第二十一屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA21-502

作品名稱：探討停車場找尋車位動線問題分析

姓名：吳岱錚

關鍵字：停車函數、排列組合、程式模擬

摘要

本研究主題為停車場的數學分析，我們建立出「平面的雙排雙向道結合樓層的單排單向道停車場」的停車動線數學模式。我們由文獻[11]進一步設計出四種不同的雙排停車路線規則，分別為「只直走」、「只轉彎」、「隨機直走轉彎」與「賣場平面樓層路線」，並與「單排停車」的規則進行研究與比較。首先我們在這四種不同的停車路線中探討駕車行為的數學模式，然後在平面停車場中進行綜合性的討論並且找出最佳的停車路線，最後再將平面延伸到空間，找出對立體停車場的停車路線模式進行綜合性討論。

我們再經由拓樸分析知道，立體停車場的結構可以視為樓層間單排單向停車，且樓層內為平面雙向停車問題，因此在車主會前往下一樓層進行停車，一定是因為所在的樓層沒有位置的理性假設之下的決定，故我們將樓層之間加入加權參數，就可以合理化多數車主為何都只在最近的樓層停車，而不往下或往上一層找車位。

本研究結果發現停車路線成功比例大小排序為「賣場平面樓層路線」、「單排停車」、「隨機直走轉彎」、「只直走」、「只轉彎」，我們可從中發現平面停車場在雙排停車的情況下，只有「賣場平面樓層路線」的成功停車機率能超越「單排停車」的成功停車機率。這個結論同時也證明了，雙排停車的成功停車比例是高於單排車位的成功停車比例。所以，本研究建議將單向停車道規劃成「賣場平面樓層路線」為最佳設計。

壹、 研究動機

在停車場尋找停車位的數學問題討論起來是一件很麻煩的事情。尤其是現在停車場不只限於平面，立體停車場的出現，更使停車的問題複雜化。原本駕駛可能只是為了尋找離出口較近的位置而花時間去尋找停車位，但立體停車場的出現讓駕駛們必須多考慮樓層的問題[5]，並且花更多的時間在尋找停車位。在一次資料的查詢中，我們發現了一篇有趣的數學文章[12]，他是有關立體停車場運用電腦去進行最佳的停車分配，文章所提到的剛好與駕駛面臨的問題十分相似。該如何不運用電腦，去找出一個最佳的停車方法，這引起了我極大的興趣，再加上住家附近的賣場剛好有大型立體停車場，於是我便以此做為我專題研究的主題進行探索。

在找到的文獻[9]中有單排停車的成功數列一般式，而我想將[9]進行推廣，而在推廣時，我找到文獻[11]，我在其中發現他已經提出兩種不同的停車規則，且在結果中已提出「只直走」和「只轉彎」的停車成功數及在$n>6$時，「只直走」的停車成功數會大於等於「只轉彎」，於是我增加「隨機直走轉彎」與「賣場平面樓層路線」兩種停車規則，並將四種停車方法與原題[9]單排停車進行成功機率的對比，並且也有推廣至立體停車場中。

貳、 研究目的

本研究主要探討停車函數的規律，並將其運用到生活上。在大部分的論文中，僅探討對於單排單向路線的停車函數是否成功以及其成功的停車函數的數量[3]，我們希望將停車函數和機率做結合，並將停車函數其相關研究運用在改善停車場路線以及在立體停車場的停車規則探討，並運用各種不同條件來觀察[4-5]，分析各種停車規則下停車成功的機率。

本研究將利用停車函數做為一個基礎概念對「單排單向道停車場」、「雙排雙向道停車場」，以及為了探討立體停車場而延伸出的「雙排雙向道結合樓層的單排單向道停車場」的駕車行為數學模式之停車方式，進行設計並論證、計算與比較，希望可對立體停車場的停車問題進行具創新性的分析結果討論。

(一)以數學模型表示「雙排雙向」停車之各種狀況。

(二)結合「雙排雙向」(註:各樓層停車路線)、「單排單向」(註:樓層與樓層連接之狀況)設計立體停車場並以加權參數設計駕駛對於各樓層停車的機率。

(三)討論立體停車場與平面停車場停車模式的差異性分析。

一、 名詞解釋

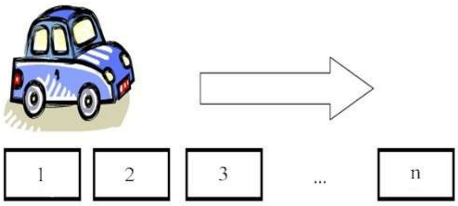
(一)停車數列、停車函數

假設共有5位司機，會有一停車數列$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$表示每位司機想停的車位，其中$w_i$表示第$i$位司機想停的車位編號。例如第一位司機想停的車位編號為4，則$w_1 = 4$。若根據停車動線與規則，最後司機們能成功停到的車位為$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$，則此這樣的對應關係為一停車函數。

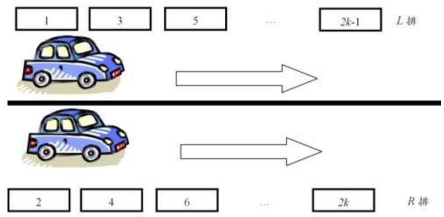
(二)「單排單向」停車規則

「單排單向」停車規則為停車函數在基本定義中假設的停車狀況。在一條道路的一側有停車位，司機只能一路往前開，不能回頭(因為是單向道)，若到最後一個停車位之後，還是找不到可停的停車位，就只能離開(如圖一)。

1. 單行道中有n個車位，並有n位司機想將他們的車子停入此巷中。
2. 車位編號依序從小到大編上1到n。
3. 如果某位司機想停的車位被佔走，他將往前尋找最近的空車位並停入。
4. 若一位司機到最後仍無法找到車位，則離開單行道。
5. 舉例：假設$n = 5$，假設現在有兩數列$(2,3,3,1,4)$、$(3,1,5,4,4)$為司機的喜好，第一個數列的所有司機都可以停得到車位；而第二個數列的第5位司機將停不到車位。



圖一：單排單向停車規則



圖二：雙排雙向停車規則

(三)雙排雙向停車規則

「雙排雙向」停車規則為考慮到上下樓層相接所造成的狀況，並參考現實生活中的設計，一雙向道兩側皆有車位，駕駛能選擇其中一排車位並停入(如圖二)。

1. 有 n 個車位，n 個司機將停入此停車道。
2. 在停車道內，當車位已經被人捷足先登時，將會轉向另一側車道繼續尋找停車位(不再考慮原排的停車位)，或者繼續沿直線開下去，此比例設定為 $\frac{1}{2}$ ，若直到離開都停不到車位，將會由上方的出口離開此停車場。(註：此為研究狀況中的其中一項)
3. 某位司機想停的停車格編號為偶數，那他將從右排(R 排)進入巷子並開往自己想要的位置，相對的，某位司機想要停的停車格編號為奇數，那他將從左排(L 排)進入。
4. 車位編號：

(1)當 $n=2k$ 時：

(i) 左側從前到後，依序編上奇數：$1\sim 2k-1$，

(ii) 右側從前到後，依序編上偶數：$2\sim 2k$ 。

(2)當 $n=2k+1$ 時：

(i) 左側從前到後，依序編上奇數 $1\sim 2k+1$，

(ii) 右側從前到後，依序編上偶數 $2\sim 2k$ 。

5. 舉例：

假設 $n=4$ ，有一停車數列 $(2,3,1,3)$ ，此時:

第一位司機：因為 2 號車位為空，所以就停入 2 號車位。第二、三位司機以此類推。

第四位司機：因為 3 號車位已滿，所以情況有 2 種：

第 1 種：向前直走，並且離開停車場，將此結果視為失敗。

第 2 種：向右轉到 4 號車位，此時 4 號車位為空，就會停入 4 號車位，此結果為成功。

根據上面 2 種情況，我們可以得知，停車數列 $(2,3,1,3)$ 的成功比例為 $\frac{1}{2}$ 。

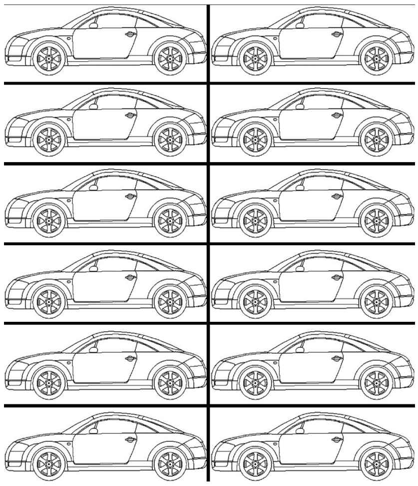
(四)「必然成功」停車數列與「必然失敗」停車數列

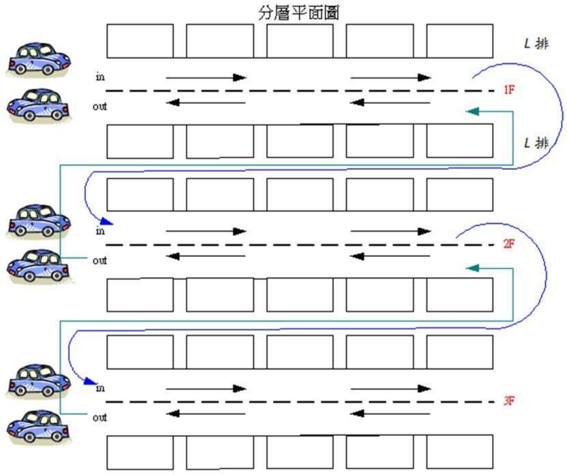
即成功比例分別為 1 和 0 的數列。例如：在 $n=4$ 時，$(1,4,3,2)$ 為「必然成功」停車數列，而 $(4,4,4,4)$ 為「必然失敗」停車數列。

(五)立體停車場停車規則

立體停車場停車規則為參照現實生活所設計。每層樓都有 n' 個車位，駕駛可任選一

層樓，任一排(F_iL(第 i 層左邊的停車格)或 F_iR(第 i 層右邊的停車格))之車位停入(圖四)。


圖三



圖四

1. 有 $F(s,n')$ (註: $F(s,n')$ 其中 s 是總樓層數，總共有 $s\times n'=n=F(s,n')$ 個車位，和 n 位司機將停入此停車場。
2. 樓層越高，駕駛停的意願越低。$E_i=2^{-i}$(其中 s 是總樓層數，i 是駕駛想停的樓層數)。
3. 在停車道內，若車位已經被別人停，則轉向另一側車道繼續尋找停車位，或繼續直線開下去，此比例設定為 $\frac{1}{2}$ ，若直到離開都停不到車位，將會前往另一樓層尋找停車位。
4. 駕駛尋找樓層停車時，只能往上找，不能往下找。
5. 舉例：
   假設 $n=6$ ，且 F_s(總樓層之停車數列)=$(F_1 1,F_3 2,F_3 2,F_1 2,F_2 1,F_2 2)$($F_i j$ 表第 i 層第 j 個停車格)，其中 $s=3$ 。第三位司機：因 $F_3 2$ 已滿，所以有 $\frac{1}{2}$ 的機率停入 $F_3 1$ 或離開。

二、 符號定義

n ：代表司機數，在本次研究中也代表車位數。當 $n=0$ 時，成功數列個數定義為 1 。

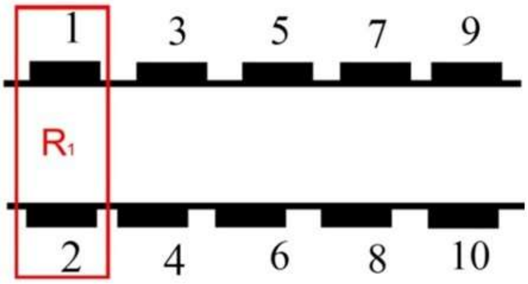
P_n ：表示 n 位司機在單排停車狀況下的成功數列個數[3]，公式為 $(n+1)^{n-1}$ 。

r ：表示 L(左)排的車位個數，即 $r=\left[\frac{n+1}{2}\right]$。

R_k ：由 $\{2k-1,2k\}$ 組成的集合，如下圖五。

R' ：設一個停車數列為 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ ，則 R' 數列為 $(b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n)$ ，且 $b_i=\left[\frac{a_i+1}{2}\right]$。

F_k ：R' 數列中 k 的個數，且 $\sum_{k=1}^{r}F_k=n$。假如一 R' 數列為 $(1,2,1,1)$ ，則 $F_1=3,F_2=1$ 。



圖五：1, 2 屬於 R_1

舉例來說，$n=7$ 之停車數列：$(2,5,6,1,4,3,5)$ ，

1. $r=4$

2. $R'=(1,3,3,1,2,2,3)$

3. $F_1=2, F_2=2, F_3=3, F_4=0$

樓層符號：

F_i ：樓層數，在本次研究中也當作樓層停車函數之數列

n' ：各樓層停車位之數

$F_{d(i)}$ ：第 i 層未找到停車位的司機數

s ：總樓層數

F_s ：總樓層之停車數列

E_i ：各層樓停車機率加權參數，$0 \le E_i \le 1$

參、 研究設備及器材

硬體部分：紙、筆、電腦。

軟體部分：文書處理軟體 *Word 2010*、繪圖軟體 *GeoGebra5.0*、*Mathtype6.0*、*C* 程式。

肆、 研究方法及過程

一、本研究將平面停車問題，由各狀況中歸納出規律，並求出其一般式，再利用程式進行檢驗，最後根據以上研究假設與定義，進行分析及論證得出結論。

二、「只直走」狀況

(一)停車規則

1. 若欲停車位為空格即停入。
2. 若欲停車位遭佔據，則繼續向前尋找最近空車位。
3. 若皆無法停到車位，即離開此停車道。
4. 舉例：
   $n=7$，一個數列$(3,4,1,3,6,7,2)$，第1、2、3位司機皆停到想停的車位，第4位司機在此狀況下，因為3號車位被佔據而前進到5號車位，第5、6、7位司機也停到想停的車位。此為一「必然成功」停車數列。

(二)成功停車之比例

<u>定理1</u>

n為司機數(停車位數)，$S_n^{直}$表示「只直走」情況時的成功比例，則成功比例$S_n^{直}$會隨著n上升而下降。亦即，若$S_n^{直}=\dfrac{(r+1)^{r-1}((n-r)+1)^{(n-r)-1}\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}{n^n}$，則$S_n^{直}\geq S_{n+1}^{直},n\geq 1$。

由文獻[11]可知「只直走」狀況的停車數列成功數為$(r+1)^{r-1}((n-r)+1)^{(n-r)-1}\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$，

所以停車數列成功比例$S_n^{直}=\dfrac{(r+1)^{r-1}((n-r)+1)^{(n-r)-1}\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}{n^n}$。

<u>證明</u>

1. 當n為偶數：

設$n=2k$，$k\in\mathbb{N}$，則$r=k$，所以$S_n^{直}=\dfrac{(k+1)^{k-1}(k+1)^{k-1}\dfrac{(2k)!}{(k!)^2}}{(2k)^{2k}}$ ....$(E1)$

$n+1=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$ ，則 $r=k+1$ ，所以 $S_{n+1}^{直}=\dfrac{(k+2)^k(k+1)^{k-1}\dfrac{(2k+1)!}{(k+1)!k!}}{(2k+1)^{2k+1}}$

則 $S_n^{直}=\dfrac{(k+1)^{k-1}(k+1)^{k-1}\dfrac{(2k)!}{(k!)^2}}{(2k)^{2k}}$

$$=\frac{(k+2)^k(k+1)^{k-1}\dfrac{(2k+1)!}{(k+1)!k!}}{(2k+1)^{2k+1}}\times\left(\frac{(k+1)^{k-1}}{(k+2)^k}\times\frac{(2k)!}{(2k+1)!}\times\frac{(k+1)!}{k!}\times\frac{(2k+1)^{2k+1}}{(2k)^{2k}}\right)$$

$$=S_{n+1}^{直}\times\left(\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k\times\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{2k}\right)=S_{n+1}^{直}\times\left(\frac{\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{2k}}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k}\right)。$$

因為 $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$ 為遞增函數，所以 $\left(\dfrac{2k+1}{2k}\right)^{2k}>\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}>\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^k$ ，

即 $\left(\dfrac{\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{2k}}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k}\right)>1$ 。故當 n 為偶數時，$S_n^{直}\ge S_{n+1}^{直}$，$n\ge1$ 成立。

2. 當 n 為奇數：

設 $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$，則 $r=k+1$，所以 $S_n^{直}=\dfrac{(k+2)^k(k+1)^{k-1}\dfrac{(2k+1)!}{(k+1)!k!}}{(2k+1)^{2k+1}}$ ....$(E2)$

$n+1=2k+2,\ k\in\mathbb{N}$ ，則 $r=k+1$ ，所以 $S_{n+1}^{直}=\dfrac{(k+2)^k(k+2)^k\dfrac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}}{(2k+2)^{2k+2}}$

則

$$S_n^{直}=\frac{(k+2)^k(k+1)^{k-1}\dfrac{(2k+1)!}{(k+1)!k!}}{(2k+1)^{2k+1}}=S_{n+1}^{直}\times\left(\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k\times\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{2k+1}\right)=S_{n+1}^{直}\times\left(\frac{\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{2k+1}}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k}\right)$$

$$=\frac{(k+2)^k(k+2)^k\dfrac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}}{(2k+2)^{2k+2}}\times\left(\frac{(k+1)^{k-1}}{(k+2)^k}\times\frac{(2k+1)!}{(2k+2)!}\times\frac{(k+1)!}{k!}\times\frac{(2k+2)^{2k+2}}{(2k+1)^{2k+1}}\right)$$

因為 $f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ 為遞增函數，所以 $\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{2k+1}>\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}>\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k}$，

即 $\left(\frac{\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{2k+1}}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k}}\right)>1$。故當 n 為奇數時，$S_n^{直}\ge S_{n+1}^{直}$，$n\ge1$ 成立。

綜合1.、2.知，$S_n^{直}\ge S_{n+1}^{直}$，$n\ge1$ 成立。 ■

三、「只轉彎」狀況

(一)停車規則

1. 若欲停車位為空格即停入。
2. 若欲停車位遭佔據則轉向另一車道尋找空車位。
3. 若轉向後無法找到車位即離開此停車道。
4. 舉例：$n=5$ 時，一個數列 $(1,3,1,5,4)$，第1、2位司機停到自己想要的車位，第3位司機在此狀況下只能轉向到2，其餘司機皆停到自己想停的車位。此為一「必然成功」停車數列。成功停車數列個數

(二) 成功停車之比例

> <u>定理2</u>
>
> n 為司機數(停車位數)，$S_n^{彎}$ 表示「只轉彎」情況時的成功比例，則成功比例 $S_n^{彎}$ 會隨著 n 上升而下降。亦即，若 $S_n^{彎}=\frac{n!2^{n-r}}{n^n}$，則 $S_n^{彎}\ge S_{n+1}^{彎}, n\ge1$，且此時 $r=\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$。

由文獻[11]可知「只轉彎」狀況的停車數列成功數為 $n!2^{n-r}$，所以停車數列成功比例 $S_n^{彎}=\frac{n!2^{n-r}}{n^n}$。

<u>證明</u>

1. 當 n 為偶數

設 $n=k$, $k\in\mathbb{N}$，則 $r=\frac{k}{2}$，所以 $S_n^{彎}=\frac{k!2^{\frac{k}{2}}}{k^k}$ ……………………………………………… ($E3$)

$n+1=k+1,\ k\in\mathbb{N}$，則 $r=\frac{k}{2}+1$，所以 $S_{n+1}^{彎}=\frac{(k+1)!2^{\frac{k}{2}}}{(k+1)^{k+1}}$

則 $S_n^{\text{彎}} - S_{n+1}^{\text{彎}} = \dfrac{k!2^{\frac{k}{2}}}{k^k} - \dfrac{(k+1)!2^{\frac{k}{2}}}{(k+1)^{k+1}} = \dfrac{2^{\frac{k}{2}}}{k^k \cdot (k+1)^{k+1}}\left(k!(k+1)^{k+1} - (k+1)!k^k\right)$

$$= \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k^k \cdot (k+1)^{k+1}} \cdot k!\left((k+1)^{k+1} - (k+1)k^k\right) = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k^k \cdot (k+1)^{k+1}} \cdot k!(k+1)\left((k+1)^k - k^k\right) \geq 0$$

故 $S_n^{\text{彎}} \geq S_{n+1}^{\text{彎}}, n \geq 1$ 成立。

2. 當 n 為奇數

設 $n = k$，$k \in \mathbb{N}$，則 $r = \dfrac{k}{2}$，所以 $S_n^{\text{彎}} = \dfrac{k!2^{\frac{k}{2}}}{k^k}$ ....$(E4)$

$n+1 = k+1,\ k \in \mathbb{N}$，則 $r = \dfrac{k}{2}$，所以 $S_{n+1}^{\text{彎}} = \dfrac{(k+1)!2^{\frac{k}{2}}}{(k+1)^{k+1}}$

則

$$S_n^{\text{彎}} - S_{n+1}^{\text{彎}} = \frac{k!2^{\frac{k}{2}}}{k^k} - \frac{(k+1)!2^{\frac{k}{2}}}{(k+1)^{k+1}} = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k^k \cdot (k+1)^{k+1}}\left(k!(k+1)^{k+1} - (k+1)!k^k\right)$$

$$= \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k^k \cdot (k+1)^{k+1}} \cdot k!\left((k+1)^{k+1} - (k+1)k^k\right) = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k^k \cdot (k+1)^{k+1}} \cdot k!(k+1)\left((k+1)^k - k^k\right) \geq 0$$

故 $S_n^{\text{彎}} \geq S_{n+1}^{\text{彎}},\ n \geq 1$ 成立。 ■

四、「賣場平面樓層路線」

(一)停車規則

1. 若欲停車位為空格即停入。
2. 若欲停車位遭佔據則看另一側屬同一 R_k 之車位。
3. 若無則繼續向下一個停車區 R_k 尋找。
4. 若皆無法找到車位則離開。
5. 舉例：$n = 4$ 時，有一停車數列 $(1,3,2,2)$，此時：

   第一位司機：因為1號車位為空，所以就停入1號車位。

   第二位司機：因為3號車位為空，所以就停入3號車位。

   第三位司機：因為2號車位為空，所以就停入2號車位。

   第四位司機：因為2號車位已滿，所以就會移動到下一個區域去找車位，首先因為一開始是由 R 排進入，會以 R 排的為優先，剛好下一區域的4號車位為空，所以就停入4號車位。

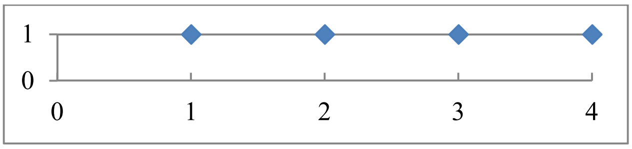
（二）以程式模擬得到下表1-1：

表1-1：$n=2$ 賣場平面樓層路線

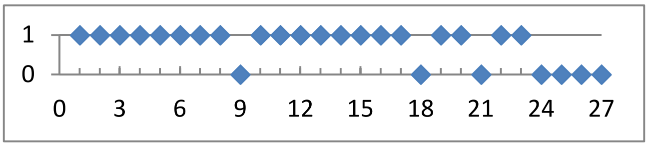
數列	成功(1) 失敗(0)	數列	成功(1)失敗(0)
(1, 1)	1	(2, 1)	1
(1, 2)	1	(2, 2)	1

表1-2：$n=3$ 賣場平面樓層路線

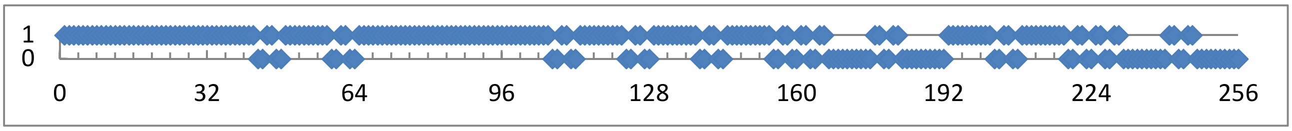
數列	成功(1) 失敗(2)	數列	成功(1) 失敗(2)	數列	成功(1) 失敗(2)
(1,1,1)	1	(2,1,1)	1	(3,1,1)	1
(1,1,2)	1	(2,1,2)	1	(3,1,2)	1
(1,1,3)	1	(2,1,3)	1	(3,1,3)	0
(1,2,1)	1	(2,2,1)	1	(3,2,1)	1
(1,2,2)	1	(2,2,2)	1	(3,2,2)	1
(1,2,3)	1	(2,2,3)	1	(3,2,3)	0
(1,3,1)	1	(2,3,1)	1	(3,3,1)	0
(1,3,2)	1	(2,3,2)	1	(3,3,2)	0
(1,3,3)	0	(2,3,3)	0	(3,3,3)	0



圖六：$n=2$ 數列成功比例



圖七：$n=3$ 數列成功比例



圖八：$n=4$ 數列成功比例

命題1：在「賣場平面樓層路線」規則下，若一數列符合下式，其為一「必然失敗」停車數列。

$$\sum_{k=1}^{r-1}(r-k)F_k < r^2 - r$$

其中 $r=\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$，$n$ 為司機數(停車位數)。

命題 1 論證

因為 $F_1<2$ 時，表示只會有少於 2 位的司機停入 $R_1 \Longrightarrow R_1$ 無法停滿。

所以 $F_1<2$ ，必失敗。

以此作推廣，若符合以下其中一項，此數列為「必然失敗」停車數列：

$$F_1<2$$
$$F_1+F_2<4$$
$$\vdots$$
$$F_1+F_2+F_3+\cdots+F_{r-1}<2(r-1)$$

但最後一項根據名詞解釋(三)-1：「有 n 個車位，和 n 位司機將停入此停車場」，所以可將

$$\begin{cases} F_1+F_2+F_3+\cdots+F_{r-1}+F_r<2r-1 & \text{，當 } n \text{ 為奇數} \\ F_1+F_2+F_3+\cdots+F_{r-1}+F_r<2r & \text{，當 } n \text{ 為偶數} \end{cases}$$

其省略。將上式相加，得 $\sum_{k=1}^{r-1}(r-k)F_k<r^2-r$ 。

「雙排雙向」必滿足此式。任一 R_k 未被停滿，此停車數列就不成功。 ■

命題 2：

n 為偶數時，在「賣場平面樓層路線」狀況下的成功停車數列的個數為

$$f(n)=\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in A}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^n$$

其中 n 為司機數(停車位數) $A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\,|\,x_1\ge 2, x_1+x_2\ge 4,\cdots,\sum_{i=1}^{r-1}x_i\ge 2(r-1)\}$ ；

n 為奇數時，在「賣場平面樓層路線」狀況下的成功停車數列的個數為

$$f(n)=\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in B}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^n+\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in C}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^{n-1}$$

其中 n 為司機數(停車位數) $B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\,|\,x_1\ge 2, x_1+x_2\ge 4,\cdots,\sum_{i=1}^{r-1}x_i\ge 2(r-1), x_r=0\}$ ，

$C=\{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\,|\,x_1\ge 2, x_1+x_2\ge 4,\cdots,\sum_{i=1}^{r-1}x_i\ge 2(r-1), x_r=1\}$

命題 2 論證

n 為偶數時，設函數 $f(n)$ 表示所有不符合命題 1 的數列排列數，

我們令 $x_k=F_k$ ，且 $A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\,|\,x_1\ge 2, x_1+x_2\ge 4,\cdots,\sum_{k=1}^{r-1}x_k\ge 2(r-1)\}$。因為 R' 數列

的每個數有兩種可能，所以乘上 2^n 為停車數列的個數。所以

$$f(n)=\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in A}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^n$$

舉例來說：在$n=4$時，成功的R'數列經過由小到大排列後有：$(1,1,1,1)$、$(1,1,1,2)$、$(1,1,2,2)$，得到下表：

R'數列	F_1	F_2	R'數列排列數
$(1,1,1,1)$	4	0	1
$(1,1,1,2)$	3	1	4
$(1,1,2,2)$	2	2	6
排列數總和=11			

最後$11\times 2^4=176$，即為$n=4$時成功的停車數列個數。

n為奇數時，設函數$f(n)$表示所有不符合命題 1 的數列排列數，

我們令$x_k=F_k$，且$B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\mid x_1\ge 2, x_1+x_2\ge 4,\cdots,\sum_{k=1}^{r-1}x_k\ge 2(r-1)\}$、

$C=\{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\mid x_1\ge 2, x_1+x_2\ge 4,\cdots,\sum_{i=1}^{r-1}x_i\ge 2(r-1), x_r=1\}$，因為$R'$數列中，符合$A$集合的每個數有兩種可能，所以乘上$2^n$即為$A$集合的停車數列的個數，而$R'$數列中，符合$B$集合中，除了$x_r$以外的每個數有都兩種可能，而$x_r$僅有一種可能，所以乘上$2^{n-1}$即為$B$集合的停車數列的個數。最後再將$A$集合和$B$集合的停車數列的個數相加，即為$f(n)$。所以$f(n)=\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in B}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^n+\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in C}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^{n-1}$。舉例來說：

在$n=3$時，成功的R'數列經過由小到大排列後有：$(1,1,1)$和$(1,1,2)$，得到下表：

R'數列	F_1	F_2	R'數列排列數
$(1,1,1)$	3	0	1
$(1,1,2)$	2	1	3

因為$(1,1,1)$屬於集合A，所以集合A的R'數列排列數總和是 1，因為集合A裡的每個數有兩種可能，所以乘上2^n，而$(1,1,2)$屬於集合B，所以集合B的R'數列排列數總和是 3，因為集合B裡除了x_r以外的每個數有都兩種可能，所以乘上2^{n-1}，最後$1\times2^3+3\times2^2=20$即為$n=3$時成功的停車數列個數。 ■

由於$f(n)$是所有不符合命題 1 的數列排列數，所以「雙排雙向」必跟

$$f(n)=\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in A}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^n$$ 或

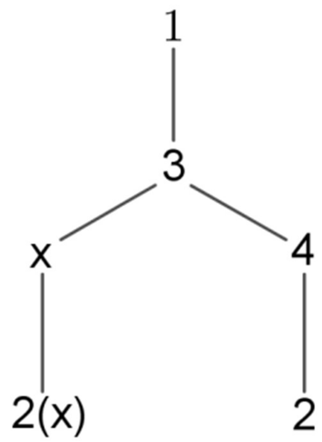
$$f(n)=\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in B}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^n+\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in C}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^{n-1}$$ 有關聯。

五、「隨機直走轉彎」狀況

(一)停車規則

1. 若欲停車位為空格即停入。
2. 若欲停車位遭佔據則有 $\frac{1}{2}$ 比例直走或轉向另一排尋找最近空車位。
3. 若轉向後則不能返回，例如：一個司機想停3號車位，但3號車位遭到佔據，又此司機選擇右轉至4號車位。不幸的是，4號車位也被占據，根據此規則，司機只能前進到6號車位繼續尋找車位。
4. 若皆無法停到車位即離開此停車道。

(二)首先，我們先以樹狀圖進行得出數列的成功比例。



圖九

<u>樹狀圖</u>

1. 每一層表示每位司機所停到車位的<u>實際狀況</u>。
2. 舉例：

Step1：假如 $n=4$，停車數列 $(1,3,3,2)$ 將可畫出一樹狀圖(如圖九)。

Step2：此樹狀圖的深度為和 n 一樣為4，同深度的各個節點表示每位司機所有可能停的位置，當遇到被佔據的位置時，有轉向或直走，如圖九中的第三層，右邊的分支表示右轉的結果，也就是停到位置4，左邊的分支表示直走的結果，也就是離開此巷子。

Step3：圖中第一位司機停入1號車位，所以途中第一層填入1；同理第二位司機停入3，圖中第二層填入3。當第三位司機到達3號車位後，發現到此車位已被佔據，所以他將有兩個選擇：

1. 右轉停入4號車位，
2. 直走離開此停車場，

所以途中第三層出現分支：

1. 左分支填入X表示離開車位。
2. 填入4(右轉停入4號車位)，最後一位司機停入二號，分別在兩節點分別填入2，但左分支之上游節點有出現X，所以在2旁註解X表示此狀況為失敗。

由圖九可看出：停車數列$(1,3,3,2)$之成功比例為$\frac{1}{2}$。

我們$n=3$、$n=4$的數列樹狀描繪，並得出比例。正當進行$n=5$時發現，繪圖速度降低，效率下降，分支快速變多。因此我們得出結論：樹狀圖無法快速地將一數列的比例得出。

(二)程式驗證結果

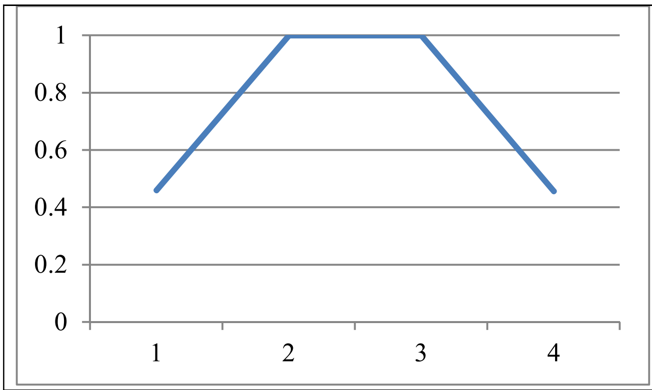
1. 我們以程式將數列反覆進行模擬，得到其大略的比例：

表$2-1$：$n=2$大略比例，平均=0.729056

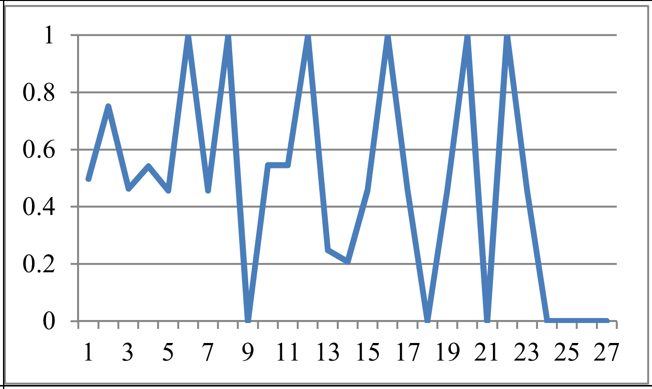
數列	大略比例	數列	大略比例
$(1, 1)$	0.46001	$(2, 1)$	1
$(1, 2)$	1	$(2, 2)$	0.456215

表$2-2$：$n=3$大略比例，平均=0.464798

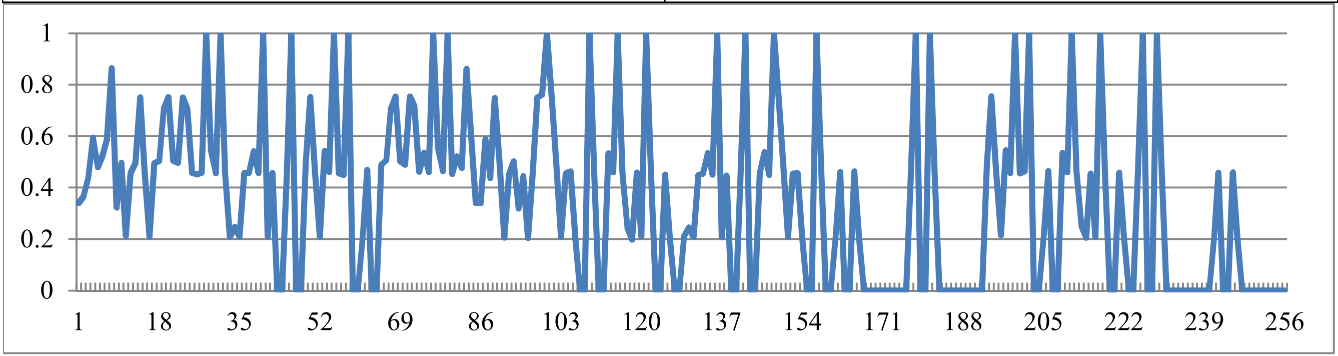
數列	大略比例	數列	大略比例	數列	大略比例
$(1, 1, 1)$	0.498234	$(2, 1, 1)$	0.545084	$(3, 1, 1)$	0.459236
$(1, 1, 2)$	0.750879	$(2, 1, 2)$	0.545081	$(3, 1, 2)$	1
$(1, 1, 3)$	0.46383	$(2, 1, 3)$	1	$(3, 1, 3)$	0
$(1, 2, 1)$	0.541934	$(2, 2, 1)$	0.249088	$(3, 2, 1)$	1
$(1, 2, 2)$	0.456713	$(2, 2, 2)$	0.209265	$(3, 2, 2)$	0.458183
$(1, 2, 3)$	1	$(2, 2, 3)$	0.458495	$(3, 2, 3)$	0
$(1, 3, 1)$	0.457082	$(2, 3, 1)$	1	$(3, 3, 1)$	0
$(1, 3, 2)$	1	$(2, 3, 2)$	0.457738	$(3, 3, 2)$	0
$(1, 3, 3)$	0	$(2, 3, 3)$	0	$(3, 3, 3)$	0



圖十：$n=2$ 大略比例折線圖



圖十一：$n=3$ 大略比例折線圖



圖十二：$n=4$ 大略比例折線圖

2.於上述發現：

命題 3：「隨機直走轉彎」狀況存在成功比例為1的數列，此數列共有 $n!$ 個，其中 n 為司機數(停車位數)。

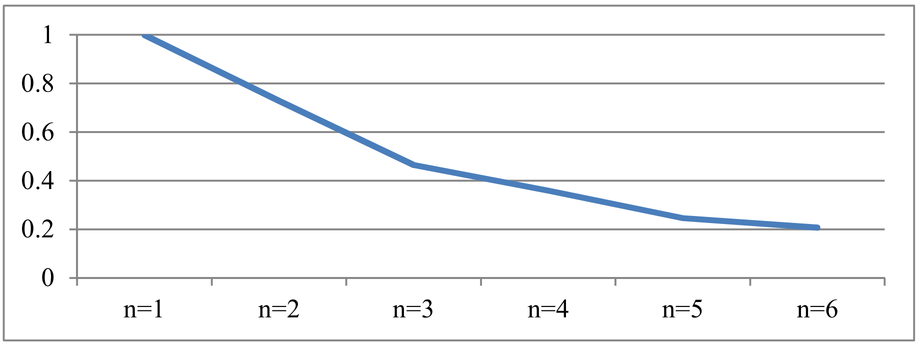
命題 3 論證

因為若所有司機皆不停到彼此想停的車位而停入，則必不會有人離開停車場
所以此停車數列的元素必定有 $1\sim n$ ，將這些元素排列，得 $n!$。 ■

3.我們進行了較大的 n 模擬，得下表：

表 3：「隨機直走轉彎」大略比例

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
成功比例	1	0.729056	0.464798	0.361336	0.246622	0.206376



圖十三：成功比例折線圖

依照此圖，我們能得出下式，其中 $S_n^{\text{直}}$ 和 $S_n^{\text{彎}}$ 表成功比例：

<u>命題 4</u>：若 n 為司機數(停車位數)，則在「只直走」和「只轉彎」狀況下，當 n 趨近於無限大時，停車成功機率趨近於 0 。

<u>命題 4 論證</u>

根據定理1和定理2得 $S_n^{\text{直}} \ge S_{n+1}^{\text{直}}$，$n \ge 1$ 及 $S_n^{\text{彎}} \ge S_{n+1}^{\text{彎}}$, $n \ge 1$，即 $S_n^{\text{直}}$ 和 $S_n^{\text{彎}}$ 會隨 n 上升而下降。

且由定理1和定理2中 $(E1) \sim (E4)$ 中的 $S_n^{\text{直}}$ 、 $S_n^{\text{彎}}$ 及 *Stirling* 公式[2]：$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ 及

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\times\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}=1$，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{\text{直}}=0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{\text{彎}}=0$ 。

<u>命題 4 證明</u>

1. $(E1)=\dfrac{(k+1)^{k-1}(k+1)^{k-1}\frac{(2k)!}{(k!)^2}}{(2k)^{2k}}$ ，所以 $\lim\limits_{k\to\infty} S_n^{\text{直}}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{(k+1)^{k-1}(k+1)^{k-1}\frac{(2k)!}{(k!)^2}}{(2k)^{2k}}$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{k!(k+1)^2}\times\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{k!(k+1)^2}\times\lim_{k\to\infty}\frac{(2k)!}{(2k)^{2k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!(k+1)}\times\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!(k+1)}\times\lim_{k\to\infty}\frac{(2k)!}{(2k)^{2k}}$$

其中

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!(k+1)}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}}\times\frac{e^{k+1}}{\sqrt{2\pi(k+1)}(k+1)}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+1}}{2\pi^{\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}\right)\ ;$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(2k)!}{(2k)^{2k}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k)!}{(2k)^{2k}}\times\frac{e^{2k}}{\sqrt{2\pi(2k)}}\times\frac{2\sqrt{\pi k}}{e^{2k}}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k)!}{(2k)^{2k}}\times\frac{e^{2k}}{\sqrt{2\pi(2k)}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{\pi k}}{e^{2k}}\right)$$

因為無窮數列$\left\langle \dfrac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\dfrac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}} \right\rangle$和$\left\langle \dfrac{(2k)!}{(2k)^{2k}}\times\dfrac{e^{2k}}{\sqrt{2\pi(2k)}} \right\rangle$的極限是1，所以

$$(E1)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+1}}{2\pi^{\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}}\right)$$

$$\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+1}}{2\pi^{\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k)!}{(2k)^{2k}}\times\frac{e^{2k}}{\sqrt{2\pi(2k)}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{\pi k}}{e^{2k}}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k)!}{(2k)^{2k}}\times\frac{e^{2k}}{\sqrt{2\pi(2k)}}\right)$$

$$\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+1}}{2\pi^{\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+1}}{2\pi^{\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{\pi k}}{e^{2k}}\right)$$

$$=1\times1\times1\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+1}}{2\pi^{\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+1}}{2\pi^{\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{\pi k}}{e^{2k}}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{2k+2}\times2\sqrt{\pi k}}{(2\pi)(k+1)^3e^{2k}}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{e^2\sqrt{k}}{(k+1)^3\sqrt{\pi}}$$

又因為$\lim_{k\to\infty}\dfrac{e^2\sqrt{k}}{(k+1)^3\sqrt{\pi}}=0$，所以$\lim_{k\to\infty}\dfrac{(k+1)^{k-1}(k+1)^{k-1}\dfrac{(2k)!}{(k!)^2}}{(2k)^{2k}}=0$

2. $(E2)=\dfrac{(k+2)^k(k+1)^{k-1}\dfrac{(2k+1)!}{(k+1)!k!}}{(2k+1)^{2k+1}}$，$\lim_{k\to\infty}S_n^{直}=\lim_{k\to\infty}\dfrac{(k+2)^k(k+1)^{k-1}\dfrac{(2k+1)!}{(k+1)!k!}}{(2k+1)^{2k+1}}$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+2)^{k+2}}{(k+2)^2(k+1)!}\times\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)^2k!}\times\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)!}{(2k+1)^{2k+1}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+2)^{k+2}}{(k+2)!(k+2)}\times\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!(k+1)}\times\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)!}{(2k+1)^{2k+1}}$$

其中$\lim_{k\to\infty}\dfrac{(k+2)^{k+2}}{(k+2)!(\mathrm{k+2})}=\lim_{k\to\infty}\left(\dfrac{(k+2)^{k+2}}{(k+2)!}\times\dfrac{\sqrt{2\pi(k+2)}}{e^{k+2}}\times\dfrac{e^{k+2}}{\sqrt{2\pi(k+2)}(\mathrm{k+2})}\right)$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+2)^{k+2}}{(k+2)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+2)}}{e^{k+2}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+2}}{\sqrt{2\pi(k+2)}(k+2)}\right)\quad;$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!(k+1)}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}}\times\frac{e^{k+1}}{\sqrt{2\pi(k+1)}(k+1)}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+1}}{\sqrt{2\pi(k+1)}(\mathrm{k+1})}\right)$$ ，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)!}{(2k+1)^{2k+1}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k+1)!}{(2k+1)^{2k+1}}\times\frac{e^{2k+1}}{\sqrt{2\pi(2k+1)}}\times\frac{\sqrt{2\pi(2k+1)}}{e^{2k+1}}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k+1)!}{(2k+1)^{2k+1}}\times\frac{e^{2k+1}}{\sqrt{2\pi(2k+1)}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2\pi(2k+1)}}{e^{2k+1}}\right)。$$

因為無窮數列$\left\langle\frac{(k+2)^{k+2}}{(k+2)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+2)}}{e^{k+2}}\right\rangle$、$\left\langle\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}}\right\rangle$和

$\left\langle\frac{(2k+1)!}{(2k+1)^{2k+1}}\times\frac{e^{2k+1}}{\sqrt{2\pi(2k+1)}}\right\rangle$的極限是1，所以

$$(\mathrm{E2})=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+2)^{k+2}}{(k+2)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+2)}}{e^{k+2}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+2}}{\sqrt{2\pi(k+2)}(\mathrm{k+2})}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}}\right)$$

$$\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+1}}{\sqrt{2\pi(k+1)}(\mathrm{k+1})}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k+1)!}{(2k+1)^{2k+1}}\times\frac{e^{2k+1}}{\sqrt{2\pi(2k+1)}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2\pi(2k+1)}}{e^{2k+1}}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+2)^{k+2}}{(k+2)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+2)}}{e^{k+2}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\times\frac{\sqrt{2\pi(k+1)}}{e^{k+1}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k+1)!}{(2k+1)^{2k+1}}\times\frac{e^{2k+1}}{\sqrt{2\pi(2k+1)}}\right)$$

$$\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+2}}{\sqrt{2\pi(k+2)}(\mathrm{k+2})}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+1}}{\sqrt{2\pi(k+1)}(\mathrm{k+1})}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2\pi(2k+1)}}{e^{2k+1}}\right)$$

$$=1\times1\times1\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+2}}{\sqrt{2\pi(k+2)}(\mathrm{k+2})}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{k+1}}{\sqrt{2\pi(k+1)}(\mathrm{k+1})}\right)\times\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2\pi(2k+1)}}{e^{2k+1}}\right)$$

$=\frac{e^2(2k+1)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(k+2)^{\frac{3}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}$，又因為$\lim_{k\to\infty}\frac{e^2(2k+1)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(k+2)^{\frac{3}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}=0$，所以

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(k+2)^k(k+1)^{k-1}\frac{(2k+1)!}{(k+1)!k!}}{(2k+1)^{2k+1}}=0$$

3. (E3)=$\frac{k!2^{\frac{k}{2}}}{k^k}$ $\lim_{k\to\infty}S_n^{彎}=\lim_{k\to\infty}\frac{k!2^{\frac{k}{2}}}{k^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{k^k}\times\lim_{k\to\infty}2^{\frac{k}{2}}$，

其中$\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{k^k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k!}{k^k}\times\frac{e^k}{\sqrt{2\pi k}}\times\frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k!}{k^k}\times\frac{e^k}{\sqrt{2\pi k}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k}$，

因為無窮數列$\left\langle \frac{k!}{k^k}\times\frac{e^k}{\sqrt{2\pi k}} \right\rangle$的極限是1，所以

$$(E3)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k!}{k^k}\times\frac{e^k}{\sqrt{2\pi k}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k}\times\lim_{k\to\infty}2^{\frac{k}{2}}=1\times\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k}\times\lim_{k\to\infty}2^{\frac{k}{2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}\sqrt{2}^k}{e^k}$$

又因為$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}\sqrt{2}^k}{e^k}=0$，所以$\lim_{k\to\infty}\frac{k!2^{\frac{k}{2}}}{k^k}=0$

4. $(E4)=\frac{k!2^{\frac{k}{2}}}{k^k}$ $\lim_{k\to\infty}S_n^{彎}=\lim_{k\to\infty}\frac{k!2^{\frac{k}{2}}}{k^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{k^k}\times\lim_{k\to\infty}2^{\frac{k}{2}}$，其中

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{k^k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k!}{k^k}\times\frac{e^k}{\sqrt{2\pi k}}\times\frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k!}{k^k}\times\frac{e^k}{\sqrt{2\pi k}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k},$$

因為無窮數列$\left\langle \frac{k!}{k^k}\times\frac{e^k}{\sqrt{2\pi k}} \right\rangle$的極限是1，所以

$(E4)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k!}{k^k}\times\frac{e^k}{\sqrt{2\pi k}}\right)\times\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k}\times\lim_{k\to\infty}2^{\frac{k}{2}}=1\times\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k}\times\lim_{k\to\infty}2^{\frac{k}{2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}\sqrt{2}^k}{e^k}$ 又因為

$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}\sqrt{2}^k}{e^k}=0$，所以$\lim_{k\to\infty}\frac{k!2^{\frac{k}{2}}}{k^k}=0$。 ■

<u>命題 5</u>：「賣場平面樓層路線」失敗停車數列之個數等於「隨機直走轉彎」必然失敗停車數列個數。

<u>命題 5 論證</u>

因為「賣場平面樓層路線」與「隨機直走轉彎」皆遵守命題4，所以失敗數列個數皆為 $n^n-f(n)$。 ■

<u>命題 6</u>：「賣場平面樓層路線」之成功尋得車位之比例大於或等於「隨機直走轉彎」之成功尋得車位之比例。

<u>命題 6 論證</u>

設a_k表示第k個「賣場平面樓層路線」停車數列之成功比例；b_k表示第k個「隨機直走轉彎」停車數列之成功比例。例如：$n=3$時，$(1,1,1)$為第1個數列，所以$k=1$；$(1,1,2)$為

第 2 個數列，所以 $k=2$。

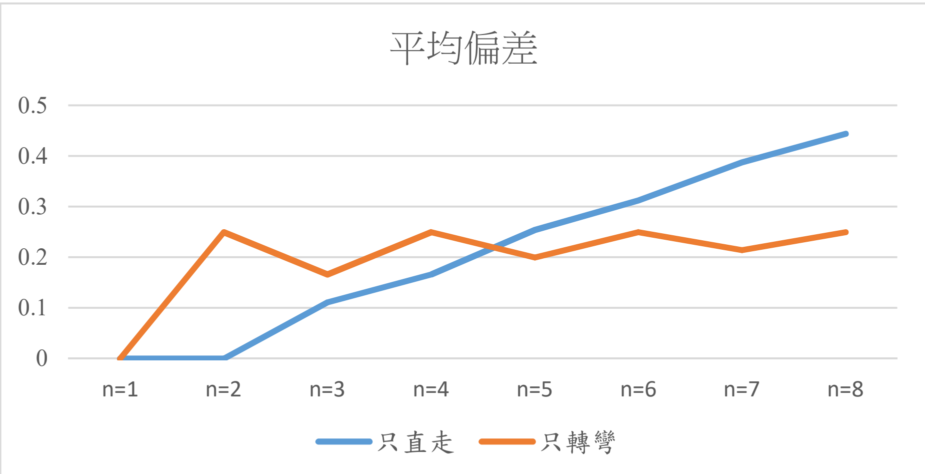
設當 $n=x$ 時，$m=x^x$。「賣場平面樓層路線」總比例 $=\frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{m}$，「隨機直走轉彎」總比例 $=\frac{\sum_{i=1}^{m} b_i}{m}$。因為只有 $a_i=1$ 和 $a_i=0$ 兩種情形，且第 k 個「賣場平面樓層路線」停車數列失敗，意味著第 k 個「隨機直走轉彎」停車數列失敗，所以 $a_i \geq b_i$。綜合上述，得：$\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{k} \geq \frac{\sum_{i=1}^{k} b_i}{k}$。■

統合定理 1、定理 2、命題 1～6、原題「單排停車」及文獻[11]，將 $n=1\sim7$ 的各狀況的成功機率寫成表 4，可從中發現在 $n\geq7$ 時，每個狀況的停車成功機率由大排到小依序是賣場平面樓層路線→單排停車→隨機直走轉彎→只直走→只轉彎。我們成功找出一種停車規則其成功機率能超過原題單排停車，由此可知，若要提高單排停車的成功率，便要將路線改成雙排，停車規則使用「賣場平面樓層路線」，便可提高停車成功的機率。

表 4：平面停車場的各狀況成功比例

	單排停車	只直走	只轉彎	賣場平面樓層路線	隨機直走轉彎
$n=1$	1	1	1	1	1
$n=2$	0.75	0.5	1	1	0.729256
$n=3$	0.592592593	0.333333333	0.444444444	0.740740741	0.464798
$n=4$	0.48828125	0.2109175	0.375	0.6875	0.360336
$n=5$	0.41472	0.1536	0.1536	0.54784	0.246622
$n=6$	0.360232339	0.109739369	0.12345679	0.518518518	0.206376
$n=7$	0.318312462	0.084998598	0.048959192	0.430996317	0.152882

六、偏差值



圖十四：平均偏差比較

(一)設第 i 位司機原本想停的車位為 W_i，實際上停到 P_i，則其偏差值 $D_i=|P_i-W_i|$。

(二)我們以程式得到在 n 為定值時所有的 D_i，取平均，並製作出圖十四。

(三)由圖十四可看出，只有「只轉彎」狀況的平均偏差不隨 n 上升而上升。

七、立體停車場部分(維度延伸至三維問題)

<u>命題 7</u>:在立體停車場各樓層停車失敗駕駛數為 $\sum_{i=1}^{s}F_{d(i)}=\frac{1}{2}n-F_s-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s-1}F_i$，其中 F_i 為各樓層停車成功數。

<u>命題 7</u>論證:各樓層加權常數 $E_i=\frac{1}{2^i}$，所以可以知道每往上一層駕駛停的意願變為 $\frac{1}{2}$，所以一開始所得到的各樓層駕駛願意停車的數量為 $F_1=\frac{1}{2}n,\ F_2=\frac{1}{4}n,\ F_3=\frac{1}{8}n,\ F_n=\frac{1}{2^n}n$。帶入實際狀況：

第一層失敗數：$\frac{1}{2}n-F_1$

第二層失敗數：$\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}n-F_1)-F_2$

第三層失敗數：$\frac{1}{8}n+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\frac{1}{2}n-F_1)+\frac{1}{2}(\frac{1}{4}n-F_2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}n-F_1))-F_3$

....

第 n 層失敗數：$\frac{1}{2^n}n+F_{d(1)}(\frac{1}{2})^{n-1}+F_{d(2)}(\frac{1}{2})^{n-2}+F_{d(3)}(\frac{1}{2})^{n-3}+....F_{d(n-1)}(\frac{1}{2})$

整理後可得：

$$F_{d(1)}=\frac{1}{2}n-F_1,F_{d(2)}=\frac{1}{2}n-F_2-\frac{1}{2}F_1,F_{d(3)}=\frac{1}{2}n-F_3-\frac{1}{2}F_1-\frac{1}{2}F_2,F_{d(s)}=\frac{1}{2}n-F_s-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s-1}F_i$$

將 $F_{d(1)},F_{d(2)},F_{d(3)},...,F_{d(n)}$ 相加得 $\sum_{i=1}^{s}F_{d(i)}=\frac{1}{2}n-F_s-\sum_{i=1}^{s-1}(\frac{(s-i)}{2}+1)F_i$。 ■

<u>命題 8</u>：在立體停車場中，當 n 趨近於無限大時，停車成功機率不趨近於 0。

<u>命題 8</u>論證：

設各樓層各有 n' 個車位，同層樓內每個位置被停的機率相同得各層樓各位置會被多少駕駛所選擇得 $F_1=\frac{\frac{1}{2}n}{n'},F_2=\frac{\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}F_{d(1)}}{n'},F_3=\frac{\frac{1}{8}n+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}F_{d(1)})+\frac{1}{2}F_{d(2)}}{n'},F_s=\frac{\frac{1}{2^s}n-\sum_{i=1}^{s-1}(\frac{1}{2^{s-i}})F_{d(i)}}{n'}$，其中

n'是一常數。因為分子$\frac{1}{2^s}n-\sum_{i=1}^{s-1}(\frac{1}{2^{s-i}})F_{d(i)}$不會趨近於 0，所以每個停車格都會有人想停，所以在F_s層時，分配到的司機數還是會足以將F_s層停滿的狀況。

伍、 研究結果

一、「只直走」狀況：

在「只直走」的情況下，成功停車數列個數為 $(r+1)^{r-1}((n-r)+1)^{(n-r)-1}\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ [11]，其中 n 為司機數(停車位數)，$r=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$。

<u>定理 1</u>：n 為司機數(停車位數)，則成功比例 $S_n^{直}$ 會隨著 n 上升而下降。亦即，若

$S_n^{直}=\dfrac{(r+1)^{r-1}((n-r)+1)^{(n-r)-1}\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}{n^n}$，則 $S_n^{直}\geq S_{n+1}^{直}, n\geq 1$。

二、「只轉彎」狀況：

在「只轉彎」狀況下，成功停車數列個數等於 $n!2^{n-r}$ [11]，其中 n 為司機數(停車位數)。

<u>定理 2</u>：n 為司機數(停車位數)，則成功比例 S_n 會隨著 n 上升而下降。亦即，若 $S_n^{彎}=\dfrac{n!2^{n-r}}{n^n}$，

則 $S_n^{彎}\geq S_{n+1}^{彎}, n\geq 1$。

三、「賣場平面樓層路線」狀況：

<u>命題 1</u>：在「賣場平面樓層路線」規則下，若一數列符合下式，其為一「必然失敗」停車數列。

$$\sum_{i=1}^{r-1}(r-i)F_i < r^2-r$$

其中 $r=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$，$n$ 為司機數(停車位數)。

<u>命題 2</u>：

n 為偶數時，在「賣場平面樓層路線」狀況下的成功停車數列的個數為

$$f(n)=\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in A}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^n,$$

其中 n 為司機數(停車位數)，$A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\,|\,x_1\geq 2, x_1+x_2\geq 4,\cdots,\sum_{i=1}^{r-1}x_i\geq 2(r-1)\}$；

n 為奇數時，在「賣場平面樓層路線」狀況下的成功停車數列的個數為

$$f(n)=\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in B}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^n+\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in C}\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_r!}\times 2^{n-1},$$

其中n為司機數(停車位數)，$B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\mid x_1\ge 2, x_1+x_2\ge 4,\cdots,\sum_{i=1}^{r-1}x_i\ge 2(r-1), x_r=0\}$，

$C=\{(x_1,x_2,\cdots,x_r)\mid x_1\ge 2, x_1+x_2\ge 4,\cdots,\sum_{i=1}^{r-1}x_i\ge 2(r-1), x_r=1\}$

1. 命題一皆符合「只直走」、「只轉彎」和「隨機直走轉彎」狀況。
2. 成功比例為$\dfrac{f(n)}{n^n}$

四、「隨機直走轉彎」狀況：

<u>命題3</u>：「隨機直走轉彎」狀況存在成功比例為1的數列，此數列共有$n!$個，其中n為司機數(停車位數)。

<u>命題4</u>：若n為司機數(停車位數)，則在「只直走」和「只轉彎」狀況下，$\lim_{n\to\infty}S_n^{直}=0$及$\lim_{n\to\infty}S_n^{彎}=0$。

五、比較

<u>命題5</u>：「賣場平面樓層路線」失敗停車數列之個數等於「隨機直走轉彎」必然失敗停車數列個數。

<u>命題6</u>：「賣場平面樓層路線」之成功尋得車位之比例大於或等於「隨機直走轉彎」之成功尋得車位之比例。

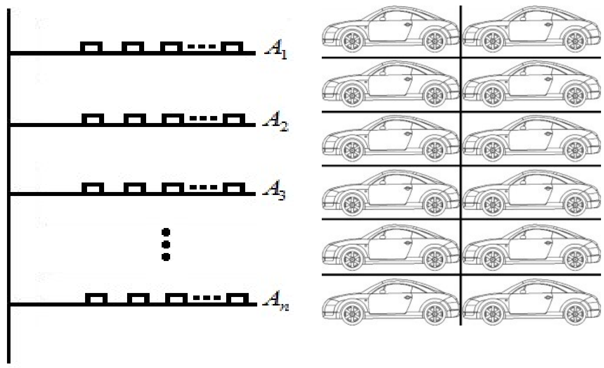
六、立體停車場路線分析

<u>命題7</u>：在立體停車場各樓層停車失敗駕駛數為$\sum_{i=1}^{s}F_{d(i)}=\frac{1}{2}n-F_s-\sum_{i=1}^{s-1}(\frac{(s-i)}{2}+1)F_i$，其中$F_i$為各樓層停車成功數。

<u>命題8</u>：在立體停車場中 $\lim_{n\to\infty}S_n^{直}=0$及$\lim_{n\to\infty}S_n^{彎}=0$ (參考命題4)不成立。

陸、 討論

設計新的停車路線規劃時，使用如「賣場平面樓層路線」等停車規則時，可以提升停車的效率，讓司機減少浪費的時間、卻又減少找不到車位的情況，若將這種路線應用於一般的停車場，甚至是較大規模的立體停車場路線規劃，將會有助於停車狀況的改善。



圖十五　立體停車場示意圖

本研究利用樓層加權參數的帶入，可以更完備的討論在各樓層駕駛停車的意願和狀況，希望設計出可以利用最少停車時間的立體停車場規劃。

立體停車設計一：假設一位司機想停的位置在 A_k 層，若在此樓層想要停的停車位遭佔據則繼續向前尋找最近有空的車位，若皆無法停到車位即離開此立體停車場。此狀況與「只直走」狀況相似，可為其推廣，公式如下：

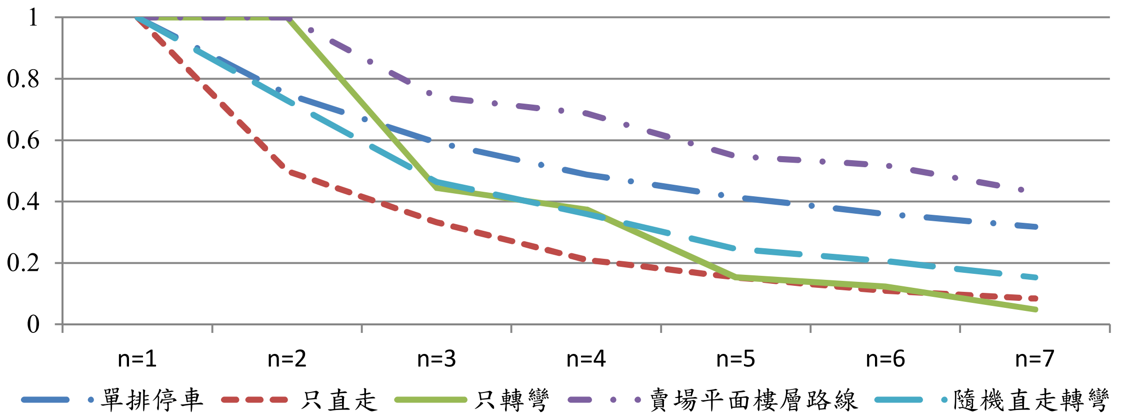
$$(a_1+1)^{a_1-1}(a_2+1)^{a_2-1}\cdots(a_n+1)^{a_n-1}\times\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)!}{a_1!a_2!\cdots a_n!}$$

圖十六：與「單排停車」相似

柒、 結論與應用

一、下表為n從 1 到 7 的在平面停車場的各狀況成功比例：

由表 4 繪出下圖：



圖十七：各種停車規則的成功比例

再由前定理發現及文獻$[4]$：$n \geq 7$，其成功比例大小依序為：

賣場平面樓層路線 ＞ 單排停車 ＞ 隨機直走轉彎 ＞ 只直走 ＞ 只轉彎

在原題「單排停車」、參考文獻[11]的「只直走」、「只轉彎」及自己設計出的「賣場平面樓層路線」和「隨機直走轉彎」中，僅我所設計的「賣場平面樓層路線」的成功停車比例高於原題的「單排停車」的成功停車比例，雖然「隨機直走轉彎」低於原題「單排停車」的成功停車比例，但依舊高於參考文獻[11]的「只直走」與「只轉彎」。

將結果對比生活中的停車方法，我們發現在$n \geq 6$時，接近我們停車規則中的「賣場平面樓層路線」規則，這符合研究結果；但在成功機率方面反應卻不明顯，我推測是因為大家通常想停的車位都在R_1，當越多人想停R_1，也就是說越後面的車位越少人想停，且由命題4可知，「必然失敗」停車數列會有兩種特質，一：F_i中當i越小，且數量$<2i$時，此數列為必然失敗數列；二、F_i中當i越大，且數量$>r-i+2$時，此數列為必然失敗數列。但因為多數人想停的車位都位於R_1，所以第一點不符合，且因為越後面的車位越少人想停，所以第二點難以達成，因此在生活中的停車數列失敗機率是低的。

二、在雙排停車的情況下，只有「賣場平面樓層路線」能超越「單排停車」。「賣場平面樓層路線」成功停車的比例，高於「單排停車」這個結論證明了，在n個車位時，雙排車位的成功停車比例是高於單排車位的停車比例，所以**將單向停車道規劃成「賣場平面樓層路線」為最佳設計**。

三、「只轉彎」路線在狹小車道($n \leq 6$)較「只直走」佳。

四、「賣場平面樓層路線」為「隨機直走轉彎」的上限值，所以停車動線管理應盡量確保司機已確認過左右之車位皆已遭佔據才繼續向前尋找車位。

五、立體停車場分析結果：由拓樸學的分析(如圖三)可知，多數的立體停車場結構可視為樓層間單排單向停車，且樓層內為平面雙向的停車問題，因此在車主會往下一層進行停車一定是所在樓層沒有位置的理性假設之下為之，故我們將樓層之間視為加權參數，可以合理化多數車主為何都只在最近的樓層停車，而不往下(上)一層找車位。

捌、 參考資料

[1]許志農(2021)。高級中學數學課本第二冊。新北市：龍騰文化。

[2]蔡聰明(民 82)。談 Stirling 公式。數學傳播，17(2)。

[3]賴俊儒 (2005)。停車就是彈硬幣。臺灣 2005 年國際科學展覽會作品說明書。

[4] On Parking Functions and The Tower of Hanoi. Retrieved January 1, 2022 , from https://arxiv.org/pdf/2206.00541.pdf

[5] Beck, M.:Parking Functions. Stanford Math Circle. Retrieved March 9, 2013, from http://math.stanford.edu/circle/2010fall.php(2010)

[6] Cameron, P.J., Johannsen, D., Prellberg, T., Schweitzer, P.: Counting Defective Parking Functions. (2008)

[7] PARKING FUNCTIONS, MULTI-SHUFFLE, AND ASYMPTOTIC PHENOMENA Retrieved December 4, 2021, from https://arxiv.org/pdf/2112.02251.pdf

[8] Generalizing Parking Functions with Randomness, Retrieved November 25, 2021 ,from https://tetali.math.gatech.edu/PUBLIS/parking_dm.pdf

[9]Beck, M,，Parking function，Stanford Math Circle，2010

[10] Shin, H.: Forests and Parking Functions. THE 61ST SÉMINAIRE LOTHARINGIEN DE COMBINATOIRE CURIA, PORTUGAL.Retrieved August 1, 1996, from http://www.emis.ams.org/journals/SLC/wpapers/s61vortrag/shin.pdf(2008)

[11] 劉繕榜、林謙、黃柏虔、胡裕仁、張宜武。快速找尋停車格問題分析-以「雙排單向道」停車為例。論文發表於第三十一屆組合數學與計算理論研討會。臺北市立大學。4 月 25 日至 26 日，2014。

[12] 倪道昇，大吞吐量之停車場，中華民國專利公報 103 (2014) 年 01 月 01 日。