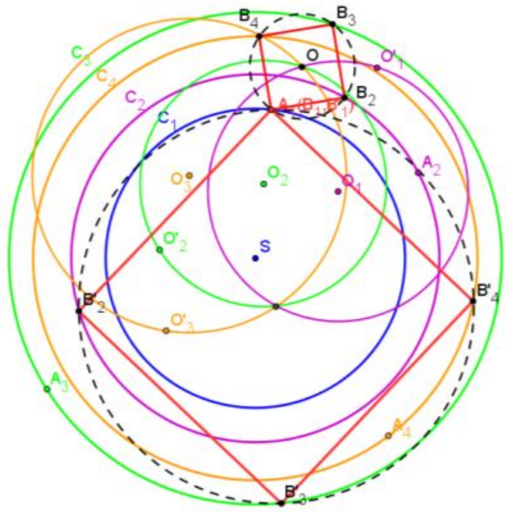
取圓與同心圓的交點

得正方形$B_1B_2B_3B_4$

(若有另一交點，則得另一正方形

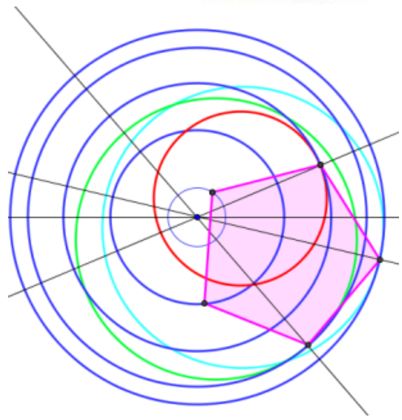
正方形$B'_1B'_2B'_3B'_4$)





※註：(當$n=5$的情形)

恰有一組無限多解時的狀況



(二)證明：

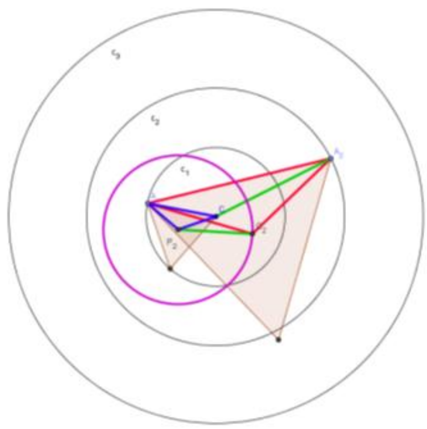
$\because \angle A_2A_1O_2 = \angle CA_1P_2$

$\therefore \angle A_2A_1C = \angle O_2A_1P_2$

且 $\Delta CA_1P_2 \sim \Delta A_2A_1O_2 \Rightarrow \dfrac{A_2A_1}{CA_1} = \dfrac{A_1O_2}{A_1P_2}$

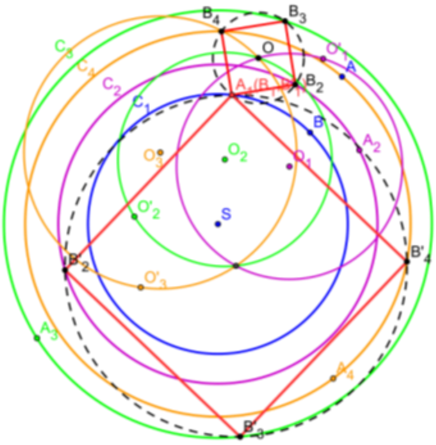
$\therefore \Delta A_2A_1C \sim \Delta O_2A_1P_2$

而動點 A_2、O_2 為 C、P_2 為圓心的動點

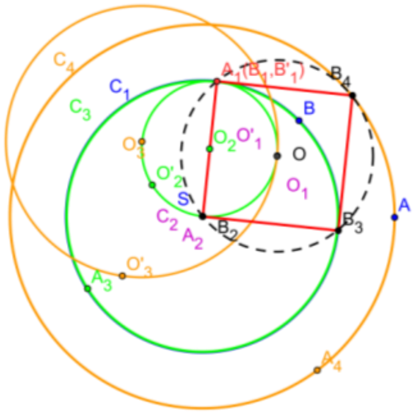


（三）存在性探討：

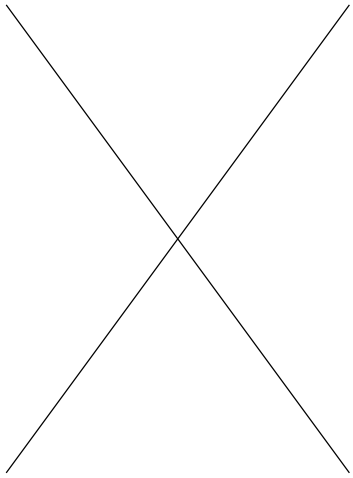
兩組無限多解



一組無限多解



無解



（四）同心圓上正 n 邊形存在之半徑關係

端點與圓心距裡最短的兩個逆時針命名 D_1、D_2其餘逆時針依序命名圓心與 D_k(k=3,4,…,n)的距離即為 r_k

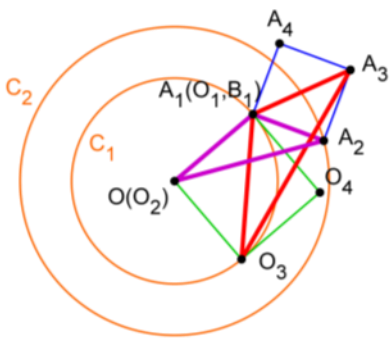
則：$r_k = r_1 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left|\sin\frac{(k-2)\pi}{n}\right| + r_2 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left|\sin\frac{(k-1)\pi}{n}\right|$

而可推得：

$$
\begin{aligned}
& r_k + r_{k+2} \\
&= r_1 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(\sin\frac{(k)\pi}{n} + \sin\frac{(k-2)\pi}{n}\right) + r_2 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(\sin\frac{(k+1)\pi}{n} + \sin\frac{(k-1)\pi}{n}\right) \\
&= r_1 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(2\sin\frac{(k-1)\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right) + r_2 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right) \\
&= 2\cos\frac{\pi}{n}\left\{r_1 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(\sin\frac{(k-1)\pi}{n}\right) + r_2 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\right\} = 2\cos\frac{\pi}{n} r_{k+1}
\end{aligned}
$$

即 $r_{k+2} = 2\cos\frac{\pi}{n} r_{k+1} - r_k, (k \geq 3)$

（五）同心圓半徑長度證明（舉正方形為例）



令 $\overline{A_1A_2}$ 長度為 r_2

$\overline{O_1O_2} : \overline{A_1A_2} = \overline{O_1O_k} : \overline{A_1A_k} (k = 3,4)$

$\angle O_2O_1A_2 = \angle O_kO_1A_k \therefore \Delta O_2O_1A_2 \cong \Delta O_kO_1A_k$

$\overline{O_2A_2} = \overline{A_1A_2} \therefore \overline{O_kA_k} = \overline{A_1A_k}$

又所求為恰有一種情形的情況

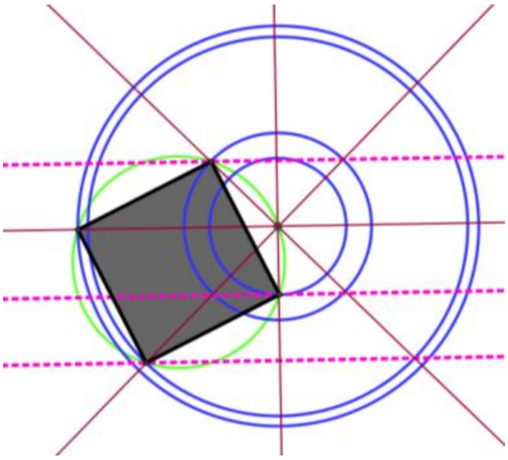
故圓 C_k 需與 A_k 所形成之軌跡相切

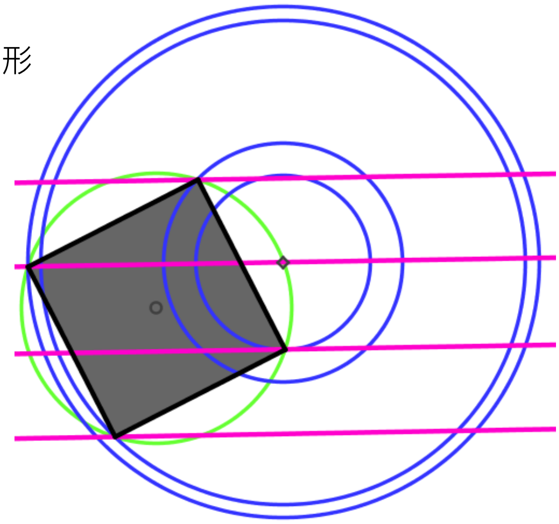
故 C_k 之半徑 $r_k = \overline{O_kO} + \overline{O_kA_k} = \overline{O_kO} + \overline{A_1A_k}$

$r_k = r_1 \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \left|\sin\frac{(k-2)\pi}{4}\right| + r_2 \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \left|\sin\frac{(k-1)\pi}{4}\right|$

（六）探討同心圓與平行線的之間相互關係

觀察同心圓跟平行線的恰有一組無限多解時的圖形

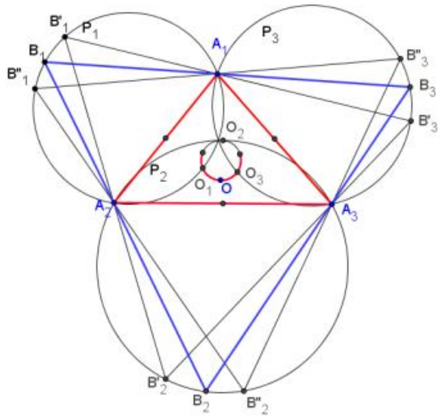




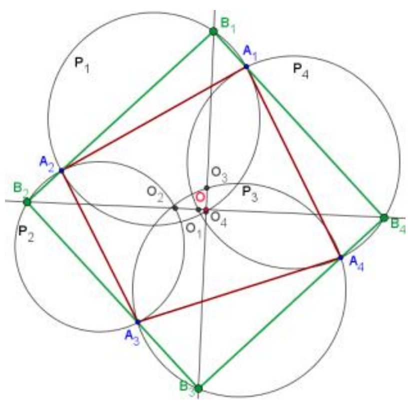
為了讓平行線與同心圓兜上關係，我們先以正方形的外心為圓心作出其外接圓，然後取任一個同心圓與平行線的交點作同心圓的圓心，過正方形的四個頂點即可作出所求的同心圓。

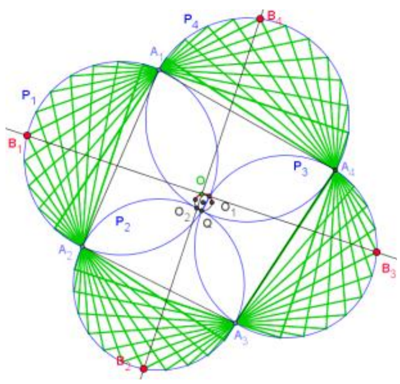
伍、　研究結果

一、平面上不共線的三點，可以存在正三角形，使得各線上恰含有前述三點中的一點，但此三角形有無限多個。詳細內容參見 p.2。

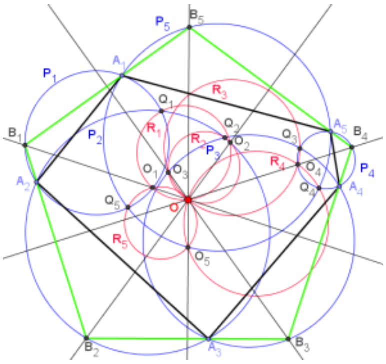


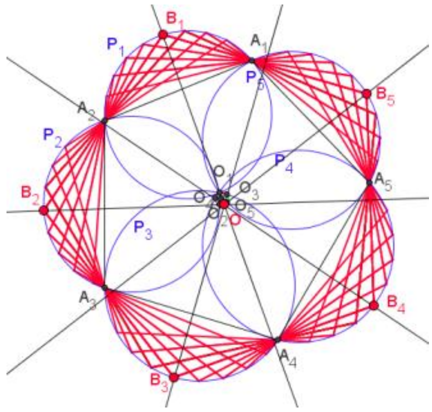
二、平面上任三點不共線的四點，使得各線上恰含有前述四點中的一點，一定存在正方形，可分為恰有一解、無限多解。詳細內容參見 p.4。



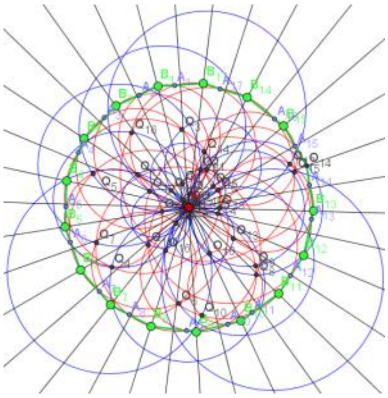


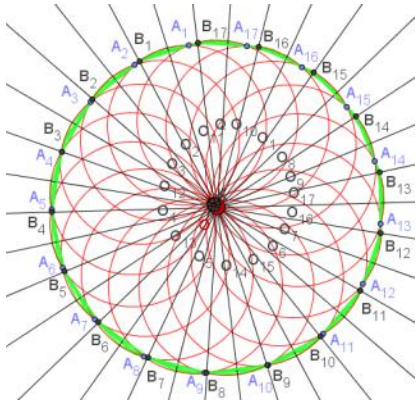
三、平面上任三點不共線的五點，使得各線上恰含有前述五點中的一點，不一定存在正五邊形，可分為恰有一解、無解、無限多解。詳細內容參見 p.6。



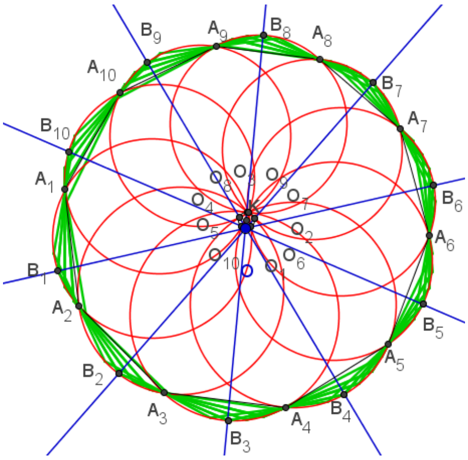


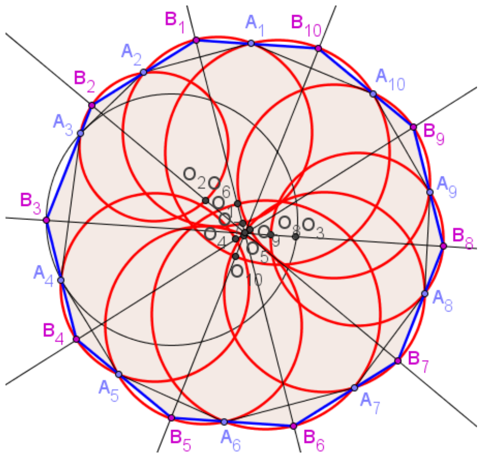
四、平面上任三點不共線的奇數點，使得各線上恰含有前述 n 點中的一點，不一定存在正奇邊形，可分為恰有一解、無解、無限多解。詳細內容參見 p.11。



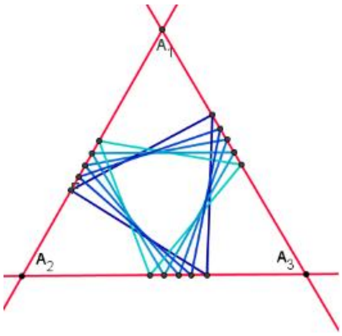


五、平面上任三點不共線的偶數點，使得各線上恰含有前述 n 點中的一點，不一定存在正偶邊形，可分為恰有一解、無解、無限多解。詳細內容參見 p.12。

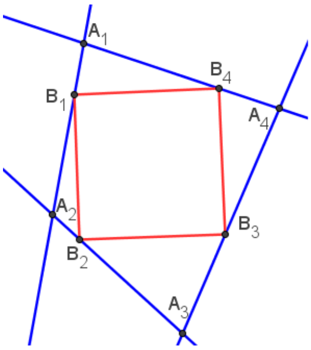


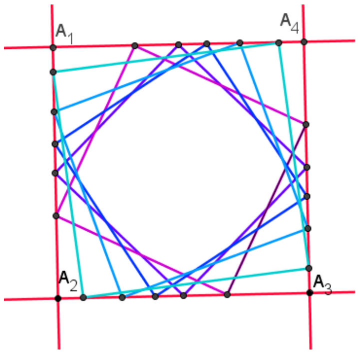


六、平面上任兩線不平行的不共點三線，使得各頂點恰在前述三線中的一線，必存在正三角形，但此三角形有無限多個。詳細內容參見 p.13。

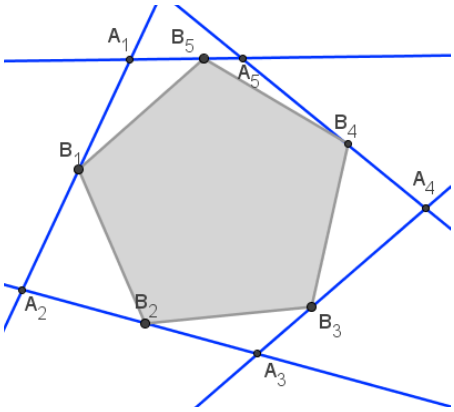


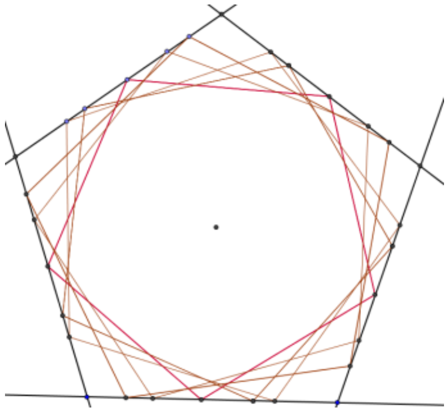
七、平面上任兩線不平行、任三線不共點的四線，使得各頂點恰在前述四線中的一線，一定存在正方形，分為無限多解、恰有一解。詳細內容參見 p.14。



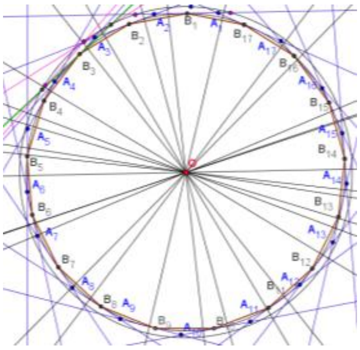


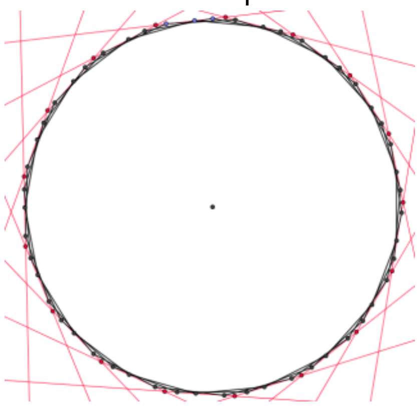
八、平面上任兩線不平行、任三線不共點的五線，使得各頂點恰在前述五線中的一線，不一定存在正五邊形，分為無解、無限多解、恰有一解。詳細內容參見 p.15。



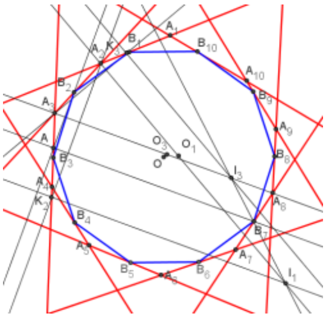


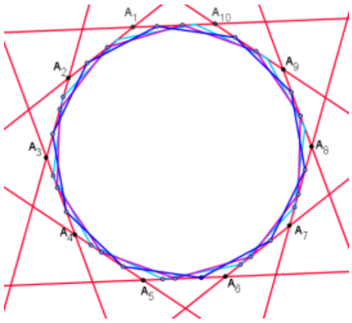
九、平面上任兩線不平行、任三線不共點的奇數條線，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線，不一定存在正奇邊形，分為無解、無限多解、恰有一解。詳細內容參見 p.19。



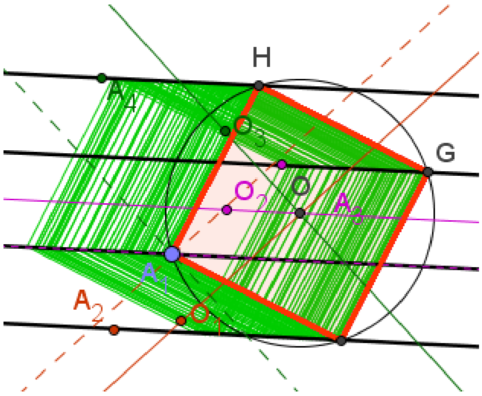


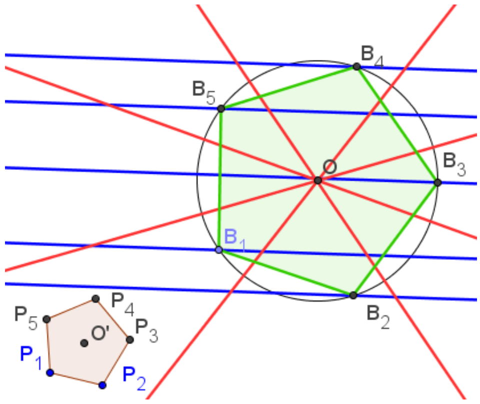
十、平面上任兩線不平行、任三線不共點的偶數條線，不一定存在正偶邊形，分為無解、無限多解、恰有一解。詳細內容參見 p.19。



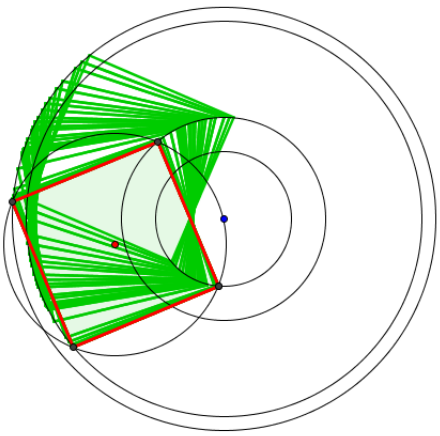


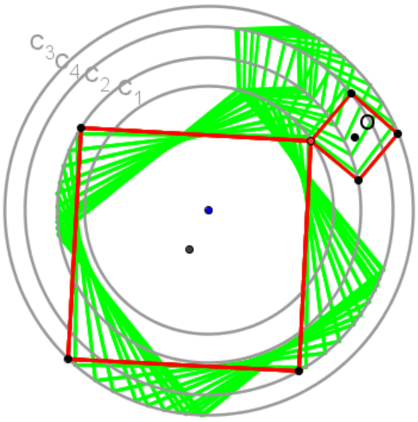
十一、平面上 n 條平行線，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線，不一定存在正 n 邊形，分為無解、無限多解。詳細內容參見 p.21。

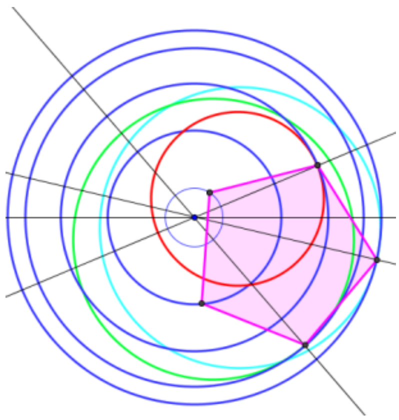




十二、平面上 n 個同心圓，使得各頂點恰在前述 n 圓中的一圓，不一定存在正 n 邊形，可分為無解、兩組無限多解，一組無限多解。詳細內容參見 p.23。

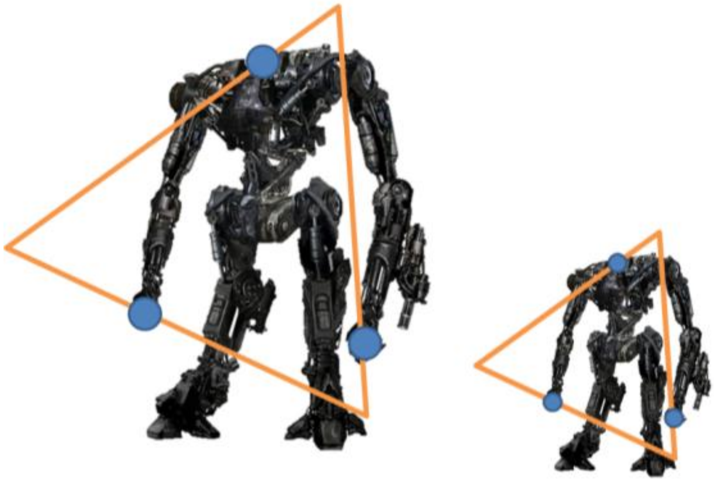






陸、 應用

在工業設計模型上，常常需要放大或縮小特定的部分，此時可以用我們的研究結果，在特定的那些點上，構造出正多邊形，因為正多邊形在縮放時能夠維持固定比例，進而達到精準的縮放，因此模型縮放所造成的誤差也就能夠縮小。



柒、 參考資料

1.趙文敏(民 75) 幾何學概論 台北市 九章出版社

2.許志農 高中數學一～四冊 龍騰出版社

3.Coxeter , H.S.M.(1969). Introduction to Geometry , John Wiley & Sons , New York

4.Howard Eves (1963). A Survey of Geometry , Volume Boston , Allyn and Bacon

5.Tao , Terence (2006). Solving Mathematical problems : A personal porspective oxford , New York , Oxford University Press

6.Zeitz , P.(2007). The Art and Craft of Problem Solving , John Wiley & Sons

捌、 附錄

一、證明

（一）平面上不共線的三點，可存在正三角形，使得各線上恰含有前述三點中的一點的證明：

1. **正三角形的頂點 B_1 會落在 $\Delta A_1O_1A_2$ 的外接圓上**

假設 B_1 不落在 P_1 上

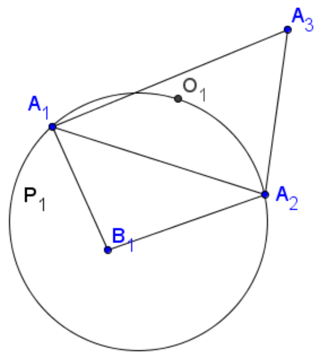
已知 $\angle A_1O_1A_2 = 120°$

又知道 $\angle A_1B_1A_2 = 60°$

矛盾

故得知 B_1 落在 P_1 上，得證。

而 B_2 、 B_3 同理可得



2. **P_i 上的點必能通過 A_i 構造出正三角形**

我們發現在不失一般性下，有些東西可以被固定住，所以只要證明會變動的東西是對的，即可完成此證明，於是我們決定用同一法。

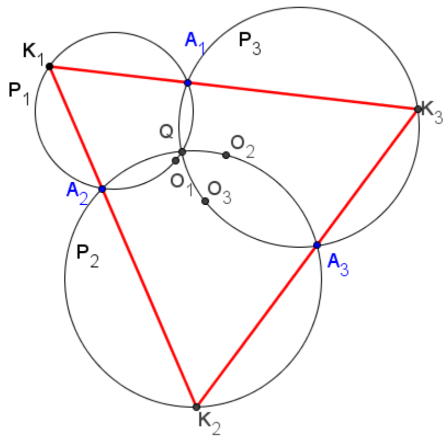
在 P_1 上任取一點 K_1 ，取 $K_2 \in P_2$ 使得 K_1—A_2—K_2；同理，做出 K_3 。

而 K_4 則為 $\overrightarrow{K_1A_1}$ 交於 P_3 的點。

由證明 1 得知：$\angle A_iK_iA_{i+1} = 60°(i = 1,2,3)$

又 $\angle A_3K_3A_1 = 3(60°) - 2(60°) \ = 60° = \angle A_3K_4A_1$

得到 $K_3 = K_4$ 。



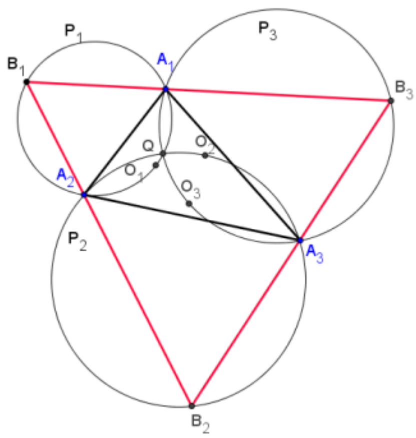
3. **三角形 P_1 、 P_2 、 P_3 有共同交點**

假設 P_1 、 P_2 所交異於 A_2 的點為 Q

則 $\angle A_1QA_2 = \angle A_2QA_3 = 120°$

則 $\angle A_3QA_1 = 120°$ ，

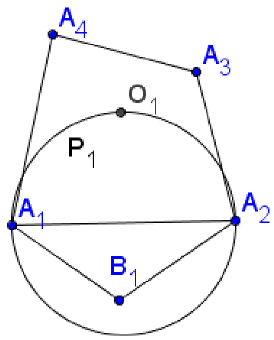
故 $Q \in P_3$ 即 P_1 、 P_2 、 P_3 共點。



由 1 、 2 、 3 可得：過平面上任意三點，必可作出無限多個正三角形。

（二）平面上任三點不共線的四點，可存在正方形，使得各線上恰含有前述四點中的一點的證明：

1.**正方形的頂點 B_i 會落在 $\Delta A_iO_iA_{i+1}$ 的外接圓上**



假設 B_1 不落在 P_1 上

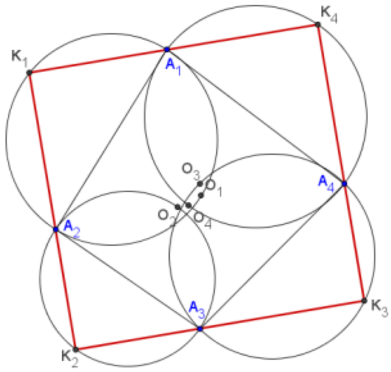
已知 $\angle A_1O_1A_2=90°$ 又知道 $\angle A_1B_1A_2=90°$ 矛盾

故得知 B_1 落在 P_1 上，得證。

而 B_2 、 B_3 、 B_4 同理可得

2.**P_i 上的點必能通過 A_i 構造出矩形**

我們發現在不失一般性下，有些東西可以被固定住，所以只要證明會變動的東西是對的，即可完成此證明，於是我們決定用同一法。



在 P_1 上任取一點 K_1 ，取 $K_2\in P_2$ 使得 $K_1—A_2—K_2$ ；同理，做出 K_3 、 K_4 。

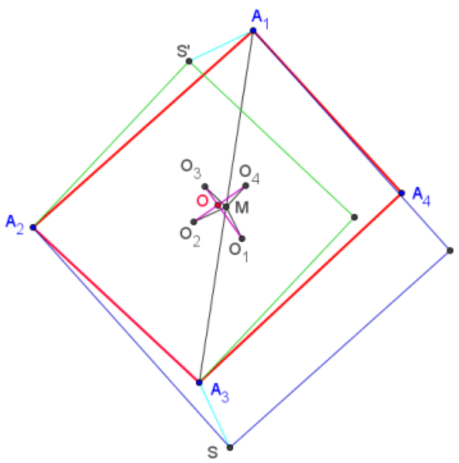
而 K_5 則為 $\overleftrightarrow{K_1A_1}$ 交於 P_4 的點。

由證明 1 得知： $\angle A_iK_iA_{i+1}=90°(i=1,2,\cdots,4)$

又知道 $\angle A_4K_4A_1=4(90°)-3(90°)$

$=90°=\angle A_4K_5A_1$ 。得到 $K_4=K_5$ 。

3.**證明 $\overleftrightarrow{O_1O_3}\perp\overleftrightarrow{O_2O_4}$**



$\Delta A_2SA_3\cong\Delta A_2A_1S'\ (SAS)$

$\therefore\ \overline{A_1S'}=\overline{SA_3}$ 且 $\overline{A_2A_3}\perp\overline{A_2S'}\ \therefore\ \overline{SA_3}\perp\overline{A_1S'}$

又 $\overline{O_1M}=\dfrac{1}{2}\overline{SA_3}$ 、 $\overline{O_2M}=\dfrac{1}{2}\overline{S'A_1}$

$\therefore\ \overline{SA_3}=\overline{A_1S'}$ 且 $\overline{SA_3}\perp\overline{A_1S'}$

再連 $\overleftrightarrow{O_1O_3}$ 、 $\overleftrightarrow{O_2O_4}$ ， $\angle O_4MO_2=\angle O_1MO_3$

$\therefore\ \Delta O_4MO_2\cong\Delta O_3MO_1(SAS)$

故 $\overline{MO_3}\perp\overline{MO_4}$ ，得知 $\overline{O_1O_3}\perp\overline{O_2O_4}$ 。

所以由上述證明可得：四邊形 $K_1K_2K_3K_4$ 必為矩形，又因為 $\overleftrightarrow{K_1K_3}\perp\overleftrightarrow{K_2K_4}$ ，故四邊形 $K_1K_2K_3K_4$ 必為正方形。

（三）平面上任三點不共線的五點，可存在正五邊形，使得各線上恰含有前述五點中的一點的證明：

1.正五邊形的頂點 B_1 會落在 $\Delta A_1O_1A_2$ 的外接圓上

假設 B_1 不落在 P_1 上

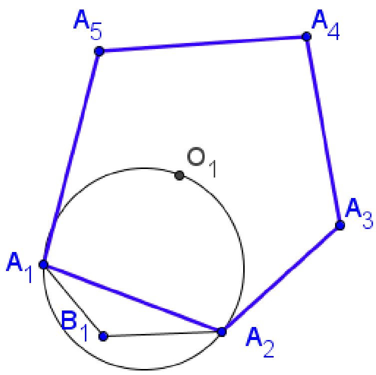
已知 $\angle A_1O_1A_2 = 108°$

又知道 $\angle A_1B_1A_2 = 72°$

矛盾

故得知 B_1 落在 P_1 上，得證。

而 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 同理可得



2.P_i 上的點必能通過 A_i 構造出等角五邊形

在 P_1 上任取一點 K_1 ，取 $K_2 \in P_2$ 使得

K_1—A_2—K_2 ；

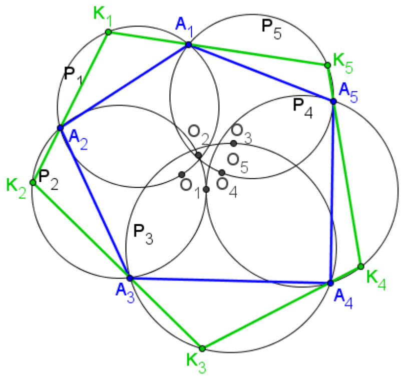
同理，做出 K_3 、 K_4 、 K_5 。

而 K_6 則為 $\overrightarrow{K_1A_1}$ 交於 P_5 的點。

由證明 1 得知： $\angle A_iK_iA_{i+1} = 72°(i = 1,2,\cdots,4)$

又知道 $\angle A_5K_5A_1 = 5(72°) - 4(72°)$

$= 72° = \angle A_5K_6A_1$ 得到 $K_5 = K_6$ 。



（四）平面上任三點不共線的奇數點，可存在正 n 邊形，使得各線上恰含有前述 n 點中的一點的證明：

1.正 n 邊形的頂點 B_i 會落在 $\Delta A_iO_iA_{i+1}$ 的外接圓上

假設 B_i 不落在 P_i 上

已知 $\angle A_iO_iA_{i+1} = \dfrac{360°}{n}$ 又知道 $\angle A_iB_iA_{i+1} = 180° - \dfrac{360°}{n}$

與假設矛盾

故得知 B_i 落在 P_i 上，得證。

2.P_i 上的點必能通過 A_i 構造出等角 n 邊形

在 P_1 上任取一點 K_1，取 $K_2 \in P_2$ 使得 $K_1 - A_2 - K_2$；同理作出 $K_i (i=1,2,3,\cdots,n)$。

而 K_{n+1} 則為 $\overrightarrow{K_1A_1}$ 交於 P_n 的點。

由證明 1 得知：$\angle A_i K_i A_{i+1} = 180° - \dfrac{360°}{n} (i=1,2,3,\cdots,n-1)$

又 $\angle A_n K_n A_1 = n\left(180° - \dfrac{360°}{n}\right) - (n-1)\left(180° - \dfrac{360°}{n}\right)$

$= 180° - \dfrac{360°}{n} = \angle A_n K_{n+1} A_1$

得到 $K_n = K_{n+1}$，即 P_i 上的任意點必通過 A_i 構造出等角 n 邊形。

3.**證明 O、O_1、B_1 共線**

取 $O_i' = O$ 為縮放中心，將 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 以為邊做出的正 n 邊形放大至其頂點皆在 $B_1 B_2 \ldots B_n$ 上

得到 $\Delta A_i H_i O_i \sim \Delta A_i' H_i' O_i'$，則 $\Delta A_i B_i O_i \sim \Delta A_i' B_i O_i'$ 即 $\overleftrightarrow{O_i' B_i} // \overleftrightarrow{O_i B_i}$

即可得知 O、O_1、B_1 共線

4.**O 必落在 R_i 上**

(1) O、O_i 在 $\overleftrightarrow{O_i O_{i+1}}$ 異側

設 O 不在 R_i 上，但 $\angle B_i O B_{i+1} = \dfrac{360°}{n}$，即 $\angle O_i O O_{i+1} = 180° - \dfrac{360°}{n}$

又 $\angle O_i Q_i O_{i+1} = \angle O_i Q_i A_{i+1} - \angle O_{i+1} Q_i A_{i+1}$

$= (180° - \angle O_i A_i A_{i+1}) - \angle O_{i+1} A_{i+2} A_{i+1} = \dfrac{360°}{n}$

矛盾，故得知 O 在 R_i 上

(2) O、O_i 在 $\overleftrightarrow{O_i O_{i+1}}$ 同側

設 O 不在 R_i 上，但 $\angle B_i O B_{i+1} = \dfrac{360°}{n}$

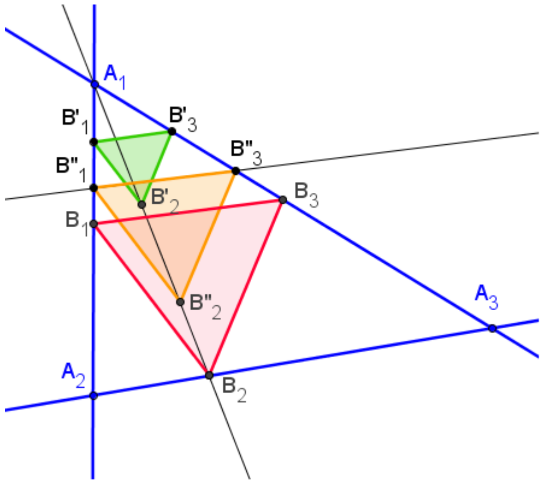
又 $\angle O_i Q_i O_{i+1} = \angle O_i Q_i A_{i+1} - \angle O_{i+1} Q_i A_{i+1}$

$= (180° - \angle O_i A_i A_{i+1}) - \angle O_{i+1} A_{i+2} A_{i+1} = \dfrac{360°}{n}$

矛盾，故得知 O 在 R_i 上。

（五）**平面上任兩線不平行的不共點三線，可存在正三角形，使得各頂點恰在前述三線中的**

一線的證明：

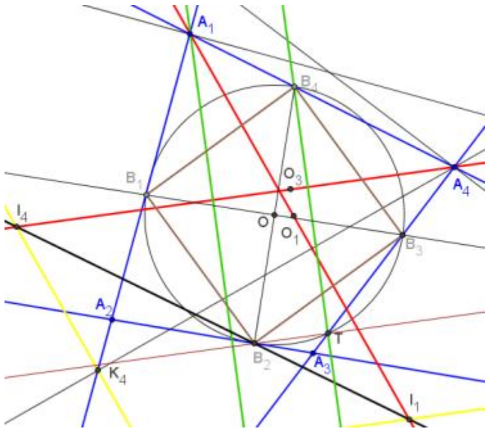


$\because \overline{B_1B_2} \,//\, \overline{B'_1B'_2}$ 、 $\overline{B_2B_3} \,//\, \overline{B'_2B'_3}$

$\therefore \Delta B_1B_2B_3 \sim \Delta B'_1B'_2B'_3\,(AA)$

故 $\Delta B_1B_2B_3$ 為正三角形

（六）探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的四線，可存在正方形，使得各頂點恰在前述四線中的一線的證明：



以 $\overline{B_2B_4}$ 為直徑畫圓交 $\overline{A_3A_4}$ 得 B_3 、 T

$\overleftrightarrow{TB_2} \,//\, \overleftrightarrow{A_4O_3}$ $\therefore \angle B_2TA_3 = 45°$ 得知

$\angle A_4TB_4 = 45°$

故 $\angle B_4OB_3 = 90°$ 故 $\overline{B_2B_4}$ 的中垂線會交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$

於 B_3

同理可得 $\overline{B_2B_4}$ 的中垂線亦交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 B_1

故四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為正方形

（七）平面上任兩線不平行、任三線不共點的五線，可存在正五邊形，使得各頂點恰在前述

五線中的一線的證明：

(1)

Q 為 $\overleftrightarrow{I_1I_5}$ 上的動點

設 $\overline{I_5Q}$ ： $\overline{QI_1}=m$ ： n

$\because \overleftrightarrow{I_5A_5}//\overleftrightarrow{QR}//\overleftrightarrow{I_1K_1}$

$\therefore \overline{RK_1}$ ： $\overline{RK_5}=n$ ： m

又 $\overleftrightarrow{A_1K_1}//\overleftrightarrow{RS}$ $\therefore \overline{A_5S}$ ： $\overline{SA_1}=m$ ： n

一開始 $\overline{AB}//\overline{CD}$

且 $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{CF}:\overline{DF}$ =m:n

$\overline{AC}$ 中點 M_1 ， $\overline{BD}$ 中點 M_2

則 $\overline{EF}$ 的中點 $M\in\overline{M_1M_2}$

今作 $\overline{C'D}$ 且 $M'\in\overline{C'D}$

使得 $\overline{DF'}:\overline{F'C'}$ =n:m

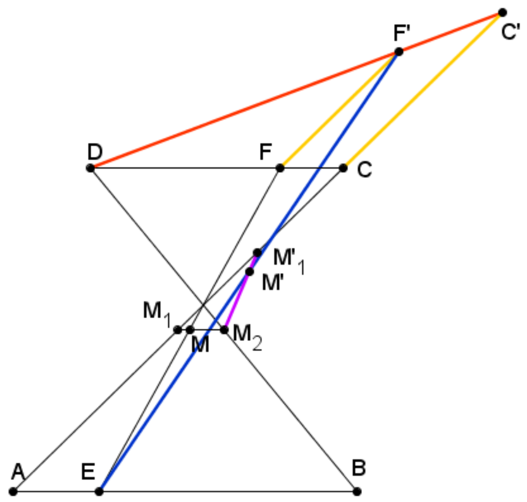
且 $\overline{AC'}$ 中點為 M_1' ， $\overline{EF'}$ 中點 M_2'

則得知 $\overline{MM'}//\overline{FF'}$

即 $\overline{MM'}//\overline{AC'}$

故 $\overline{MM'}$ 為 $\Delta M_2M_1M_1'$ 的中線

即 M' 必落在 $\overline{M_1'M_2}$ 上



(八) **平面上任兩線不平行、任三線不共點的奇數條線，可存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線的證明**：

1. **$\overline{QS}$ 中點為正 n 邊形的三頂點在三線上的外心**

Q 為 $\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 上的動點， $\overleftrightarrow{QR}//\overleftrightarrow{I_iA_i}$ $\therefore \angle QRK_{i+1}=(90-\frac{180}{n})°$ 得知 $\angle SRA_i=\frac{180°}{n}$

$\angle SMR'=2\angle SRA_i=\frac{360°}{n}$ 。同理可得 $\angle SMP'=\frac{360°}{n}$

故 M 為正 n 邊形三頂點在三線上的外心

2.該外心軌跡為 $\overleftrightarrow{M_iM_{i+1}}$

(1)

Q 為 $\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 上的動點，設 $\overline{I_iQ}$ ： $\overline{QI_{i+1}}=m$ ： n

$\because \overleftrightarrow{I_iA_i}//\overleftrightarrow{QR}//\overleftrightarrow{I_{i+1}K_{i+1}}$ $\therefore \overline{RK_{i+1}}$ ： $\overline{RA_i}=n$ ： m

又 $\overleftrightarrow{A_{i+1}K_{i+1}}//\overleftrightarrow{RS}$ $\therefore \overline{A_iS}$ ： $\overline{SA_{i+1}}=m$ ： n

(2)

一開始 $\overline{AB}//\overline{CD}$

且 $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{CF}:\overline{DF}$ =m:n

$\overline{AC}$ 中點 M_1 ， $\overline{BD}$ 中點 M_2

則 $\overline{EF}$ 的中點 $M\in\overline{M_1M_2}$

今作 $\overline{C'D}$ 且 $M^{'}\in\overline{C'D}$ 使得 $\overline{DF'}:\overline{F'C'}$=n:m

且 $\overline{AC'}$ 中點為 $M_1^{'}$ ， $\overline{EF'}$ 中點 $M_2^{'}$

則得知 $\overline{MM'}//\overline{FF'}$ 即 $\overline{MM'}//\overline{AC'}$

故 $\overline{MM'}$ 為 $\Delta M_2M_1M_1^{'}$ 的中線

即 M' 必落在 $\overline{M_1^{'}M_2}$ 上

3. 端點的軌跡

$\because \angle R_1RN=(180-\dfrac{360}{n})^\circ$ $\therefore \angle R_1ON=\dfrac{720^\circ}{n}$ 又 $\overline{R_1O}=\overline{NO}$

$\therefore \overline{R_1O}$ 逆時針旋轉 $\dfrac{720^\circ}{n}$ 可得 $\overline{NO}$ 且 R_1 的軌跡為一直線

$\therefore$ N 的軌跡為一直線。

（九）**平面上任兩線不平行、任三線不共點的偶數條線，可存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線的證明**：

1. **$\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_{\frac{n}{2}+i}A_{\frac{n}{2}+i+1}}$ 為頂點**

B_i 、 $B_{\frac{n}{2}+i}$ 對稱於 O

又 $\overline{A_iI_i}$ 、 $\overline{A_{i+1}I_{i+1}}$ 中點 M_i 、 M_{i+1}

又 B_i 的軌跡是 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ ， O 的軌跡是 $\overleftrightarrow{M_iM_{i+1}}$ ，

$\therefore B_{\frac{n}{2}+i}$ 的軌跡是 $\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 又在 $\overleftrightarrow{A_{\frac{n}{2}+i}A_{\frac{n}{2}+i+1}}$

故 $\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_{\frac{n}{2}+i}A_{\frac{n}{2}+i+1}}$ 為端點