第二十二屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA22-429

姓名：陳元鈞

作品名稱：千迴百轉，尋密初心—封閉折線在方格內運動軌跡經過的最多格數

參賽類別：數學

關鍵字：路徑最佳解、數學歸納法、雙變數函數

目 錄

千迴百轉，尋密初心—封閉折線在方格內運動軌跡經過的最多格

摘要

本研究探討封閉折線在方格內運動軌跡經過的最多格數，並且分矩形邊長為$n \times n$、$n \times (n+k)$討論。對此，我們再細分為$n \equiv 0,1,2,3 (mod\ 4)$及$k \equiv 0,1,2,3 (mod\ 4)$討論，並依各種情況歸納後提出最多格數之公式，並且使用數學歸納法證明其正確性，接著推廣導出$n \times n \times n$正立方體的最多格數之公式。最後以$Python$程式重複驗證各公式之正確性。

壹、　研究動機

有一天，我們在練習數學學科能力競賽時，在 IMO 國手預選題歷屆試題中，發現了一道非常有趣且具有挑戰性的問題如下：

在一個999×999 的正方形內，一人從任意方格開始，依據以下規則前進：

1.每次移動先向左或向右轉$90°$，再向前移動一格

2.運動軌跡不能相交

3.運動軌跡必須閉合

試求此人運動軌跡經過的最多格數

因原題數字過於龐大，我們舉邊長較小的圖形作為範例，以下是在7×7 正方形內的一種合乎規定走法：

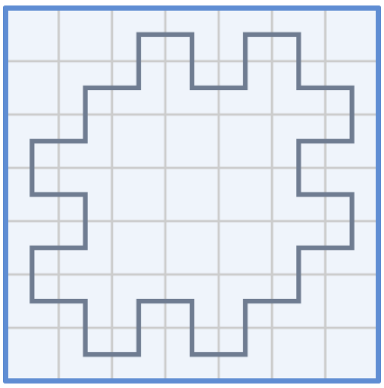
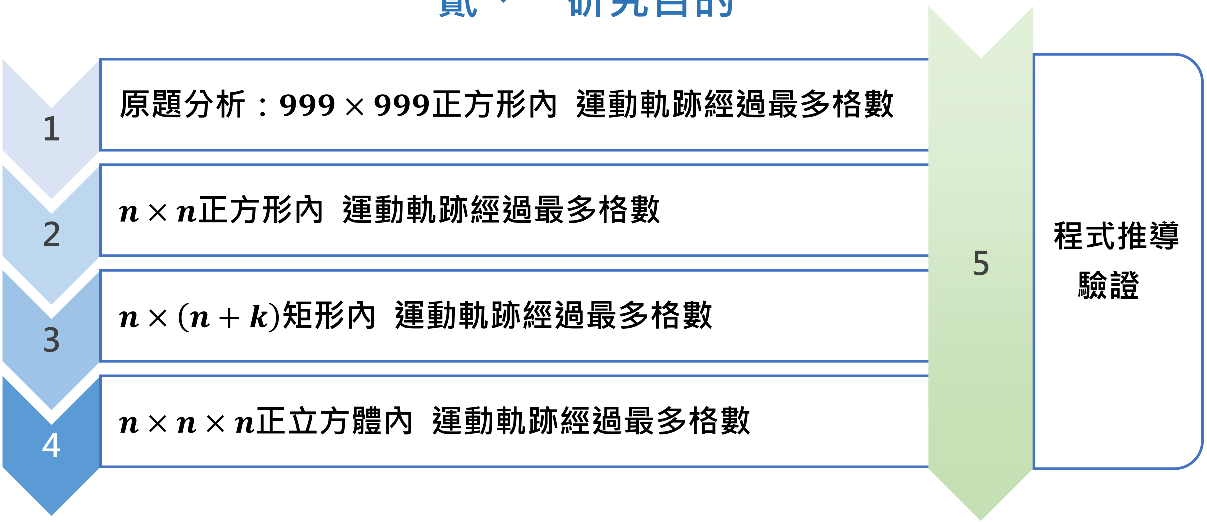


圖 壹-1

這個問題涉及到代數和幾何領域，需要運用不同的數學技巧和概念來解決。此外，這個問題可能還可以拓展研究範圍，探索更廣泛的數學主題，從而有助於發現更多的數學問題和解決方案。我們非常感興趣並想要更深入地著手研究！

貳、 研究目的



參、 研究設備及器材

Inkscape、*Geogebra*、*VSCode*、電子黑板

肆、 研究過程與方法

一、在999×999正方形內運動軌跡經過的最多格數

原題目：

在一個999×999正方形內，一人依據以下規則前進：

1.每次移動為向左或向右轉$90°$，再向前移動一格

2.運動軌跡不能相交

3.運動軌跡必須閉合

試求此人運動軌跡經過的最多格數

研究一：對不同邊長正方形進行歸納

為方便探討原題之問題，我們令$n \times n$正方形內運動軌跡經過最多格數為$f(n)$，並先從正方形邊長較小的圖形開始計算運動軌跡經過的最多格數，經歸納後希望找出規律。利用窮舉法，可得出表 1-1 如下：

表 1-1

分類	$n\equiv 0(mod\ 4)$	$n\equiv 1(mod\ 4)$	$n\equiv 2(mod\ 4)$	$n\equiv 3(mod\ 4)$
n	4	5	6	7
總格數	16	25	36	49
$f(n)$	12	16	28	32
未經過格數	4	9	8	17
n	8	9	10	11
總格數	64	81	100	121
$f(n)$	52	64	80	96
未經過格數	12	17	20	25
n	12	13	14	15
總格數	144	169	196	225
$f(n)$	124	144	168	192
未經過格數	20	25	28	33
n	16	17	18	19
總格數	256	289	324	361
$f(n)$	228	256	288	320
未經過格數	28	33	36	41

我們發現似乎會有四個數一循環的規律，於是以$(mod\ 4)$的方式分四組討論。

由於原題中給定的邊長$999\equiv 3(mod\ 4)$，故以下先由$n\equiv 3(mod\ 4)$這組開始討論。

研究二：此題運動軌跡經過的最多格數必$\leq 4\times 499^2$

證明：由左而右，下而上，令第i行第j列的格子記為(i,j)，並將格子依據以下規則標為A,B,C,D：

$$if\ i\equiv 0(mod\ 2), j\equiv 0(mod\ 2), then(i,j)=A$$

$$i\equiv 0(mod\ 2), j\equiv 1(mod\ 2), then(i,j)=B$$

$$i\equiv 1(mod\ 2), j\equiv 0(mod\ 2), then(i,j)=C$$

$$i\equiv 1(mod\ 2), j\equiv 1(mod\ 2), then(i,j)=D$$

D	B	D	B	D	B	D
C	A	C	A	C	A	C
D	B	D	B	D	B	D
C	A	C	A	C	A	C
D	B	D	B	D	B	D
C	A	C	A	C	A	C
D	B	D	B	D	B	D

圖 2-1

假設一人在A格⇒下一步可能為$B\ or\ C$。假設一人在B格⇒下一步可能為$A\ or\ D$。

假設一人在C格⇒下一步可能為$A\ or\ D$。假設一人在D格⇒下一步可能為$B\ or\ C$。

我們依此規律推論出可能的路線基本型，假設一人位於下圖中的A格，排除對稱走法後，由A到A共有三種可能走法，如圖：

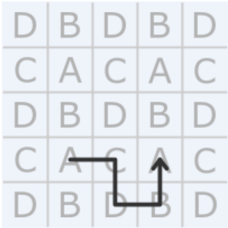


圖 2-2

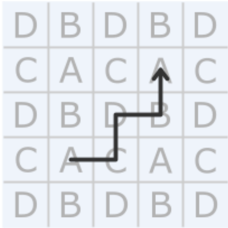


圖 2-3

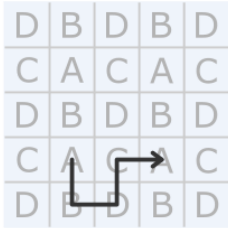


圖 2-4

逐步分析後，我們可以發現無論走法如何變化，

都遵循著 $A \to B \to D \to C \to A$或$A \to C \to D \to B \to A$，

意即無論如何，A到A之間必各經過一組B, C, D，其運動軌跡是封閉折線，所以軌跡中經過格子數的A, B, C, D數目必相等。

因此，我們可知經過的最多格數≤ A格數個數的4倍，即4×499^2格。

由於在<u>一條封閉折線內，每個線上的點皆可符合規律</u>，故其起點<u>無須明確限定</u>。

而我們可以得知，在邊長為奇數時A格格數為A, B, C, D四種格子中最少的，故我們<u>以A格為起點做討論</u>。

研究三： $\boldsymbol{A \to B \to D \to C \to A}$的走法探討

因$A \to B \to D \to C \to A$及$A \to C \to D \to B \to A$走法也具有對稱性，

故以下皆以$A \to B \to D \to C \to A$走法討論，

而$A \to B \to D \to C \to A$又可分為以下兩類走法：

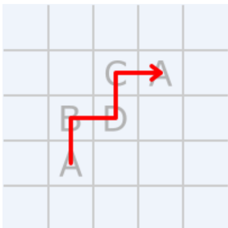


圖 3-1

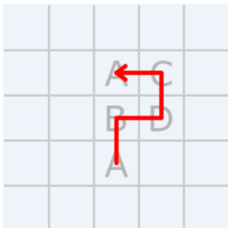


圖 3-2

為了區別這兩種走法，如圖 3-3，我們定義：

$i \equiv j (mod\ 4)$的A為黑色，其餘的A為白色。

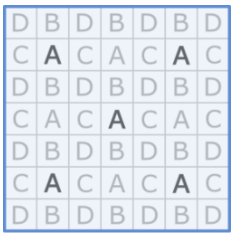


圖 3-3

如下圖，我們將圖 3-4 之走法稱為<u>***AA*同色相接**</u>，圖 3-5 之走法稱為<u>***AA*異色相接**</u>。

圖 3-4

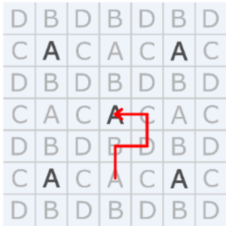


圖 3-5

情況一：AA同色相接

如圖 3-6，令最左下角的點其座標為$(1,1)$，並假定有一個白色A，其座標(a,b)，我們依據$A(a,b) \to B \to D \to C \to A(a+2,b+2)$的走法走了一組同色相接。

圖 3-6

我們關注於$(a,b+2)$這個A上，為了遵循$A \to B \to D \to C \to A$的走法，若要走到這格，唯一的走法為：$C(a-1,b+2) \to A(a,b+2) \to B(a,b+3)$

因此，為遵循其為封閉折線，$A(a+2,b+2)$必須接到$C(a-1,b+2)$且$B(a,b+3)$必須接到$A(a,b)$，如圖 3-7，綠A需與綠C相接、藍B需與藍A相接。

因此，為遵循其為封閉折線，$A(a+2,b+2)$必須接到$C(a-1,b+2)$且$B(a,b+3)$必須接到$A(a,b)$，如圖 3-7，綠A需與綠C相接、藍B需與藍A相接。

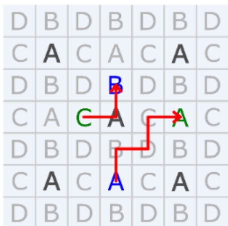


圖 3-7

顯而易見，這條路線必將相交。

故可知，<u>**若圖形內含同色相接，則必須捨棄至少1個*A***</u>。

情況二：AA異色相接

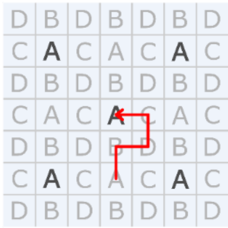


圖 3-8

如圖 3-8，A的個數共有3^2個。其中有$\frac{3^2+1}{2}$個黑色、$\frac{3^2-1}{2}$個白色。

若要令其黑白相間且為封閉折線，**<u>則必至少有一個A被捨棄。</u>**

統整以上兩種走法情況，可知：

<u>$f(999) \le 4 \times (499^2 - 1)$</u>。

研究四：歸納出$4 \times (499^2 - 1)$的模型

為了找到其運動軌跡經過的最多格數模型，我們從n較小的模型開始研究

我們關注$n = 7,11,15$

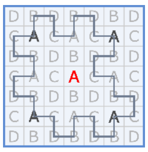


圖 4-1

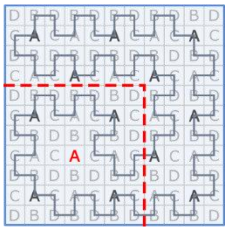


圖 4-2

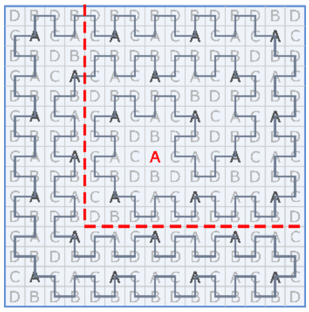


圖 4-3

可以發現，$n = 11,15$ 之中都包含了一個$n = 7$的圖形，我們稱其為基本型

並且對於$n = 11,15$ ，皆只捨棄一個A在$n = 7$的基本型中

將這種延伸法推廣，我們可以歸納出：當$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 7, n \equiv 3(mod\ 4)$時，

<u>其運動軌跡經過的最多格數模型捨棄A的個數皆為一個</u>。

依此導出定理一：

定理一
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4)$，在$n \times n$ 正方形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 1\right)$

接下來我們用數學歸納法證明定理一：

(1) 當$n = 7$時，$f(7) = 4\left(\left(\frac{7-1}{2}\right)^2 - 1\right) = 32$ 成立

(2) 令$n = 4k + 3, \forall k \in \mathbb{N}$ 時，$f(4k+3) = 4\left(\left(\frac{4k+3-1}{2}\right)^2 - 1\right)$ 成立

則$n = 4k + 7$ 時，

$$f(4k+7) = 4\left(\left(\frac{4k+2}{2}\right)^2 - 1\right) + 4(4k+7+4k+3) - 8$$
$$= 4(4k^2 + 4k + 1 - 1 + 4k + 7 + 4k + 3 - 2)$$
$$= 4(4k^2 + 12k + 8)$$
$$= 4\left(\left(\frac{4k+6}{2}\right)^2 - 1\right)$$
$$= 4\left(\left(\frac{(4k+7)-1}{2}\right)^2 - 1\right) \text{ 成立}$$

故由數學歸納法知：$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), f(n) = 4\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 1\right)}$

我們依原題目之條件帶入公式，$f(999) = 4 \times (499^2 - 1)$。至此，我們完成原題目的研究，接下來我們將研究範圍拓展至任意正方形，並依不同邊長分組討論。

二、在$n \times n$正方形內運動軌跡經過的最多格數

研究五：$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 4)$，尋找其在$n \times n$正方形內運動軌跡經過的最多格數

對於這組n，我們關注於$n = 4,8$

1. $n = 4$

我們利用窮舉法找出，此即為$n = 4$運動軌跡經過的最多格數路徑，$f(4) = 12$

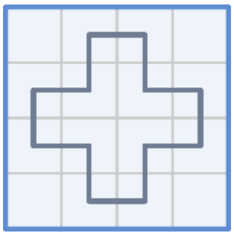


圖 5-1

2. $n = 8$

在此，我們換個想法說明，

a. 要走出其運動軌跡經過的最多格數路徑，我們可以想到要沿著最外層往裡面走才有可能，因此，我們先把外層走完後，發現中間還可以彎進一個十字，

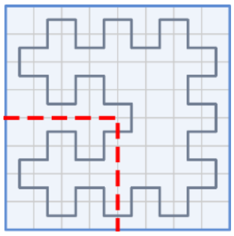


圖 5-2

至此，$n = 8$運動軌跡經過的最多格數路徑已成形，其最多格數為52。

b. 證明：此為其運動軌跡經過的最多格數

根據 a. 我們可以發現需要證明必須先走最外層，以及中間彎的十字為最多

對於前者，如果不走最外層，例如：

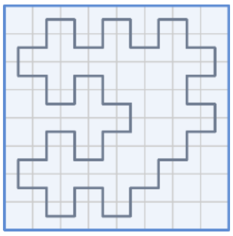


圖 5-3

我們針對$(i, j), i \in \{6,7,8\}, j \in \{1,2,3\}$進行討論

可以發現，如果我們不走邊框，雖然可以多走一格(6,3)但卻必須放棄(8,3) (8,2) (7,2) (7,1) (6,1)五格。故我們可以得知其必須經過邊框。

對於後者，由於其為一個6×6的正方形，因此利用窮舉可輕易得證。

我們結合$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4)$和$n = 4$、8可以發現：

若我們將8×8圖形的左下角視為一基本型

可以發現其擴展方法與$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4)$相同

因此，我們可以確認此擴展方法運動軌跡可經過最多格數。

經過計數，$f(4) = 12, f(8) = 52, f(12) = 124, f(16) = 228$，依此導出定理二：

定理二
$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 4)$，在$n \times n$ 正方形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$(n-1)^2 + 3$

研究六：$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 1 (mod\ 4)$，尋找其在$n \times n$正方形內運動軌跡經過的最多格數

由於這組與$n \equiv 3(mod\ 4)$皆為奇數，因此我們延續研究二與研究三的證明

由研究三的結論可得知A 異色相接為最佳解，所以我們從A 異色相接開始討論：

我們發現A 的個數共有$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$個，其中有$\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}{2}$個黑色，$\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}{2}$個白色

我們發現A 的黑色個數與白色個數一樣，因此推測：

所有A都會被經過。

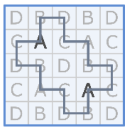


圖 6-1

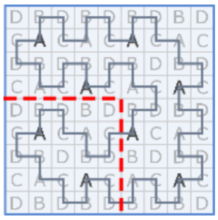


圖 6-2

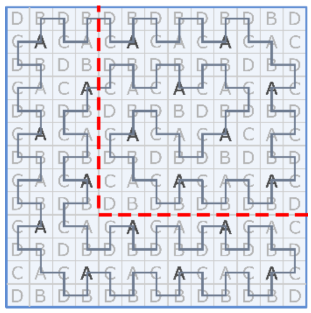


圖 6-3

試求$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4)$時，$f(n)$之值：

由上圖可知，$n = 9,13$ 之中包含了$n = 5$的圖形，

並且對於$n = 9,13$皆無捨棄任何A 在$n = 5$ 的基本型中，

因此可將此延伸，歸納出：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4)$，

其運動軌跡經過最多格數模型圖形皆無A被捨去，依此導出定理三：

定理三
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4)$，在$n \times n$ 正方形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$

研究七：$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 2(mod\ 4)$，尋找其在$n \times n$正方形內運動軌跡經過的最多格數

對於這組n，我們先看$n = 6$。

我們利用窮舉法推知此圖形為其經過最多格數圖形，

如圖 7-1，$f(6) = 28$。

接下來我們討論$n = 10,14$

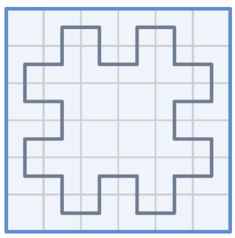


圖 7-1

若我們延續$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 4)$的擴展方式，會發現我們不能維持$n = 6$的基本型，如圖 7-2。因此，我們要將基本型稍做變形，如圖 7-3、7-4：

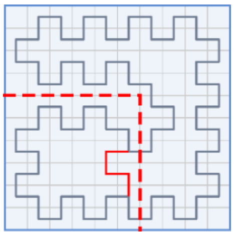


圖 7-2

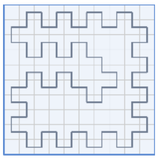


圖 7-3

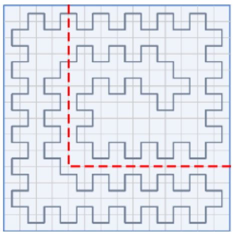


圖 7-4

因為有了新的基本型，所以我們往下討論 $n = 18$，如圖 7-5：

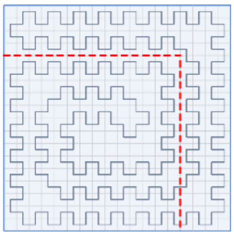


圖 7-5

由於我們已經證明此擴展方式可知其經過最多格數，我們直接用此擴展方式計數：

$f(10) = 80 = 100 - 20,\qquad f(14) = 168 = 196 - 28,$

$f(18) = 288 = 324 - 36,\qquad f(22) = 440 = 484 - 44$

至此，我們用等差公式導出定理四：

令$n = 6 + 4k,\ f(n) = n^2 - (12 + 8k) = n^2 - 2n = (n-1)^2 - 1$

定理四
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10, n \equiv 2(mod\ 4)$，在$n \times n$ 正方形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$(n-1)^2 - 1$

三、在$n \times (n + k)$矩形內運動軌跡經過的最多格數

接下來，我們將研究範圍拓展至任意矩形。我們猜測矩形中的運動軌跡可利用正方形的基本形進行延伸，故定義矩形短邊邊長為n，長邊邊長為$(n + k)$。為方便表示，定義其在$n \times (n + k)$矩形內**運動軌跡經過的最多格數為$f(n, k)$**。

研究八：$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{0}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$，尋找其在$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k})$矩形內運動軌跡經過的最多格數

$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 4)$，由於$4 \mid n$，使我們找出了一種特殊的走法

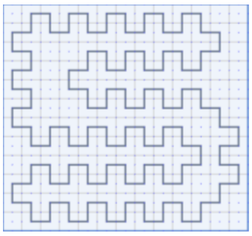


圖 8-1

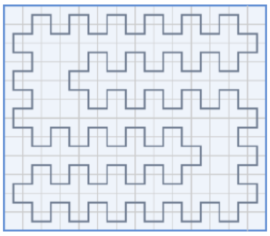


圖 8-2

在這種走法內，當$n = 4x$時，其共有$2(x-1)$處轉彎，亦即捨棄$8x-8$格。

而當$k \equiv 0(mod\ 2)$時，其首尾共捨棄4格， $k \equiv 1(mod\ 2)$時，其首尾共捨棄8格

故我們可以整理出一個公式：$f(n,k) = n(n+k) - 2n + 2 + 8\left(\frac{k}{2} - \left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)$，

其中$\left[\frac{k}{2}\right]$為高斯符號，並依此導出定理五：

定理五
$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 4)$，在$n \times (n+k)$的矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$n(n+k) - 2n + 2 + 8\left(\frac{k}{2} - \left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)$

研究九：$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$，尋找其在$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k})$矩形內運動軌跡經過的最多格數

由於n是以$(mod\ 4)$找出規律的，故我們先對k以$(mod\ 4)$的方式討論。

1. 針對$\boldsymbol{k} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$進行討論

令$(n,k) = (4x+1, 1)$，我們觀察$n = 5,9,13$

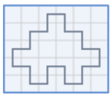


圖 9-1

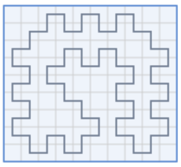


圖 9-2

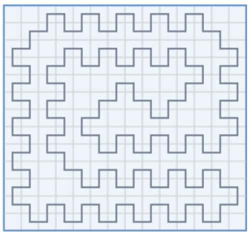


圖 9-3

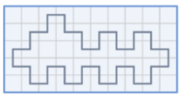


圖 9-4

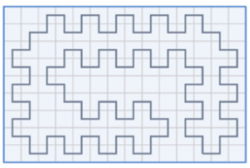


圖 9-5

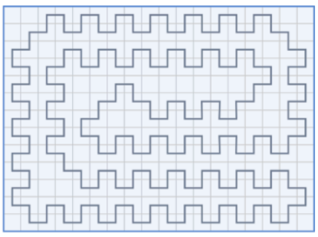


圖 9-6

表 9-1

n	k	$f(n,k)$	n	k	$f(n,k)$	n	k	$f(n,k)$
5	1	20	9	1	72	14	1	182
5	5	36	9	5	104	14	5	234
5	9	52	9	9	136	14	9	286

發現其以$x=1$為基本型向上擴展，但$x=3$尾端的地方會多空出四格

因此我們以$x=1$為基本型由向上擴展改為向右擴展，並往下觀察$x=4,5$

我們發現在$x=2,4$以$x=1$為基本型向上擴展為最佳解

而$x=1,3,5$以$x=1$為基本型向右轉擴展為最佳解

兩者與$x=1$結合可發現$f(5,1)=20=30-10,\quad f(9,1)=72=90-18,$

$$f(13,1)=156=182-26,\quad f(17,1)=272=306-34,$$

$$f(21,1)=420=462-42$$

故$f(n,1)=n(n+1)-(8x+2)=n^2+n-2n+2-2=n^2-n$

令$(n,k)=(5,4y+1)$

$f(5,k)=5^2-5+4(k-1)$

結合上述兩式可知：$\forall \boldsymbol{n},\boldsymbol{k}\in\mathbb{N},\boldsymbol{n}\geq\mathbf{5},\boldsymbol{k}\geq\mathbf{1},\boldsymbol{n}\equiv\mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}),\boldsymbol{k}\equiv\mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}),$

$$\boldsymbol{f(n,k)=n(n+k)-(2n+k-1)}$$

定理六
$\forall n,k\in\mathbb{N},n\geq5,n\equiv1(mod\ 4),k\equiv1(mod\ 4)$，在$n\times(n+k)$的矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$n(n+k)-(2n+k-1)$

對定理六以數學歸納法進行證明：

試證一：$\forall \boldsymbol{n}\in\mathbb{N},\boldsymbol{n}\geq\mathbf{5},\boldsymbol{n}\equiv\mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}),\boldsymbol{f(n,1)=n^2-n}$

(1) 當$n=5$時，$f(5,1)=5^2-5$成立

(2) 令$n=4x+1,\forall x\in\mathbb{N}$時，$f(4x+1,1)=(4x+1)^2-(4x+1)$成立

則$n=4x+5$時，

$$f(4x+5,1)=(4x+1)^2-(4x+1)+4(4x+1+4x+2+4)-8$$
$$=(4x+5)^2-(4x+5)\text{成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall n\in\mathbb{N},n\geq5,k=1,n\equiv1(mod\ 4),f(n,1)=n^2-n$

試證二：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 1(mod\ 4), f(5,k) = 4k + 16$

(1) 當$k = 1$時，$f(5,1) = 4 \times 1 + 16 = 20$成立

(2) 令$k = 4y + 1, \forall y \in \mathbb{N}$時，$f(5,4y + 1) = 4(4y + 1) + 16$成立

則$k = 4y + 5$時，$f(5,4y + 5) = 4(4y + 1) + 16 + 16 = 4(4y + 5) + 16$成立

故由數學歸納法知：$\forall k \in \mathbb{N}, n = 5, k \equiv 1(mod\ 4), f(5,k) = 4k + 16$

結合上述兩式可知：$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq 5, \boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{k} \equiv 1(\boldsymbol{mod}\ 4)$,

$$\boldsymbol{f(n,k) = n(n+k) - (2n + k - 1)}$$

2. 針對$k \equiv 2(mod\ 4)$進行討論

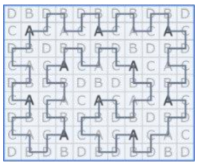


圖 9-7

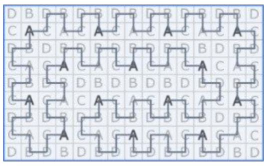


圖 9-8

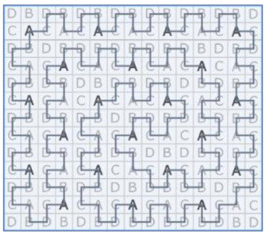


圖 9-9

表 9-2

n	k	$f(n,k)$	n	K	$f(n,k)$	n	k	$f(n,k)$
5	2	**24**	9	2	**80**	14	2	**195**
5	6	**40**	9	6	**112**	14	6	**247**
5	10	**56**	9	10	**144**	14	10	**299**

令$(n,k) = (4x + 1, 4y + 2), \forall x, y \in \mathbb{N}$

由$n \equiv 1(mod\ 4), k \equiv 2(mod\ 4)$可得知：

$n \equiv 1(mod\ 2), (n + k) \equiv 1(mod\ 2)$

因此，我們可以用”A的個數最少”去證明其最多格數。

對於$k \equiv 2(mod\ 4)$，根據研究二~四，經過的最多格數為A的個數的4倍

而A的個數為$4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)$，也就是$f(n,k) = 4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)$

為了證實此即為$f(n,k)$，我們舉了一組範例，如圖 9-7~9-9

由圖可知，運動軌跡會經過所有的A，依此可導出定理七：

定理七
$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4), k \equiv 2(mod\ 4)$，在$n \times (n + k)$矩形內，其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)$

對定理七以數學歸納法進行證明：

試證一：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4)$時，$f(n,2) = 16x^2 + 8x = n^2 - 1$

(1) 當$n = 5$時，$f(5,2) = 4 \times 2 \times 3 = 24$成立

(2) 令$n = 4x + 1, \forall x \in \mathbb{N}$ ，$f(4x + 1,2) = 16x^2 + 8x$成立

則$n = 4x + 5$時，

$$f(4x + 5,2) = 4\left(\frac{4x}{2} \times \frac{4x+2}{2}\right) + 4(4x + 7 + 4x + 1) - 8$$

$$= 4((4x + 5)^2 - 1) \text{ 成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5, k = 2, n \equiv 1(mod\ 4), f(n,2) = n^2 - 1$

試證二：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 2(mod\ 4)$, $f(5,k) = 4k + 16$

(1) 當$k = 2$時，$f(5,2) = 8 + 16 = 24$成立

(2) 令$k = 4y + 2, \forall y \in \mathbb{N}$ 時，$f(5,4y + 2) = 4(4y + 2) + 16$ 成立

則$k = 4y + 6$ 時，

$$f(5,4y + 6) = 4(4y + 2) + 16 + (4 \times 4) = 4(4y + 6) + 16\text{成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 2(mod\ 4), f(5,k) = 4k + 16$

結合上述兩式可知：$\boldsymbol{\forall n, k \in \mathbb{N}, n \equiv 1(mod\ 4), k \equiv 0(mod\ 2)}$

$$\boldsymbol{f(n,k) = 4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)}$$

3. 針對$k \equiv 3(mod\ 4)$進行討論

表 9-3

n	k	$f(n,k)$	N	K	$f(n,k)$	n	k	$f(n,k)$
5	3	28	9	3	88	14	3	208
5	7	44	9	7	120	14	7	260
5	11	60	9	11	152	14	11	312

我們觀察$k = 3, n = 5,9,13$

可以發現這組對比起$k \equiv 1(mod\ 4)$，除了基本型以外，其餘全部都相同，因此我們利用相同的邏輯進行推導，得出以下公式。

$f(n,1) = n^2 - n$ ，$f(5,k) = 4k + 16$ ，$f(n,k) = n(n + k) - (2n + k - 1)$

與$k \equiv 1(mod\ 4)$相同，依此我們將定理六進行推廣：

定理六
$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4), k \equiv 1(mod\ 2)$，在$n \times (n+k)$矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$n(n+k)-(2n+k-1)$

4. 針對$k \equiv 0(mod\ 4)$進行討論

表 9-4

n	k	$f(n,k)$	N	K	$f(n,k)$	n	k	$f(n,k)$
5	4	32	9	4	96	14	4	221
5	8	48	9	8	128	14	8	273
5	12	64	9	12	160	14	12	325

由於$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 0(mod\ 4)$與$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 2(mod\ 4)$之長、寬皆為奇數，

且其A的個數亦為偶數，所以$f(n,k)$之公式亦為$4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)$，

因此定理七亦可進行推廣：

定理七
$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4), k \equiv 0(mod\ 2)$ ，在$n \times (n+k)$矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)$

由此，我們可得知k將以$(mod\ 2)$的規則進行分類。

研究十：$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \equiv 2(mod\ 4)$，尋找其在$n \times (n+k)$矩形內運動軌跡經過的最多格數

1. 針對$k \equiv 1(mod\ 2)$進行討論

首先，我們固定k：

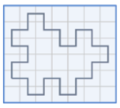


圖 10-1

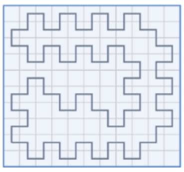


圖 10-2

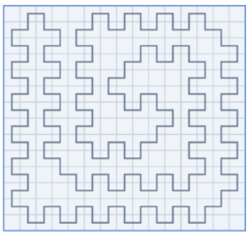


圖 10-3

根據上圖，我們可得知其擴展方式與研究九-1 相同，因此我們可得：$f(6,1) = 28,$

$f(10,1) = 88, f(14,1) = 180$，並以此歸納出：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6, f(n,1) = n^2 - n - 2$

接下來我們固定n：

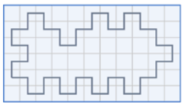


圖 10-4

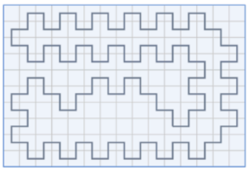


圖 10-5

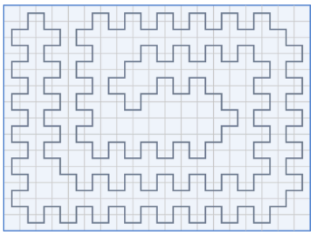


圖 10-6

我們可以觀察 10-1→10-4、10-2→10-5 等，當n為定值時，其未經過的格數僅受其基本型影響，故我們導出其公式：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 1(mod\ 2)$, $f(6,k) = 4k \times 1 + 28$

結合上述兩式導出定理八：

定理八
$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 6, n \equiv 2(mod\ 4), k \equiv 1(mod\ 2)$，在$n \times (n+k)$的矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$(n-2)(n+k)$

2. 針對$k \equiv 0(mod\ 2)$進行討論

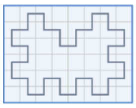


圖 10-7

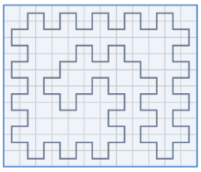


圖 10-8

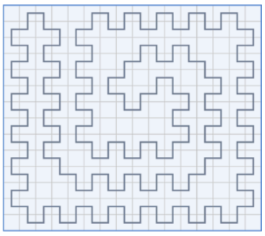


圖 10-9

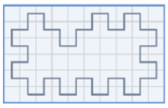


圖 10-10

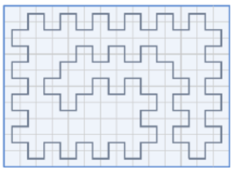


圖 10-11

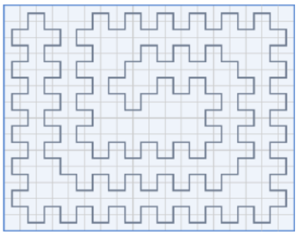


圖 10-12

$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 0(mod\ 2)$，我們先取$6 \times 8$與$10 \times 12$進行窮舉，可以發現以$6 \times 8$為基本型，其擴展方法與研究五相同，故我們利用相同方式可得：

$n \equiv 2(mod\ 4), k = 2, n \geq 6$, $f(n,2) = n^2$

接下來我們探討$n = 6, k \equiv 0(mod\ 2), \forall k \geq 2$

可以得知其公式為 $f(6,k) = 4k \times 1 + 2$，結合上述兩式導出定理九：

定理九
$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 6, n \equiv 2(mod\ 4), k \equiv 0(mod\ 2)$ ，在$n \times (n+k)$的矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$n^2 + (k-2)(n-2)$

研究十一：$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \equiv 3(mod\ 4)$，尋找其在$n \times (n+k)$矩形內運動軌跡經過的最多格數

1. 針對$k \equiv 1(mod\ 4)$進行討論

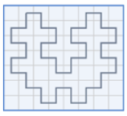


圖 11-1

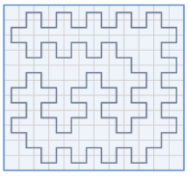


圖 11-2

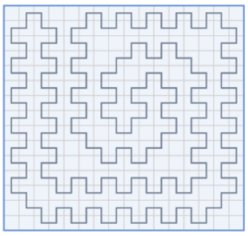


圖 11-3

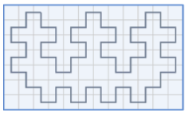


圖 11-4

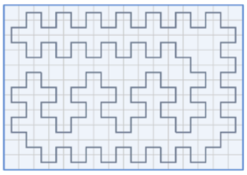


圖 11-5

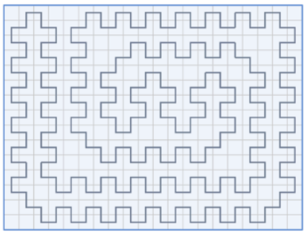


圖 11-6

我們先固定$k = 1$：

$f(7,1) = 44, f(11,1) = 112, f(15,1) = 212$

我們可以歸納出：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4),\ f(n,1) = n^2 - n + 2$

而當我們固定$n = 7$時：$f(7,1) = 44, f(7,5) = 68, f(7,9) = 92$

我們可以歸納出：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 1(mod\ 4),\ f(7,k) = 6k + 38$ ，依此導出定理十：

定理十
$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), k \equiv 1(mod\ 4)$，在$n \times (n+k)$的矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$n^2 - n + 2 + (n-1) \times (k-1)$

2. 針對$k \equiv 2(mod\ 4)$進行討論

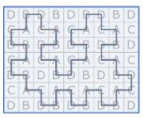


圖 11-7

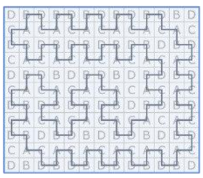


圖 11-8

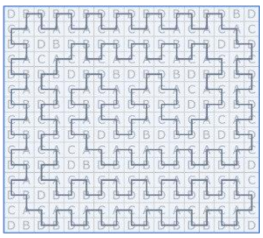


圖 11-9

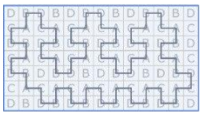


圖 11-10

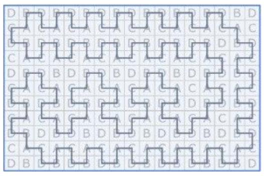


圖 11-11

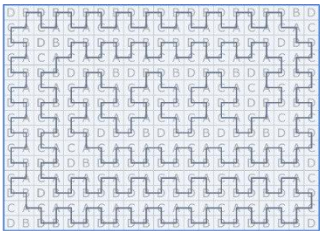


圖 11-12

對於此情況，我們可以得知n與$n+k$皆為奇數，由此推得：A的格數最少

依研究三之結論：兩個A之間必個存在一個B,C,D

對$k \equiv 2(mod\ 4)$，其A 的個數為偶數個，因此此情況可走過所有的A

則$f(n,k) = 4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)$，依此導出定理十一：

定理十一
$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), k \equiv 2(mod\ 4)$，在$n \times (n+k)$的矩形內，其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)$

3. 針對$k \equiv 3(mod\ 4)$進行討論

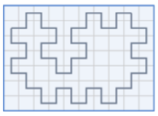


圖 11-13

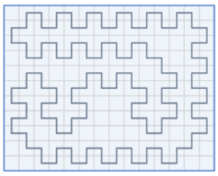


圖 11-14

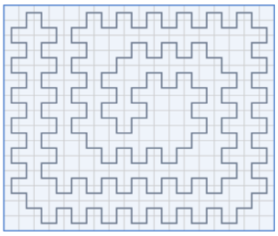


圖 11-15

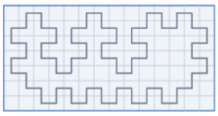


圖 11-16

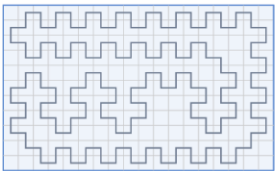


圖 11-17

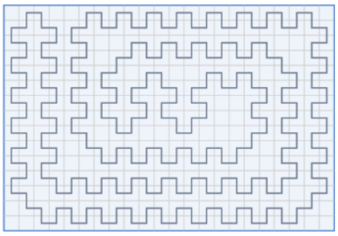


圖 11-18

我們先固定$k=3$：$f(7,3) = 52, f(11,3) = 128, f(15,1) = 236$

我們可以歸納出：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4),\ f(n,1) = n^2 + n - 4$

而當我們固定$n=7$時：$f(7,3) = 52, f(7,7) = 76, f(7,11) = 100$

我們可以歸納出：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 1(mod\ 4),\ f(7,k) = 6k + 34$，依此導出定理十二：

定理十二

$\forall n,k\in\mathbb{N}, n\geq 7, n\equiv 3(mod\ 4), k\equiv 3(mod\ 4)$，在$n\times(n+k)$的矩形內，
其運動軌跡經過的最多格數為$n^2+n-4+(n-1)(k-3)$

4. 針對$k\equiv 0(mod\ 4)$進行討論

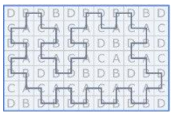


圖 11-19

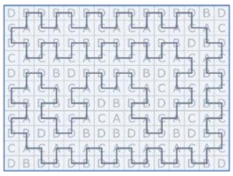


圖 11-20

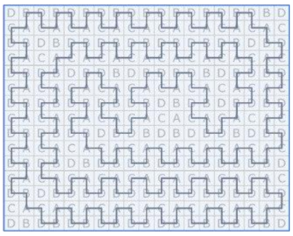


圖 11-21

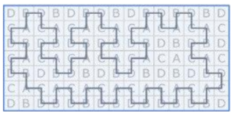


圖 11-22

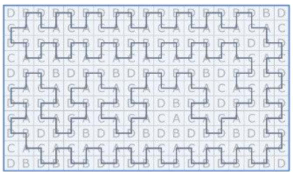


圖 11-23

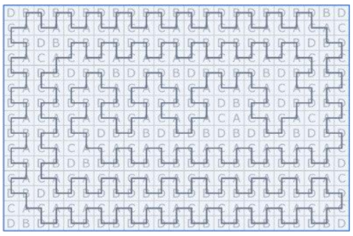


圖 11-24

對於此情況，我們可以得知n與$n+k$皆為奇數，由此推得：A的格數最少

依研究三之結論：兩個A之間必個存在一個B,C,D

對$k\equiv 0(mod\ 4)$，其A的個數為奇數個$=\frac{n-1}{2}\times\frac{n+k-1}{2}$

依此導出定理十三：

定理十三

$\forall n,k\in\mathbb{N}, n\geq 7, n\equiv 3(mod\ 4), k\equiv 0(mod\ 4)$，在$n\times(n+k)$的矩形內，
其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2}\times\frac{n+k-1}{2}-1\right)$

四、在$n \times n \times n$正立方體內運動軌跡經過的最多格數

研究十二：對不同邊長的正立方體進行歸納

為方便討論，我們定義$n \times n \times n$正立方體內運動軌跡經過的最多格數為$g(n)$，並先從邊長較小的正立方體圖形開始計算其運動軌跡經過的最多格數，經歸納後希望找出規律。利用窮舉法，可得出表 12-1 如下：

表 12-1

n	2	3	4	5	6	7	8
總格數	8	27	64	125	216	343	512
$g(n)$	8	24	64	122	216	340	512
未經過格數	0	3	0	3	0	3	0

研究十三：$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 2)$，尋找其在$n \times n \times n$正立方體內運動軌跡經過的最多格數

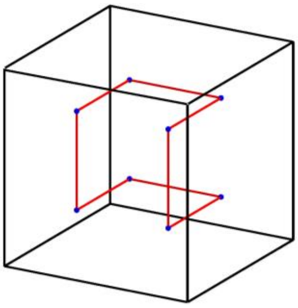


圖 13-1

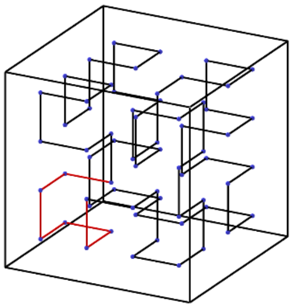


圖 13-2

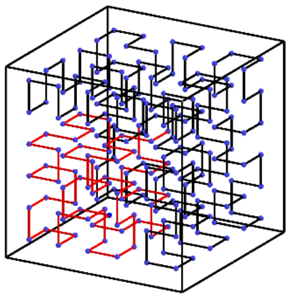


圖 13-3

我們可以發現在$n \equiv 0(mod\ 2)$時，其運動軌跡為以$2 \times 2 \times 1$為單位進行擴展，並且在$g(4)$及$g(6)$的模型中，皆包含$g(2)$及$g(4)$的基本型，依此導出定理十四：

定理十四
$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 2)$ ，在$n \times n \times n$的正立方體內， 其運動軌跡經過的最多格數為n^3

接下來我們以數學歸納法對定理十四進行證明：

(1) 當$n = 2$時，$g(2) = 2^3 = 8$成立

(2) 令$n = 2k, \forall k \in \mathbb{N}$時，$g(2k) = (2k)^3$成立

則$n = 2k + 2$時： $g(2k + 2) = (2k)^3 + 24k^2 + 24k + 8 = (2k + 2)^3$成立

故由數學歸納法得知：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{0}(\boldsymbol{mod\ 2})$ ， $\boldsymbol{g(n) = n^3}$

研究十四：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{2})$，尋找其在$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$正立方體內運動軌跡經過的最多格數

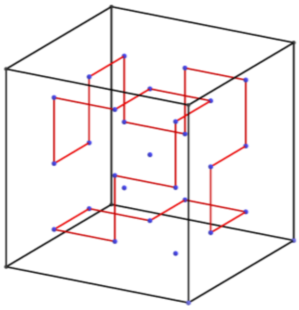


圖 14-1

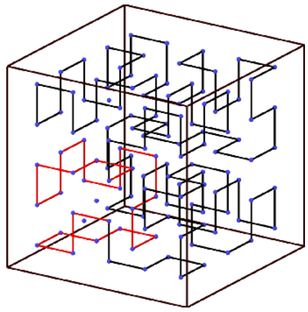


圖 14-2

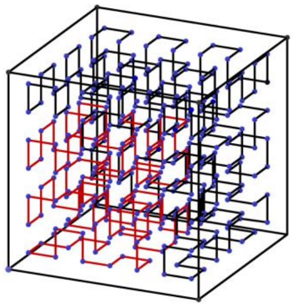


圖 14-3

我們可以發現在$n \equiv 1(mod\ 2)$時，其運動軌跡為以$2 \times 2 \times 1$為單位進行擴展，並且在$g(5)$及$g(7)$的模型中，皆包含$g(3)$及$g(5)$的基本型，依此導出定理十五：

定理十五
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, n \equiv 1(mod\ 2)$，在$n \times n \times n$的正立方體內， 其運動軌跡經過的最多格數為$n^3 - 3$

接下來我們以數學歸納法對定理十五進行證明五：

(1) 當$n = 3$時，$g(3) = 3^3 - 3 = 24$成立

(2) 令$n = 2k + 1, \forall k \in \mathbb{N}$時，$g(2k + 1) = (2k + 1)^3 - 3$成立

則$n = 2k + 3$時，

$$g(2k + 3) = (2k + 1)^3 - 3 + 24k^2 + 48k + 26$$
$$= (2k + 3)^3 - 3\text{成立}$$

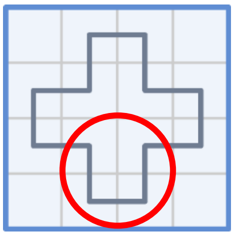
故由數學歸納法得知：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{2})$， $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}^{\mathbf{3}} - \mathbf{3}$

伍、 研究討論

一、$n=6$無法做為基本型之探討

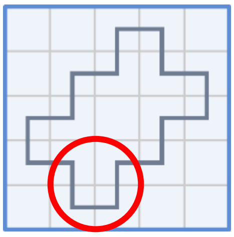
在研究七中，我們發現$n=6$之模型無法作為$n\equiv 2(mod\ 4)$之基本型。

如下圖，我們發現$n\equiv 2(mod\ 4)$之基本型與$n\equiv 0(mod\ 4)$、$n\equiv 1(mod\ 4)$、$n\equiv 3(mod\ 4)$之基本型有些許不同。



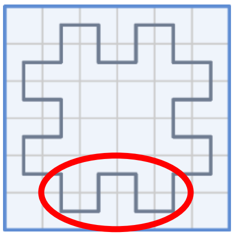
圖伍-1

$n\equiv 0(mod\ 4)$之基本型



圖伍-2

$n\equiv 1(mod\ 4)$之基本型



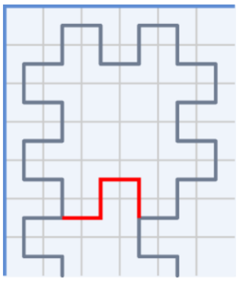
圖伍-3

$n\equiv 2(mod\ 4)$之基本型

圖伍-4

$n\equiv 3(mod\ 4)$之基本型

如上圖伍-3，$n\equiv 2(mod\ 4)$之基本型下方有兩塊凸出狀運動軌跡，導致向下擴展時無法如其他基本型相同方式擴展。



圖伍-5

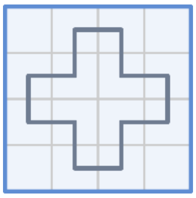
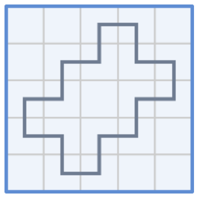
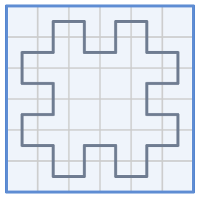
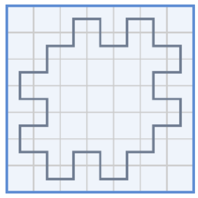
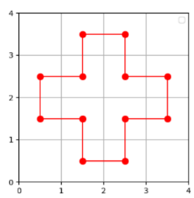
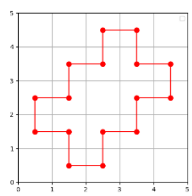
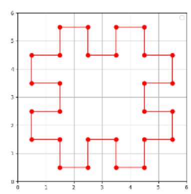
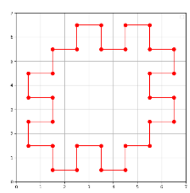
如右圖伍-5，須將其下方轉為非兩塊形式，這樣一來雖無法以$n=6$為基本型，但仍可以$n=10$為基本型往下擴展，並以此歸納$n\equiv 2(mod\ 4), n\geq 10$之定理。

二、程式輔助論證

完成上述研究後，為了再次驗證公式之正確性及提供更快速之解法，我們採用程式設計方式再行驗證。我們以$Python$語言編寫程式，並依題意設計演算法，依此方式尋找各圖形中運動軌跡經過的最多格數並繪製圖形。

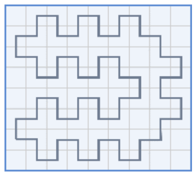
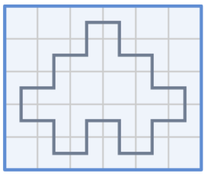
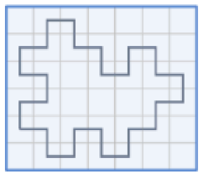
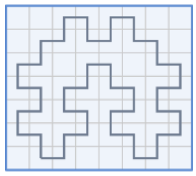
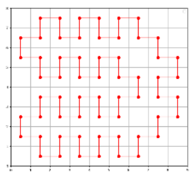
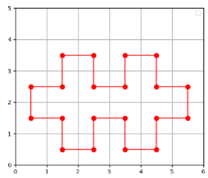
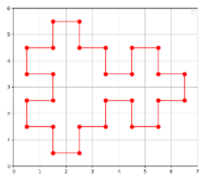
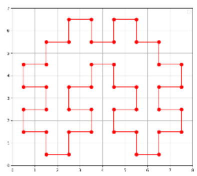
如下表，我們列出$n \times n$正方形各組基本型作為驗證，對照其$f(n)$及圖形，發現皆完全相符。由此可確認演算法設計無虞，並可再次驗證前述各研究公式之正確性。

表伍-1

分類	$n \equiv 0(mod\ 4)$	$n \equiv 1(mod\ 4)$	$n \equiv 2(mod\ 4)$	$n \equiv 3(mod\ 4)$
n	4	5	6	7
依原研究繪製				
$f(n)$	12	16	28	32
依程式繪製				
$f(n)$	12	16	28	32

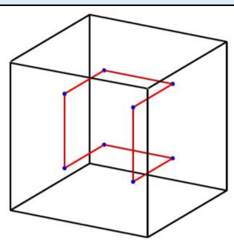
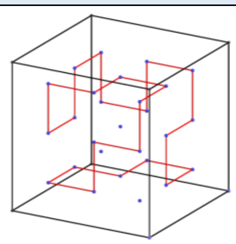
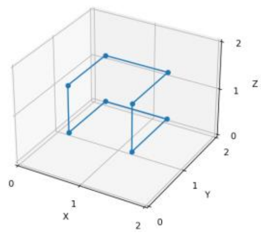
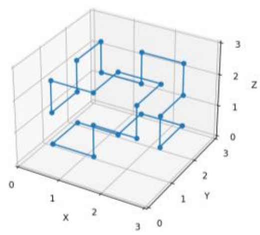
再者，如下表，我們列出$n\times(n+k)$矩形各組各一模型作為驗證。可以發現，由於最多格數走法並不單一，因此圖形可能稍有不同。但對比其$f(n,k)$後，可發現依原研究繪製及依程式繪製之運動軌跡經過的最多格數皆相同。

表伍-2

分類	$n\equiv 0(mod\ 4)$	$n\equiv 1(mod\ 4)$	$n\equiv 2(mod\ 4)$	$n\equiv 3(mod\ 4)$
(n,k)	(8,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)
依原研究繪製				
$f(n,k)$	60	20	28	44
依程式繪製				
$f(n,k)$	60	20	28	44

最後，如下表，我們開發三維圖形驗證程式，並列出$n\times n\times n$立方體各組基本型作為驗證。對比其$g(n)$後，可發現依原研究繪製及依程式繪製之運動軌跡經過的最多格數皆相同。

表伍-3

分類	$n\equiv 0(mod\ 2)$	$n\equiv 1(mod\ 2)$
n	2	3
依原研究繪製		
$g(n)$	6	22
依程式繪製		
$g(n)$	6	22

陸、 研究結果

定理一：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4)$，在$n \times n$正方形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 1\right)$

定理二：$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 4)$，在$n \times n$正方形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$(n-1)^2 + 3$

定理三：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4)$， 在$n \times n$正方形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$

定理四：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10, n \equiv 2(mod\ 4)$， 在$n \times n$正方形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$(n-1)^2 - 1$

定理五：$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 4)$，在$n \times (n+k)$矩形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$n(n+k) - 2n + 2 + 8\left(\frac{k}{2} - \left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)$

定理六：$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4), k \equiv 1(mod\ 2)$， 在$n \times (n+k)$矩形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$n(n+k) - (2n+k-1)$

定理七：$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4), k \equiv 0(mod\ 2)$，在$n \times (n+k)$矩形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)$

定理八：$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 6, n \equiv 2(mod\ 4), k \equiv 1(mod\ 2)$，在$n \times (n+k)$矩形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$(n-2)(n+k)$

定理九：$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 6, n \equiv 2(mod\ 4), k \equiv 0(mod\ 2)$，在$n \times (n+k)$矩形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$n^2 + (k-2)(n-2)$

定理十：$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 7\ , n \equiv 3(mod\ 4), k \equiv 1(mod\ 4)$，在$n(n+k)$矩形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$n^2 - n + 2 + (n-1) \times (k-1)$

定理十一：$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 7\ , n \equiv 3(mod\ 4), k \equiv 2(mod\ 4)$，在$n \times (n+k)$矩形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)$

定理十二：$\forall n,k\in\mathbb{N}, n\geq 7, n\equiv 3(mod\ 4), k\equiv 3(mod\ 4)$，在$n\times(n+k)$矩形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$n^2+n-4+(n-1)(k-3)$

定理十三：$\forall n,k\in\mathbb{N}, n\geq 7, n\equiv 3(mod\ 4), k\equiv 0(mod\ 4)$，在$n\times(n+k)$矩形內，

其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2}\times\frac{n+k-1}{2}-1\right)$

定理十四：$\forall n\in\mathbb{N}, n\equiv 0(mod\ 2)$，在$n\times n\times n$的正立方體內，

其運動軌跡經過的最多格數為n^3

定理十五：$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 3, n\equiv 1(mod\ 2)$，在$n\times n\times n$的正立方體內，

其運動軌跡經過的最多格數為n^3-3

柒、 未來展望

本題目具有許多發展空間，例如：將其推廣到<u>其餘密鋪多邊形如三角形、六邊形</u>等，未來我們期望可以將定理推廣到<u>三維圖形的所有狀況</u>，使其在現實中能被更方便的運用。

以下為我們舉出的幾種應用範例：

1. 娛樂設計：將有限空間內類迷宮解謎遊戲的路線複雜度最大化。
2. 空間佈局優化：設計一個緊湊的電路板，可以減少設備體積和製造成本。封閉折線可以用於控制元件的佈局，使得電路板的使用空間更加有效。
3. 路徑優化：設計一個有效的通路路徑，可以減少電路板的總長度和信號傳輸的延遲。封閉折線可以用於設計通路路徑，使得信號傳輸的速度更快和準確。

捌、 參考資料

1.王延文等 (2010)。第 50 屆 IMO 預選題(二)。中等數學，*2010 年*(9 期)，25－26。

2.陳界山等 (2022)。*數學(二)* (再版二刷.)。台南市：南一書局企業股份有限公司。

3.游森棚等 (2022)。*數學 3A*(再版.)。台南市：翰林出版事業股份有限公司。

4.游森棚等 (2023)。*數學 4A*(再版.)。台南市：翰林出版事業股份有限公司。

附錄一、各定理證明過程

研究四：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{3}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$

定理一
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4)$，在$n \times n$ 正方形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 1\right)$

(1) 當$n = 7$時，$f(7) = 4\left(\left(\frac{7-1}{2}\right)^2 - 1\right) = 32$ 成立

(2) 令$n = 4k+3, \forall k \in \mathbb{N}$ 時，$f(4k+3) = 4\left(\left(\frac{4k+3-1}{2}\right)^2 - 1\right)$ 成立

則$n = 4k+7$ 時，

$$
\begin{aligned}
f(4k+7) &= 4\left(\left(\frac{4k+2}{2}\right)^2 - 1\right) + 4(4k+7+4k+3) - 8 \\
&= 4(4k^2 + 4k + 1 - 1 + 4k + 7 + 4k + 3 - 2) \\
&= 4(4k^2 + 12k + 8) \\
&= 4\left(\left(\frac{4k+6}{2}\right)^2 - 1\right) \\
&= 4\left(\left(\frac{(4k+7)-1}{2}\right)^2 - 1\right) \text{ 成立}
\end{aligned}
$$

故由數學歸納法知：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{7}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{3}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) = \mathbf{4}\left(\left(\frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} - \mathbf{1}\right)$

研究五：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{0}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$

定理二
$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 4)$，在$n \times n$ 正方形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$(n-1)^2 + 3$

(1) 當$n = 4$時，$f(4) = (4-1)^2 + 3 = 12$ 成立

(2) 令$n = 4k, \forall k \in \mathbb{N}$時，$f(4k) = (4k-1)^2 + 3$成立

則$n = 4k+4$ 時

$$
\begin{aligned}
f(4k+4) &= (4k-1)^2 + 3 + 4(4k+4k+4) - 8 \\
&= 16k^2 - 8k + 4 + 32k + 16 - 8
\end{aligned}
$$

$$= 16k^2 + 24k + 12$$

$$= (4(k+1) - 1^2) + 3 \text{ 成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{0}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}),$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})^2 + \mathbf{3}$$

研究六：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$

定理三
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4)$，在$n \times n$ 正方形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$

(1) 當$n = 5$時，其$f(5) = 4\left(\frac{5-1}{2}\right)^2 = 16$ 成立

(2) 令$n = 4k+1, \forall k \in \mathbb{N}$時， $f(4k+1) = 4\left(\frac{4k+1-1}{2}\right)^2$成立

則$n = 4k+5$時，

$$f(4k+5) = 4\left(\frac{4k}{2}\right)^2 + 4(4k+1+4k+5) - 8$$

$$= 4(4k^2 + 4k + 1 + 4k + 5 - 2)$$

$$= 4(4k^2 + 8k + 4)$$

$$= 4\left(\frac{4k+4}{2}\right)^2 \text{成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{5}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}),$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) = \mathbf{4}\left(\frac{\boldsymbol{n} - \mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^2$$

研究七：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{2}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$

定理四
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10, n \equiv 2(mod\ 4)$，在$n \times n$ 正方形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$(n-1)^2-1$

(1) 當$n = 10$時，$f(10) = (10-1)^2 - 1 = 80$ 成立

(2) 令$n = 4k+2, \forall k \in \mathbb{N}$時，$f(4k+2) = (4k+2-1)^2 - 1$ 成立

則$n = 4(k+1) + 2n = 4k+6$ 時，

$$f(4k+6) = (4k+2-1)^2 - 1 + 4(4k+6+4k+2) - 8$$

$$= 16k^2 + 40k + 24$$

$$= (4k+5)^2 - 1$$

$$= (4k+6-1)^2 - 1 \text{ 成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{10}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{2}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$,

$$\boldsymbol{f(n) = (n-1)^2 - 1}$$

研究八：$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{0}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$

定理五
$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 4)$，在$n \times (n+k)$的矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$n(n+k) - 2n + 2 + 8\left(\frac{k}{2} - \left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)$

詳見研究八內文。

研究九：$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$

定理六
$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4), k \equiv 1(mod\ 4)$，在$n \times (n+k)$的矩形內，其運動軌跡經過的最多格數為$n(n+k) - (2n+k-1)$

試證一：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{5}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}, \mathbf{1}) = \boldsymbol{n}^2 - \boldsymbol{n}$

(1) 當$n = 5$時，$f(5,1) = 5^2 - 5$成立

(2) 令$n = 4x + 1, \forall x \in \mathbb{N}$時，$f(4x+1,1) = (4x+1)^2 - (4x+1)$成立

則$n = 4x + 5$時，

$$f(4x+5,1) = (4x+1)^2 - (4x+1) + 4(4x+1+4x+2+4) - 8$$
$$= 16x^2 + 4x + 32x + 20$$
$$= 16x^2 + 36x + 20$$
$$= (4x+5)^2 - (4x+5)\text{成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5, k = 1, n \equiv 1(mod\ 4), f(n,1) = n^2 - n$

試證二：$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{k} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}), \boldsymbol{f}(\mathbf{5}, \boldsymbol{k}) = \mathbf{4}\boldsymbol{k} + \mathbf{16}$

(1) 當$k = 1$時，$f(5,1) = 4 \times 1 + 16 = 20$成立

(2) 令$k = 4y + 1, \forall y \in \mathbb{N}$時，$f(5,4y+1) = 4(4y+1) + 16$成立

則$k = 4y + 5$時，

$f(5,4y+5) = 4(4y+1) + 16 + 16 = 4(4y+5) + 16$成立

故由數學歸納法知：$\forall k \in \mathbb{N}, n = 5, k \equiv 1(mod\ 4), f(5,k) = 4k + 16$

結合上述兩式可知：$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{5}, \boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{k} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}),$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}) - (\mathbf{2}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k} - \mathbf{1})$$

經研究後，發現其與$k \equiv 3(mod\ 4)$時之情形類似，故將定理六進行推廣如下：

定理六
$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 5, n \equiv 1(mod\ 4), k \equiv 1(mod\ 2)$，在$n \times (n+k)$矩形內，其運動軌跡經過的最多格數為$n(n+k) - (2n+k-1)$

定理七
$\forall n,k\in\mathbb{N}, n\geq 5, n\equiv 1(mod\ 4), k\equiv 2(mod\ 4)$ ，在$n\times(n+k)$矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2}\times\frac{n+k-1}{2}\right)$

試證一：$\forall \boldsymbol{n}\in\mathbb{N}, \boldsymbol{n}\geq \mathbf{5}, \boldsymbol{n}\equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$時，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n},\mathbf{2})=\mathbf{16}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{8}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}$

(1) 當$n=5$時，$f(5,2)=4\times 2\times 3=24$成立

(2) 令$n=4x+1, \forall x\in\mathbb{N}$ ，$f(4x+1,2)=16x^2+8x$成立

則$n=4x+5$時，

$$f(4x+5,2)=4\left(\frac{4x}{2}\times\frac{4x+2}{2}\right)+4(4x+7+4x+1)-8$$

$$=4(16x^2+8x+32x+24)$$

$$=4((4x+5)^2-1)\ 成立$$

故由數學歸納法知：$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 5, k=2, n\equiv 1(mod\ 4), f(n,2)=n^2-1$

試證二：$\forall \boldsymbol{k}\in\mathbb{N}, \boldsymbol{k}\equiv \mathbf{2}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}), \boldsymbol{f}(\mathbf{5},\boldsymbol{k})=\mathbf{4}\boldsymbol{k}+\mathbf{16}$

(1) 當$k=2$時，$f(5,2)=8+16=24$成立

(2) 令$k=4y+2, \forall y\in\mathbb{N}$ 時，$f(5,4y+2)=4(4y+2)+16$ 成立

則$k=4y+6$ 時，

$f(5,4y+6)=4(4y+2)+16+(4\times 4)=4(4y+6)+16$成立

故由數學歸納法知：$\forall k\in\mathbb{N}, k\equiv 2(mod\ 4), f(5,k)=4k+16$

結合上述兩式可知：$\forall \boldsymbol{n},\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}, \boldsymbol{n}\equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}), \boldsymbol{k}\equiv \mathbf{0}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{2})$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})=\mathbf{4}\left(\frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\times\frac{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$$

經研究後，發現其與$k\equiv 0(mod\ 4)$時之情形類似，故將定理七進行推廣如下：

定理七
$\forall n,k\in\mathbb{N}, n\geq 5, n\equiv 1(mod\ 4), k\equiv 0(mod\ 2)$ ，在$n\times(n+k)$矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2}\times\frac{n+k-1}{2}\right)$

研究十：$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{2}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$

定理八
$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 6, n \equiv 2(mod\ 4), k \equiv 1(mod\ 2)$，在$n \times (n+k)$的矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$(n-2)(n+k)$

試證一：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{6}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{2}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}, \mathbf{1}) = \boldsymbol{n}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{n} - \mathbf{2}$

(1) 當$n = 6$時，$f(6,1) = 28$成立

(2) 令$n = 4x + 2, \forall x \in \mathbb{N}$時，$f(4x+2,1) = (4x+2)^2 - (4x+2) - 2$成立

則$n = 4x + 6$時，

$$f(4x+6,1) = (4x+2)^2 - (4x+2) - 2 + 4(4x+7+4x+2) - 8$$

$$= 16x^2 + 16x + 4 - 4x - 2 - 2 + 32x + 36 - 8$$

$$= (4x+6)^2 - (4x+6) - 2\text{成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6, n \equiv 2(mod\ 4), f(n,1) = n^2 - n - 2$

試證二：$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{k} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{2}), \boldsymbol{f}(\mathbf{6}, \boldsymbol{k}) = \mathbf{4}\boldsymbol{k} \times \frac{\mathbf{6-2}}{\mathbf{4}} + \mathbf{24}$

(1) 當$k = 1$時，$f(6,1) = 4 + 24 = 28$成立

(2) 令$k = 2y + 1, \forall y \in \mathbb{N}$，$f(6,2y+1) = 4(2y+1) \times \frac{6-2}{4} + 24$成立

則$k = 2y + 3$時，

$$f(6,2y+3) = 4(2y+1) \times \frac{6-2}{4} + 24 + 8 \times \frac{6-2}{4}$$

$$= 4(2y+3) \times \frac{6-2}{4} + 24\text{成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 1(mod\ 2), f(6,k) = 4k \times \frac{6-2}{4} + 24$

結合上述兩式可知：$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{6}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{2}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}), \boldsymbol{k} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{2}),$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{n} - \mathbf{2})(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k})$$

定理九

$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 6, n \equiv 2(mod\ 4), k \equiv 0(mod\ 2)$，在$n \times (n+k)$的矩形內，
其運動軌跡經過的最多格數為$n^2 + (k-2)(n-2)$

試證一：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq 6, \boldsymbol{n} \equiv 2(\boldsymbol{mod}\ 4), \boldsymbol{f(n,2) = n^2}$

(1) 當$n = 6$時，$f(6,2) = 36$成立

(2) 令$n = 4x + 2, \forall x \in \mathbb{N}$，$f(4x+2,2) = (4x+2)^2$成立

則$n = 4x + 6$時，

$$f(4x+6,2) = (4x+2)^2 + 4(4x+8+4x+2) - 8$$
$$= 16x^2 + 48x + 36$$
$$= (4x+6)^2 \text{成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6, n \equiv 2(mod\ 4), f(n,2) = n^2$

試證二：$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{k} \equiv 0(\boldsymbol{mod}\ 2), \boldsymbol{f(6,k) = 4k \times \frac{6-2}{4} + 28}$

(1) 當$k = 2$時，$f(6,2) = 36$成立

(2) 令$k = 2y, \forall y \in \mathbb{N}$，$f(6,2y) = 4(2y) \times \frac{6-2}{4} + 28$ 成立

則$k = 2y + 2$時，

$$f(6,2y+2) = 4(2y) \times \frac{6-2}{4} + 28 + 8 \times \frac{6-2}{4}$$
$$= 4(2y+2) \times \frac{6-2}{4} + 28 \text{成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 0(mod\ 2), f(6,k) = 4k \times \frac{6-2}{4} + 28$

結合上述兩式可知：$\forall \boldsymbol{n,k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq 6, \boldsymbol{n} \equiv 2(\boldsymbol{mod}\ 4), \boldsymbol{k} \equiv 0(\boldsymbol{mod}\ 2)$,

$$\boldsymbol{f(n,k) = n^2 + (k-2)(n-2)}$$

研究十一：$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{3}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4})$

定理十
$\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), k \equiv 1(mod\ 4)$，在$n \times (n+k)$的矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$n^2 - n + 2 + (n-1) \times (k-1)$

試證一：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{7}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{3}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}, \mathbf{1}) = \boldsymbol{n}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{n} + \mathbf{2}$

(1) 當$n = 7$時，$f(7,1) = 7^2 - 7 + 2 = 44$成立

(2) 令$n = 4x + 3, \forall x \in \mathbb{N}$，$f(4x+3,1) = (4x+3)^2 - (4x+3) + 2$成立

則$n = 4x + 7$時，

$$f(4x+7,1) = (4x+3)^2 - (4x+3) + 2 + 4(4x+3+4x+4+4) - 8$$

$$= 16x^2 + 24x + 9 - 4x - 3 + 2 + 32x + 36$$

$$= (4x+7)^2 - (4x+7) + 2 \text{ 成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), f(n,1) = n^2 - n + 2$

試證二：$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{k} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}), \boldsymbol{f}(\mathbf{7}, \boldsymbol{k}) = \mathbf{6}\boldsymbol{k} + \mathbf{38}$

(1) 當$k = 1$時，$f(7,1) = 6 \times 1 + 38 = 44$成立

(2) 令$k = 4y + 1, \forall y \in \mathbb{N}$，$f(7,4y+1) = 6(4y+1) + 38$成立

則 $k = 4y + 5$時，

$$f(7,4y+5) = 6(4y+1) + 38 + \left(16\frac{7-7}{4} + 24\right)$$

$$= 24y + 6 + 38 + 24$$

$$= 6(4y+5) + 38 \text{ 成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 1(mod\ 4), f(7,k) = 6k + 38$

結合上述兩式可知：$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{7}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{3}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}), \boldsymbol{k} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{4}),$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{n}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{n} + \mathbf{2} + (\boldsymbol{n} - \mathbf{1}) \times (\boldsymbol{k} - \mathbf{1})$$

定理十一

$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), k \equiv 2(mod\ 4)$，在$n \times (n+k)$的矩形內，
其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)$

試證一：$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), f(n,2) = n^2 - 1}$

(1) 當$n = 7$時，$f(7,2) = 7^2 - 1 = 48$成立

(2) 令$n = 4x + 3, \forall x \in \mathbb{N}$ ，$f(4x + 3,2) = (4x + 3)^2 - 1$成立

則$n = 4x + 7$時，

$$f(4x + 7,2) = (4x + 3)^2 - 1 + 4(4x + 3 + 4x + 5 + 4) - 8$$

$$= 16x^2 + 24x + 9 - 1 + 32x + 48 - 8$$

$$= (4x + 7)^2 - 1$$ 成立

故由數學歸納法知：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), f(n,2) = n^2 - 1$

試證二：$\boldsymbol{\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 2(mod\ 4), f(7,k) = 6k + 36}$

(1) 當$k = 2$時，$f(7,2) = 6 \times 2 + 36 = 48$成立

(2) 令$k = 4y + 2, \forall y \in \mathbb{N}$ ，$f(7,4y + 2) = 6(4y + 2) + 36$成立

則$k = 4y + 6$時，$f(7,4y + 6) = 6(4y + 2) + 36 + 4\frac{7-1}{4} \times 4$

$$= 24y + 12 + 36 + 24$$

$$= 6(4y + 6) + 36$$ 成立

故由數學歸納法知：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 2(mod\ 4), f(7,k) = 6k + 36$

結合上述兩式可知：$\boldsymbol{\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), k \equiv 2(mod\ 4),}$

$$\boldsymbol{f(n,k) = 4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2}\right)}$$

定理十二
$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), k \equiv 3(mod\ 4)$，在$n \times (n+k)$的矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$n^2+n-4+(n-1)(k-3)$

試證一：$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), f(n,3) = n^2+n-4}$

(1) 當$n=7$時，$f(7,3) = 7^2+7-4 = 52$成立

(2) 令$n = 4x+3, \forall x \in \mathbb{N}$，$f(4x+3,3) = (4x+3)^2+(4x+3)-4$成立

則$n = 4x+7$時，

$$f(4x+7,1) = (4x+3)^2+(4x+3)-4+4(4x+3+4x+4+4)-8$$

$$= 16x^2+24x+9+(4x+3)-4+32x+36$$

$$= (4x+7)^2+(4x+7)-4 \text{ 成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), f(n,3) = n^2+n-4$

試證二：$\boldsymbol{\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 3(mod\ 4), f(7,k) = 6k+34}$

(1) 當$k=3$時，$f(7,3) = 6 \times 3+34 = 52$ 成立

(2) 令$k = 4y+3, \forall y \in \mathbb{N}$，$f(7,y+3) = 6(4y+3)+34$成立

則$k = 4y+7$時，

$$f(7,4y+7) = 6(4y+3)+34+(16\frac{7-7}{4}+24)$$

$$= 24y+18+38+24$$

$$= 6(4y+7)+38 \text{ 成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 3(mod\ 4), f(7,k) = 6k+34$

結合上述兩式可知：$\boldsymbol{\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), k \equiv 3(mod\ 4)}$

$$\boldsymbol{f(n,k) = n^2+n-4+(n-1)(k-3)}$$

定理十三
$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), k \equiv 0(mod\ 4)$ ，在$n \times (n+k)$的矩形內， 其運動軌跡經過的最多格數為$4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2} - 1\right)$

試證一：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{7}, \boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{3}(\boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{4}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{4}) = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{2n} - \boldsymbol{7}$

(1) 當$n = 7$時，$f(7,2) = 7^2 + 2 \times 7 - 7 = 56$成立

(2) 令$n = 4x + 3, \forall x \in \mathbb{N}$ ，$f(4x+3,4) = (4x+3)^2 + 2(4x+3) - 7$成立

則$n = 4x + 7$時，

$$f(4x+7,2) = (4x+3)^2 + 2(4x+3) - 7 + 4(4x+3+4x+7+4) - 8$$

$$= 16x^2 + 24x + 9 + 8x + 6 - 7 + 32x + 48$$

$$= (4x+7)^2 + 2(4x+7) - 7 \text{ 成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7, n \equiv 3(mod\ 4), f(n,4) = n^2 + 2n - 7$

試證二：$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{0}(\boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{4}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{7},\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{6k} + \boldsymbol{32}$

(1) 當$k = 4$時，$f(7,4) = 6 \times 2 + 32$成立

(2) 令$k = 4y, \forall y \in \mathbb{N}$ ，$f(7,4y) = 6(4y) + 32$成立

則$k = 4y + 4$時，

$$f(7,4y+4) = 6(4y) + 32 + 4\frac{7-1}{4} \times 4$$

$$= 24y + 32 + 24$$

$$= 6(4y+4) + 32 \text{ 成立}$$

故由數學歸納法知：$\forall k \in \mathbb{N}, k \equiv 2(mod\ 4), f(7,k) = 6k + 32$

結合上述兩式可知：$\forall \boldsymbol{n},\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{7}, \boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{3}(\boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{4}), \boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{0}(\boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{4}),$

$$\boldsymbol{f(n,k) = 4\left(\frac{n-1}{2} \times \frac{n+k-1}{2} - 1\right)}$$

研究十三：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{0} (\boldsymbol{mod}\ \mathbf{2})$

定理十四
$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 0(mod\ 2)$，在$n \times n \times n$的正立方體內， 其運動軌跡經過的最多格數為$n^3$

(1) 當$n = 2$時，$g(2) = 2^3 = 8$成立

(2) 令$n = 2k, \forall k \in \mathbb{N}$時，$g(2k) = (2k)^3$成立

則$n = 2k + 2$時：$g(2k+2) = (2k)^3 + 24k^2 + 24k + 8 = (2k+2)^3$成立

故由數學歸納法得知：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{0}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{2})$，$\boldsymbol{g(n) = n^3}$

研究十四：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{1} (\boldsymbol{mod}\ \mathbf{2})$

定理十五
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, n \equiv 1(mod\ 2)$，在$n \times n \times n$的正立方體內， 其運動軌跡經過的最多格數為$n^3 - 3$

(1) 當$n = 3$時，$g(3) = 3^3 - 3 = 24$成立

(2) 令$n = 2k + 1, \forall k \in \mathbb{N}$時，$g(2k+1) = (2k+1)^3 - 3$成立

則$n = 2k + 3$時，

$$g(2k+3) = (2k+1)^3 - 3 + 24k^2 + 48k + 26$$

$$= (2k+3)^3 - 3\text{成立}$$

故由數學歸納法得知：$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}, \boldsymbol{n} \equiv \mathbf{1}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{2})$，$\boldsymbol{g(n) = n^3 - 3}$

附錄二、程式驗證過程

一、二維圖形完整程式碼

```
# 匯入需要的模組
import matplotlib.pyplot as plt #繪圖
import time #計算時間

# 定義 GridPathFinder 類別來尋找網格中的最長路徑
class GridPathFinder:
    dx = [-1, 0, 1, 0]
    dy = [0, 1, 0, -1]

    # 初始化方法
    def __init__(self, m, n):
        self.m, self.n = m, n  # 網格為 n*n
        self.max_len = 0  # 最長路徑的長度
        self.max_path = []  # 最長的路徑
        self.visited = [[0] * n for _ in range(m)]  # 記錄網格中每個點是否訪問過
        self.tt = 0  # 程式執行時間

    # 判斷一個座標是否有效，即是否在網格內
    def is_valid(self, x, y):
        return 0 <= x < self.m and 0 <= y < self.n

    # 深度優先搜索方法
    def dfs(self, x, y, direction, path):
        if self.visited[x][y] == 1:  # 如果這個點已經訪問過
            if len(path) > self.max_len and path[0] == (x, y):  # 如果當前路徑
比已找到的最長路徑長，並且
                self.max_len = len(path)  # 更新最長路徑的長度
                path.append((x, y))
                self.max_path = path.copy()  # 更新最長路徑
                path.pop()
            return
        path.append((x, y))  # 將當前點加入路徑中
        self.visited[x][y] = 1  # 標記當前點已訪問
```

```python
        for d in [(direction - 1) % 4, (direction + 1) % 4]:  # 向左和向右旋轉90度搜尋
            nx, ny = x + self.dx[d], y + self.dy[d]
            if self.is_valid(nx, ny):  # 如果新的點是有效的
                self.dfs(nx, ny, d, path)  # 對新的點進行深度優先搜索
        self.visited[x][y] = 0  # 回溯，將當前點的訪問狀態清除
        path.pop()  # 回溯，將當前點從路徑中移除

    # 尋找最長路徑的方法
    def find_path(self):
        start = time.time()  # 開始時間
        for i in range(self.m):
            for j in range(self.n):
                for d in range(1,3):
                    self.dfs(i, j, d, [])
        end = time.time()  # 結束時間
        self.tt = end - start  # 計算執行時間

# 創建一個 GridPathFinder 實例並尋找最長路徑
grid = GridPathFinder(n) #n
grid.find_path()

# 打印執行時間
minutes, seconds = divmod(grid.tt, 60)
hours, minutes = divmod(minutes, 60)
print(f"程式碼執行時間：{int(hours)}小時 {int(minutes)}分鐘 {seconds:.2f}秒")

# 打印最長路徑的長度和路徑本身
print(f"最長路徑長度：{grid.max_len}")
print(f"最長路徑：{grid.max_path}")

# 將座標各自增加 0.5 以在網格中心繪製點
max_path_x, max_path_y = zip(*grid.max_path)
max_path_x = [x + 0.5 for x in max_path_x]
max_path_y = [y + 0.5 for y in max_path_y]

# 繪製最長路徑
plt.figure(figsize=(grid.n, grid.m))
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
```

```python
plt.grid()
plt.plot(max_path_y, max_path_x, marker='o', markersize=8, color='red',
label='Path')
plt.legend(loc='upper right')
plt.xticks(range(grid.n+1))
plt.yticks(range(grid.m+1))

# 顯示圖像
plt.show()
```

二、三維圖形完整程式碼

```python
# 匯入需要的模組
import time #計算時間
import matplotlib.pyplot as plt #繪圖

# 定義類別
class OptimizedGridPathFinder:

    # 定義六個方向
    dx = [1, -1, 0, 0, 0, 0]
    dy = [0, 0, 1, -1, 0, 0]
    dz = [0, 0, 0, 0, 1, -1]

    # 初始化變數
    def __init__(self, n):
        self.n = n  # 網格為 n*n*n
        self.max_len = 0  # 最長路徑的長度
        self.max_path = []  # 最長的路徑
        self.visited = [[[0 for _ in range(n)] for _ in range(n)]
                               for _ in range(n)]  # 記錄格子是否被訪問過的 3 維列表
    # 判斷是否超出網格
    def is_valid(self, x, y, z):
        return 0 <= x < self.n and 0 <= y < self.n and 0 <= z < self.n

    # 深度優先搜索
    def dfs(self, x, y, z, direction, path):
        if self.visited[x][y][z] == 1:  # 如果這個點已經訪問過
            # 如果當前路徑比已找到的最長路徑長，並且回到起點
            if len(path) > self.max_len and path[0] == (x, y, z):
```

```
                self.max_len = len(path)  # 更新最長路徑的長度
                self.max_path = path.copy()  # 更新最長路徑
            return #結束搜尋
        path.append((x, y, z))  # 將當前點加入路徑中
        self.visited[x][y][z] = 1  # 標記當前點已訪問

        #改變方向
        valid_dirs = []
        if direction in [0, 1]:
            valid_dirs = list(range(2, 6))
        elif direction in [2, 3]:
            valid_dirs = [0, 1, 4, 5]
        elif direction in [4, 5]:
            valid_dirs = list(range(4))

        #往所有可能的方向搜尋
        for d in valid_dirs:
            nx, ny, nz = x + self.dx[d], y + self.dy[d], z + self.dz[d]
            if self.is_valid(nx, ny, nz): #如果沒有超出格子，就繼續搜尋
                self.dfs(nx, ny, nz, d, path)

        self.visited[x][y][z] = 0  # 回溯，將當前點的訪問狀態清除
        path.pop()  # 回溯，將當前點從路徑中移除

    # 窮舉尋找最長路徑
    def find_path(self):
        for i in range(self.n):
            for j in range(self.n):
                for k in range(self.n):
                    for d in range(6):
                        self.dfs(i, j, k, d, [])

# 帶入自定義的 n 創建一個實例
grid= OptimizedGridPathFinder(n, n+k)

#開始搜尋並記錄時間
start_time = time.time()

grid.find_path()
```

```python
end_time = time.time()
# 計算並打印執行時間
executiontime= end_time - start_time
minutes, seconds = divmod(executiontime, 60)
hours, minutes = divmod(minutes, 60)
print(f"程式碼執行時間：{int(hours)}小時 {int(minutes)}分鐘 {seconds:.2f}秒")

# 打印最長路徑的長度和路徑本身
print(f"最長路徑長度：{grid.max_len}")
print(f"最長路徑：{grid.max_path}")

grid.max_path.append(grid.max_path[0])

# 將座標各自增加 0.5 以在網格中心繪製點
x = [point[0]+0.5 for point in grid.max_path]
y = [point[1]+0.5 for point in grid.max_path]
z = [point[2]+0.5 for point in grid.max_path]

# 創建一個新的 3D 軸
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# 使用 plot 方法繪製連接的點
ax.plot(x, y, z, marker='o', markersize=5)

# 設定軸標籤
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')

# 設定軸刻度
ax.set_xticks(range(grid.n+1))
ax.set_yticks(range(grid.n+1))
ax.set_zticks(range(grid.n+1))

# 顯示圖形
plt.show()
```