

第二十一屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA21-146

作品名稱：二維堆積顆粒體之轉動現象探討

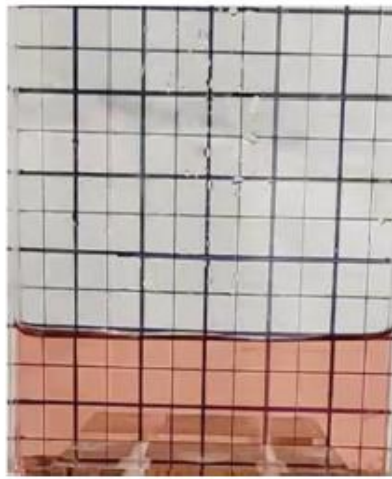
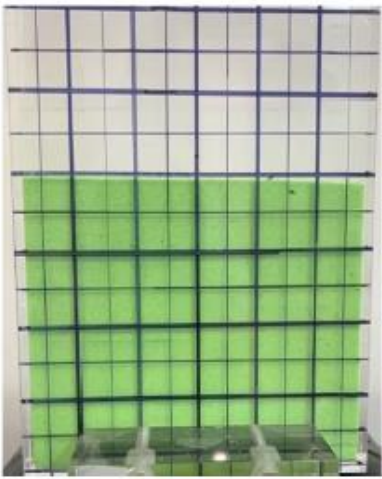
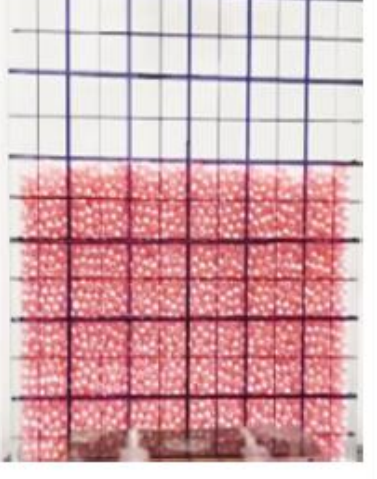
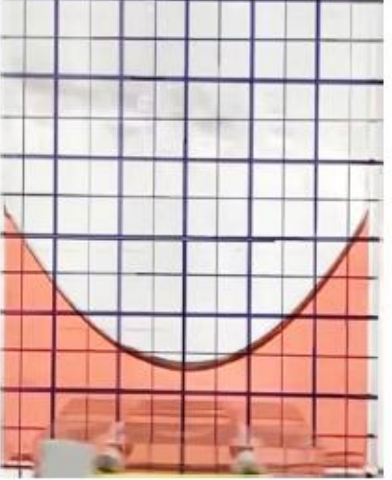
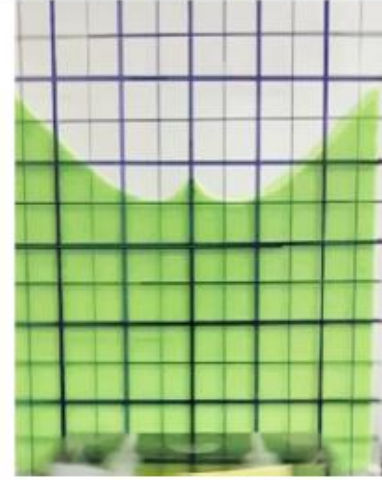
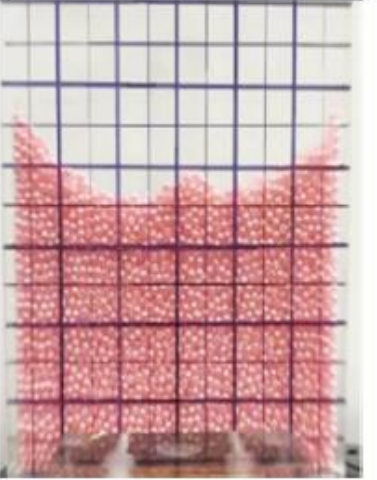
姓名：陳昱睿

關鍵字：顆粒體、轉動、堆積

研究題目：二維堆積顆粒體之轉動現象探討

一、研究動機

老師在課堂中示範液體在扁平的長方形容器中轉動，液體表面會由水平凹陷形成拋物面如圖 1-1a、b 所示。因為實驗室中恰好有探究課程用到的細沙與圓珠，我便好奇那把細沙或圓珠倒入這個扁平的長方形容器中轉動會有甚麼現象發生呢？經過實驗發現容器中的細沙在 500 r.p.m 轉速的轉動前、後會呈現如圖 1-2 上、下的分布；而塑膠珠在 500 r.p.m 轉速的轉動前、後會呈現如圖 1-3 上、下的情形。圖 1-2 顯示轉動時，表層離轉軸較遠的細沙會沿徑向往外側移動堆積，使原處表面下凹成曲面，但靠近轉軸附近的細沙似乎停留在原位置沒有移動；而圓珠(粒徑 3mm)在轉動下的情形與細沙類似。液體和顆粒體(細沙、塑膠珠)在轉動下，有點像又不太一樣的現象讓我感到很有趣，便想做進一步的探討。



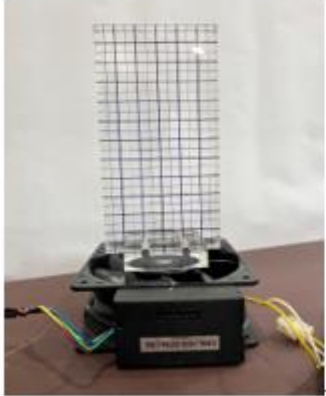

		
		
圖 1-1 扁平長方形容器中液體 200 r.p.m 轉速轉動前、後(上、下圖)之照片	圖 1-2 扁平長方形容器中細沙 500 r.p.m 轉速轉動前、後(上、下圖)之堆積情形	圖 1-3 扁平長方形容器中圓珠 500 r.p.m 轉速轉動前、後(上、下圖)之堆積情形

二、研究目的

- (一)、固定顆粒體尺寸、種類，改變轉速，觀察不同轉速下顆粒體二維堆積之轉動情形並加以分析。
- (二)、固定轉速、顆粒體尺寸，改變顆粒體種類，觀察不同種類顆粒體在二維轉動之分布情形並加以分析。
- (三)、固定轉速、顆粒體種類，改變顆粒體尺寸觀察不同種類顆粒體在二維轉動之分布情形並加以分析。
- (四)、將相同數量 3mm 鋼珠與 3mm 塑膠珠混合並加以轉動，與純 3mm 鋼珠、純 3mm 塑膠珠之轉動堆積情形加以比較分析。

三、研究過程

(一)、實驗器材

	
<p>圖 3-1 不同尺寸之顆粒體</p>	<p>圖 3-2 變頻器與轉動平台</p>
	
<p>圖 3-3 扁平長方形容器 (容積尺寸：25cm*11.4cm*10 mm)</p>	<p>3-4 轉速測量計</p>

(二)、原理探討

1、實驗原理[1]

(1)、液體轉動之拋物面：

當裝有液體的扁平容器以中心軸線作等角速度轉動時，液體中的任何質點均會一起作等速率圓周運動，此時液體的自由表面會形成拋物面，以下為相關的理論分析。

裝有液體的扁平長方形容器以通過容器之中心線為轉軸 z ，以 ω 之等角速度轉動，則液面上一質量 m 的質點距轉軸為 r ，在加速座標系統中，會受到重力 mg ，鄰近液體給其之正向作用力 F 與假想力 $m\omega^2 r$ ，其所受的合力為 0，如圖 3-5 所示。

在此加速座標中，相關的受力方程式如下所示：

$$r \text{ 方向：} F \sin\theta = m\omega^2 r \quad \text{-----}(3-1)$$

$$z \text{ 方向：} F \cos\theta = mg \quad \text{-----}(3-2)$$

(4-1)、(4-2) 2 式相除可得 $\tan\theta = \frac{r\omega^2}{g}$ -----(3-3)，而 $\tan\theta = \frac{dz}{dr}$

整理可得 $gdz = r\omega^2 dr$ ，將等號兩邊分別積分可得

$$\int gdz = \int r\omega^2 dr$$

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C \quad \text{-----}(3-4)$$

r 為拋物面上質點到中心軸的長度， z 為該點的水深， R 為容器半寬， H 為靜止時的水深， t 為容器內之厚度。

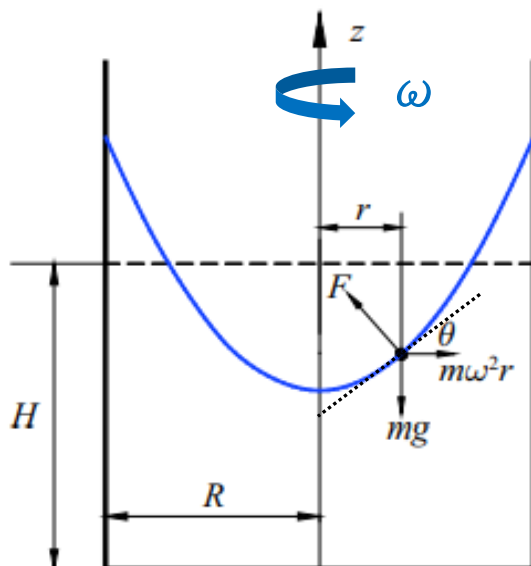


圖 3-5 扁平長方容器內液體受力之分析圖[1]

在轉動狀況下的容器中液體的體積 V 可以表示為(3-5)式，且與靜止時體積相等

$$V = \int_{-R}^R t z dr = \int_{-R}^R t \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + C \right) dr = 2RHt \quad \text{-----}(3-5)$$

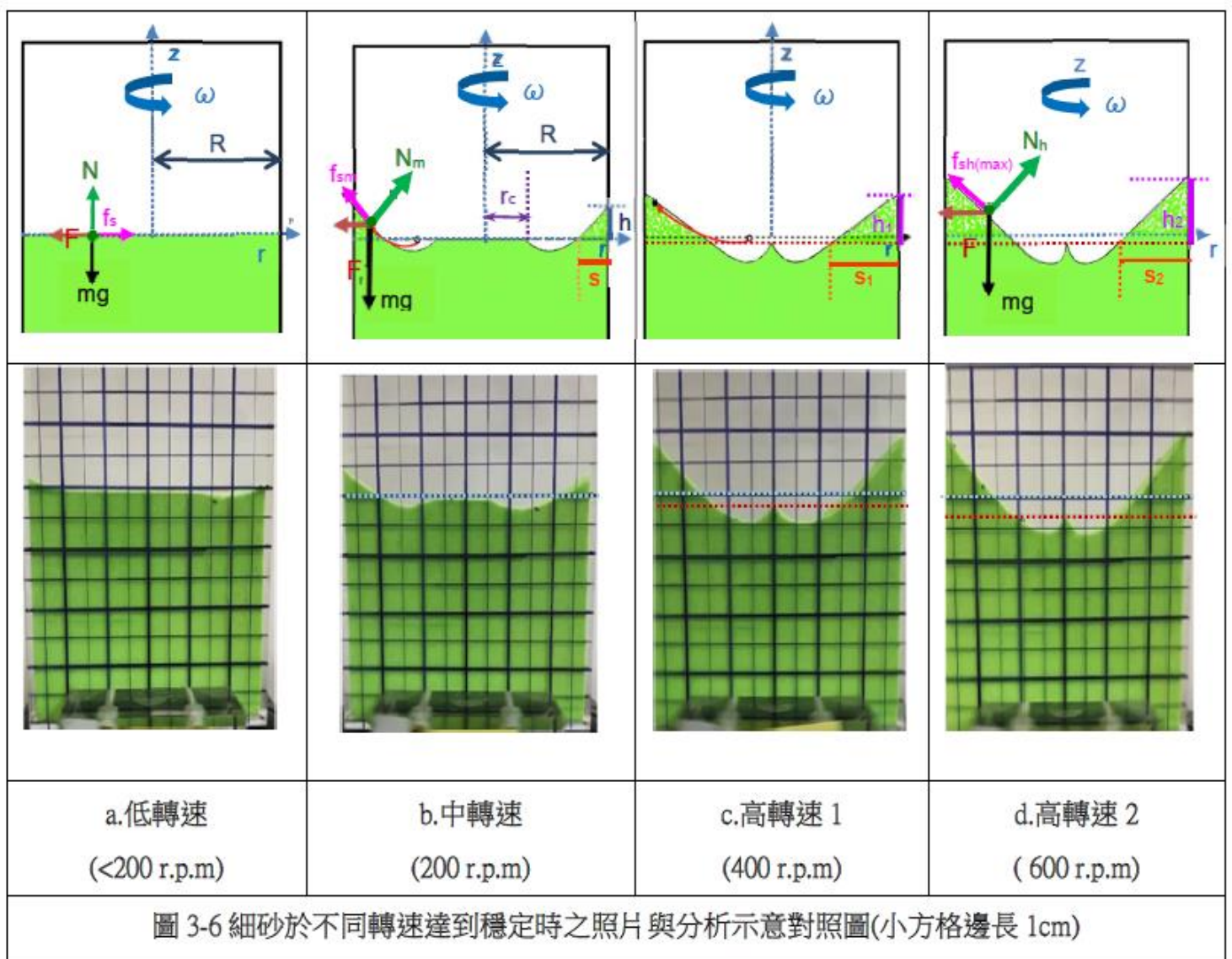
整理(4-5)式可得 $C = H - \frac{\omega^2 R^2}{6g}$ -----(3-6)

帶入(4-4)式可得 $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + H - \frac{\omega^2 R^2}{6g}$ -----(3-7)

故旋轉液面呈拋物面之軌跡。

(2)、顆粒體二維堆積轉動後之特殊分布[2-4]：

顆粒體的理論探討涉及統計力學和多體物理，其複雜性遠超過我們能力所及。目前僅能就所觀察到的現象做一些定性的分析探討。下面為我們針對堆積高度 8cm 的細沙在 4 種不同的轉速下形成的堆積情形所做的探討。比照裝有液體的情形，仍以通過容器之中心線為轉軸 z，顆粒體以 ω 之等角速度轉動，R 為容器半寬，t 為容器內部厚度。表面上一質量 m 的顆粒體距轉軸為 r，在加速座標系統中所受之重力 mg，離心力 $F = mr\omega^2$ ，最大靜摩擦力為 $f_{s(max)}$ ，靜摩擦力 f_s ，鄰近細沙所形成之正向支持力 N，如圖 3-6 系列所示。



a、低轉速

當轉速偏低時(如圖 3-6 a)，質量 m 之顆粒體在加速座標內所受之離心力 $m\omega^2 r$ 尚未超過其所受之最大靜摩擦力 $f_{s(\max)}$ ，此時顆粒體 m 在 r 方向之假想力 F 與靜摩擦力 f_s 相等，故 r 方向合力為 0，系統中絕大多數的顆粒體保持靜止不動，所以細沙表面之分布與未轉動比較只有些微的變化。

b、中轉速

我們將質量 m 之顆粒體在中轉速下分成幾個區間分別探討其堆積的現象(如圖 3-6 b)。

(i) 平坦區 ($r \leq r_c$)：

此範圍之細沙因靠近轉軸，在加速座標內所受之離心力 $m\omega^2 r$ 尚未超過其所受之最大靜摩擦力，顆粒體保持靜止不動，所以細沙表面之分布仍幾乎保持原有的水平分布。

(ii) 凹陷區 ($r_c < r \leq R-s$)：

此區之細沙 m 因離心力 $m\omega^2 r$ 超過其所受之最大靜摩擦力因而產生滑動往外側移動離開原有位置，造成表面向下塌陷，此區域因轉動移出的細沙會沿原分布之表面往外側移動堆積(如圖 3-6 b 之紅色箭頭所示)。因二維分布之顆粒體總體積守恆，故左右兩側線性堆積區之總面積 sh 應趨近於圖 3-6b 中藍色水平虛線下方 2 凹陷處的面積總和。

(iii) 線性堆積區 ($R-s < r \leq R$)：

經觀察此區在原先靜止之水平線(如圖 3-6 b 之藍色水平虛線)以上因凹陷區之顆粒體移入及擠壓，造成細沙向上堆積，且此堆積區之邊緣呈現直線分布，故定義此區為線性堆積區，如圖 3-6 b 所示。

c、高轉速

(i) 中央尖錐區

高轉速下的細沙分布，中轉速時的中央平坦區消失，被中央尖錐區所取代如圖 3-6 c、d 所示。原堆積表面為水平之顆粒體在高轉速下，於轉軸處形成一尖銳突起，代表此時平坦區之 $r_c \rightarrow 0$ 。另此突起之尖頂較原先水平位置來得低，代表轉軸上有部分細沙移動離開原有位置。依理論轉軸上的細沙顆粒 m 因離心力 $m\omega^2 r = 0$ ，應不可能超過最大靜摩擦力產生移動，但顆粒體的運動行為不能只看單一顆粒體的受力表現，而需把多個顆粒體一起做討論分析，所以轉軸上的顆粒體仍有機會受到鄰近顆粒體的連帶影響造成偏移。因細沙顆粒體仍有最大靜摩擦力需克服的問題，故在中心轉軸處定會形成一小突起，只是轉速越快，此小突起會越小且越尖銳。

比較圖 3-6 c、d 可看出，轉速為 400 r.p.m 時，中間突起點較原先 8 cm 之堆積高度(藍色水平虛線)低約 4.1 mm；轉速 600 r.p.m 時，中間突起尖點較原先 8 cm 堆積處低

約 8.2mm。代表轉速越快，中間突起的尖頂越低陷，此時轉軸附近有更多的細沙由原有位置往兩側移出並往上堆積(如圖 3-6 c 之紅色實線所示)。另比較圖 3-6 c、d 可看出，轉速越高，凹陷區面積越大，代表越多細沙由原位置移出往兩側堆積。

(ii)線性堆積區：

觀察圖 3-6 c、d 可看出，轉速越高，靠近器壁兩側的線性堆積區越陡峭，也就是斜率越高。應當是轉速高時顆粒堆積擠壓越劇烈，造成最大靜摩擦力提高所致。

(3)、微觀下轉動後顆粒體之受力運動分析：

為了解中轉速以上，顆粒往容器兩旁移動的是因為何種力(或何種力的分量)讓顆粒可以有往上(正 z 方向)的移動。實驗中觀察到塑膠珠在轉動擠壓的過程中會有彈蹦的現象，代表塑膠珠具有彈性，需考慮形變對應之剪應力(如圖 3-7)，此種力學討論較艱深。

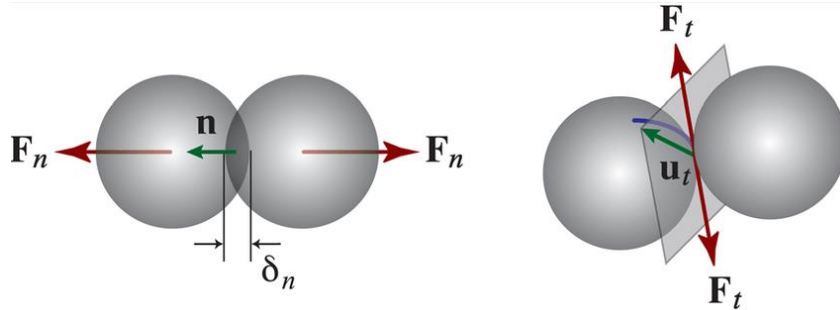


圖 3-7 顆粒體之剪應力示意圖 [4]

顆粒體間的交互作用非常複雜，為了簡化討論我們使用微觀上 2 個顆粒體間在 3 種接觸情況下的力學分析，且 2 個顆粒體視為剛體球。此處以容器左方頂端的顆粒體 A、B 為例做分析，以下均設 A 顆粒為固定不動，採加速座標系統，分析所用之座標示意圖如圖 3-8，A、B 球的質心高度分別為 Z_A 、 Z_B ，B 球半徑為 R_B ，質量 m ， z 為縱軸， r 為橫軸。以下均設 F 為離心力， f 為靜摩擦力， f_s 為最大靜摩擦力， N 為正向力， μ_s 為靜摩擦係數。

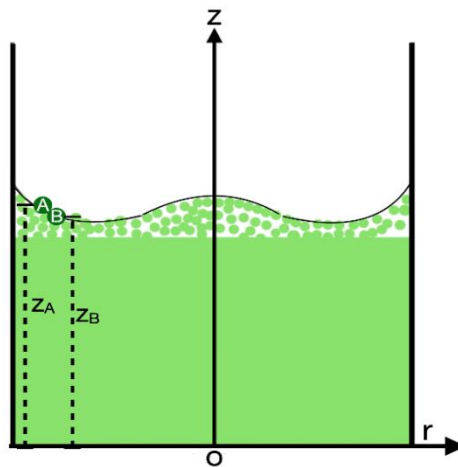


圖 3-8 顆粒體分析使用之座標示意圖

我們將 A、B 球的質心高度分成下列 3 種情形加以討論：

質心比較	$Z_A > Z_B$	$Z_A = Z_B$	$Z_A < Z_B$
對照分析力圖			
	(a)	(b)	(c)

圖 3-9 B 球與 A 球三種不同質心高度情形下之對照力圖

(i) $Z_A > Z_B$

如圖 3-9(a)所示為 B 球所受之各種作用力與角度分布情形，以下是 B 球的力學分析：

合力分析：

$$r \text{ 軸(向左)} : F - N\cos\theta - f\sin\theta = ma_r, \quad z \text{ 軸(向上)} : f\cos\theta - mg - N\sin\theta = ma_z$$

合力矩分析：以 A 球質心當支點

$$\text{逆時針力矩 } \tau = fR_B - 2mgR_B\cos\theta - 2FR_B\sin\theta$$

當 $\tau \geq 0$ 便能讓 B 球相對於 A 球產生滾動，往左側移動。但因靜摩擦力的力矩要同時克服重力與離心力的力矩；且 z 軸合力也要向上，較難同時達成，此種狀況下的圓珠不易往外側及上方移動。

(ii) $Z_A = Z_B$

如圖 3-9(b)所示，此時 B 球之合力分析：

$$r \text{ 軸(向左)} : F - N = ma_r$$

$$z \text{ 軸(向上)} : f - mg = ma_z$$

合力矩分析：以 A 球質心當支點

逆時針力矩 $\tau = fR_B - 2mgR_B$ ，當 $\tau \geq 0$ 便能讓 B 球相對於 A 球產生滾動，亦即靜摩擦力 f 需大於 $2mg$ 。因靜摩擦力 $f \leq f_s = N\mu_s$ ，高轉速下顆粒體間較易產生強烈的擠壓，當顆粒體間擠壓程度很大，也就是正向力 N 很大時，B 球有機會產生沿 z 軸向上的合力，且 τ 克服了重力的力矩，此種狀況下的圓珠有機會往外側移動。

(iii) $Z_A < Z_B$

如圖 3-9(c)所示，此時 B 球之合力分析：

合力分析：

$$r \text{ 軸(向左)} : F + f\sin\theta - N\cos\theta = ma_r$$

$$z \text{ 軸(向上)} : f\cos\theta + N\sin\theta - mg = ma_z$$

合力矩分析：以 A 球質心當支點，逆時針力矩 $\tau = fR_B + 2FR_B\sin\theta - 2mgR_B\cos\theta$

高轉速下，顆粒體間擠壓程度劇烈導致 N 大，使 z 軸合力向上的機率很高，且此種狀況下的 B 圓珠合力矩 $\tau \geq 0$ 之機率很高，此時 B 球容易相對於 A 球產生滾動，往外側及上方移動。實驗中觀察轉動初期在器壁附近移動的鋼珠，較多是此種情形。

(三)、實驗方法

因為影響顆粒體堆積分布的變因太多，我們先以 3mm 塑膠珠為對象，觀察那些變因會影響轉動下顆粒體的堆積分布。圖 3-10 為 3mm 塑膠珠在 3 種不同堆積高度，5 種不同轉速拍攝其堆積情形。由圖 3-10 可看出堆積高度不會影響轉動穩定後顆粒體堆積之自由表面分布，故實驗設計中不納入堆積高度之變因討論。


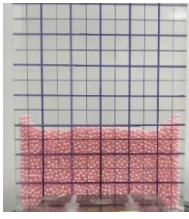

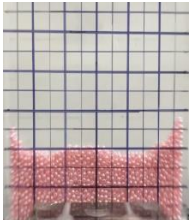
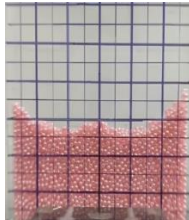
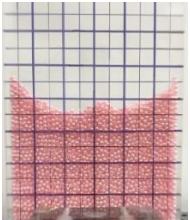
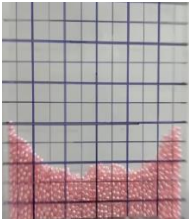
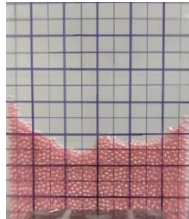
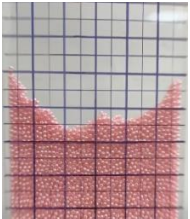
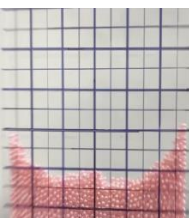
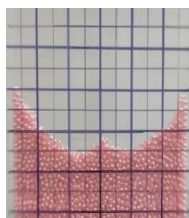
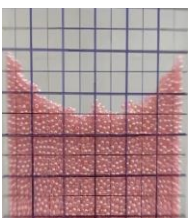
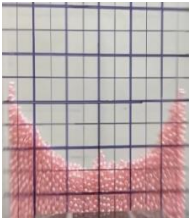
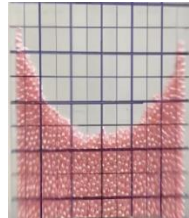
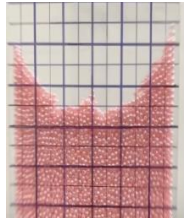
堆積高度(cm) 轉速(r.p.m)	4	6	8
300			
400			
500			
600			
700			

圖 3-10 三種堆積高度的 3mm 塑膠珠在不同轉速下的穩定堆積情形

為能清楚分析顆粒體在轉動時的移動軌跡，因細沙顆粒太小，要做轉動下的堆積觀察難度太高，故採用直徑均為 3mm 的金珠與粉珠來做分析。我們在堆積高度約 7cm 的粉珠上鋪一層高度約 1cm 的金色圓珠(如圖 3-11 所示)，藉以判斷顆粒體在轉動下的移動堆積行為。由圖 3-11 可看出，圓珠(粒徑 3mm)在堆積高度固定下，於不同轉速下的堆積行為與細沙頗為類似，只是因顆粒較大，堆積之圖案不若細沙那麼完美對稱。而轉速 600rpm 以上的堆積圖案已沒有甚麼變化，可能是因為顆粒往兩旁擠壓，但因堆積密度已達極限，所以堆積形狀不會再改變。但若細部去分析顆粒體間的作用力應當還是會隨著轉速越高而越高。

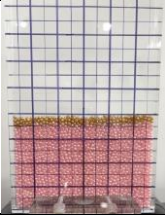
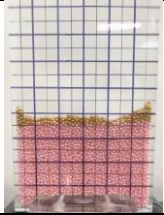
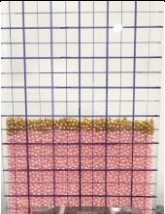
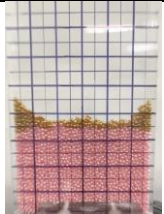
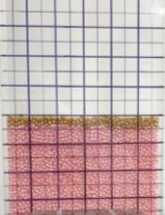
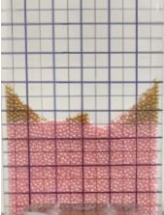
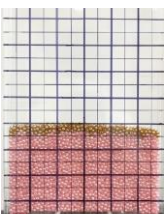
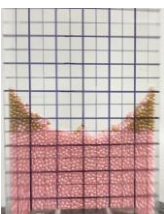


轉速(r.p.m)	轉動前	轉動後
300		
400		
500		
600		
700		

圖 3-11 堆積高度 7 公分之粉珠+上層堆積高度 1cm 的金珠在不同轉速下的穩定態情形

我們以 iPhone 12 手機拍攝轉動過程中的顆粒體，將轉動過程分為初期、中期與穩定分布 (如圖 3-12)。藉由慢動作播放觀察到上層的金珠大致上有四種的運動模式：

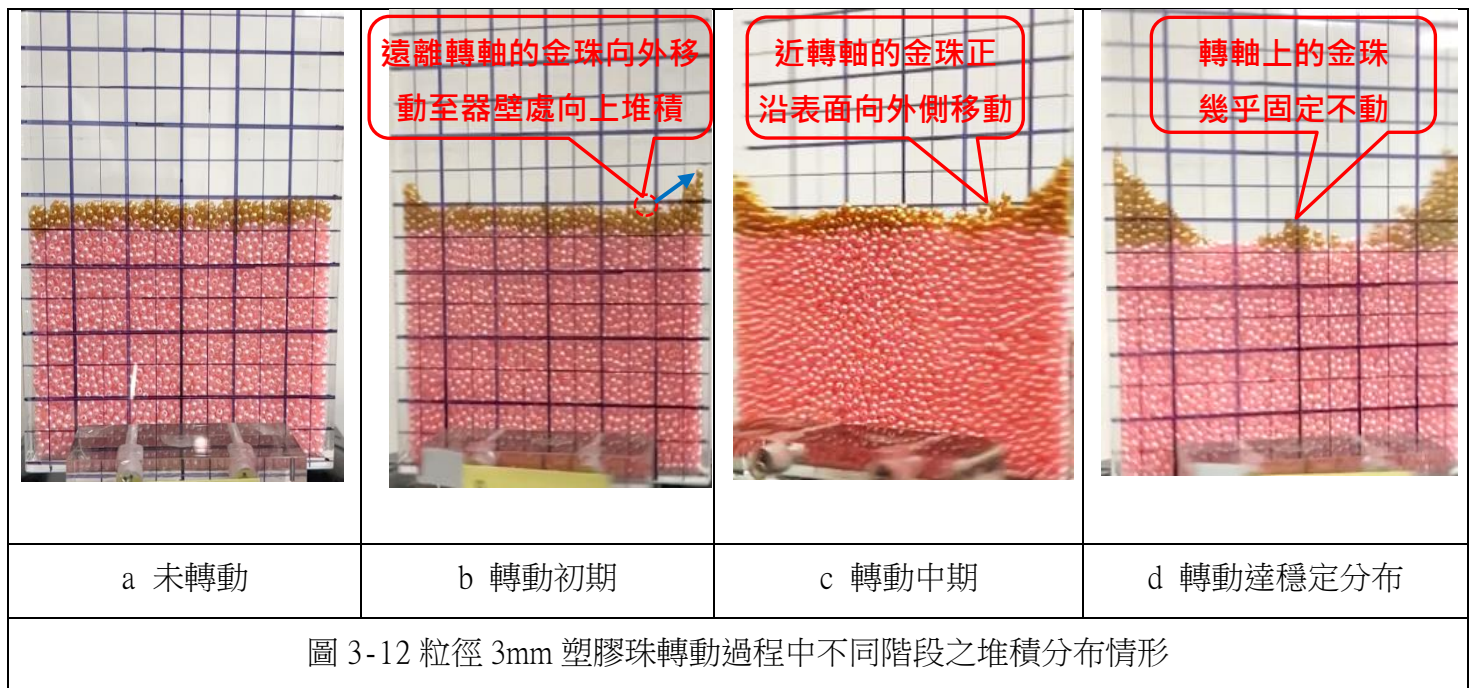
(1) 大多數的金珠往兩側移動：

如圖 3-12a 此時圓珠尚未轉動，表面分布近似水平。轉動初期是原先離轉軸較遠的金珠 (如圖 3-12b 中紅色圓圈處) 往外側移動，並沿著容器之器壁逐漸往上堆積 (圖 3-12b 中藍色箭頭所示)，接著再由接近轉軸的金珠往外側沿堆積的表面向上移動堆積 (如圖 3-12c)。當轉動達穩定時，圓珠不再運動，分布如圖 3-12d。

(2) 極少數的金珠往中心轉軸移動，這些金珠據觀察是運動過程中與其他金珠產生碰撞後所導致。

(3) 靠近轉軸的金珠幾乎固定不動，但若鄰近轉軸的金珠往外側偏移產生空缺後，轉軸附近的金珠會受到擾動產生移動，使得鄰近轉軸的金珠堆積高度下降。

(4) 部分金珠在轉動過程中被其他金珠碰撞或擠壓後，獲得不小的速度彈跳至空中直接落在器壁附近後堆積。

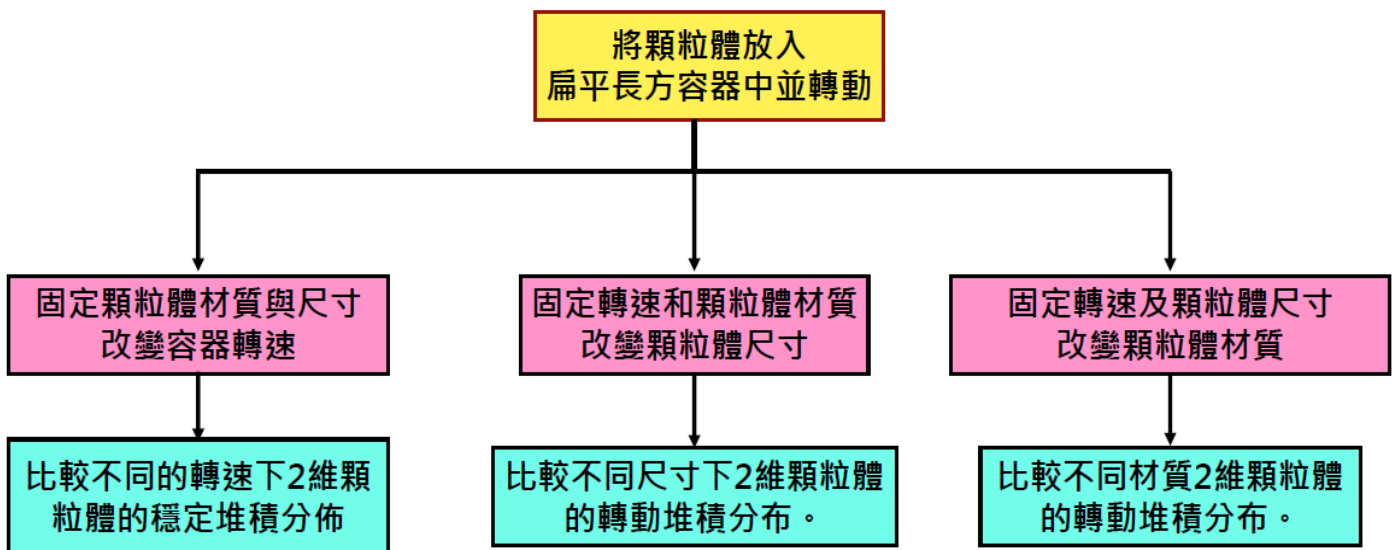


本實驗藉由下列步驟，對二維顆粒體的轉動堆積現象做分析探討：

- 1、固定顆粒體材質及尺寸，改變轉速，觀察不同轉速下 2 維顆粒體的轉動堆積分布。
- 2、固定轉速及顆粒體材質，改變顆粒體尺寸，觀察不同尺寸下 2 維顆粒體的轉動堆積分布。
- 3、固定轉速及顆粒體尺寸，改變顆粒體材質，觀察不同材質 2 維顆粒體的轉動堆積分布。
- 4、將 2 種相同尺寸，不同材質的顆粒體混合堆積於容器，觀察其轉動後的分布情形。

以下為本實驗的設計流程圖

實驗流程圖



四、討論及應用

(一)液面轉動形成之拋物面探討：

如圖 4-1(a)所示，將 Image J 軟體分析實驗中轉動下的液面之照片，利用 Multi-point 的功能將液面曲線描繪出來，圖 4-1(a)即為利用 Image J 將液面取點，並存下這些點的像素位置(x,y)，利用像素位置與原系統的位置座標(r, z)之線性轉換，計算得出轉動下液面的各點位置。圖 4-2(b)為水在三種轉速 150 r.p.m、200 r.p.m 與 250 r.p.m 之自由面之分布，而表 4-1 為深度 6cm 的水，在 3 種轉速下形成之拋物面軌跡函數，其實驗值與理論值的對照表。

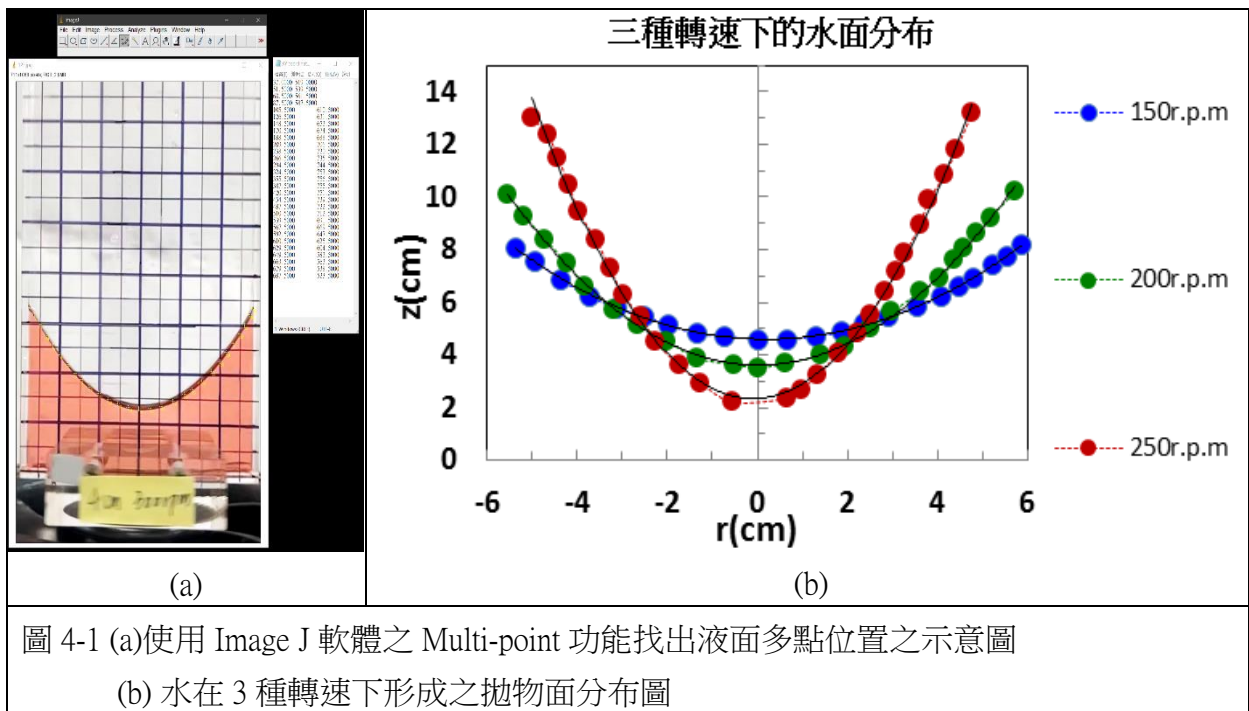


圖 4-1 (a)使用 Image J 軟體之 Multi-point 功能找出液面多點位置之示意圖

(b) 水在 3 種轉速下形成之拋物面分布圖

由前(4-7)式， $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + H - \frac{\omega^2 R^2}{6g}$ ，實驗中水深 $H=6\text{cm}$ ，容器半寬 $R=5.7\text{cm}$ ， $g=980\text{cm/s}^2$ ，代入理論值計算對應之拋物線函數與實驗值對照得到表 4-1。

表 4-1 水在 3 種轉速下形成之拋物面函數實驗值與理論值的對照表

轉速	理論值	實驗值
150 r.p.m	$z=0.12r^2+4.64$	$z = 0.11r^2 - 0.04r + 4.61$
200 r.p.m	$z=0.22r^2 +3.58$	$z = 0.21r^2 - 0.01r + 3.62$
250 r.p.m	$z=0.39r^2+2.21$	$z = 0.47r^2 + 0.08r + 2.35$

由表 4-1 可看出，3 種不同轉速下水面均呈現與理論值相當接近的拋物線軌跡，但在較高轉速 250 r.p.m 實驗值與理論值差距較大，原因不清楚。

(二)同種顆粒體在轉動達穩定分布之分析

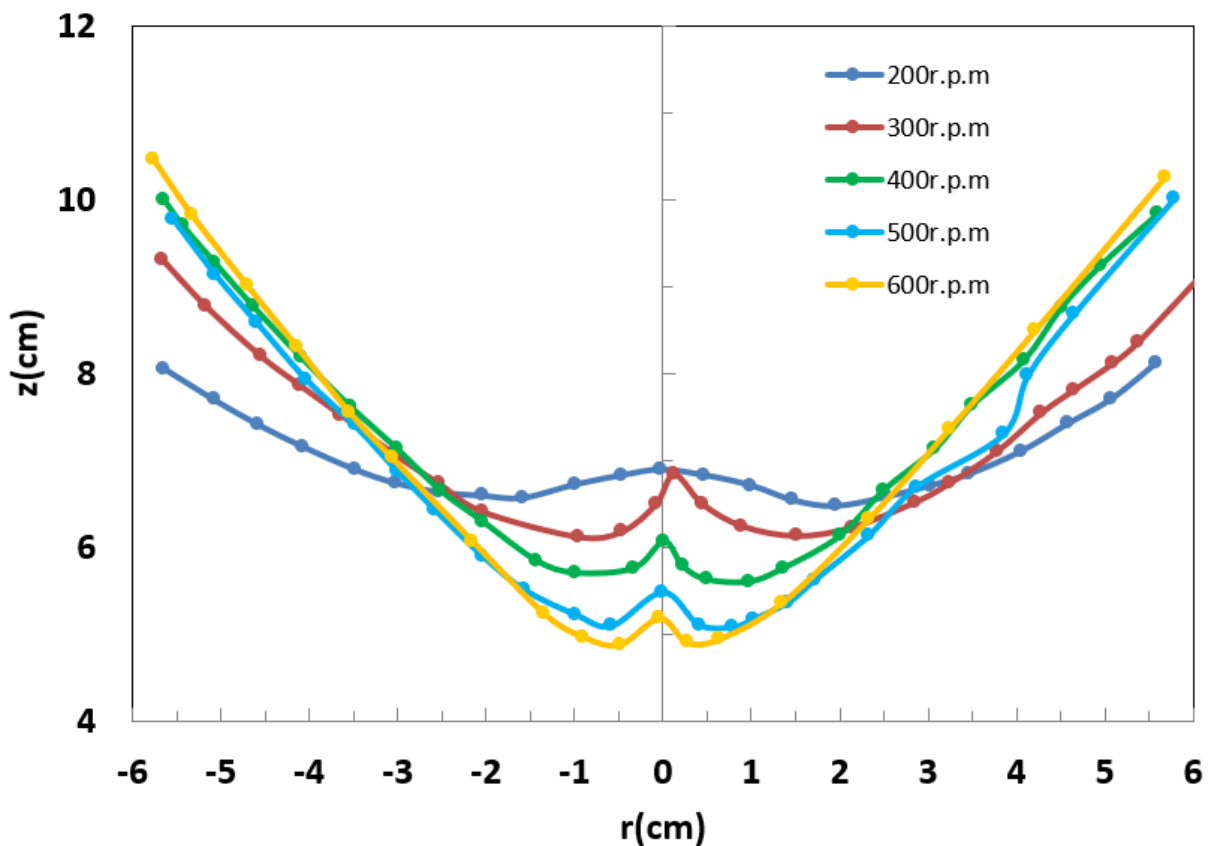
1、細沙顆粒體

細沙轉動後形成之圖案非常對稱且清晰，我們使用堆積高度 7 cm 之細沙做不同轉速下的堆積情形，根據實驗結果配合前方理論分析，做出下列的探討。

(1)、線性堆積區探討

當二維堆積之細沙 m 在中高轉速達穩定平衡時，會在兩側形成理論分析所說的線性堆積區，而其受力情形如圖 3-6b 之力圖所示。圖 3-6b 中若 s 為顆粒體線性堆積區的底部寬度， h 為此線性堆積區的高度，經量測轉速 200 r.p.m 穩定堆積下之 $s=7.7$ mm、 $h=4.2$ mm，故此時線性堆積區外沿之直線斜率 $\frac{h}{s}$ 約為 0.45。利用前述液面的分析方法，將堆積高度 7 公分的細沙在 200 r.p.m、300 r.p.m、400 r.p.m、500 r.p.m 與 600 r.p.m 五種不同轉速達穩定下

細沙在五種轉速下的自由面分布



的自由表面分布做成圖 4-2，並將前述 5 種轉速下線性堆積區的斜率做成表 4-2。

圖 4-2 細沙在 200 r.p.m、300 r.p.m、400 r.p.m、500 r.p.m 與 600 r.p.m 五種轉速達穩定下的自由表面分布圖

表 4-2 細沙在 5 種轉速穩定分布的線性堆積區之斜率對照表

轉速	線性堆積區斜率大小(左側)	線性堆積區斜率大小(右側)
200 r.p.m	0.46	0.44
300 r.p.m	0.85	0.81
400 r.p.m	1.09	1.05
500 r.p.m	1.13	1.06
600 r.p.m	1.22	1.18

由表 4-2 可看出細沙在不同的中高轉速下形成的線性堆積區，其對應之斜率大小會隨轉速提高而增加，但在轉速超過 400 r.p.m 時，線性堆積區之斜率逐漸趨向一定值。推測當轉速到達某一臨界值時，細沙顆粒體達到最密堆積的狀態，也就是顆粒體間的擠壓程度到達一極限，故此時顆粒體所受之正向力趨向一定值，而最大靜摩擦力 $f_{s(max)} = N \mu_s$ ，也趨向一個定值，此種線性區之細沙堆積與水平面形成之動態休止角，應與二維顆粒體受重力作用達穩定堆積(如圖 4-3)時之休止角 θ 情況類似。

我們好奇若細沙一開始不是水平分布，而是受重力作用形成對稱或不對稱三角狀的自由面堆積(如圖 4-4)，經過中高速轉動後會形成何種分布呢？結果發現當對稱三角狀細沙中高速轉動後，還是呈現 W 的外型(如圖 4-4c)；而不對稱三角狀轉動後呈現部份的 W 外型。代表細沙顆粒體系統在中高速轉動受到假想力作用產生堆積效果，初始的堆積狀態只會讓穩定後的自由面分布產生位移，較不影響轉動穩定時的自由面外觀分布。

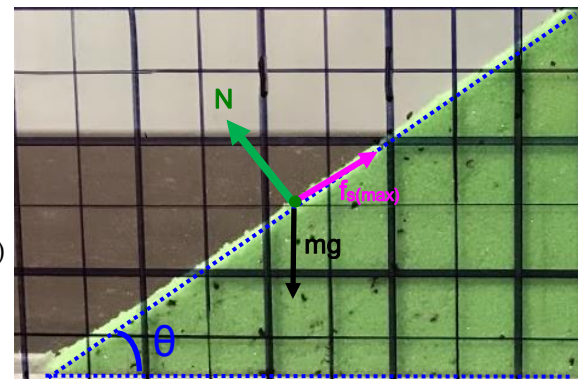


圖 4-3 細沙二維堆積之休止角 θ 照片

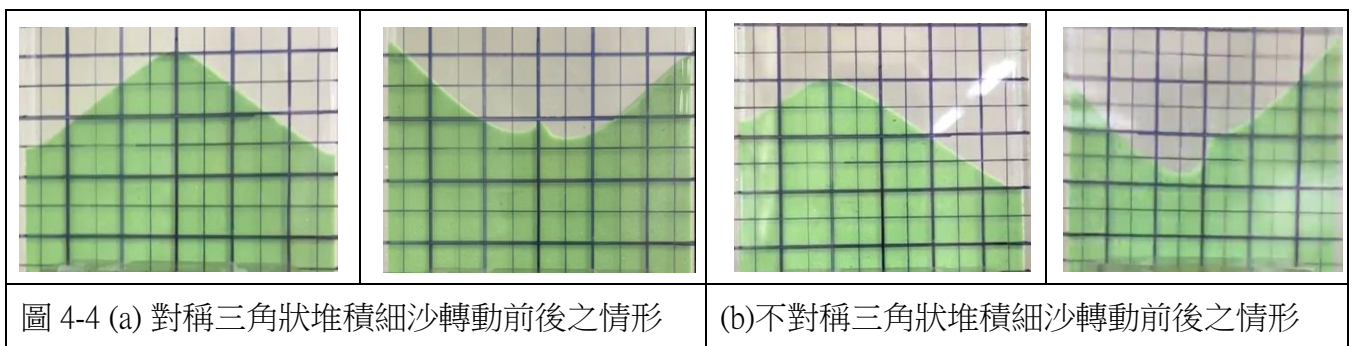


圖 4-4 (a) 對稱三角狀堆積細沙轉動前後之情形

(b) 不對稱三角狀堆積細沙轉動前後之情形

參考(3-7)式，液體轉動之拋物線軌跡 $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + H - \frac{\omega^2 R^2}{6g}$ ，當轉速 ω 越快時，液面呈現之拋物線曲率 $\frac{\omega^2}{2g}$ 越高。但二維顆粒體在轉動下形成的線性堆積區，其對應之直線斜率雖

會隨轉速增加而變大，但在轉速超過 400 r.p.m 時，線性堆積區之斜率卻趨向一定值，和液體轉速越快，液面分布越陡峭之表現截然不同。

(2) 中央尖錐區

由圖 4-2 可看出，細沙在高轉速達穩定堆積時，中央形成突起之尖錐區，且轉速越高，尖頂的 z 位置越低，也就是自由表面越凹陷，此點和液面轉動有些類似，轉速越高液面凹陷越劇烈。另轉速越高時中央尖錐區面積越小，代表此時高離心力讓靠近轉軸的細沙較無法維持在原處不移動。

2、塑膠珠顆粒體

如同細沙顆粒體，塑膠珠高轉速(>300 r.p.m)也出現中央尖錐區分布，且轉速越高，塑膠珠堆積的自由面越凹陷(如圖 4-5)，與細沙類似。圖 4-5 為 3mm 與 4mm 的塑膠珠在 300 r.p.m、400 r.p.m、500 r.p.m 及 600 r.p.m 四種轉速下穩定堆積的自由面分布。比較 3mm 與 4mm 的塑膠珠轉動穩定之分布可看出，當轉速為 600 r.p.m，4mm 的塑膠珠呈現的分布較不規則對稱，這是因為 4mm 的塑膠珠在厚度 10 mm 的容器中容易卡住，造成轉動時的顆粒體無法順暢移動，所以呈現的自由面分布較不規則。

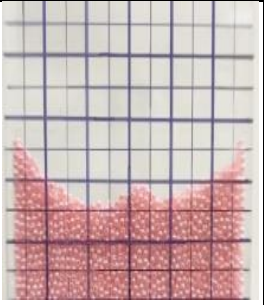


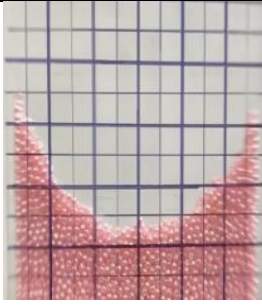
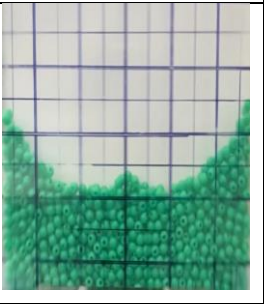
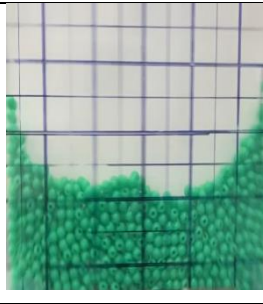
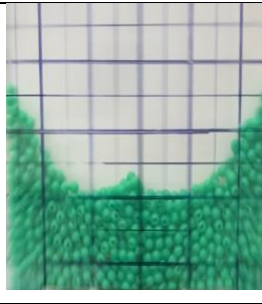
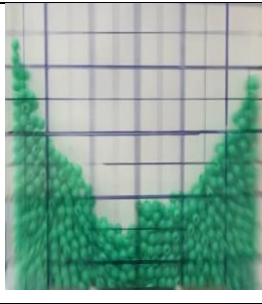
3mm 塑膠珠				
4mm 塑膠珠				
轉速 (r.p.m)	300	400	500	600

圖 4-5 塑膠珠(3 mm 及 4mm)在 4 種不同轉速下穩定堆積之分布圖

3mm 塑膠珠在四種轉速下的自由面分布

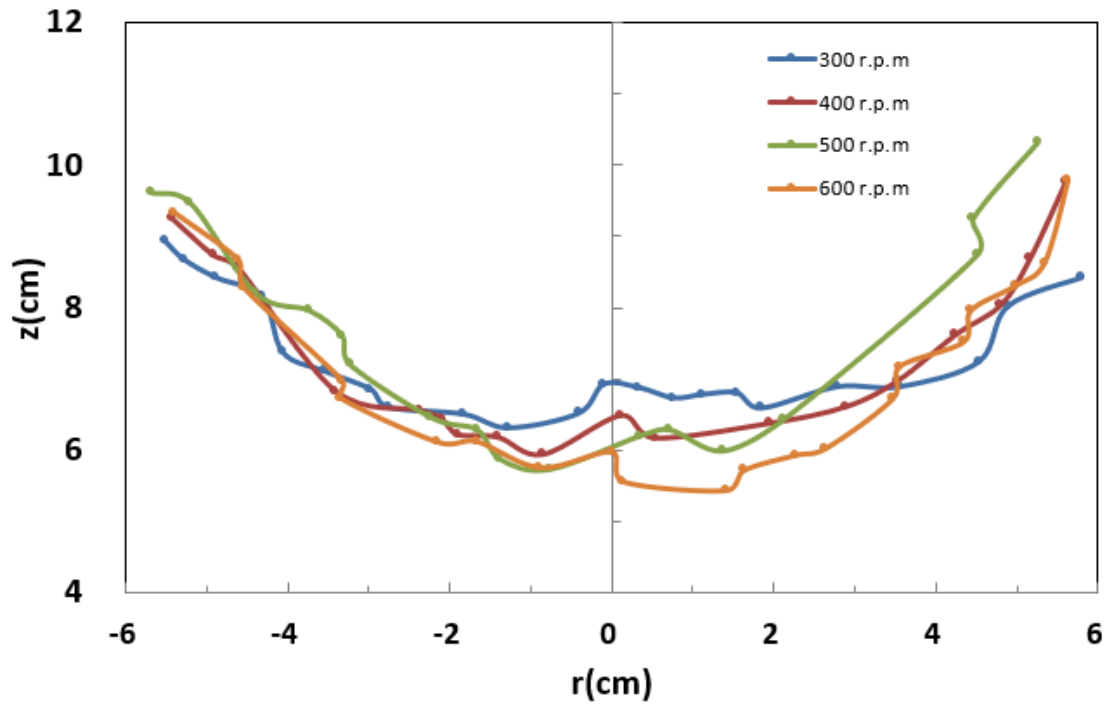


圖 4-6 塑膠珠(3 mm)在 4 種不同轉速下堆積之自由面分布圖

比較圖 4-2 與圖 4-5，可看出 3mm 塑膠珠轉動後的分布與細沙類似，但自由面分布沒有像細沙這麼對稱平滑，因為塑膠珠的粒徑較細沙大出甚多，所以個別顆粒體的行為會益發凸顯，造成線性堆積區變得較不明顯，在此就不對塑膠珠之線性堆積區做斜率討論。另外高轉速下塑膠珠在靠近器壁的區域的分布也幾乎不隨轉速改變，亦是代表某種轉速以上塑膠珠達到最密堆積後，使得自由表面之外型趨向一致，不隨轉速改變。4mm 的塑膠珠，因轉動時容易在容器內阻塞卡住，影響自由面分布，在此不特別做分析了。

3、鋼珠顆粒體

(1)3mm 鋼珠

因鋼珠較重，轉動時怕會破壞實驗裝置，且轉動之自由面分布主要由上層的顆粒體決定，故我們先使用 3mm 塑膠珠堆積 3 公分高度打底便於拍照，再分別堆積 4 cm 高的 3mm 鋼珠與 4mm 鋼珠，在 4 種不同轉速拍攝其堆積情形，結果如圖 4-7 所示，並將 4 種轉速下 2 種粒徑(3mm、4mm)的鋼珠堆積形成之自由面分布，分別做成圖 4-8 及圖 4-9。

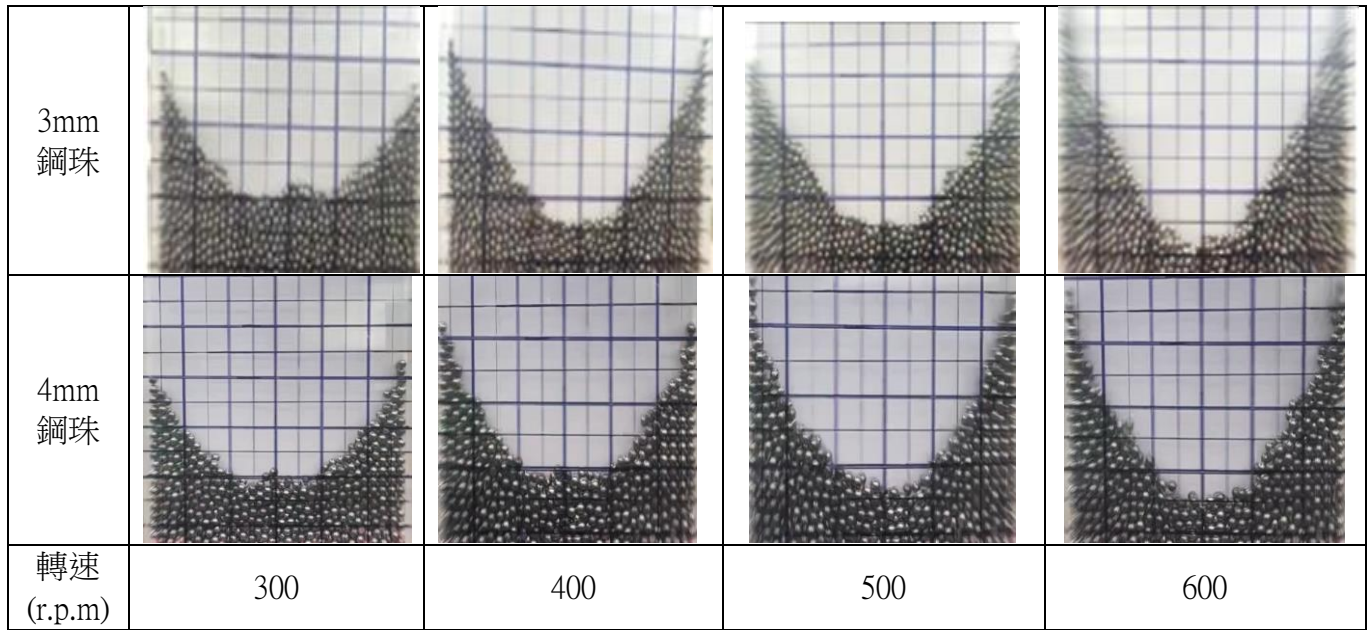


圖 4-7 鋼珠(3mm、4mm)在 4 種不同轉速下穩定堆積之分布照片

3mm 鋼珠在四種轉速下的自由面分布

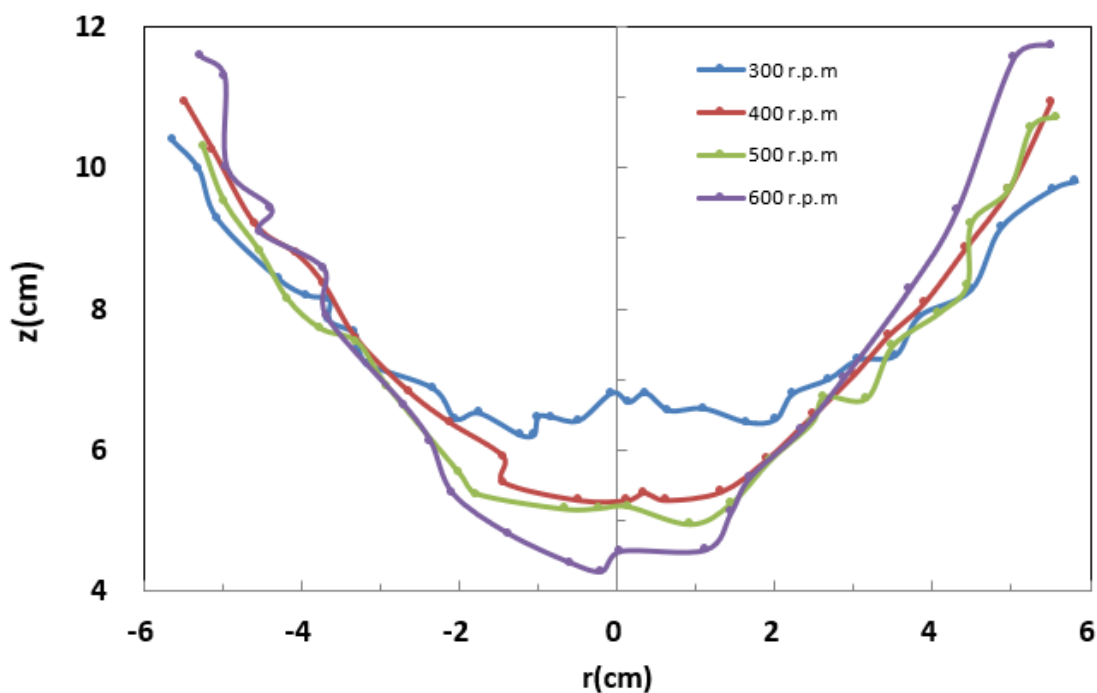


圖 4-8 鋼珠(3mm)在 4 種不同轉速下堆積之自由面分布圖

4mm鋼珠在四種轉速下的自由面分布

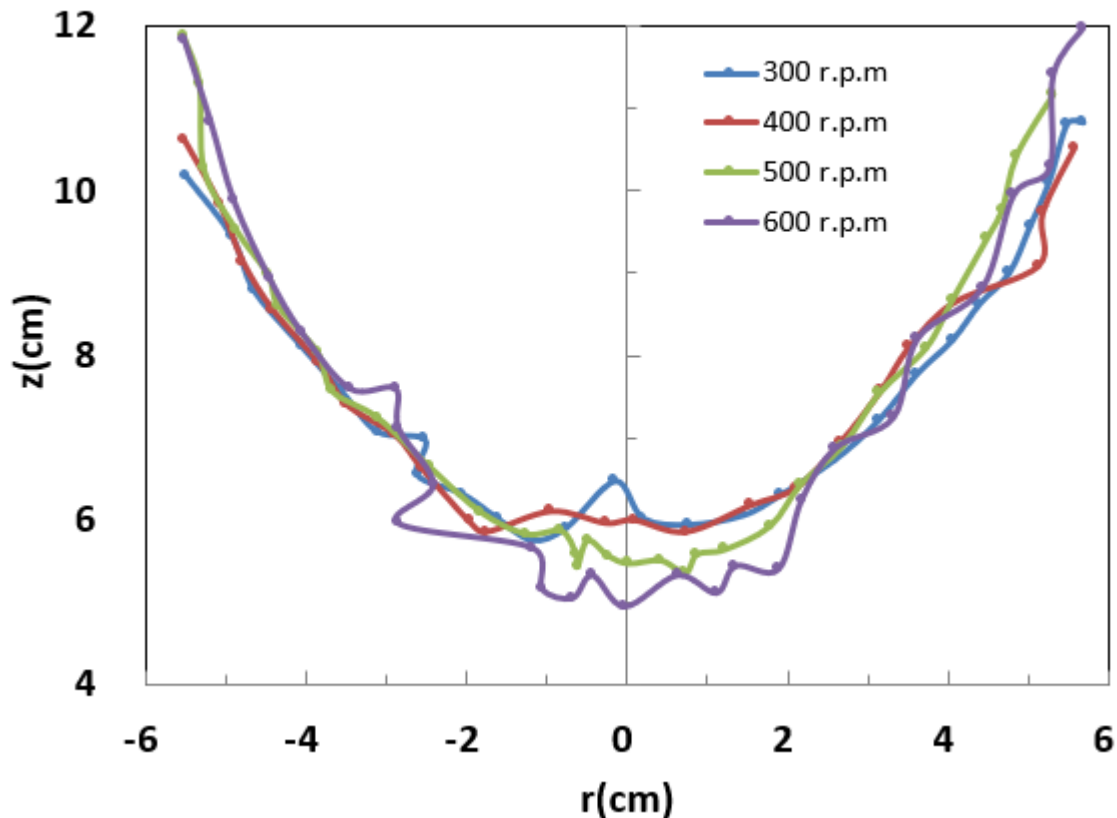


圖 4-9 鋼珠(4mm)在 4 種不同轉速下堆積之自由面分布圖

由圖 4-7、圖 4-8 可看出 3mm 鋼珠在 300 r.p.m 轉速與塑膠珠類似會出現中央尖錐區，兩側為近似線性堆積。但在 400 r.p.m 與 500 r.p.m 轉速中央尖錐區消失，形成一平坦底部，兩側由線性堆積逐漸轉變為拋物線形式；在 600 r.p.m 轉速之堆積自由面呈現近似拋物線的分布，這點和塑膠珠的轉動堆積形式非常不同。因鋼珠密度比塑膠珠大，當處在相同轉速下，鋼珠往兩側運動的慣性(或離心力)會較大，所以才會造成顆粒往兩側甩的現象更為明顯。而塑膠珠在相同轉速下，因慣性較小，所以在被往兩側甩的時候，會容易因為顆粒之間摩擦力影響，造成動量減小，尤其在中間轉軸的位置離心力又更小，就更不容易往外移動，造成中間產生小尖錐。

顆粒間的摩擦力越大，尖錐區就會越明顯。所以像鋼珠的摩擦力是較小的，隨著顆粒離轉軸越遠，受到的離心力就會越大，顆粒受到的合力就會導致顆粒越容易沿著自由表面移動，而形成越大曲率的拋物線型。因此當轉速、顆粒體粒徑均相等時，密度越大的顆粒受到的離心力也越大，所以相對而言就會形成越大曲率的拋物線型表面。

由圖 4-7、圖 4-9 可看出 4mm 鋼珠在轉速 300 r.p.m、400 r.p.m 也會出現中央尖錐區，兩側為近似線性堆積，但在轉速超過 500 r.p.m 後，中央尖錐區消失，逐漸形成一平坦底部。另 4mm 鋼珠在轉速 600 r.p.m 之分布與 3mm 鋼珠在轉速 500 r.p.m 之分布非常類似。推論低

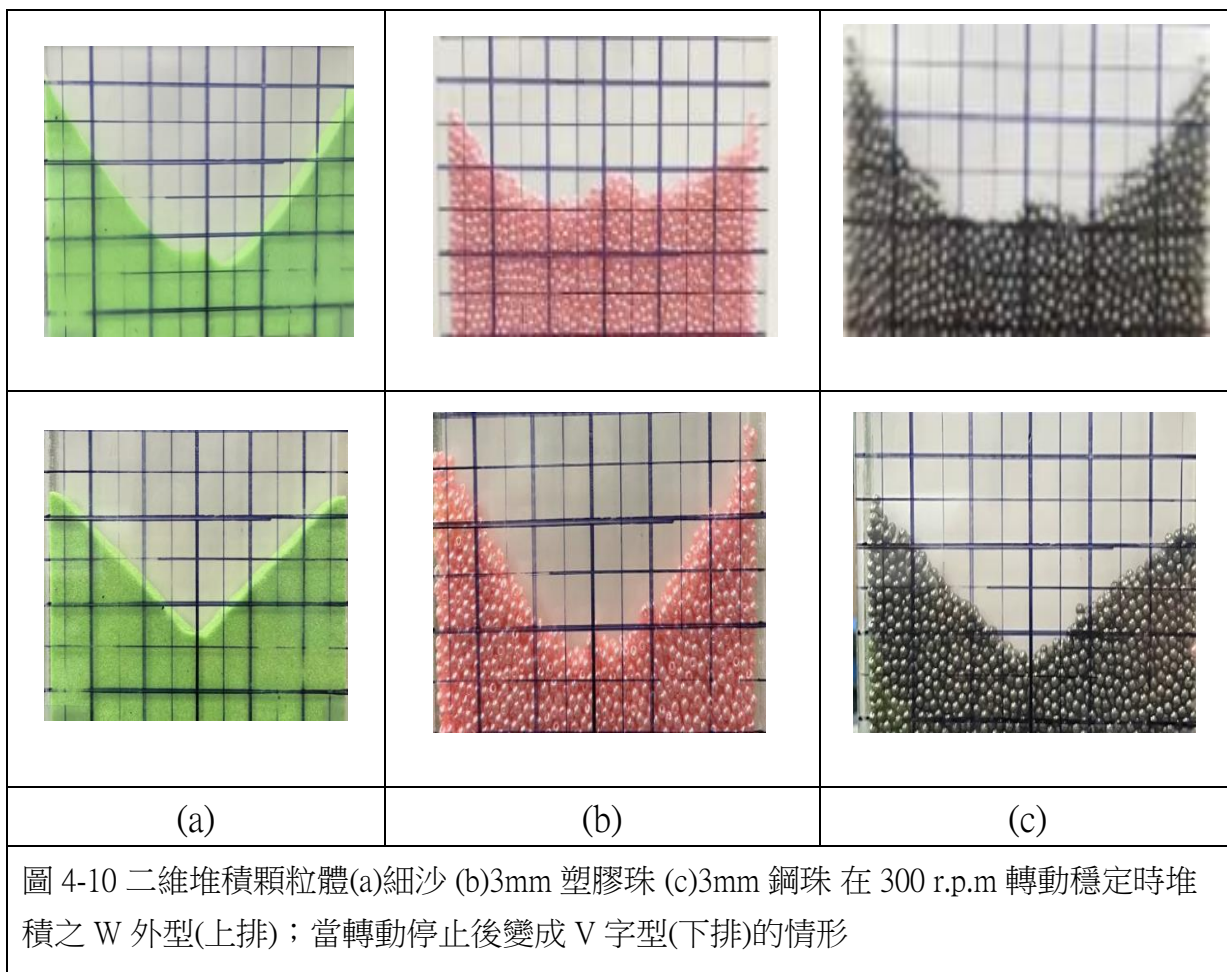
摩擦係數之鋼珠，質量較大者需對應更高轉速才能讓底部的中央尖錐區消失轉為平坦的底部甚至形成類似拋物線之自由表面。

相較於 3mm 的鋼珠顆粒，4mm 的鋼珠顆粒在同樣轉速下，自由表面的拋物線曲率是較小的。這可以解釋為較小尺寸的顆粒擁有較大的流體化能力，因此更容易產生運動堆積出拋物線表面。

另外，雖然質量大的顆粒雖然要使它從靜止狀態下產生運動需要較大驅動力，但因旋轉系統持續給予鋼珠離心力，所以要使鋼珠從靜止轉變成往兩側運動的驅動力是足夠的，但也因為鋼珠一但開始運動外甩之後，要再靠顆粒間的摩擦力使它在往兩側運動過程中動量減少（或甚至變成靜止）的機率就較小（因鋼珠慣性大），所以最後也造成大部分鋼珠都往兩側靠，中心轉軸處鋼珠顆粒數減少而下凹形成一近似平坦的底部。

4、細沙、塑膠珠及鋼珠 3 種顆粒體之中央尖錐

二維堆積顆粒體在轉動過程中，如同液體轉動一樣，有想要形成拋物面的趨勢。但是因為顆粒體間彼此有摩擦力的存在，導致顆粒體在轉動後堆積成 W 的形狀。但中間尖銳的突起為一不穩定平衡狀態。當轉動停止後，容器受到一輕微擾動，中間凸起部分立刻塌陷，轉變為 V 字的形狀(如圖 4-10 系列所示)，最後形成 V 字型應該是顆粒體受到摩擦力、正向力與重力的達到靜力平衡的結果。



小結論：綜合上面細沙、塑膠珠與鋼珠的探討，可以歸納出 2 維堆積顆粒體在轉動下達穩定之自由表面分布會有下列數種情形：

- (1) 摩擦係數較高者(細沙、塑膠珠)：顆粒體受摩擦力影響程度大於離心力，在轉軸附近容易形成中央尖錐區，靠近器壁兩側形成線性堆積區，而當轉速高出某臨界值後，因顆粒體已達最密堆積，堆積表面不太會隨轉速增加而改變。
- (2) 摩擦係數低者(鋼珠)：顆粒體受離心力影響高出摩擦力時，且因鋼珠慣性大，在轉軸附近的鋼珠易往兩側運動，形成一平坦底部；靠近器壁兩側之堆積區會隨轉速增加，逐漸由線性演化為拋物線形式，此時趨向液體表現。

(三)不同顆粒體混合後於轉動穩定之自由面分析

1、3mm 鋼珠與 3mm 塑膠圓珠

將數量相同的 3mm 鋼珠與 3mm 塑膠珠混合後，以 4 種不同轉速(300 r.p.m、400 r.p.m、500 r.p.m 與 600 r.p.m) 分別拍攝其堆積情形，結果如圖 4-11 所示。實驗中發現要讓塑膠珠與鋼珠均勻混合非常困難，只能盡量滿足。而 4mm 之塑膠珠因容易卡在容器內，故未做 4mm 鋼珠與 4mm 塑膠珠混合之討論。

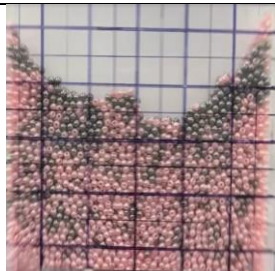
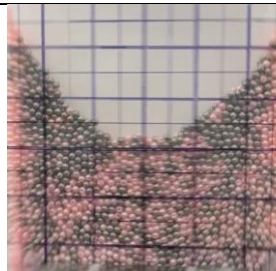
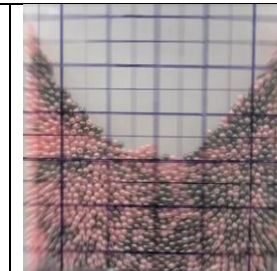
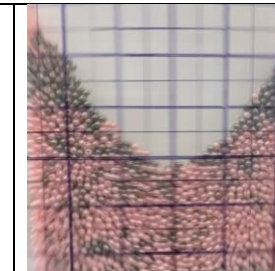
3mm 鋼珠與 3mm 塑 膠珠之混 合態				
轉速 (r.p.m)	300	400	500	600

圖 4-11 相同數量之 3mm 鋼珠與 3mm 塑膠珠混合後在 4 種不同轉速下堆積分布照片

在此以 300 r.p.m、400 r.p.m 500 r.p.m 與 600 r.p.m 4 種轉速下比較 3 mm 鋼珠、3 mm 塑膠珠與等量混合下的自由面分布，做成圖 4-12、圖 4-13、圖 4-14 與圖 4-15。

由圖 4-5、圖 4-7 與圖 4-11 可看出 3mm 鋼珠與 3mm 塑膠珠混合後的自由面分布同時受到塑膠珠與鋼珠的綜合影響，在 600 r.p.m 轉速下，純塑膠珠會存在中央尖錐區(圖 4-5)，純鋼珠(圖 4-7)為近似拋物線，但混合態(圖 4-11)的中央尖錐區完全消失，而自由面兩側為近似線性堆積。

由圖 4-12、圖 4-13、圖 4-14 與圖 4-15 之比較可看出，轉速 300 r.p.m 時，3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與混合態的自由面分布較不相關；400 r.p.m 混合態自由面大致介於 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠之間。而轉速在 400 r.p.m -600 r.p.m，轉速固定下，大致上 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與混合態的自由面凹陷度與兩側堆積斜率為：鋼珠>混合態>塑膠珠。高轉速(500 r.p.m、600 r.p.m)下，混合態與鋼珠的自由面幾乎重合，代表高轉速下運動慣性大且摩擦係數小的顆粒體決定了混合態顆粒體堆積的自由面分布。

300r.p.m下3mm塑膠珠、3mm鋼珠與混合後轉動分布

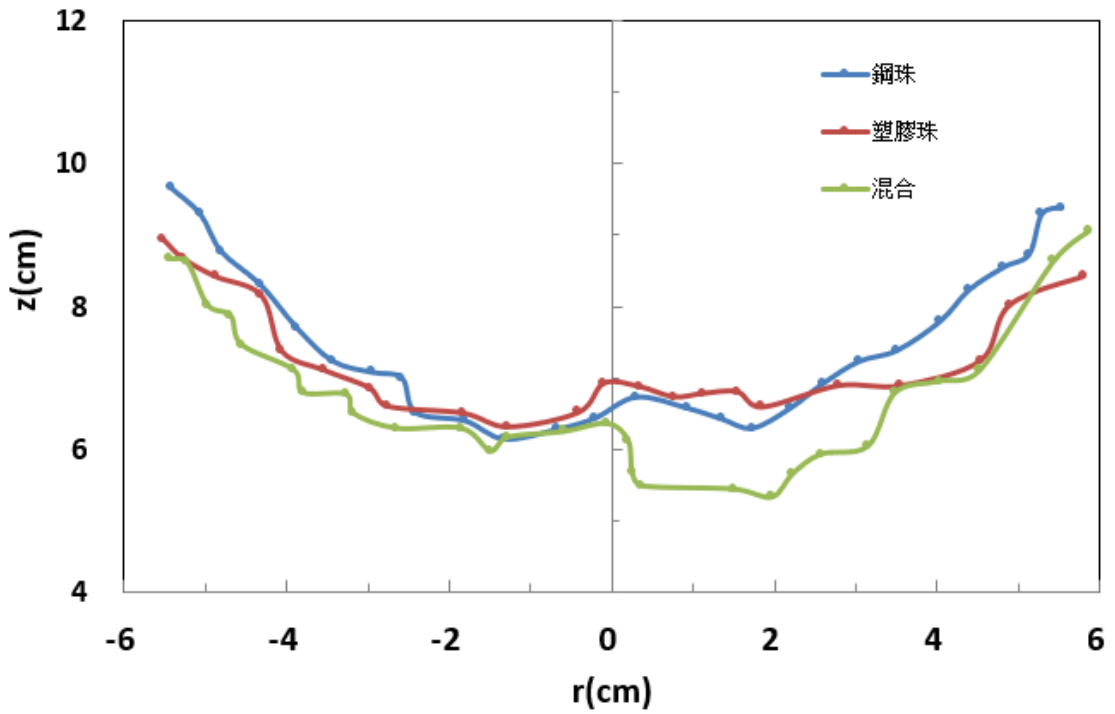


圖 4-12 轉速 300 r.p.m 下 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與兩者等量混合下的自由面分布圖

400 r.p.m 下 3mm 塑膠珠、3mm 鋼珠與混合後之轉動分布

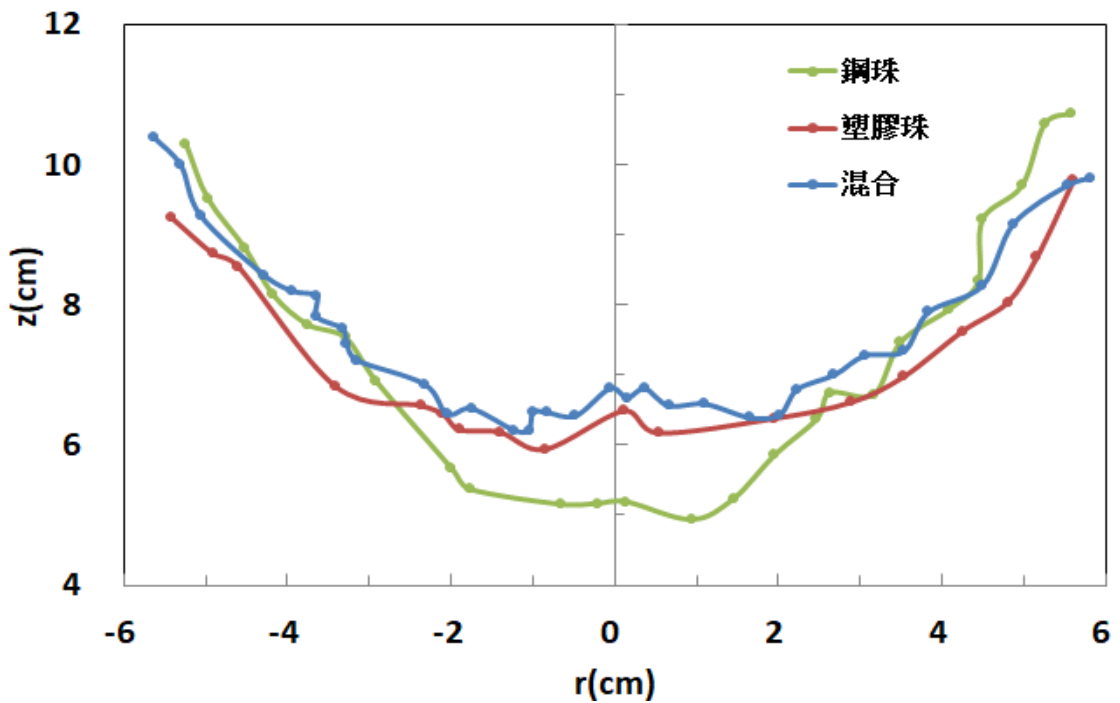


圖 4-13 轉速 400 r.p.m 下 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與兩者等量混合下的自由面分布圖

500r.p.m 下3mm 塑膠珠、3mm 鋼珠與混合後轉動分布

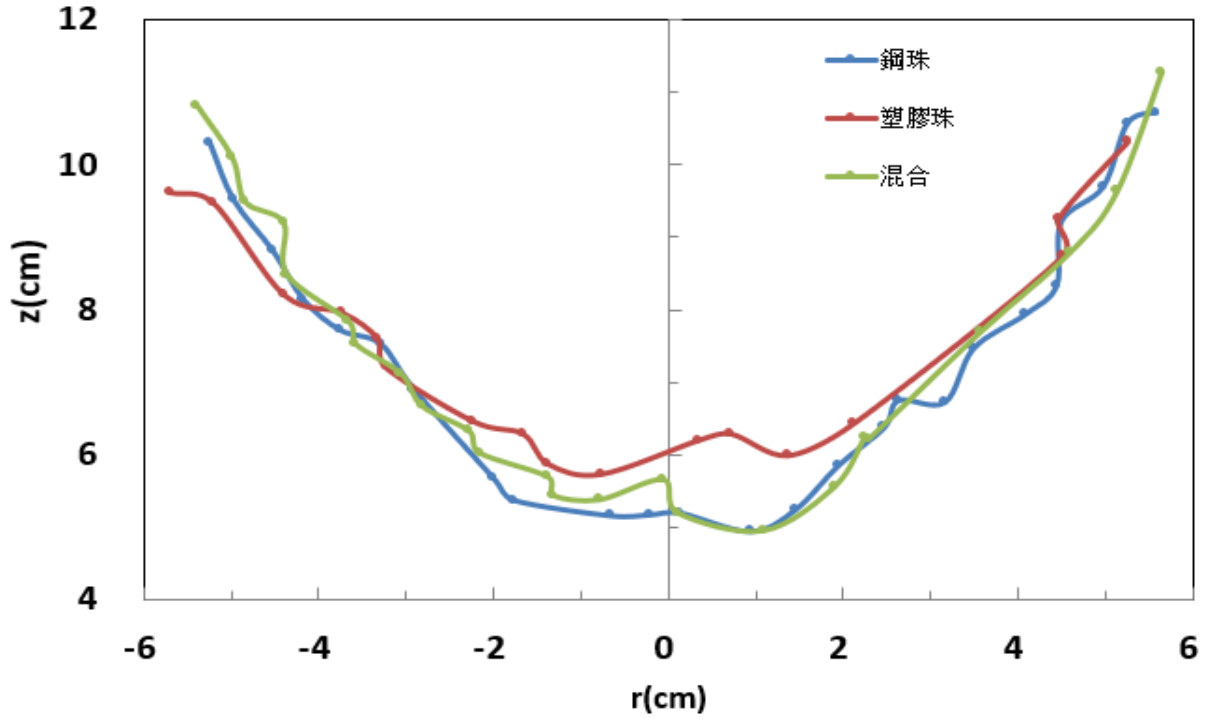


圖 4-14 轉速 500 r.p.m 下 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與兩者等量混合下的自由面分布圖

600r.p.m 下3mm 塑膠珠、3mm 鋼珠與混合後轉動分布

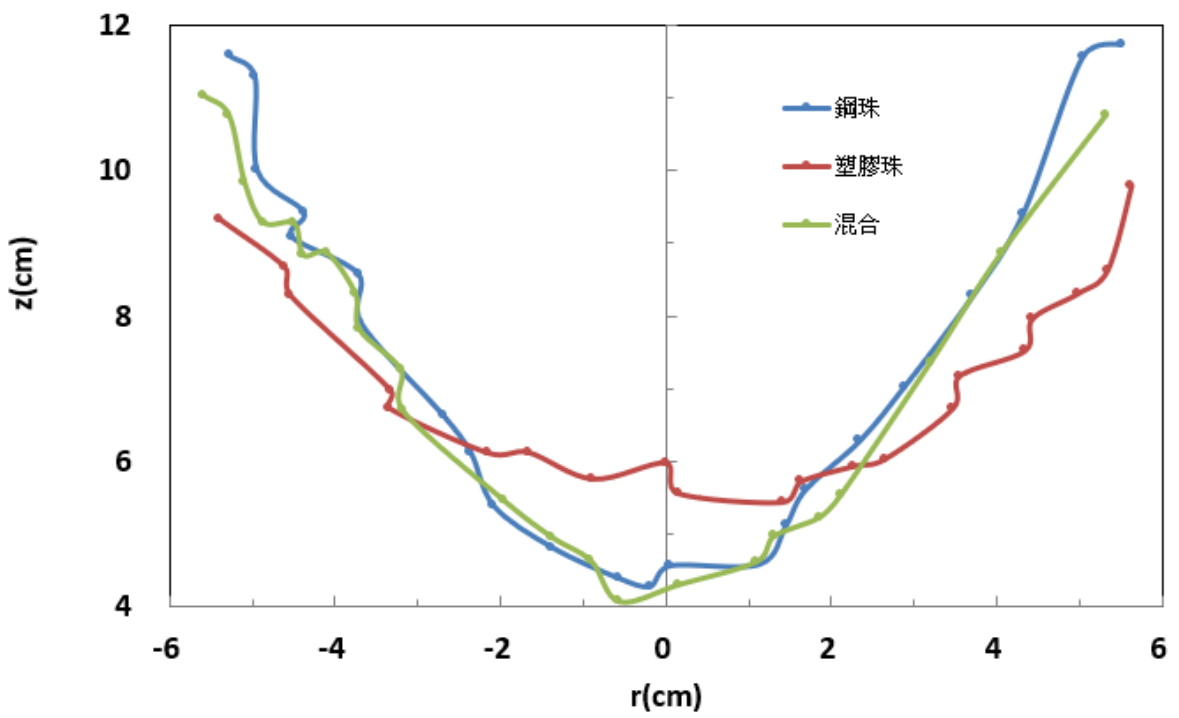
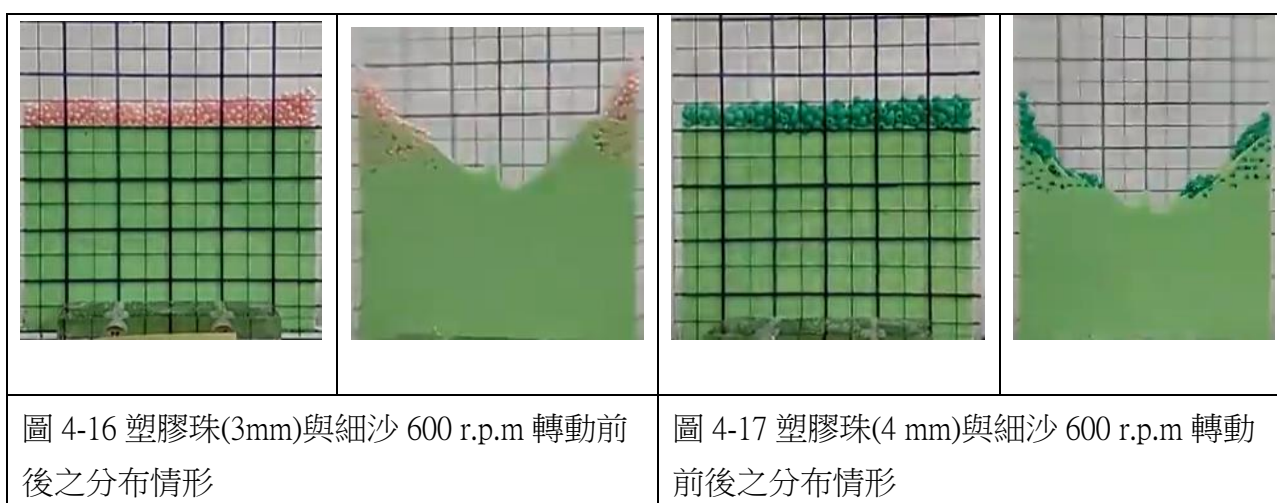


圖 4-15 轉速 600 r.p.m 下 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與兩者等量混合下的自由面分布圖

2、細沙與塑膠珠

因為看到電視上製作食品加工製作粉圓，一般都是利用重力與鉛直方向的滾動攪拌，所以發想是否可利用本實驗的高速轉動方式，將細微的粉末混合到顆粒體周圍，達到類似的效果。下面圖 4-16 與圖 4-17 為 3mm 塑膠珠與 4mm 塑膠珠分別堆放在細沙表面，在轉動後與細沙混合的情形。因塑膠珠密度小於細沙，要利用重力或鉛直振動將塑膠珠混入細沙中並不容易。由下圖可看出以本實驗高速轉動方式似乎可將細沙較為均勻的分散在塑膠珠附近，達到預期效果。此種轉動方式未來似乎可以應用在食品加工或製藥技術上。



五、結論

根據以上分析討論，在此做出下列數點結論：

(一) 二維堆積顆粒體高速轉動時，其自由面有要成為拋物線的趨勢，但因有摩擦力的存在易導致其出現中央尖錐區與兩側線性堆積區之分布。

- 1、細沙顆粒體：於中轉速(200 r.p.m)下因離心力差異，由內而外形成平坦區、凹陷區以及線性堆積區之分布；高轉速(>300 r.p.m)下由外而內會形成線性堆積區、中央尖錐區的堆積分布。轉速越快堆積之自由表面凹陷越劇烈，中央尖錐區面積越小。兩側線性堆積區斜率隨轉速增加，但轉速超過 400 r.p.m 後，斜率趨向一定值。
- 2、塑膠珠顆粒體：轉動堆積與細沙類似，但形成之自由面分布不像細沙對稱與平滑。當轉速超過 500 r.p.m，因顆粒體已達到最密堆積，塑膠珠的堆積分布較不隨轉速改變。
- 3、鋼珠於中轉速下由外而內也會形成線性堆積區、中央尖錐區的堆積分布；較高轉速因鋼珠摩擦力小且運動慣性大，轉軸附近的鋼珠大都往兩側運動造成

轉軸附近形成平坦的底部。另兩側的線性堆積區隨轉速增加逐漸演變成拋物線分布。尺寸較小的鋼珠流體化的能力較強，轉速較低時即能形成近似拋物線之自由面。。

(二) 相同數量的 3mm 鋼珠與 3mm 塑膠珠混合後以高速(>500 r.p.m)轉動，其堆積分布與相同轉速下的鋼珠一致，代表混合態高速轉動後穩定堆積的自由面分布是由質量大之顆粒體所決定。

(三) 本實驗未來可推廣至食品加工或製藥之應用。

六、參考資料

1. Wuyi Wan, Investigation on the attenuation of a rotating liquid motion in a cylinder with boundary resistance.2022.5.5 取自
https://www.researchgate.net/publication/289217208_Investigation_on_the_attenuation_of_a_rotating_liquid_motion_in_a_cylinder_with_boundary_resistance
2. 沈立宗, 鄒仕豪, 蕭述三 (2016), 粉顆粒體偏析與混合現象之研究發展, 化工, 42 頁, 第 63 卷第 2 期。2022.4.20 取自
http://www.twiche.org.tw/ezfiles/0/1000/attach/89/pta_687_4196094_71246.pdf
3. 黎璧賢, 民國 90 年 11 月, “顆粒體物理研究之近年成果”, 自然科學簡訊第十三 卷 第四期, 130-132 頁。
2021.11.01 取自：<https://www.most.gov.tw/public/Attachment/6121119222571.pdf>
4. Jonathan Fleischmann, Radu Serban, Dan Negrut, Paramsothy Jayakumar, On the Importance of Displacement History in Soft-Body Contact Models. 2022.7.5 取自
https://www.researchgate.net/publication/281538010_On_the_Importance_of_Displacement_History_in_Soft-Body_Contact_Models.