第二十二屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA22-474

姓名：梁世脩

作品名稱：Candy Can 遞 Can 遞

參賽類別：數學

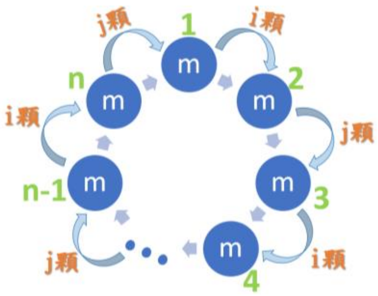
關鍵字：傳遞問題、行列式、迭代

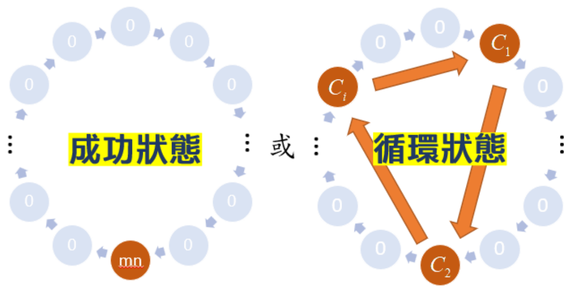
目錄

摘要

n 個人面向圓心圍成一圈，順時針編號 $1,2,...,n$ 。初始每人手中皆持有一顆糖果，由 1 號開始依序傳給左邊的人一顆、兩顆、一顆、兩顆……糖果，手上沒有糖果的人必須立即退出，直到不再有人退出。本研究主要探討此種糖果傳遞遊戲之最終結果，研究後發現僅分為由一人獨得之**成功狀態**，以及數人間循環傳遞之**循環狀態**，因此針對達成成功和循環狀態的充要條件、勝利者的初始編號、最終剩餘人數、遊戲結束時的傳遞輪數等進行研究探討。

除了研究最基本的型態之外，亦將遊戲規則推廣至初始每人手中可持有任意 m 顆糖果，也可任意傳遞 i 顆、 j 顆、 i 顆、 j 顆……糖果，且均已歸納並嚴謹證明其傳遞結果會依 n 值分為三大類。另外在研究過程中還發現：當傳遞步驟數為**質數**時，將其結果所成數列進行特定的**行列式運算**後之值與 jmn 相關。





壹、研究動機

在參考資料[1]中，其研究僅探討到初始每人持有顆數為 1 之情況，因此我們好奇**任意初始顆數** m 之傳遞結果，並嘗試改變傳遞糖果數，期望最終能找出：滿足任意人數 n 、初始顆數 m 以及傳遞糖果數之傳遞結果通式。

本研究與參考資料之比較表如下：

	參考文獻	本研究
初始顆數	1	任意正整數
傳遞規則	傳遞 1 顆、2 顆、3 顆…… p 顆 (p 為質數)	傳遞 i 顆、 j 顆、 i 顆、 j 顆……糖果 (i 、 j 為任意正整數)
研究內容	成功/循環條件、 未出局者初始編號	成功/循環條件、未出局者初始編號、持有糖果數、傳遞輪數、以結果回推規則

貳、研究目的

一、探討在不同傳遞規則與人數的情況下，最終之傳遞狀態為成功或循環。

二、探討在不同傳遞規則與人數的情況下，遊戲結束時之剩餘人數及其初始編號。

三、探討在不同傳遞規則與人數的情況下，達成功或循環狀態所需的傳遞輪數。

四、探討在不同傳遞規則與人數的情況下，傳遞結果中的行列式規則形態及其應用之處。

參、研究過程

一、研究流程

原始問題：
n人 初始1顆
依序傳遞 1顆、2顆 → **改變初始顆數m** → **依序傳遞 i 顆、j 顆糖果**

二、研究設備及器材

紙、筆、電腦、excel、python。

三、傳遞規則

n 個人面向圓心圍成一圈，順時針編號$1,2,...,n$。初始每人手中皆持有m顆糖果，由 1 號依序傳遞指定數目的糖果至左一位，手上沒有糖果須立即退出，直到不再有人退出。

四、名詞與符號定義

(一)狀態列 $A_n^r=(B_1,B_2,...,B_n)$ ： n 人傳遞 r 輪後，所有人(**包含出局者**)分別有 $B_1,B_2,...,B_n$ 顆糖果，其中 $B_1,B_2,...,B_n$ 為非負整數(**包含 0**)。

(二)狀態列 $a_n^r=(b_1,b_2,...,b_{n'})$ ： n 人傳遞 r 輪後，剩餘未出局者分別有 $b_1,b_2,...,b_{n'}$ 顆糖果，其中 $b_1,b_2,...,b_{n'}$ 為正整數(**不等於 0**)。

(三) $S_n^r=\{s_1,s_2,...,s_{n'}\}$ ： n 人傳遞 r 輪後，未出局的所有玩家之初始編號。

(四)成功狀態：若 n 人傳遞，最後由 1 人獨得所有糖果，則稱為「成功狀態」。

(五)循環狀態：若 n 人傳遞，最後由數位玩家無限傳遞不再出局，則稱為「循環狀態」。

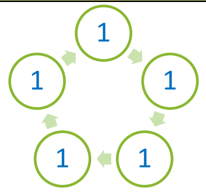
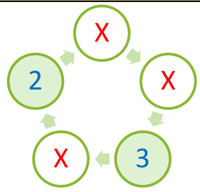
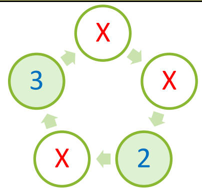
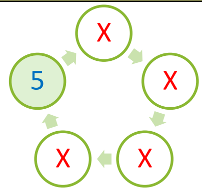
(六)傳遞步驟數 p ：指定的傳遞糖果數目每經過 p 次傳遞就會重複。

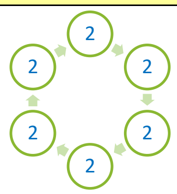
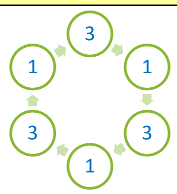
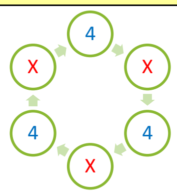
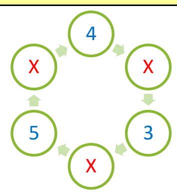
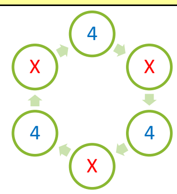
(七)第 r 輪：每人傳遞一次後，則稱為一輪，若重複至第 r 次，稱該輪為第 r 輪。

(八)所需的最少傳遞輪數 R ：達成功或循環狀態所需的傳遞輪數。

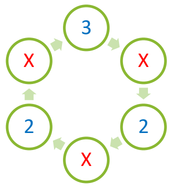
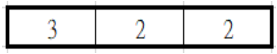
五、成功狀態及循環狀態說明

以下利用圈圈內數字代表各人手上持有糖果數，並以底色填滿標示出進行傳遞的人：

(一)以 5 人一開始分別持有 1 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆…糖果為例			
			
① 初始狀態 $A_5^0=(1,1,1,1,1)$ $a_5^0=(1,1,1,1,1)$	② 一輪後 1,2,4 號出局 $A_5^1=(0,0,3,0,2)$ $a_5^1=(3,2)$	③ 再經一輪傳遞 $A_5^2=(0,0,2,0,3)$ $a_5^2=(2,3)$	④ 再經一輪傳遞 $A_5^3=(0,0,0,0,5)$ $a_5^3=(5)$
1.最終由 1 人獨得所有糖果，稱為成功狀態。 2.贏家的初始編號為 5 號，且在第三輪時達此成功狀態，記做 $S_5^3=\{5\}$ 、 $R=3$ 。			

(二) 以 6 人一開始分別持有 2 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆…糖果為例例				
				
① 初始狀態 $A_6^0=(2,2,2,2,2,2)$ $a_6^0=(2,2,2,2,2,2)$	② 經一輪傳遞 $A_6^1=(3,1,3,1,3,1)$ $a_6^1=(3,1,3,1,3,1)$	③ 再經一輪 $A_6^2=(4,0,4,0,4,0)$ $a_6^2=(4,4,4)$	④ 再經一輪 $A_6^3=(4,0,3,0,5,0)$ $a_6^3=(4,3,5)$	⑤ 再經一輪 $A_6^4=(4,0,4,0,4,0)=A_6^2$ $a_6^4=(4,4,4)=a_6^2$
1 由上可知，在步驟 5 時，又會出現與步驟 3 相同之結果，並不斷重複步驟 3、4。此種由數人間不斷輪迴傳遞之情形，稱為循環狀態。 2.最終未出局之玩家為 1 號、3 號、5 號，且在第二輪時達此循環狀態，記做 $S_6^2=\{1,3,5\}$ 。 3.剩餘者以各有 4 顆糖果和分別 4、3、5 顆的情況重複，記做 $a_6^2=(4,4,4)\rightleftharpoons a_6^3=(4,3,5)$ 。				

為了方便記錄與分析，在不影響傳遞結果的前提下，將表示法簡化如下：

①捨棄已出局的人	②將圓圈改為直排	③以 excel 記錄結果	④改以狀態列表示
			$A_6^r=(3,0,2,0,2,0)$ $a_6^r=(3,2,2)$

六、研究方法及進行步驟

(一)規則分類

首先依傳遞糖果數之異同進行分類，例如：傳遞 1 顆、2 顆、3 顆⋯稱為全異、傳遞 1 顆、1 顆、2 顆⋯稱為二同一異。接著再以最基礎之型態進行初步探討，例如：先探討傳遞 1 顆、2 顆⋯之結果，再延伸探討傳遞 2 顆、3 顆⋯及傳遞 4 顆、5 顆⋯等，藉此進而推廣至任意傳遞 i 顆、 j 顆。

(二)觀察規律

運用自身程式能力撰寫 python 程式碼，僅需輸入遊戲人數、初始顆數及傳遞糖果數，即可藉由程式輸出傳遞過程與最終結果，較人為傳遞快速且精準，以利藉由大量數據觀察歸納統整出規律。

(三)推導公式

運用同餘、冪次、遞迴等概念進行分析數列型態及規律後推導出傳遞結果通式，並透過程式進行檢驗，最後再嚴謹證明。

```
n = int(input("n = ") )# input n here
num_str = ""
rule = []
set = [] # store the sequences that had appeared
rule_cnt = int(input("how many numbers(rule) are there
num = rule_cnt
while num: # input rules
    num -= 1
    k = int(input())
    rule.append(k)
people = []

for i in range(n): # initialize the sequence
    people.append(1)
def stutus_cal(people, n): # conditions to break
    zero = 0
    for i in range(n):
        if people[i] == 0:
            zero += 1
    if zero >= n-1:
        return 0
    else:
        return 1
status = stutus_cal(people, n)
a = 0
line = 0
while status:
    for i in range(n):
        if people[i] == 0:
            continue
        people[i%n] -= rule[a%rule_cnt]
        j = (i+1) % n
        while people[j] == 0:
            j = (j+1) % n
        people[(j)%n] += rule[a%rule_cnt]
        a += 1
    for i in range(n):
        print(people[i], end = " ")
    permutation = ""
    a %= rule_cnt
    line += 1
    print(f"line = {line}")
    for i in range(n):
        permutation += str(people[i])
    if permutation in set:
        index = set.index(permutation)
        index += 1
        print(f"repeated at line {index} and {line}")
        break
    else:
        set.append(permutation)
    status = stutus_cal(people, n)

print("program exit")
print(status)
```

肆、結論

(一) n 人一開始分別持有 1 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆…糖果

首先以 $n=9$ 為例：

初始	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\to a_9^0=(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{9個})$
步1	-1	+1								
步2		-2	+2							
步3			-1	+1						
步4				-2	+2					
步5					-1	+1				
步6						-2	+2			
步7							-1	+1		
步8								-2	+2	
步9			+1						-1	
輪一	0	0	3	0	2	0	2	0	2	$\to a_9^1=(\underbrace{2+1,2,2,2}_{2+1個})$
步10			-2		+2					
步11					-1		+1			
步12							-2		+2	
步13			+1						-1	
輪二	0	0	2	0	3	0	1	0	3	
步14			-2		+2					
步15					-1		+1			
步16							-2		+2	
步17					+1				-1	
輪三	0	0	0	0	5	0	0	0	4	$\to a_9^3=(\underbrace{2^2+1,2^2}_{1個})$
步18					-2				+2	
步19					+1				-1	
輪四	0	0	0	0	4	0	0	0	5	
步20					-2				+2	
步21					+1				-1	
步22	輪五				-2				+2	
步23					+1				-1	
步24	輪六				-2				+2	
步25					+1				-1	
步26	輪七				-2				+2	
步27					+1				-1	

八輪後，由9號獨得糖果:成功狀態，記做$S_9^8=\{9\}$ $\to a_9^R=(9), R=8$

將此性質整理成引理 1.1 與 1.2，敘述如下：

引理 1.1：n 人一開始分別持有 1 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆⋯糖果，$n\ge 3, r\ge 1, s\in\mathbb{N}$，且 n **為奇數**，則

1.

(1)若存在 $(2^r+1,\underbrace{2^r,\ldots,2^r}_{2s+1\text{個}})$，則存在 $(2^r+1,\underbrace{2^r,\ldots,2^r}_{2s+1\text{個}})\to(2^{r+1}+1,\underbrace{2^{r+1},\ldots,2^{r+1}}_{s\text{個}})$。

(2)若存在 $(2^r+1,\underbrace{2^r,\ldots,2^r}_{2s\text{個}})$，則存在 $(2^r+1,\underbrace{2^r,\ldots,2^r}_{2s\text{個}})\to$ 循環狀態。

2.將 n 表示為 $n=2^t\cdot k+1, t\in\mathbb{N}, 2\nmid k$

(1)若 $k=1$，則最終為成功狀態，其傳遞過程為 $a_n^0\to a_n^1\to a_n^2\to\ldots\to a_n^R$，

其中 $a_n^0=(\underbrace{1,1,\ldots\ldots,1}_{2^t+1\text{個}})$、$a_n^{2^r-1}=(2^r+1,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2^{t-r}-1\text{個}})$，$1\le r\le t-1$。

(2)若 $k\ne 1$，則最終為循環狀態，其傳遞過程為 $a_n^0\to a_n^2\to a_n^3\to\ldots\to a_n^R$(循環)，

其中 $a_n^0=(\underbrace{1,1,\ldots\ldots,1}_{2^t\cdot k+1\text{個}})$、$a_n^{2^r-1}=(2^r+1,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2^{t-r}\cdot k-1\text{個}})$，$1\le r\le t$。

<證明>請見附錄

由引理 1.1 可知，最終結果會與 2 的冪次有關，故將 n 表示成 $n=2^t\cdot k+q(t\in\mathbb{N}, 2\nmid k, q=1,2)$，先討論奇數一類，結果如下：

由結果可得：當 $k=1$時，為成功狀態。

$17=2^4\cdot 1+1\quad (t=4, k=1)$

17人參與遊戲

初始	1	1	1	⋯	1	1	1	1
輪一	3	2	2	2	2	2	2	2
輪三	0	5	0	4	0	4	0	4
輪七	0	0	0	9	0	0	0	8
輪十五	0	0	0	0	0	0	0	17

a_{17}^{15} : 成功狀態

$9=2^3\cdot 1+1\quad (t=3, k=1)$

9人參與遊戲

初始	1	1	⋯	1
輪一	3	2	2	2
輪三	0	5	0	4
輪七	0	0	0	9

a_9^7 : 成功狀態

由結果可得：當 $k\neq 1$ 時，為**循環狀態**。

$11=2^1\cdot 5+1\ \ (t=1,k=5)$	$7=2^1\cdot 3+1\ \ (t=1,k=3)$
$\overbrace{\text{初始}\ \ 1\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1\ \ 1}^{11\text{人參與遊戲}}$ $\downarrow$ 輪一 3 2 2 2 2 輪二 3 3 1 3 1 輪三 3 2 2 2 2 循環狀態: $a_{11}^1=(3,2,2,2,2)\rightleftharpoons a_{11}^2=(3,3,1,3,1)$	$\overbrace{\text{初始}\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1}^{7\text{人參與遊戲}}$ $\downarrow$ 輪一 3 2 2 輪二 3 3 1 輪三 3 2 2 循環狀態: $a_7^1=(3,2,2)\rightleftharpoons a_7^2=(3,3,1)$

引理 1.2： n 人一開始分別持有 1 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆⋯糖果， $n\geq 3,r\geq 1,s\in\mathbb{N}$ ，且 n **為偶數**，則

1.

(1)若存在 $(2^r+2,\underbrace{2^r,\ldots,2^r}_{2s+1\text{個}})$ ，則存在 $(2^r+2,\underbrace{2^r,\ldots,2^r}_{2s+1\text{個}})\to(2^{r+1}+2,\underbrace{2^{r+1},\ldots,2^{r+1}}_{s\text{個}})$ 。

(2)若存在 $(2^r+2,\underbrace{2^r,\ldots,2^r}_{2s\text{個}})$ ，則存在 $(2^r+2,\underbrace{2^r,\ldots,2^r}_{2s\text{個}})\to$ 循環狀態 。

2.將 n 表示為 $n=2^t\cdot k+2,t\in\mathbb{N},2\nmid k$

(1)若 $k=1$ ，則最終為成功狀態，其傳遞過程為 $a_n^0\to a_n^1\to a_n^2\to\ldots\to a_n^R$ ，

其中 $a_n^0=(\underbrace{1,1,\ldots\ldots,1}_{2^t+2\text{個}})$ 、 $a_n^{2^r-1}=(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2^{t-r}-1\text{個}})$ ，$1\leq r\leq t-1$ 。

(2)若 $k\neq 1$ ，則最終為循環狀態，其傳遞過程為 $a_n^0\to a_n^1\to a_n^2\to\ldots\to a_n^R$ ，

其中 $a_n^0=(\underbrace{1,1,\ldots\ldots,1}_{2^t\cdot k+2\text{個}})$ 、 $a_n^{2^r-1}=(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2^{t-r}\cdot k-1\text{個}})$ ，$1\leq r\leq t$ 。

<證明>請見附錄

由引理 1.2，n 為偶數時結果與奇數時相同，故將 n 表示成 $n=2^t\cdot k+q(t\in\mathbb{N},2\nmid k,q=1,2)$，結果如下：

由結果可得：當 $k=1$ 時，為成功狀態。

$18=2^4\cdot 1+2 \quad (t=4,k=1)$

$$\begin{array}{l|cccccccc} & \multicolumn{8}{c}{\overbrace{\hspace{6cm}}^{18\text{人參與遊戲}}} \\ \text{初始} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ \hline \text{輪一} & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \text{輪三} & 6 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ \text{輪七} & 10 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ \text{輪十五} & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

a_{18}^{15} : 成功狀態

$10=2^3\cdot 1+2 \quad (t=3,k=1)$

$$\begin{array}{l|cccc} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{3cm}}^{10\text{人參與遊戲}}} \\ \text{初始} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & \downarrow & \\ \hline \text{輪一} & 4 & 2 & 2 & 2 \\ \text{輪三} & 6 & 0 & 4 & 0 \\ \text{輪七} & 10 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

a_{10}^{7} : 成功狀態

由結果可得：當 $k\neq 1$ 時，為循環狀態。

$12=2^1\cdot 5+2 \quad (t=1,k=5)$

$$\begin{array}{l|ccccc} & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hspace{3.5cm}}^{12\text{人參與遊戲}}} \\ \text{初始} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & \downarrow & & \\ \hline \text{輪一} & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \text{輪二} & 4 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ \text{輪三} & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

循環狀態 : $a_{12}^1=(4,2,2,2,2)\rightleftharpoons a_{12}^2=(4,3,1,3,1)$

$8=2^1\cdot 3+2 \quad (t=1,k=3)$

$$\begin{array}{l|ccc} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hspace{2.5cm}}^{8\text{人參與遊戲}}} \\ \text{初始} & 1 & \cdots & 1 \\ & & \downarrow & \\ \hline \text{輪一} & 4 & 2 & 2 \\ \text{輪二} & 4 & 3 & 1 \\ \text{輪三} & 4 & 2 & 2 \end{array}$$

循環狀態 : $a_8^1=(4,2,2)\rightleftharpoons a_8^2=(4,3,1)$

引理 1.3：n 人一開始分別持有 1 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆…糖果，$n\geq 3,r\geq 1,s\in\mathbb{N}$，若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k+q,t\in\mathbb{N},2\nmid k,q=1,2$ 且 $1\leq r\leq t$，

且令 $S_n^{2^r-1}(i)$ 為第 2^r-1 輪時，**剩餘玩家中**第 i 位玩家的初始編號，則

1.若 n 為奇數，則 $S_n^{2^r-1}(i)=1+i\cdot 2^r$,$i=\{1,2,...,2^{t-r}\cdot k\}$ 其中 $a_n^{2^r-1}=(2^r+1,\underbrace{2^r,2^r,......,2^r}_{2^{t-r}\cdot k-1\text{個}})$。

2.若 n 為偶數，則 $S_n^{2^r-1}(i)=3+i\cdot 2^r$,$i=\{1,2,...,2^{t-r}\cdot k\}$ 其中 $a_n^{2^r-1}=(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,......,2^r}_{2^{t-r}\cdot k-1\text{個}})$。

<證明>請見附錄

根據上述可得引理 1.4，敘述如下：

引理 1.4： n 人一開始分別持有 1 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆…糖果， $n\geq 3$ ，若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k+q, t\in\mathbb{N}, 2\nmid k, q=1,2$ ，則

1. n 為奇數

(1)若 $k=1$ ，則最終為成功狀態，且 $S_n^R=\{n\}$ 。

(2)若 $k\neq 1$ ，則最終為循環狀態，且 $S_n^R=\{1+2^t, 1+2\cdot 2^t, ..., 1+k\cdot 2^t\}$ 。

2. n 為偶數

(1)若 $k=1$ ，則最終為成功狀態，且 $S_n^R=\{3\}$ 。

(2)若 $k\neq 1$ ，則最終為循環狀態，且 $S_n^R=\{3, 3+2^t, ..., 3+(k-1)2^t\}$ 。

<證明>請見附錄

綜合上述結果，將引理 1.1 至引理 1.4 整理成定理一，敘述如下：

定理一： n 人一開始分別持有 1 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆…糖果， $n\geq 3$ ，若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k+q, t\in\mathbb{N}, 2\nmid k, q=1,2$ ，且令 $\mathrm{S}=2^t\cdot(2-q)+(2q-1)$ ，則

(1)若 $k=1$ ，則為成功狀態，且 $S_n^R=\{S\}$ 、 $R=2^t+1$ 。

(2)若 $k\neq 1$ ，則為循環狀態，且 $S_n^R=\{S, S+2^t, ..., S+(k-1)2^t\}$ 、 $R=2^t-1$ 。

以下由 6 人、7 人一開始分別持有 1 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆⋯糖果，做更直觀分析：

$n=6=2^2+2 \quad (t=2, k=1, q=2)$

編號	1	2	3	4	5	6
初始	1	1	1	1	1	1
步1	-1	+1				
步2		−2	+2			
步3			-1	+1		
步4				−2	+2	
步5					-1	+1
步6			+2			−2
輪一	0	0	4	0	2	0
步7			-1		+1	
步8			+2		−2	
輪二	0	0	5	0	1	0
步9			-1		+1	
步10			+2		−2	

a_6^3:成功狀態

$n=7=2\times 3+1 \quad (t=1, k=3, q=1)$

編號	1	2	3	4	5	6	7
初始	1	1	1	1	1	1	1
步1	-1	+1					
步2		−2	+2				
步3			-1	+1			
步4				−2	+2		
步5					-1	+1	
步6						−2	+2
步7			+1				-1
輪一	0	0	3	0	2	0	2
步8			−2		+2		
步9					-1		+1
步10			+2				−2
輪二	0	0	3	0	3	0	1
步11			-1		+1		
步12					−2		+2
步13			+1				-1

循環狀態$S_7^1=[3,5,7]$

$a_7^1=(3,2,2) \rightleftharpoons a_7^2=(3,3,1)$

1.當每人初始只持有 1 顆糖果時，編號 1 與偶數編號者會在初輪出局。因此一輪後只剩下編號非 1 的奇數編號。

2.由此可知，在輪一結束後，剩餘人數恰為$(n-q)\times 2^{-1}$，而若該輪場上剩餘人數仍為偶數，將有一半玩家糖果**持續遞減**，而導致**出局**。

3.若場上剩餘玩家剩下奇數人但不只 1 人，每位玩家持有糖果將會在輪次間不斷增加再減少，由於每輪都將出局半數，因此在t輪後將剩$(2^t\times k)\times 2^{-t}=k$人，如上面 7 人遊玩從輪一至輪二的情況。形成了無法結束遊戲的循環狀態。

4.若場上在持續出局後，只剩一人，即為成功狀態，此現象發生在初輪結束後剩餘人數恰為 2 的冪次時，由於每輪都將出局半數，因此在t輪後將只剩$2^t\times 2^{-t}=1$人。

(二) n 人一開始分別持有 2 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆…糖果

接續定理一，探討每人**初始持有糖果數為** 2 之傳遞結果。以 $n=12$ 、 $n=13$ 為例：

人數	剩餘人數	第n輪	結果											
12	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
		2	4	4	4	4	4	4						
		3	5	3	5	3	5	3						
		4	6	2	6	2	6	2						
		5	7	1	7	1	7	1						
		6	8	8	8									
		7	8	7	9									

人數	剩餘人數	第n輪	結果												
13	3	1	2	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
		2	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
		3	5	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	
		4	6	4	4	4	4	4							
		5	7	3	5	3	5	3							
		6	8	2	6	2	6	2							
		7	9	1	7	1	7	1							
		8	10	8	8										
		9	10	7	9										

對比 $n=25$ 、 $n=26$ 依循引理 1.1 產生的結果：

人數	剩餘人數	第n輪	結果											
25	3	1	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		2	2	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
		3	5	4	4	4	4	4						
		4	4	5	3	5	3	5						
		5	3	6	2	6	2	6						
		6	2	7	1	7	1	7						
		7	9	8	8									
		8	9	9	7									

人數	剩餘人數	第n輪	結果											
26	3	1	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		2	5	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
		3	6	4	4	4	4	4						
		4	7	3	5	3	5	3						
		5	8	2	6	2	6	2						
		6	9	1	7	1	7	1						
		7	10	8	8									
		8	10	7	9									

發現每人初始兩顆的結果與引理 1.1 極為相似，進一步將其整理成引理 2.1：

引理 2.1： n 人一開始分別持有 2 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆…糖果， $n\ge 3, r\ge 1, s\in\mathbb{N}$ ，且 n **為奇數**，則

1.

(1)若存在 $(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r,2^r}_{2s+1個})$ ，則存在 $(2^r+2,\underbrace{2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s+1個})\to(2^{r+1}+2,\underbrace{2^{r+1},\ldots\ldots,2^{r+1}}_{s個})$ 。

(2)若存在 $(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r,2^r}_{2s個})$ ，則存在 $(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r,2^r}_{2s個})\to$ 循環狀態 。

2.將 n 表示為 $n=2^t\cdot k+1, t\in\mathbb{N}, 2\nmid k$

(1)若 $k=1$ ，則最終為成功狀態，其傳遞過程為 $a_n^0\to a_n^1\to a_n^2\to\ldots\to a_n^R$ ，

其中 $a_n^2=(4,\underbrace{2,2,\ldots\ldots,2}_{2^t-1個})$ 、 $a_n^{2^r}=(2^r+2,\underbrace{2^r,\ldots\ldots,2^r,2^r}_{2^{t-r+1}-1個})$ ， $1\le r\le t+1$ 。

(2)若 $k\ne 1$ ，則最終為循環狀態，其傳遞過程為 $a_n^0\to a_n^1\to a_n^2\to\ldots\to a_n^R$ ，

其中 $a_n^2=(4,\underbrace{2,2,\ldots\ldots,2}_{2^t\cdot k-1個})$ 、 $a_n^{2^r}=(2^r+2,\underbrace{2^r,\ldots\ldots,2^r,2^r}_{2^{t-r+1}\cdot k-1個})$ ， $1\le r\le t+1$ 。

<證明>請見附錄

同樣將 n 表示成 $n=2^t\cdot k+q, t\in\mathbb{N}, 2\nmid k, q=1,2$ ，但發現與數據結果不符，因此重新**將 n 的表示法調整成** $n=2^t\cdot k+q-1, t\in\mathbb{N}, 2\nmid k, q=1,2$ ，並分為奇偶兩類進行探討，結果如下：

<table>
<tr><th>由結果可得：當 $k=1$ 時，為成功狀態。</th><th>由結果可得：當 $k\neq 1$ 時，為循環狀態。</th></tr>
<tr><td>

$9=2^3\cdot 1+1\quad (t=3,k=1)$

9人參與遊戲

初始	2	2	2	⋯	2	2	2	2
↓								
輪二	4	2	2	2	2	2	2	2
輪四	6	0	4	0	4	0	4	0
輪八	10	0	0	0	8	0	0	0
輪十六	18	0	0	0	0	0	0	0

a_9^{16}：成功狀態

</td><td>

$7=2\cdot 3+1\quad (t=1,k=3)$

7人參與遊戲

初始	2	2	⋯	2	2	2
↓						
輪四	6	0	4	0	4	0
輪五	6	0	3	0	5	0
輪六	6	0	4	0	4	0

循環狀態:$a_7^4=(6,4,4)\rightleftharpoons a_7^5=(6,3,5)$

</td></tr>
</table>

引理 2.2：n 人一開始分別持有 2 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆⋯糖果，$n\geq 3, r\geq 1, s\in\mathbb{N}$，且 n **為偶數**，則

1.

(1)若存在 $(\underbrace{2^r,2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r,2^r}_{2s個})$，則存在 $(\underbrace{2^r,2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s個})\to(\underbrace{2^{r+1},2^{r+1},\ldots\ldots,2^{r+1}}_{s個})$。

(2)若存在 $(\underbrace{2^r,2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r,2^r}_{2s+1個})$，則存在 $(\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r,2^r}_{2s+1個})\to$ 循環狀態。

2.將 n 表示為 $n=2^t\cdot k, t\in\mathbb{N}, 2\nmid k$

(1)若 $k=1$，則最終為成功狀態，其傳遞過程為 $a_n^0\to a_n^1\to a_n^2\to\ldots\to a_n^R$，

其中 $a_n^0=(\underbrace{2,2,\ldots\ldots,2}_{2^t個})$、$a_n^{2^r-2}=(\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2^{t-r+1}個})$，$1\leq r\leq t+1$。

(2)若 $k\neq 1$，則最終為循環狀態，其傳遞過程為 $a_n^0\to a_n^1\to a_n^2\to\ldots\to a_n^R$，

其中 $a_n^0=(\underbrace{2,2,\ldots\ldots,2}_{2^t\cdot k個})$、$a_n^{2^r-2}=(\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2^{t-r+1}\cdot k個})$，$1\leq r\leq t+1$。

<證明>請見附錄

當 $k=1$ 時，為**成功狀態**。	當 $k\neq 1$ 時，為**循環狀態**。
$8=2^3\cdot 1\quad (t=3,k=1)$ $\overbrace{\text{初始}\quad 2\quad 2\quad \cdots\quad 2}^{8\text{人參與遊戲}}$ $\downarrow$ 輪二　4　4　4　4 輪六　8　0　8　0 輪十四　16　0　0　0 a_8^{14} : 成功狀態	$6=2\cdot 3\quad (t=1,k=3)$ $\overbrace{\text{初始}\quad 2\quad \cdots\quad 2}^{6\text{人參與遊戲}}$ $\downarrow$ 輪二　4　4　4 輪三　4　3　5 輪四　4　4　4 循環狀態 : $a_6^2=(4,4,4)\rightleftharpoons a_6^3=(4,3,5)$

引理 2.3： n 人一開始分別持有 2 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆⋯糖果， $n\geq 3, r\geq 1, s\in\mathbb{N}$ ，

若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k+q-1$, $t\in\mathbb{N}, 2\nmid k$, q=1,2 ，且 $1\leq r\leq t+1$ ，

令 $S_n^{2^r}(i)$ 為第 2^r 輪時，**剩餘玩家中**重新編號的第 i 號玩家的初始編號，

則

1.若 n 為奇數，則 $S_n^{2^r}(i)=1+(i-1)\cdot 2^{r-1}, i=\{1,2,...,2^{t-r+1}\cdot k\}$ 其中 $a_n^{2^r}=(2^r+1,\underbrace{2^r,2^r,......,2^r}_{2^{t-r+1}\cdot k-1\text{個}})$

2.若 n 為偶數，則 $S_n^{2^r-2}(i)=1+(i-1)\cdot 2^{r-1}, i=\{1,2,...,2^{t-r+1}\cdot k\}$ 其中 $a_n^{2^r-2}=(\underbrace{2^r,2^r,......,2^r}_{2^{t-r+1}\cdot k\text{個}})$

<證明>請見附錄(p.26)

根據上述可得引理 2.4，敘述如下：

引理 2.4： n 人一開始分別持有 2 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆⋯糖果， $n\geq 3$ ，

若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k+q-1$, $t\in\mathbb{N}, 2\nmid k$, q=1,2 ，則

1. n 為奇數

(1)若 $k=1$ ，則最終為成功狀態， $S_n^R=\{2\}$ 。

(2)若 $k\neq 1$ ，則最終為循環狀態， $S_n^R=\{2,2+2^t,2+2\cdot 2^t,......,2+(k-1)\cdot 2^t\}$ 。

2. n 為偶數

(1)若 $k=1$，則最終為成功狀態，$S_n^R=\{1\}$。

(2)若 $k\neq 1$，則最終為循環狀態，$S_n^R=\{1,1+2^t,1+2\cdot 2^t,\ldots\ldots,1+(k-1)\cdot 2^t\}$。

<證明>請見附錄(p.27)

綜合上述結果，將引理 2.1 至引理 2.4 整理成定理二，敘述如下：

定理二：n 人一開始分別持有 2 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆⋯糖果，$n\geq 3$，

若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k+q-1$, $t\in\mathbb{N}, 2\nmid k$, q=1,2，則

(1)若 $k=1$，則 $S_n^R=\{q\}$，且 $R=2n-2$。

(2)若 $k\neq 1$，則 $S_n^R=\{q,q+2^t,q+2\cdot 2^t,\ldots\ldots,q+(k-1)\cdot 2^t\}$，且 $R=2^{t+1}+2(q-2)$。

以下由 6 人、5 人一開始分別持有 1 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆⋯糖果，直觀分析與定理一的差異：

$n=6=2\times 3+1-1\ \ (t=1,k=3,q=1)$

編號	1	2	3	4	5	6
初始	2	2	2	2	2	2
步 1～6	+1	−1	+1	−1	+1	−1
輪一	3	1	3	1	3	1
步 7～12	+1	−1	+1	−1	+1	−1
輪二	4	0	4	0	4	0
步 13～15	+0		−1		+1	
輪三	4	0	3	0	5	0
步 16～18	+0		+1		−1	

循環狀態：$a_6^2=(4,4,4)\rightleftharpoons a_6^3=(4,3,5)$

$S_6^2=\{1,3,5\}$

$n=5=2^2+2-1\ (t=2,k=1,q=2)$

編號	1	2	3	4	5
初始	2	2	2	2	2
步 1～5	+0	−1	+1	−1	+1
輪一	2	1	3	1	3
步 6～10	−2	+3	−1	+1	−1
輪二	0	4	2	2	2
步 6～10	+0	+1	−1	+1	−1
輪三	0	5	1	3	1
步 15～18		+1	−1	+1	−1
輪四	0	6	0	4	0
步 19～24		+3		−3	
輪七	0	9	0	1	0
步25		+1		−1	

輪八 成功狀態：a_5^8

1.由於每人初始持有 2 顆時，編號 1 只在 n 為奇數時出局，故有 $q-1, q\in\{1,2\}$。然而若該輪場上所剩人數為偶數時，編號為奇數者糖果遞減，直到出局，如上。

2.如同定理一分析，若玩家出局後該輪場上所剩人數為奇數且非 1 時，玩家持有糖果將會在輪次間不斷增加再減少，導致循環狀態，如上述 6 人傳遞的情形；反之若場上剩下人數為 2 的冪次，將在若干次淘汰半數後，僅存一人得出成功狀態，如上述 5 人傳遞的情形。

(三) n 人一開始分別持有 m 顆糖果，依序傳遞 i 顆、$i+1$ 顆…糖果

接續定理一及定理二之研究，繼續改變每人初始持有糖果顆數。發現在 $m\geq 3$ 的情況下，不論 m 值為何，結果均相同，因此將傳遞規則統整如下：

> **定理三**：n 人一開始分別持有 3 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆…糖果，$n\geq 3$，
>
> 若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k, t\in\mathbb{N}\cup\{0\}, 2\nmid k$，則
>
> (1)若 $t=0, k\neq 1$，則循環狀態 $a_n^0=(3,3,\cdots,3)\rightleftharpoons a_n^R=(3,2,4,\cdots,4)$，且 $R=0$。
>
> (2)若 $t\neq 0, k=1$，則成功狀態 a_n^R，且 $R=3\times(n-1)$。
>
> (3)若 $t\neq 0, k\neq 1$，則循環狀態 $a_n^R=(\frac{3n}{k},\frac{3n}{k}-1,\frac{3n}{k}+1,\frac{3n}{k}-1,\frac{3n}{k}+1...)$，且 $R=3\times(2^t-1)$。

以下由 4 人、5 人、6 人一開始分別持有 3 顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆…糖果直觀分析：

	編號	1	2	3	4	5		編號	1	2	3	4	5	6
(1)5 人 $=2^0\times 5$	初始	3	3	3	3	3	(3)6 人 $=2^1\times 3$	初始	3	3	3	3	3	3
	步1~5	+0	−1	+1	−1	+1		步 1~18	+3	−3	+3	−3	+3	−3
	輪一	3	2	4	2	4		輪三	6	0	6	0	6	0
	步1~5	+0	+1	−1	+1	−1		步19~21	+0		−1		+1	
	輪二	3	3	3	3	3		輪四	6	0	5	0	7	0
	步1~5	+0	−1	+1	−1	+1		步21~24	+0		+1		−1	
	循環狀態 $S_5^0=\{1,2,3,4,5\}$							循環狀態 $S_6^3=[1,3,5]$						
	$a_5^0=(3,3,3,3,3)\rightleftharpoons a_5^1=(3,2,4,2,4)$							$a_6^3=(6,6,6)\rightleftharpoons a_6^4=(6,5,7)$						

(2)4 人 $=2^2\times 1$	編號 1 2 3 4 初始 3 3 3 3 步 1～4 +1 −1 +1 −1 輪一 4 2 4 2 步 5～8 +1 −1 +1 −1 輪二 5 1 5 1 步 9～12 +1 −1 +1 −1 輪三 6 0 6 0 步13～24 +6 −6 輪九：成功$S_4^9=\{1\}$ (1號獨得12顆)	1. 每人有 3 顆，大於每步傳遞的 1 與 2 顆，因此在持有數$m\geq 3$時，會排除編號一在首輪或次輪就出局的情形。 2. 依循定理一、二直觀分析，持有數$m\geq 3$時，在**遊戲開始時就遵守**著若有偶數人就在該輪**淘汰一半**的原則，使得只有在 2 的**冪次**下才有**成功狀態**。

<證明>請見附錄

除了改變傳遞的初始狀態m，我們也嘗試改變傳遞規則。一開始先將n**人一開始分別持有**m**顆糖果，依序傳遞 1 顆、2 顆…**改成同為**傳遞顆數差** 1 的 **2 顆、3 顆…糖果**，結果如下：

> **定理四**：n人一開始分別持有m顆糖果，依序傳遞 2 顆、3 顆…糖果，$n,m\geq 3$，
>
> 若將n表示成$n=2^t\cdot k,t\in\mathbb{N}\cup\{0\},2\nmid k$，則
>
> (1)若$t=0,k\neq 1$，則循環狀態$a_n^0=(m,m,\cdots,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m,m-1,m+1,\cdots,m+1)$，$R=0$。
>
> (2)若$t\neq 0,k=1$，則成功狀態a_n^R，且$R=m\times(n-1)$。
>
> (3)若$t\neq 0,k\neq 1$，則循環狀態$a_n^R=(\frac{nm}{k},\frac{nm}{k}-1,\frac{nm}{k}+1,\ldots)$，且$R=m\times(2^t-1)$。

<證明>同定理三

比較定理三、四內容，發現傳遞規則依序傳遞 1 顆、2 顆與 2 顆、3 顆的傳遞結果一致，**只有初始糖果顆數m值的限制不同**，進一步觀察依序傳遞 3 顆、4 顆與 4 顆、5 顆的規則，結果亦符合此情形，故直接探討所有前後傳遞顆數相差 1 之規則。以傳遞i、$i+j$表示，並將其傳遞情形整理如下。

	n 為奇數	n 為偶數
初始狀態	傳遞情形 A_1	傳遞情形 A_2
	$(\underbrace{m\quad m\quad m\ \cdots\cdots\ m\quad m\quad m}_{2s+1個})$ 傳 $-\ i\ -(i+1)\ -\ i\ \cdots\cdots -\ i\ -(i+1)\ -\ i$ 收 $+(i+1)+\ i\ +(i+1)\cdots\cdots+(i+1)\ +\ i\ +(i+1)$ 總 $+\ 1\ -\ 1\ +\ 1\ \cdots\cdots +\ 1\ -\ 1\ +\ 1$	$(\underbrace{m\quad m\quad m\ \cdots\cdots\ m\quad m\quad m}_{2s個})$ 傳 $-\ i\ -(i+1)\ -\ i\ \cdots\cdots-(i+1)\ -\ i\ -(i+1)$ 收 $+(i+1)+\ i\ +(i+1)\cdots\cdots+\ i\ +(i+1)\ +\ i$ 總 $+\ 1\ -\ 1\ +\ 1\ \cdots\cdots -\ 1\ -\ 1\ +\ 1$

綜合上述，整理並證明成定理五，敘述如下：

定理五：n 人一開始分別持有 m 顆糖果，依序傳遞 i 顆、$i+1$ 顆…糖果，$n\geq 3, m\geq i+1$，

若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k, t\in\mathbb{N}\cup\{0\}, 2\nmid k$，則

(1)若 $t=0, k\neq 1$，則循環狀態 $a_n^0=(m,m,\cdots,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m,m-1,m+1,\cdots,m+1)$，$R=0$。

(2)若 $t\neq 0, k=1$，則成功狀態 a_n^R，且 $R=m\times(n-1)$。

(3)若 $t\neq 0, k\neq 1$，則循環狀態

$$a_n^R=(\frac{nm}{k},\frac{nm}{k},\ldots,\frac{nm}{k})\rightleftharpoons a_n^{R+1}=(\frac{nm}{k},\frac{nm}{k}-1,\frac{nm}{k}+1,\ldots,\frac{nm}{k}+1)$$

，且 $R=m\times(2^t-1)$。

<證明>同定理三

接續上述，首先探討前後傳遞顆數相差 2 的傳遞規則：依序傳遞 2、4 顆。

(四) n 人一開始分別持有 m 顆糖果，依序傳遞 i 顆、$i+j$ 顆…糖果

研究發現，某些傳遞過程中居然會出現**負數**，這種情形不在我們的討論範圍內，我們將此稱為**無效傳遞**，並額外**限制 m 值**。

在規則為依序傳遞 2 顆、4 顆的情況下，m 為奇數時，均為無效傳遞，因此限制 m 必須被 2 整除，結果如下：

定理六：n 人一開始分別持有 m 顆糖果，依序傳遞 2 顆、4 顆…糖果，$n\geq 3, 2|m$，

若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k, t\in\mathbb{N}\cup\{0\}, 2\nmid k$，則

(1)若 $t=0, k\neq 1$，則循環狀態 $a_n^0=(m,m,\ldots,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m,m-2,m+2,\ldots,m+2)$，且 $R=0$。

(2)若 $t\neq 0, k=1$，則成功狀態 a_n^R，且 $R=\frac{m}{2}\times(n-1)$。

(3)若 $t\neq 0, k\neq 1$，則循環狀態 $a_n^R=(\frac{nm}{k},\frac{nm}{k},\cdots,\frac{nm}{k})\rightleftharpoons a_n^{R+1}=(\frac{nm}{k},\frac{nm}{k}-1,\cdots,\frac{nm}{k}+1)$，且 $R=\frac{m}{2}\times(2^t-1)$。

<證明>請見附錄

同樣再觀察其他前後傳遞顆數相差 2 的規則之傳遞結果，發現也有一模一樣的結論：

	n 為奇數	n 為偶數
初始狀態	傳遞情形 B_1	傳遞情形 B_2
	$(\underbrace{m\quad m\quad m\ \cdots\cdots\ m\quad m\quad m}_{2s+1個})$ 傳 $-\ i\ -(i+2)\ -\ i\ \cdots\cdots-\ i\ -(i+2)\ -\ i$ 收 $+(i+2)+\ i\ +(i+2)\cdots\cdots+(i+2)+\ i\ +(i+2)$ 總 $+\ 2\ -\ 2\ +\ 2\ \cdots\cdots+\ 2\ -\ 2\ +\ 2$	$(\underbrace{m\quad m\quad m\ \cdots\cdots\ m\quad m\quad m}_{2s個})$ 傳 $-\ i\ -(i+2)\ -\ i\ \cdots\cdots-(i+2)\ -\ i\ -(i+2)$ 收 $+(i+2)+\ i\ +(i+2)\cdots\cdots+\ i\ +(i+2)+\ i$ 總 $+\ 2\ -\ 2\ +\ 2\ \cdots\cdots-\ 2\ -\ 2\ +\ 2$

綜合上述，整理並證明成定理七，敘述如下：

定理七：n 人一開始分別持有 m 顆糖果，依序傳遞 i 顆、$i+2$ 顆…糖果，$n\geq 3, m\geq i+2, 2\mid m$，若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k, t\in\mathbb{N}\cup\{0\}, 2\nmid k$，則

(1)若 $t=0, k\neq 1$，則循環狀態 $a_n^0=(m,m,\ldots,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m,m-2,m+2,\ldots,m+2)$，且 $R=0$。

(2)若 $t\neq 0, k=1$，則成功狀態 a_n^R，且 $R=\dfrac{m}{2}\times(n-1)$。

(3)若 $t\neq 0, k\neq 1$，則循環狀態

$$a_n^R=(\frac{nm}{k},\frac{nm}{k},\cdots,\frac{nm}{k})\rightleftharpoons a_n^{R+1}=(\frac{nm}{k},\frac{nm}{k}-2,\frac{nm}{k}+2\cdots,\frac{nm}{k}+2)$$，且 $R=\dfrac{m}{2}\times(2^t-1)$。

<證明>同定理六

接續定理五以及定理七，再繼續延伸探討前後**傳遞顆數相差 3** 的規則，同樣在某些 m 值下，傳遞過程會出現負數，觀察後發現此時的限制為 m 必須被 3 整除，結果如下：

	n 為奇數	n 為偶數
初始狀態	傳遞情形 B_1	傳遞情形 B_2
	$(\underbrace{m\quad m\quad m\ \cdots\cdots\ m\quad m\quad m}_{2s+1個})$ 傳 $-\ i\ -(i+3)\ -\ i\ \cdots\cdots-\ i\ -(i+3)\ -\ i$ 收 $+(i+3)+\ i\ +(i+3)\cdots\cdots+(i+3)+\ i\ +(i+3)$ 總 $+\ 3\ -\ 3\ +\ 3\ \cdots\cdots+\ 3\ -\ 3\ +\ 3$	$(\underbrace{m\quad m\quad m\ \cdots\cdots\ m\quad m\quad m}_{2s個})$ 傳 $-\ i\ -(i+3)\ -\ i\ \cdots\cdots-(i+3)-\ i\ -(i+3)$ 收 $+(i+3)+\ i\ +(i+3)\cdots\cdots+\ i\ +(i+3)+\ i$ 總 $+\ 3\ -\ 3\ +\ 3\ \cdots\cdots-\ 3\ +\ 3\ -\ 3$

綜合上述，整理並證明成定理八，敘述如下：

定理八：n 人一開始分別持有 m 顆糖果，依序傳遞 i 顆、$i+3$ 顆…糖果，$n\geq 3, m\geq i+3, 3|m$，若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k, t\in\mathbb{N}\cup\{0\}, 2\nmid k$，則

(1)若 $t=0, k\neq 1$，則循環狀態

$a_n^0=(m,m,...,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m,m-3,m+3,m-3,m+3,...,m+3)$，且 $R=0$。

(2)若 $t\neq 0, k=1$，則成功狀態 a_n^R，且 $R=\dfrac{m}{3}\times(n-1)$。

(3)若 $t\neq 0, k\neq 1$，則循環狀態

$a_n^R=(\dfrac{nm}{k},\dfrac{nm}{k},\cdots,\dfrac{nm}{k})\rightleftharpoons a_n^{R+1}=(\dfrac{nm}{k},\dfrac{nm}{k}-3,\dfrac{nm}{k}+3,\cdots,\dfrac{nm}{k}+3)$，且 $R=\dfrac{m}{3}\times(2^t-1)$。

<證明>請見附錄

由定理五、七、八可將結果推廣至傳遞顆數差距任意之傳遞規則，敘述如下：

定理九：n 人一開始分別持有 m 顆糖果，依序傳遞 i 顆、$i+j$ 顆…糖果，$n\geq 3, m\geq i+j, j|m$，若將 n 表示成 $n=2^t\cdot k, t\in\mathbb{N}\cup\{0\}, 2\nmid k$，則

(1)若 $t=0, k\neq 1$，則循環狀態

$a_n^0=(m,m,...,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m,m-j,m+j,m-j,m+j,...,m+j)$，且 $R=0$。

(2)若 $t\neq 0, k=1$，則成功狀態 a_n^R，且 $R=\dfrac{m}{j}\times(n-1)$。

(3)若 $t\neq 0, k\neq 1$，則循環狀態

$a_n^R=(\dfrac{nm}{k},\dfrac{nm}{k},\cdots,\dfrac{nm}{k})\rightleftharpoons a_n^{R+1}=(\dfrac{nm}{k},\dfrac{nm}{k}-j,\dfrac{nm}{k}+j,\cdots,\dfrac{nm}{k}+j)$，且 $R=\dfrac{m}{j}\times(2^t-1)$。

<證明>請見附錄

伍、問題討論及應用

一、研究問題討論

(一)對於傳遞 i 顆、i 顆、$i+j$ 顆…糖果的觀察

以下為方便統整歸納，n 人分別有 m 顆糖果，依序傳遞 x_1 顆、x_2 顆、x_3 顆、…、x_p 顆糖果的傳遞規則定義為 ${}_mT_{x_1,x_2,\ldots,x_p}(n)$，例如：$n$ 人分別有 3 顆糖果，依序傳 1、2 顆糖果定義為 ${}_3T_{1,2}(n)$。

在規則 ${}_mT_{1,2}(n)$ 情況下，不論 m 值為何，均成有關 2 冪次形式，較容易研究，但規則 ${}_mT_{1,1,2}(n)$：n 人**每人有** m **顆，依序傳** 1、1、2 **顆**顯得較複雜。由於傳遞規則為 3 個一循環並推測結果**與 3 冪次有關**，而 3 冪次使數值快速增加，數據大是不便討論的原因之一，甚至耗費大量時間跑程式蒐集數據，雖尚未找出所有傳遞結果之通式，但以下發現：

1.最終皆為**循環狀態**。

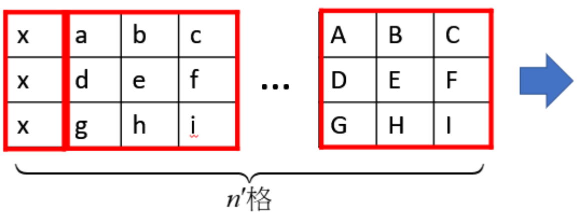
2.若最終循環人數 $n' \equiv 1 (\mathrm{mod}\,3)$，則由後往前框選作**三階行列式運算**取絕對值加總後再加上前面一重複出現之數，結果恰等於**人數** n。

Ex：${}_1T_{1,1,2}(10)$

人數	剩餘人數	第幾輪結果					
10	4	1	2	2	1	2	1	2
		2	2	1	2	2	3	
		3	3	3	2	2		
		4	3	3	1	3		
		5	3	2	2	3		

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 = 10$$

以未知數表示如下：



$$x + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = n$$

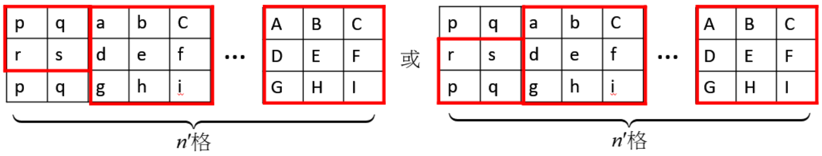
3.若最終循環人數 $n' \equiv 1 (\mathrm{mod}\,3)$，則由後往前框選作**三階行列式運算**取絕對值加總後再加上前面剩下的二階行列式值恰等於**人數** n。

Ex：${}_1T_{1,1,4}(23)$

人數	剩餘人數	第幾輪結果															
23	8	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
		2	4	1	1	2	2	3	1	1	2	2	3	1			
		3	3	2	1	1	3	3	2	2	1	4	1				
		4	2	3	1	4	3	1	3	1	3	2					
		5	2	2	2	4	2	2	3	4	2						
		6	4	2	3	3	2	2	5	2							
		7	3	3	3	2	3	2	4	3							
		8	4	2	4	2	2	3	4	2							

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 23$$

以未知數表示如下：



$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = n$$

我們好奇上述行列式性質是否在其他傳遞規則下也成立，若成立，希望能給予嚴謹證明，並找出其與原糖果傳遞問題之關聯；若不成立，希望能找出其成立之條件。

(二)傳遞結果中的行列式性質—循環規律中的暗號

探討傳遞規則 ${}_mT_{1,1,1,2}(n)$ 及 ${}_mT_{1,1,1,1,2}(n)$ 時，發現許多無法套用前述規則的狀況，因此我們將先前的框選規則調整為：在每個 p 階傳遞規則下，由後往前每次框選一個 n 階行列式(紅框)，重複此動作直到最後剩下不足 p 行時，再由前往後框選一個 p 階行列式(藍框)，如下所示：

人數	剩餘人數	第n輪	結果							
4	4	1	6	5	6	7				
		2	6	5	7	6				
		3	6	6	6	6				
8	8	1	7	5	6	7	5	6	7	5
		2	6	6	5	7	6	5	7	6
		3	6	6	6	6	6	6	6	6

為方便討論及說明，定義以下符號：

1. $\det(a_0)$ ：框選第1行至第 p 行的行列式值，即為上圖藍色框線所示

2. $\det(a_x)$ ：由左至右第 $x+1$ 個行列式(右至左第 $3(\left[\frac{n'}{p}\right]-x)$ 行至 $3(\left[\frac{n'}{p}\right]-x)-p+1$ 行)值

3. $\sum_{x=0}^{\left[\frac{n'}{p}\right]} \left|\det(a_x)\right|$ ：所有行列式取絕對值後之總和

首先探討當 p **為質數且相異步驟間接相差 j 或相等**之情形，若剩餘人數 $n' \geq$ 傳遞步驟數 p 時，其行列式之和具有以下特殊性質：

1.二階規則：

$p=2$	傳遞規則	行列式總和
2 異	${}_mT_{i,i+j}(n)$	jmn

<舉例>

${}_3T_{1,2}(5)$: 5 人分別有 3 顆，依序傳 1、2 顆

循環 ： $C_n(5)=(3,3,3,3,3) \rightleftharpoons (3,2,4,2,4)$

人數	剩餘人數	第n輪	結果				
5	5	1	3	2	4	2	4
		2	3	3	3	3	3

$$\sum_{x=0}^{\left[\frac{n'}{p}\right]}|\det(a_x)| = \left|\begin{matrix}3 & 2\\ 3 & 3\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}2 & 4\\ 3 & 3\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}2 & 4\\ 3 & 3\end{matrix}\right| = 15$$

$$jmn = 1\times 3\times 5 = 15$$

${}_6T_{3,5}(6)$: 6 人分別有 6 顆，依序傳 3、5 顆

循環 ： $C_n(3)=(12,12,12) \rightleftharpoons (12,10,14)$

人數	剩餘人數	第n輪	結果					
6	3	1	8	4	8	4	8	4
		2	10	2	10	2	10	2
		3	12	12	12			
		4	12	10	14			

$$\sum_{x=0}^{\left[\frac{n'}{p}\right]}|\det(a_x)| = \left\|\begin{matrix}12 & 12\\ 12 & 10\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}12 & 12\\ 10 & 14\end{matrix}\right\| = 72$$

$$jmn = 2\times 6\times 6 = 72$$

<證明>

2.三階規則：

$p=3$	傳遞規則	行列式總和
2 同 1 異	${}_mT_{i,i,i+j}(n)$	j^2mn
	${}_mT_{i,i+j,i+j}(n)$	
3 異	${}_mT_{i,i+j,i+2j}(n)$	$3\times j^2mn$

3.五階規則：

$p=5$	傳遞規則	行列式總和
4 同 1 異	${}_mT_{i,i,i,i,i+j}(n)$	j^4mn

	$_{m}T_{i,i+j,i+j,i+j,i+j}(n)$	
3 同 2 同	$_{m}T_{i,i,i,i+j,i+j}(n)$	j^4mn
	$_{m}T_{i,i,i+j,i+j,i+j}(n)$	
3 同 2 異	$_{m}T_{i,i,i,i+j,i+2j}(n)$	$j^4mn\times 11$
	$_{m}T_{i,i+j,i+2j,i+2j,i+2j}(n)$	
	$_{m}T_{i,i+j,i+j,i+j,i+2j}(n)$	$j^4mn\times 5$
2 同 3 異	$_{m}T_{i,i,i+j,i+2j,i+3j}(n)$	$j^4mn\times 41$
	$_{m}T_{i,i+j,i+j,i+2j,i+3j}(n)$	
	$_{m}T_{i,i+j,i+2j,i+2j,i+3j}(n)$	
	$_{m}T_{i,i+j,i+2j,i+3j,i+3j}(n)$	
2 同 2 同 1 異	$_{m}T_{i,i,i+j,i+j,i+2j}(n)$	$j^4mn\times 11$
	$_{m}T_{i,i+j,i+j,i+2j,i+2j}(n)$	
	$_{m}T_{i,i,i+j,i+2j,i+2j}(n)$	$j^4mn\times 5$
5 異	$_{m}T_{i,i+j,i+2j,i+3j,i+4j}(n)$	$j^4mn\times 5^3$

觀察以上數據結果，進一步延伸推廣至任意 p 階。

4.任意 p 階規則：

p 任意	傳遞規則	行列式總和
p-k 同 k 同	$_{m}T_{\underbrace{i,i,\cdots,i}_{p-k},\underbrace{i+j,\cdots i+j}_{k}}(n)$	$j^{p-1}mn$
特殊型	$_{m}T_{\underbrace{i,i,\cdots,i}_{p-2k},\underbrace{i+j,\cdots i+j}_{k},\underbrace{i+2j,\cdots i+2j}_{k}}(n)$	$j^{p-1}mn\times\frac{1}{3}(2^p+1)$
	$_{m}T_{\underbrace{i,i,\cdots,i}_{k},\underbrace{i+j,\cdots i+j}_{p-2k},\underbrace{i+2j,\cdots i+2j}_{k}}(n)$	$j^{p-1}mn\times p$
p 異	$_{m}T_{i,i+j,\cdots,i+(p-1)j}(n)$	$j^{p-1}mn\times p^{p-2}$

(三)行列式性質的應用—推論原傳遞規則的所有可能性

在已知傳遞規則及人數下可經由程式傳遞後之結果算出其行列式總和，我們好奇若

已知行列式總和是否可由此逆推出原傳遞規則，目前進行嘗試如下：

以 $\sum_{x=0}^{\left[\frac{n'}{p}\right]} \left|\det(a_x)\right| = 24$ 為例：

1. $p=2$ 、二異

行列式總和= $jmn \Rightarrow 24 = mnj$

滿足 $n > p$ 且 $m > i + j$ 之可能情況如下：

$24 = 1\times1\times24 \rightarrow \times$

$= 1\times2\times12 \rightarrow \times$

$= 1\times3\times8 \rightarrow {}_3T_{i,i+1}(8)$ 或 ${}_8T_{i,i+1}(3)$

$= 1\times4\times6 \rightarrow {}_4T_{i,i+1}(6)$ 或 ${}_6T_{i,i+1}(4)$

$= 2\times4\times3 \rightarrow {}_4T_{i,i+2}(3)$

2. $p=3$ 、二同一異

行列式總和= $j^2mn \Rightarrow 24 = mnj^2$

滿足 $n > p$ 且 $m > i + j$ 之可能情況如下：

$24 = 1\times6\times2^2 \rightarrow \times$	$= 1\times24\times1^2 \rightarrow \times$
$= 2\times3\times2^2 \rightarrow \times$	$= 2\times12\times1^2 \rightarrow \times$
$= 3\times2\times2^2 \rightarrow \times$	$= 3\times8\times1^2 \rightarrow {}_3T_{i,i+1,i+1}(8)$
$= 6\times1\times2^2 \rightarrow \times$	$= 4\times6\times1^2 \rightarrow {}_4T_{i,i+1,i+1}(6)$ 或 ${}_6T_{i,i+1,i+1}(4)$

3. $p=3$ 、三異

行列式總和= $3\times j^2mn \Rightarrow 24 = 3mnj^2 \Rightarrow 8 = mnj^2$

滿足 $n > p$ 且 $m > i + j$ 之可能情況如下：

$8 = 1\times2\times2^2 \rightarrow \times$	$= 1\times8\times1^2 \rightarrow \times$
$= 2\times1\times2^2 \rightarrow \times$	$= 2\times4\times1^2 \rightarrow \times$

由此可知在此情形下的狀況**共有 8 種可能的有效規則**

另外再以 $\sum_{x=0}^{\left[\frac{n'}{p}\right]}\left|\det(a_x)\right| = 144$ 為例：

	傳遞規則	行列式和	回推傳遞規則
$p=2$	${}_{m}\mathrm{T}_{i,i+j}(n)$	mnj	$144 = 3\times48\times1 \rightarrow {}_{3}T_{i,i+1}(48)\ \ or\ {}_{48}T_{i,i+1}(3)$ $= 4\times36\times1 \rightarrow {}_{4}T_{i,i+1}(36)\ \ or\ {}_{36}T_{i,i+1}(4)$ $= 6\times24\times1 \rightarrow {}_{6}T_{i,i+1}(24)\ \ or\ {}_{24}T_{i,i+1}(6)$ $= 8\times18\times1 \rightarrow {}_{8}T_{i,i+1}(18)\ \ or\ {}_{18}T_{i,i+1}(8)$ $= 9\times16\times1 \rightarrow {}_{9}T_{i,i+1}(16)\ \ or\ {}_{16}T_{i,i+1}(9)$ $= 12\times12\times1 \rightarrow {}_{12}T_{i,i+1}(12)$ $= 4\times18\times2 \rightarrow {}_{4}T_{i,i+2}(18)\ or\ {}_{18}T_{i,i+2}(4)$ $= 6\times12\times2 \rightarrow {}_{6}T_{i,i+2}(12)\ or\ {}_{12}T_{i,i+2}(6)$ $= 8\times9\times2 \rightarrow {}_{8}T_{i,i+2}(9)\ or\ {}_{9}T_{i,i+2}(8)$ $= 24\times3\times2 \rightarrow {}_{24}T_{i,i+2}(3)$ $= 6\times8\times3 \rightarrow {}_{6}T_{i,i+3}(8)\ or\ {}_{8}T_{i,i+3}(6)$ $= 12\times4\times3 \rightarrow {}_{12}T_{i,i+3}(4)\ or\ {}_{12}T_{i,i+4}(3)$ $= 16\times3\times3 \rightarrow {}_{16}T_{i,i+3}(3)$ $= 9\times4\times4 \rightarrow {}_{9}T_{i,i+4}(4)$ $= 6\times6\times4 \rightarrow {}_{6}T_{i,i+4}(6)$
$p=3$	${}_{m}\mathrm{T}_{i,i,i+j}(n)$	mnj^2	$144 = 3\times48\times1^2 \rightarrow {}_{3}T_{i,i,i+1}(48)$ $= 4\times36\times1^2 \rightarrow {}_{4}T_{i,i,i+1}(36)\ or\ {}_{36}T_{i,i,i+1}(4)$ $= 6\times24\times1^2 \rightarrow {}_{6}T_{i,i,i+1}(24)\ or\ {}_{24}T_{i,i,i+1}(6)$ $= 8\times18\times1^2 \rightarrow {}_{8}T_{i,i,i+1}(18)\ or\ {}_{18}T_{i,i,i+1}(8)$ $= 9\times16\times1^2 \rightarrow {}_{9}T_{i,i,i+1}(16)\ or\ {}_{16}T_{i,i,i+1}(9)$ $= 12\times12\times1^2 \rightarrow {}_{12}T_{i,i+1,i+1}(12)$ $= 4\times9\times2^2 \rightarrow {}_{4}T_{i,i,i+2}(9)\ or\ {}_{9}T_{i,i,i+2}(4)$ $= 6\times6\times2^2 \rightarrow {}_{6}T_{i,i,i+2}(6)$
	${}_{m}\mathrm{T}_{i,i+j,i+2j}(n)$	$3mnj^2$	$144 = 3\cdot(6\times8\times1^2) \rightarrow {}_{6}T_{i,i+1,i+2}(8)\ or\ {}_{8}T_{i,i+1,i+2}(6)$ $= 3\cdot(4\times12\times1^2) \rightarrow {}_{4}T_{i,i+1,i+2}(12)\ or\ {}_{12}T_{i,i+1,i+2}(4)$
$p=5$	${}_{m}\mathrm{T}_{i,i,i,i,i+j}(n)$	mnj^4	$144 = 3\times48\times1^4 \rightarrow {}_{3}T_{i,i,i,i,i+1}(48)$ $= 4\times36\times1^4 \rightarrow {}_{4}T_{i,i,i,i,i+1}(36)$ $= 6\times24\times1^4 \rightarrow {}_{6}T_{i,i,i,i,i+1}(24)\ or\ {}_{24}T_{i,i,i,i,i+1}(6)$ $= 8\times18\times1^4 \rightarrow {}_{8}T_{i,i,i,i,i+1}(18)\ or\ {}_{18}T_{i,i,i,i,i+1}(8)$ $= 9\times16\times1^4 \rightarrow {}_{9}T_{i,i,i,i,i+1}(16)\ or\ {}_{16}T_{i,i,i,i,i+1}(9)$ $= 12\times12\times1^4 \rightarrow {}_{12}T_{i,i,i,i,i+1}(12)$

由以上結果發現，同一行列式值逆推出的傳遞規則並非唯一，可能需透過給定其他條件進行限制，才得以藉由上述方法確定原傳遞規則。

二、研究問題延伸-不同給糖果的方式

(一)傳遞規則 ${}_{3,4}T_{1,2}(n)$

在推廣完所有二階的後，再進而討論不同給予糖果的方式。首先觀察傳遞規則 ${}_{3,4}T_{1,2}(n)$ 即從編號 1 開始每人依序持有 3 顆、4 顆、3 顆...糖果，並定義初始糖果顆數平均值為 M， 且依照原方法進行傳遞。

性質一：傳遞規則 ${}_{3,4}T_{1,2}(n)$ ：**n 人每人分別依序有 3、4 顆，依序傳遞 1、2 顆**， n 表示成

$n=2^t\cdot k(t\in\mathbb{N}\cup\{0\},2\nmid k)$ ，其中平均糖果數 $M=\frac{1}{2}(3+4)=\frac{7}{2}$ 則

(1)若 $t=0,k\neq 1$ ，則 $a_n^0=(3,4,\cdots,3)\rightleftharpoons a_n^R=(3,3,4,\cdots,3,4)$ ，且 $R=1$ 。

(2)若 $t\neq 0,k=1$ ，則 a_n^R : 成功狀態 ，且 $R=\frac{7n}{2}-3$ 。

(3)若 $t\neq 0,k\neq 1$ ，則循環狀態: $a_n^R=(\frac{7n}{2k},\frac{7n}{2k},\ldots,\frac{7n}{2k})$ ，且 $R=2^t\times\frac{7}{2}-3$ 。

(二)傳遞規則 ${}_{4,5}T_{1,2}(n)$

接著觀察初始相鄰兩者糖果持有數差距同為 1 的傳遞規則 ${}_{4,5}T_{1,2}(n)$ 。

性質二：傳遞規則 ${}_{4,5}T_{1,2}(n)$ ：**n 人每人分別依序有 4、5 顆，依序傳遞 1、2 顆**， n 表示成

$n=2^t\cdot k(t\in\mathbb{N}\cup\{0\},2\nmid k)$ ，其中平均糖果數 $M=\frac{9}{2}$ 則

(1)若 $t=0,k\neq 1$ ，則循環狀態: $a_n^0=(4,5,\cdots,4)\rightleftharpoons a_n^R=(4,4,5,\cdots,4,5)$ ，且 $R=1$ 。

(2)若 $t\neq 0,k=1$ ，則 a_n^R : 成功狀態 ，且 $R=\frac{9n}{2}-4$ 。

(3)若 $t\neq 0,k\neq 1$ ，則循環狀態: $a_n^R=(\frac{9n}{2k},\frac{9n}{2k},\ldots,\frac{9n}{2k})$ ，且 $R=2^t\times\frac{9}{2}-4$ 。

歸納以上兩傳遞規則，可應證 t 和 k 仍為影響成功與循環的主要因素，此外遊戲結束的所需輪數與平均糖果數有關。

(三)傳遞規則 ${}_{m,m+1}T_{1,2}(n)$

再經歷大量數據觀察後，整理出初始相鄰兩者糖果持有數差距同為 1 的一般化規則。

性質三：傳遞規則 ${}_{m,m+1}T_{1,2}(n)$ ：n 人每人分別依序有 m 、 $m+1$ 顆，依序傳遞 1、2 顆，n 表示成 $n=2^t\cdot k(t\in\mathbb{N}\cup\{0\},2\nmid k)$，其中平均糖果數為 M 則

(1)若 $t=0,k\neq1$，則循環狀態: $a_n^0=(m,m+1,\cdots,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m,m,m+1,\cdots,m,m+1)$，且 $R=1$。

(2)若 $t\neq0,k=1$，則 a_n^R :成功狀態，且 $R=Mn-m$。

(3)若 $t\neq0,k\neq1$，則循環狀態: $a_n^R=(\frac{M\times n}{k},\frac{M\times n}{k},\ldots,\frac{M\times n}{k})$，且 $R=2^tM-m$。

(四)傳遞規則 ${}_{3,5}T_{1,2}(n)$ 、 ${}_{3,6}T_{1,2}(n)$

之後我們又分別觀察了相鄰兩者持有糖果差 2 與差 3 的規則，也得到了類似的結果。

性質四：傳遞規則 ${}_{3,5}T_{1,2}(n)$ ：n 人每人分別依序有 3、5 顆，依序傳遞 1、2 顆，n 表示成 $n=2^t\cdot k(t\in\mathbb{N}\cup\{0\},2\nmid k)$，其中平均糖果數 $M=4$ 則

(1)若 $t=0,k\neq1$，則循環狀態: $a_n^0=(3,5,\cdots,3)\rightleftharpoons a_n^R=(3,3,5,\cdots,3,5)$，且 $R=1$。

(2)若 $t\neq0,k=1$，則 a_n^R :成功狀態，且 $R=4n-3$。

(3)若 $t\neq0,k\neq1$，則循環狀態: $a_n^R=(\frac{4n}{k},\frac{4n}{k},\ldots,\frac{4n}{k})$，且 $R=2^t\times4-3$。

性質五：傳遞規則 ${}_{3,6}T_{1,2}(n)$ ：n 每人分別依序有 3、6 顆，依序傳遞 1、2 顆，n 表示成 $n=2^t\cdot k(t\in\mathbb{N}\cup\{0\},2\nmid k)$，其中平均糖果數 $M=\frac{9}{2}$ 則

(1)若 $t=0,k\neq1$，則循環狀態: $a_n^0=(3,6,\cdots,3)\rightleftharpoons a_n^R=(3,3,6,\cdots,3,6)$，且 $R=1$。

(2)若 $t\neq0,k=1$，則 a_n^R :成功狀態，且 $R=\frac{9n}{2}-3$。

(3)若 $t\neq0,k\neq1$，則循環狀態: $a_n^R=(\frac{9n}{2k},\frac{9n}{2k},\ldots,\frac{9n}{2k})$，且 $R=2^t\times\frac{9}{2}-3$。

(五)傳遞規則 ${}_{m,m+d}T_{1,2}(n)$

依循以上的發現，可知相鄰兩者持有糖果差距只會影響人數為奇數下的循環狀態列。

性質六：傳遞規則 ${}_{m,m+d}T_{1,2}(n)$ ： n 人每人分別依序有 m 、 $m+d$ 顆，依序傳遞 1、2 顆， n 表示成 $n=2^t\cdot k(t\in\mathbb{N}\cup\{0\},2\nmid k)$，其中平均糖果數為 M 則

(1)若 $t=0,k\neq1$ ，則循環: $a_n^0=(m,m+d,\cdots,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m,m,m+d,\cdots,m,m+d)$ ，且 $R=1$ 。

(2)若 $t\neq0,k=1$ ，則 a_n^R :成功狀態 ，且 $R=2^tM-m$ 。

(3)若 $t\neq0,k\neq1$ ，則循環狀態: $a_n^R=(\frac{M\times n}{k},\frac{M\times n}{k},\ldots,\frac{M\times n}{k})$ ，且 $R=2^tM-m$ 。

然而，我們發現此結論會在持有糖果差 d 和傳遞差距 j 不整除時，發生無效傳遞。

(六)傳遞規則 ${}_{m,m+d}T_{i,i+j}(n)$

性質七：傳遞規則 ${}_{m,m+d}T_{i,i+j}(n)$ ： n 人每人依序有 m 、 $m+d$ 顆，依序傳遞 i 、 $i+j$ 顆， n 表示成 $n=2^t\cdot k(t\in\mathbb{N}\cup\{0\},2\nmid k)$，其中平均糖果數為 M 且 $j\mid d$ 則

(1)若 $t=0,k\neq1$ ，則循環: $a_n^0=(m,m+d,\cdots,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m,m,m+d,\cdots,m,m+d)$ ，且 $R=1$ 。

(2)若 $t\neq0,k=1$ ，則 a_n^R :成功狀態 ，且 $R=\frac{1}{j}(2^tM-m)$ 。

(3)若 $t\neq0,k\neq1$ ，則循環狀態: $a_n^R=(\frac{M\times n}{k},\frac{M\times n}{k},\ldots,\frac{M\times n}{k})$ ，且 $R=(2^tM-m)\times\frac{1}{j}$ 。

<證明>見附錄

三、研究問題延伸-高階等差傳遞規則

(一)傳遞規則 ${}_mT_{1,2,3}(n)$

先前我們嘗試將擁有任意高階步驟數的規則推廣，但結果大部分的規則只能符合行列式性質，然而，我們退而將步驟數呈現等差的規則加以分析，發現具規律的性質。

性質八：傳遞規則 ${}_mT_{1,2,3}(n)$ ： n 人每人分別有 m 顆，依序傳遞 1、2、3 顆， n 表示成 $n=3^t\cdot k(t\in\mathbb{N}\cup\{0\},3\nmid k)$ ，則

(1) 若 $t=0,k\neq1$ 且 $n\equiv q\pmod 3,q\in\{1,2\}$ 則循環狀態:

$a_n^0=(m,m,\cdots,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m+q-1,\underbrace{m-1,m-1,m+2}_{3個一循環},\cdots)$ 且 $R=1$ 。

(2)若$t \neq 0, k=1$，則a_n^R : 成功狀態，且$R=\dfrac{m}{2}(3^t-1)$。

(3)若$t \neq 0, k \neq 1$，則循環狀態: $a_n^R=(3^t m, 3^t m, \ldots, 3^t m)$，且$R=\dfrac{m}{2}(3^t-1)$。

(二)傳遞規則 $_mT_{i,i+j,i+2j}(n)$

同樣的，我們將三階等差規則一般化。

性質九：傳遞規則$_mT_{i,i+j,i+2j}(n)$：**n人每人分別有m顆，依序傳遞i、$i+j$、$i+2j$顆**，n表示成$n=3^t \cdot k(t \in \mathbb{N} \cup\{0\}, 3 \nmid k)$，則

(1) 若$t=0, k \neq 1$且$n \equiv q \pmod 3$, $q \in\{1,2\}$則循環狀態:

$$a_n^0=(m, m, \cdots, m) \rightleftharpoons a_n^R=(m+q-j, \underbrace{m-j, m-j, m+2j}_{3個一循環}, \cdots) \text{且} R=1 \text{。}$$

(2)若$t \neq 0, k=1$，則a_n^R : 成功狀態，且$R=\dfrac{m}{2j}(3^t-1)$。

(3)若$t \neq 0, k \neq 1$，則循環狀態: $a_n^R=(3^t m, 3^t m, \ldots, 3^t m)$，且$R=\dfrac{m}{2j}(3^t-1)$。

(三)傳遞規則 $_mT_{1,2,3,4,5}(n)$

接著，我們推廣至五階，並成功將其一般化。

性質十：傳遞規則$_mT_{1,2,3,4,5}(n)$：**n人每人分別有m顆，依序傳遞 1、2、3、4、5顆**，n表示成$n=5^t \cdot k(t \in \mathbb{N} \cup\{0\}, 5 \nmid k)$，則

(1) 若$t=0, k \neq 1$且$n \equiv q \pmod 5$, $q \in\{1,2,3,4\}$，則循環狀態:

$$a_n^0=(m, m, \cdots, m) \rightleftharpoons a_n^R=(m+q-1, \underbrace{m-1, m-1, m-1, m-1, m+4}_{5個一循環}, \cdots) \text{且} R=1 \text{。}$$

(2)若$t \neq 0, k=1$，則a_n^R : 成功狀態，且$R=\dfrac{m}{4}(5^t-1)$。

(3)若$t \neq 0, k \neq 1$，則循環狀態: $a_n^R=(5^t m, 5^t m, \ldots, 5^t m)$，且$R=\dfrac{m}{4}(5^t-1)$。

(四)傳遞規則 $_mT_{i,i+j,i+2j,i+3j,i+4j}(n)$

性質十一：傳遞規則$_mT_{i,i+j,i+2j,i+3j,i+4j}(n)$：**$n$人每人有$m$顆，依序傳遞$i$、$i+j$、$i+2j$、$i+3j$、$i+4j$顆**，$n$表示成$n=5^t \cdot k(t \in \mathbb{N} \cup\{0\}, 5 \nmid k)$，則

(1) 若 $t=0, k\neq 1$ 且 $n\equiv q \pmod 5, q\in\{1,2,3,4\}$，則循環狀態:

$$a_n^0=(m,m,\cdots,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m+q-j,\underbrace{m-j,m-j,m-j,m-j,m+4j}_{5\text{個一循環}},\cdots) \text{ 且 } R=1 \text{ 。}$$

(2)若 $t\neq 0, k=1$，則 a_n^R : 成功狀態，且 $R=\dfrac{m}{4j}(5^t-1)$ 。

(3)若 $t\neq 0, k\neq 1$，則循環狀態: $a_n^R=(5^t m, 5^t m, \ldots, 5^t m)$，且 $R=\dfrac{m}{4j}(5^t-1)$ 。

(五)傳遞規則 ${}_mT_{i+j,i+2j,\ldots,i+pj}(n)$

在分析過程中，我們發現大多在規則步驟數**非質數**的情形，便會出現玩家手中出現負數 的無效傳遞情形或是無法系統性的規律。但是卻有一些數據仍有些許規律，整理後才統整出，這些同樣具有相似性質的規則，其步驟數階為**質數的冪次**。

性質十二：傳遞規則 ${}_mT_{i+j,i+2j,\ldots,i+pj}(n)$ ： **n 人每人有 m 顆，依序傳遞 $i+j$ 、 $i+2j$ 、 ... 、 $i+pj$ 顆**， n 表示成 $n=p^{tr}\cdot k(tr\in\mathbb{N}\cup\{0\}, p_0\nmid k)$，而 $p=p_0^{\,r}$ 其中 p_0 為質數且 $r\in\mathbb{N}$ 則

(1) 若 $tr=0, k\neq 1$ 且 $n\equiv q \pmod{p_0}, q\in\{1,2,\ldots,p_0-1\}$，則

$$a_n^0=(m,m,\cdots,m)\rightleftharpoons a_n^R=(m+q-j,\underbrace{m-j,m-j,\cdots,m+(p-1)j}_{p\text{個一循環}},\cdots) \text{ 且 } R=1 \text{ 。}$$

(2)若 $tr\neq 0, k=1$，則 a_n^R : 成功狀態，且 $R=\dfrac{mp}{j}\times\left(\dfrac{p^{\left[t-\frac{1}{r}\right]}-1}{p-1}+1\right)$ 。

(3)若 $t\neq 0, k\neq 1$，則循環狀態: $a_n^R=(q^t m, q^t m, \ldots, q^t m)$，且 $R=\dfrac{mp}{j}\times\left(\dfrac{p^{\left[t-\frac{1}{r}\right]}-1}{p-1}+1\right)$ 。

陸、參考資料

1.黃宇綸、黃宇瑄。糖果傳遞問題之研究與推廣。中華民國 61 屆中小學科學展覽會數學科國中組數學科。

2.曹齊平、曹為翔(2020)。python 程式應用範例。台北：洛奇。

3.許志農(主編)(2019)。普通型高級中等學校數學第二冊。台北：龍騰。

4.許志農(主編)(2020)。普通型高級中等學校數學第四冊 A。台北：龍騰。

柒、附錄

一、引理 1.1 證明

(一) 引理 1.1.1

1. $(2^r+1,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s+1\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(2^r+2,\underbrace{2^r-1,2^r+1,\ldots\ldots,2^r-1}_{2s+1\text{個}})$

$\xrightarrow{2\text{輪}}(2^r+3,\underbrace{2^r-2,2^r+2,\ldots\ldots,2^r-2}_{2s+1\text{個}})\xrightarrow{3\text{輪}}(2^r+4,\underbrace{2^r-3,2^r+3,\ldots\ldots,2^r-3}_{2s+1\text{個}})\to\cdots$

$\xrightarrow{2^r\text{輪}}(2^r+2^r+1,\underbrace{2^r-2^r,2^r+2^r,\ldots\ldots,2^r-2^r}_{2s+1\text{個}})=(2^{r+1}+1,\underbrace{2^{r+1},2^{r+1},\ldots\ldots,2^{r+1}}_{s\text{個}})$

2. $(2^r+1,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(2^r+2,\underbrace{2^r-1,2^r+1,\ldots\ldots,2^r-1}_{2s\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(2^r+1,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s\text{個}})$

(一)引理 1.1.2

1. $(\underbrace{1,1,\ldots\ldots,1}_{2^t+1\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(0,0,3,0,2,0,\cdots\cdots,2,0,2)=(3,\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}\text{-}1\text{個}})\xrightarrow{\text{引理}1,1.1}(5,\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{2^{t-2}\text{-}1\text{個}})$

$\to\cdots\xrightarrow{\text{引理}1,1.1}(2^{t-2}+1,\underbrace{2^{t-2},2^{t-2},2^{t-2}}_{2^2\text{-}1\text{個}})\xrightarrow{\text{引理}1,1.1}(2^{t-1}+1,2^{t-1})\to(2^t+1)$: 成功

2. $(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{2^t\cdot k+1\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(0,0,3,0,2,0,\cdots\cdots,2,0,2)=(3,\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}\cdot k\text{-}1\text{個}})\xrightarrow{\text{引理}1,1.1}(5,\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{2^{t-2}\cdot k\text{-}1\text{個}})$

$\to\cdots\xrightarrow{\text{引理}1,1.1}(2^t+1,\underbrace{2^t,\ldots\ldots,2^t}_{k\text{-}1\text{個}})\xrightarrow{\text{引理}1,1.1}$ 循環

(二) n 為偶數

1. $(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s+1\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(2^r+3,\underbrace{2^r-1,2^r+1,\ldots\ldots,2^r-1}_{2s+1\text{個}})$

$\xrightarrow{2\text{輪}}(2^r+4,\underbrace{2^r-2,2^r+2,\ldots\ldots,2^r-2}_{2s+1\text{個}})\xrightarrow{3\text{輪}}(2^r+5,\underbrace{2^r-3,2^r+3,\ldots\ldots,2^r-3}_{2s+1\text{個}})\to\cdots$

$\xrightarrow{2^r\text{輪}}(2^r+2^r+2,\underbrace{2^r-2^r,2^r+2^r,\ldots\ldots,2^r-2^r}_{2s+1\text{個}})=(2^{r+1}+2,\underbrace{2^{r+1},2^{r+1},\ldots\ldots,2^{r+1}}_{s\text{個}})$

2. $(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(2^r+3,\underbrace{2^r-1,2^r+1,\ldots\ldots,2^r-1}_{2s\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s\text{個}})$

二、引理 1.2 證明

(一)引理 1.2.1

1. $(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s+1\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(2^r+3,\underbrace{2^r-1,2^r+1,\ldots\ldots,2^r-1}_{2s+1\text{個}})$

$$\xrightarrow{2輪}(2^r+4,\underbrace{2^r-2,2^r+2,\ldots\ldots,2^r-2}_{2s+1個})\xrightarrow{3輪}(2^r+5,\underbrace{2^r-3,2^r+3,\ldots\ldots,2^r-3}_{2s+1個})\to\cdots$$

$$\xrightarrow{2^r輪}(2^r+2^r+2,\underbrace{2^r-2^r,2^r+2^r,\ldots\ldots,2^r-2^r}_{2s+1個})=(2^{r+1}+2,\underbrace{2^{r+1},2^{r+1},\ldots\ldots,2^{r+1}}_{s個})$$

2. $(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s個})\xrightarrow{1輪}(2^r+3,\underbrace{2^r-1,2^r+1,\ldots\ldots,2^r-1}_{2s個})\xrightarrow{2輪}(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s個})$

(二)引理 1.2.2

1. $(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{2^t+2個})\xrightarrow{1輪}(0,0,4,0,2,0,\cdots\cdots,2,0)=(4,\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}-1個})\xrightarrow{引理1,2.1}(6,\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{2^{t-2}-1個})$

$\to\cdots\xrightarrow{引理1,2.1}(2^{t-2}+2,\underbrace{2^{t-2},2^{t-2},2^{t-2}}_{2^2-1個})\xrightarrow{引理1,2.1}(2^{t-1}+2,2^{t-1})\to(2^t+2)$: 成功

2. $(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{2^t\cdot k+2個})\xrightarrow{1輪}(0,0,2,0,2,0,\cdots\cdots,2,0)=(4,\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}\cdot k-1個})\xrightarrow{引理1,2}(6,\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{2^{t-2}\cdot k-1個})$

$\to\cdots\xrightarrow{引理1,2.1}(2^t+2,\underbrace{2^t,\ldots\ldots,2^t}_{k-1個})\xrightarrow{引理1,2.1}$循環

三、引理 1.3 證明

(一) n 為奇數

1.當 $r=1$ 時

$$\because\ a_n^0=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot k+1)個})\xrightarrow{1輪}(\underbrace{0,0,3,0,2,0,\cdots\cdots,2,0,2}_{(2^t\cdot k+1)個})=(3,\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{(2^{t-1}\cdot k+1)個})=a_n^1$$

$\therefore S_n^1(1)=3,S_n^1(2)=5,\cdots\cdots,S_n^1(2^{t-1}\cdot k)=2^t\cdot k+1=1+(2^{t-1}\cdot k)\cdot 2^1$ 原式成立

2.設 當 $r=r'$ 時 原式成立，即 $S_n^{2^{r'}-1}(i)=1+i\cdot 2^{r'},i=\{1,2,\cdots,2^{t-r'}\cdot k\}$

則 當 $r=r'+1$ 時

$$a_n^{2^{r'}-1}=(2^{r'}+2,\underbrace{2^{r'},2^{r'},\cdots\cdots,2^{r'}}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})\xrightarrow{1輪}(2^{r'}+2,\underbrace{2^{r'}-1,2^{r'}+1,\cdots\cdots,2^{r'}-1}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})$$

$$\xrightarrow{2輪}(2^{r'}+3,\underbrace{2^{r'}-2,2^{r'}+2,\cdots\cdots,2^{r'}-2}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{2^{r'}輪}(2^{r'}+2^{r'}+1,\underbrace{2^{r'}-2^{r'},2^{r'}+2^{r'},\cdots\cdots,2^{r'}-2^{r'}}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})$$

$$=(2^{r'+1}+1,\underbrace{2^{r'+1},2^{r'+1},\cdots\cdots,2^{r'+1}}_{2^{t-r'-1}\cdot k-1個})=S_n^{2^{r'+1}-1}$$

$$\therefore S_n^{2^{r'+1}-1}(1)=1+2^{r'+1}, S_n^{2^{r'+1}-1}(2)=1+2\cdot 2^{r'+1},\cdots\cdots, S_n^{2^{r'+1}-1}(2^{t-r'-1}\cdot k)=1+2^{t-r'-1}\cdot k\cdot 2^{r'+1}$$

由 1.、2.及**數學歸納法**，得證

(二) n 為偶數

1.當 $r=1$ 時

$$\because\ a_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot k+2)\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{0,0,4,0,2,0,\cdots\cdots,2,0}_{(2^t\cdot k+2)\text{個}})=(4,\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}\cdot k\text{-}1\text{個}})=a_1^n$$

$$\therefore S_n^1(1)=3, S_n^1(2)=5,\cdots\cdots, S_n^1(2^{t-1}\cdot k)=2^t\cdot k+1=3+(2^{t-1}\cdot k-1)\cdot 2^1$$

$$\therefore S_n^1(2^{t-1}\cdot k+1)=2^t\cdot k+2=3+[2(2^{t-1}\cdot k+1)-3]\cdot 2^0\quad \text{原式成立}$$

2.設 當 $r=r'$ 時 原式成立，即 $\mathrm{S}_n^{2^{r'}-1}(i)=\begin{cases}3+(i-1)\cdot 2^{r'} & ,i=\{1,2,...,2^{t-r'}\cdot k\}\\ 3+(2i-3)\cdot 2^{r'-1} & ,i=\{2^{t-r'}\cdot k+1\}\end{cases}$

則 當 $r=r'+1$ 時，$a_n^{2^{r'}-1}=(2^{r'}+2,\underbrace{2^{r'},2^{r'},\cdots\cdots,2^{r'}}_{2^{t-r'}\cdot k-1\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(2^{r'}+3,\underbrace{2^{r'}+1,2^{r'}-1,\cdots\cdots,2^{r'}-1}_{2^{t-r'}\cdot k-1\text{個}})$

$$\xrightarrow{2\text{輪}}(2^{r'}+4,\underbrace{2^{r'}-2,2^{r'}+2,\cdots\cdots,2^{r'}-2}_{2^{t-r'}\cdot k-1\text{個}})\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{2^{r'}\text{輪}}(2^{r'}+2^{r'}+2,\underbrace{2^{r'}-2^{r'},2^{r'}+2^{r'},\cdots\cdots,2^{r'}-2^{r'}}_{2^{t-r'}\cdot k-1\text{個}})$$

$$=(2^{r'+1}+2,\underbrace{2^{r'+1},2^{r'+1},\cdots\cdots,2^{r'+1}}_{2^{t-r'-1}\cdot k-1\text{個}})=a_n^{2^{r'+1}-1}$$

$$\therefore S_n^{2^{r'+1}-1}(1)=3, S_n^{2^{r'+1}-1}(2)=3+2\cdot 2^{r'}=3+2^{r'+1},\cdots\cdots,$$

$$S_n^{2^{r'+1}-1}(2^{t-r'-1}\cdot k)=3+(2^{t-r'}k-2)\cdot 2^{r'}=3+(2^{t-r'-1}\cdot k-1)\cdot 2^{r'+1}\text{原式成立}$$

由 1.、2.及**數學歸納法**，得證

四、引理 1.4 證明

(一) n 為奇數

1.由引理 1.1：若 $k=1$，則最終為成功狀態

由引理 1.3： $S_n^{2^t-1}=(2^{t-1},2^{t-1}+1)\xrightarrow{1輪}(2^{t-1}-1,2^{t-1}+2)\xrightarrow{2輪}(2^{t-1}-2,2^{t-1}+3)$

$\rightarrow\cdots\xrightarrow{2^{t-1}輪}(0,2^t+1)=(2^t+1):$ 成功

2.由引理 1.1：若 $k\neq 1$，則最終為循環狀態

由引理 1.3 及引理 1.1 的證明過程知：

$$S_n^{2^t-1}=(\underbrace{2^t+1,2^t,2^t,\ldots\ldots,2^t}_{k個})\xrightarrow{1輪}(\underbrace{2^t+1,2^t-1,2^t+1,\ldots\ldots,2^t+1}_{k個})\xrightarrow{1輪}(\underbrace{2^t+1,2^t,\ldots\ldots,2^t}_{k個})$$

$\therefore$ 循環:$\mathrm{S}_n^R=\{1+2^t,1+2\cdot 2^t,\ldots\ldots,1+k\cdot 2^t\}$

(二) n 為偶數

1.由引理 1.2：若 $k=1$，則最終為成功狀態

由引理 1.3： $S_n^{2^t-1}=(2^t,2)\xrightarrow{1次}(2^t+2,0)=(2^t+2):$ 成功

2.由引理 1.2：若 $k\neq 1$，則最終為循環狀態

由引理 1.3 及引理 1.2 的證明過程知：

$$a_n^{2^t-1}=(\underbrace{2^t+2,2^t,2^t,\ldots\ldots,2^t}_{k個})\xrightarrow{1輪}(\underbrace{2^t+2,2^t+1,2^t-1,\ldots\ldots,2^t-1}_{k個})\xrightarrow{1輪}(\underbrace{2^t+2,2^t,\ldots\ldots,2^t}_{k個})$$

$\therefore$ 循環:$\mathrm{S}_n^R=\{3,3+2^t,\ldots\ldots,3+(k-1)2^t\}$

五、引理 2.1 證明

(一) 引理 2.1.1

1. $(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots,2^r}_{2s+1個})\xrightarrow{1輪}(2^r+3,\ \underbrace{2^r-1,2^r+1,\ldots,2^r-1}_{2s+1個})\xrightarrow{2輪}(2^r+4,\ \underbrace{2^r-2,2^r+2,\ldots,2^r-2}_{2s+1個})$

$\rightarrow\cdots\xrightarrow{2^r輪}(2^r+2^r+2,\underbrace{2^r-2^r,2^r+2^r,\ldots,2^r-2^r}_{2s+1個})=(2^{r+1}+2,\underbrace{2^{r+1},\ldots,2^{r+1}}_{s個})$

2. $(2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s\text{個}}) \xrightarrow{1\text{輪}} (2^r+2,\underbrace{2^r-1,2^r+1,\ldots\ldots,2^r-1}_{2s\text{個}}) \xrightarrow{2\text{輪}} (2^r+2,\underbrace{2^r,2^r,\ldots\ldots,2^r}_{2s\text{個}})$

(二) 引理 2.1.2

1. $(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^t+1\text{個}}) \xrightarrow{1\text{輪}} (2,\underbrace{1,3,1,3,\ldots,1,3}_{2^t\text{個}}) \xrightarrow{2\text{輪}} (4,\underbrace{2,2,\ldots,2}_{2^t-1\text{個}}) \xrightarrow{\text{引理}1,2} (10,\underbrace{8,8,\cdots\cdots,8}_{2^{t-2}-1\text{個}})$

$\to\cdots\xrightarrow{\text{引理}1,2}(2^{t-3}+2,\underbrace{2^{t-3},2^{t-3},2^{t-3}}_{2^2-1\text{個}})\xrightarrow{\text{引理}1,2}(2^t+2,2^t)\to(2^{t+1}+2)$: 成功

2. $(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^t\cdot k+1\text{個}}) \xrightarrow{1\text{輪}}(2,\underbrace{1,3,1,3,\ldots,1,3}_{2^t\cdot k\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(4,\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^t\cdot k-1\text{個}})\xrightarrow{\text{引理}1,2,1(1)}(6,\underbrace{4,4,\ldots\ldots,4}_{2^{t-1}\cdot k-1\text{個}})$

$\to\cdots\xrightarrow{\text{引理}1,1}(2^{t+1}+2,\underbrace{2^{t+1},2^{t+1},\ldots\ldots,2^{t+1}}_{k-1\text{個}})\xrightarrow{\text{引理}1,1}$ 循環

六、引理 2.2 證明

(一) 引理 2.2.1

1. $(\underbrace{2^r,2^r,2^r,\ldots,2^r}_{2s\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{2^r+1,2^r-1,2^r+1,\ldots,2^r-1}_{2s\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(\underbrace{2^r+2,2^r-2,2^r+2,\ldots,2^r-2}_{2s\text{個}})$

$\to\cdots\xrightarrow{2^r\text{輪}}(\underbrace{2^r+2^r,2^r-2^r,2^r+2^r,\ldots,2^r-2^r}_{2s\text{個}})=(\underbrace{2^{r+1},2^{r+1},\ldots,2^{r+1}}_{s\text{個}})$

2. $(\underbrace{2^r,2^r,2^r,\ldots,2^r}_{2s+1\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{2^r,2^r-1,2^r+1,\ldots,2^r+1}_{2s+1\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(\underbrace{2^r,2^r,2^r,\ldots,2^r}_{2s+1\text{個}})$

(二)引理 2.2.2

1. $(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^t\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{3,1,3,1,\ldots,3,1}_{2^t\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(\underbrace{4,4,\ldots,4}_{2^{t-1}\text{個}})\xrightarrow{\text{引理}1,2,1(1)}(\underbrace{8,8,8,\ldots,8}_{2^{t-2}\text{個}})$

$\to\cdots\xrightarrow{\text{引理}1,1.2}(\underbrace{2^{t-1},2^{t-1},2^{t-1},2^{t-1}}_{2^2\text{個}})\xrightarrow{\text{引理}1,1.2}(2^t,2^t)\to(2^{t+1})$:成功

2. $(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^t\cdot k\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{3,1,3,1,\ldots,3,1}_{2^t\cdot k\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(\underbrace{4,4,4,\ldots,4}_{2^{t-1}\cdot k\text{個}})\xrightarrow{\text{引理}1,1.2}(\underbrace{8,8,\ldots\ldots,8}_{2^{t-2}\cdot k\text{個}})$

$\to\cdots\xrightarrow{\text{引理}1,1.2}(\underbrace{2^{t+1},2^{t+1},\ldots\ldots,2^{t+1}}_{k\text{個}})\xrightarrow{\text{引理}1,1.2}$ 循環

七、引理 2.3 證明

(一) n 為奇數

1.當 $r=1$ 時

$$\because a_n^0=(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{(2^t\cdot k+1)個})\xrightarrow{1輪}(2,\underbrace{1,3,1,3,\cdots\cdots,1,3}_{2^t\cdot k個})\xrightarrow{2輪}(4,\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}\cdot k-1個})=a_n^2$$

$$\therefore S_n^2(1)=2,S_n^2(2)=3,\cdots\cdots,S_n^2(2^{t-1}\cdot k)=2^t\cdot k+1=2+(2^{t-1}\cdot k-1)\cdot 2^1$$ 原式成立

2.設 當 $r=r'$ 時 原式成立，即 $S_n^{2^{r'}}(i)=2+(i-1)\cdot 2^{r'},i=\{1,2,\cdots,2^{t-r'+1}\cdot k\}$，

則 當 $r=r'+1$ 時

$$a_n^{2^{r'}}=(2^{r'}+2,\underbrace{2^{r'},2^{r'},\cdots\cdots,2^{r'}}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})\xrightarrow{1輪}(2^{r'}+3,\underbrace{2^{r'}-1,2^{r'}+1,\cdots\cdots,2^{r'}-1}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})$$

$$\xrightarrow{2輪}(2^{r'}+4,\underbrace{2^{r'}-2,2^{r'}+2,\cdots\cdots,2^{r'}-2}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})\rightarrow\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{2^{r'}輪}(2^{r'}+2^{r'}+2,\underbrace{2^{r'}-2^{r'},2^{r'}+2^{r'},\cdots\cdots,2^{r'}-2^{r'}}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})$$

$$=(2^{r'+1}+2,\underbrace{2^{r'+1},2^{r'+1},\cdots\cdots,2^{r'+1}}_{2^{t-r'-1}\cdot k-1個})=a_n^{2^{r'+1}}$$

$$\therefore S_n^{2^{r'+1}}(1)=2,S_n^{2^{r'+1}}(2)=2+2^{r'+1}=2+2\cdot 2^{r'},\cdots\cdots,$$

$$\therefore S_n^{2^{r'+1}}(2^{t-r'}\cdot k)=2+2^{t-r'}\cdot k\cdot 2^{r'}-2^{r'}=2+(2^{t-r'}\cdot k-1)\cdot 2^{r'}$$ 原式成立

由 1.、2.及**數學歸納法**，得證

(二) n 為偶數

1.當 $r=1$ 時

$$\because a_n^0=(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^t\cdot k個})\quad\therefore S_n^2(1)=1,S_n^2(2)=2,\cdots\cdots,S_n^2(2^t\cdot k)=2^t\cdot k=1+(2^t\cdot k-1)\cdot 2^{1-1}$$

$$S_n^2(2^{t-1}\cdot k+1)=2^t\cdot k+2=3+[2(2^{t-1}\cdot k+1)-3]\cdot 2^0$$ 原式成立

2.設 當 $r=r'$ 時 原式成立，即 $S_n^{2^{r'}-2}=\begin{cases}3+(i-1)\cdot 2^{r'} & ,i=1,2,...,2^{t-r'}\cdot k\\ 3+(2i-3)\cdot 2^{r'-1} & ,i=2^{t-r'}\cdot k+1\end{cases}$

則 當 $r=r'+1$ 時，$S_n^{2^{r'}-2}=(2^{r'}+2,\underbrace{2^{r'},2^{r'},\cdots\cdots,2^{r'}}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})$

$$\xrightarrow{1輪} (2^{r'}+3,\underbrace{2^{r'}+1,2^{r'}-1,\cdots\cdots,2^{r'}-1}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})$$

$$\xrightarrow{2輪} (2^{r'}+4,\underbrace{2^{r'}-2,2^{r'}+2,\cdots\cdots,2^{r'}-2}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})\rightarrow\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{2^{r'}輪}(2^{r'}+2^{r'}+2,\underbrace{2^{r'}-2^{r'},2^{r'}+2^{r'},\cdots\cdots,2^{r'}-2^{r'}}_{2^{t-r'}\cdot k-1個})$$

$$=(2^{r'+1}+2,\underbrace{2^{r'+1},2^{r'+1},\cdots\cdots,2^{r'+1}}_{2^{t-r'-1}\cdot k-1個})=S_n^{2^{r'+1}-2}$$

$$\therefore S_n^{2^{r'+1}-2}(1)=3, S_n^{2^{r'+1}-2}(2)=3+2\cdot 2^{r'}=3+2^{r'+1},\cdots\cdots,$$

$$\therefore S_n^{2^{r'+1}-2}(2^{t-r'-1}\cdot k)=3+(2^{t-r'}k-2)\cdot 2^{r'}=3+(2^{t-r'-1}\cdot k-1)\cdot 2^{r'+1}\text{原式成立}$$

由 1.、2.及**數學歸納法**，得證

八、引理 2.4 證明

1. n 為奇數

(1) 若 $k=1$，則最終為成功狀態，且 $S_n^R=\{2\}$。

由引理 2.1 知：

若 $k=1$，則最終為成功狀態

由引理 2.3 知： $S_t^n=(2^t+2,2^t)\xrightarrow{1輪}(2^t+3,2^t\text{-}1)\xrightarrow{2輪}(2^t+4,2^t-2)\rightarrow\ldots\ldots$

$$\xrightarrow{2^t輪}(2^{t+1}+2,0)=(2^{t+1}+2):\text{成功}\qquad\therefore S_n^R=\{2\}$$

(2) 若 $k\neq 1$，則最終為循環狀態，且 $S_n^R=\{1+2^t,1+2\cdot 2^t,\ldots\ldots,1+k\cdot 2^t\}$。

由引理 2.2(1)知：

若 $k\neq 1$，則最終為循環狀態。

由引理 2.3 及引理 2.1(2)的證明過程知：

$$S_{t+1}^n=(\underbrace{2^{t+1}+2,2^{t+1},2^{t+1},\ldots\ldots,2^{t+1}}_{k個})\xrightarrow{1輪}(\underbrace{2^{t+1}+2,2^{t+1}\text{-}1,2^{t+1}+1,\ldots\ldots,2^{t+1}+1}_{k個})$$

$$\xrightarrow{2輪}(\underbrace{2^{t+1}+2,2^{t+1},\ldots\ldots,2^{t+1}}_{k個})$$

$\therefore S_n^R=\{2,2+2^t,2+2\cdot 2^t,......,2+(k-1)\cdot 2^t\}$

2. n 為偶數

(1) 若 $k=1$，則最終為成功狀態，且 $S_n^R=\{1\}$。

由引理 2.2(1)知：

若 $k=1$，則最終為成功狀態。

由引理 2.3 知：

$a_n^{2^t-2}=(2^{t+1})$：成功 $\therefore S_n^R=\{1\}$

(2) 若 $k\neq 1$，則最終為循環狀態，且 $S_n^{2^t-2}=\{3,3+2^t,......,3+(k-1)2^t\}$。

由引理 2.2(1)知：

若 $k\neq 1$，則最終為循環狀態。

由引理 2.3 及引理 1.2 的證明過程知：

$$a_n^{2^{t+1}-2}=(\underbrace{2^{t+1},2^{t+1},2^{t+1},......,2^{t+1}}_{k\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{2^{t+1},2^{t+1}-1,2^{t+1}+1,......,2^{t+1}+1}_{k\text{個}})$$

$$\xrightarrow{2\text{輪}}(\underbrace{2^{t+1},2^{t+1},......,2^{t+1}}_{k\text{個}})$$

$\therefore a_n^R=\{1,1+2^t,1+2\cdot 2^t,......,1+(k-1)\cdot 2^t\}$

九、定理三證明

(一) $(m,m,m,...,m)\xrightarrow{1\text{輪}}(m+1,m-1,m+1,...,m-1)\xrightarrow{2\text{輪}}(m,m,m,...,m)$

(二) $(m,m,m,...,m)\xrightarrow{1\text{輪}}(m+1,m-1,m+1,...,m-1)$

$$\xrightarrow{2\text{輪}}(m+2,m-2,m+2,...,m-2)\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{m\text{輪後}}(m+m,m-m,m+m,...,m-m)=(2m,2m,2m...,2m)\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{2m\text{輪後}}(2m+m,2m+m,2m+m,......,2m+m)=(3m,3m,3m,......,3m)\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{(2^t-1)m\text{輪}}(m+(2^t-1)m)=(2^t\cdot m)$$

(三) $(m,m,...,m)\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{m+1,m-1,m+1,...,m-1}_{n\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(\underbrace{m+2,m-2,m+2,...,m-2}_{n\text{個}})\to\cdots$

$$\xrightarrow{m\text{輪後}}(\underbrace{m+m,m-m,m+m,...,m-m}_{n\text{個}})=(\underbrace{2m,2m,2m...,2m}_{n/2\text{個}})\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{mt\text{輪後}}(\underbrace{m+tm,m+tm,......,m+tm}_{k\text{個}})=(\underbrace{(t+1)m,(t+1)m,......,(t+1)m}_{k\text{個}})\rightarrow\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{(2^t-1)m\text{輪}}(\underbrace{\frac{n\times m}{k},\frac{n\times m}{k}-1,\frac{n\times m}{k}+1,\frac{n\times m}{k}-1,\frac{n\times m}{k}+1...}_{k\text{個}})$$

十、定理六證明

(一) $t=0,k\neq 1$ 即 $n\in odd$, 令 $n=2s+1,s\in\mathbb{N}$

$$(\underbrace{m,m,m,...,m}_{2s+1\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{m,m-2,m+2,...,m-2,m+2}_{2s+1\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(\underbrace{m,m,m,...,m}_{2s+1\text{個}})$$

(二) $t\neq 0,k=1$ 即 $n=2^t,t\in\mathbb{N}$

$$(\underbrace{m,m,m,...,m}_{2^t\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{m+2,m-2,m+2,...,m-2}_{2^t\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(\underbrace{m+4,m-4,m+4,...,m-4}_{2^t\text{個}})\rightarrow\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{m}{2}\text{輪}}(\underbrace{2m,2m,...,2m}_{2^{t-1}\text{個}})\xrightarrow{(\frac{m}{2}+m)\text{輪}}(\underbrace{4m,4m,...,4m}_{2^{t-2}\text{個}})\rightarrow\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{(\frac{m}{2}+m+\cdots+2^{t-1}m)\text{輪}}(2^{t-1}m+2^{t-1}m,2^{t-1}m-2^{t-1}m)=(2^tm)\rightarrow\text{成功}$$

$$\text{又}\ \frac{m}{2}+m+2m+\cdots+2^{t-1}m=\frac{m}{2}\times\frac{1-2^t}{1-2}=\frac{m}{2}(n-1)\quad\therefore R=\frac{m}{2}(n-1)$$

(三) $t\neq 0,k\neq 1$ 即 $n\in even$

$$(\underbrace{m,m,m,...,m}_{n\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{m+2,m-2,m+2,...,m-2}_{n\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(\underbrace{m+4,m-4,m+4,...,m-4}_{n\text{個}})\rightarrow\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{m}{2}\text{輪後}}(\underbrace{m+m,m-m,m+m,...,m-m}_{n\text{個}})=(\underbrace{2m,2m,2m...,2m}_{n/2\text{個}})\rightarrow\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{mt}{2}\text{輪後}}(\underbrace{m+tm,m+tm,......,m+tm}_{k\text{個}})=(\underbrace{(t+1)m,(t+1)m,......,(t+1)m}_{k\text{個}})\rightarrow\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{(2^t-1)m}{2}\text{輪}}(\underbrace{\frac{n\times m}{k},\frac{n\times m}{k}-1,\frac{n\times m}{k}+1,\frac{n\times m}{k}-1,\frac{n\times m}{k}+1...}_{k\text{個}})$$

十一、定理八證明

(一) $t=0, k\neq 1$ 即 $n\in odd$，令 $n=2s+1, s\in\mathbb{N}$

$$\underbrace{(m,m,m,\ldots,m)}_{2s+1個}\xrightarrow{1輪}\underbrace{(m,m-3,m+3,\ldots,m-3,m+3)}_{2s+1個}\xrightarrow{2輪}\underbrace{(m,m,m,\ldots,m)}_{2s+1個}$$

(二) $t\neq 0, k=1$ 即 $n=2^t, t\in\mathbb{N}$

$$\underbrace{(m,m,m,\ldots,m)}_{2^t個}\xrightarrow{1輪}\underbrace{(m+3,m-3,m+3,\ldots,m-3)}_{2^t個}\xrightarrow{2輪}\underbrace{(m+6,m-6,m+6,\ldots,m-6)}_{2^t個}\to\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{m}{3}輪}\underbrace{(2m,2m,\ldots,2m)}_{2^{t-1}個}\xrightarrow{(\frac{m}{3}+\frac{2m}{3})輪}\underbrace{(4m,4m,\ldots,4m)}_{2^{t-2}個}\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{(\frac{m}{3}+\frac{2m}{3}+\cdots+\frac{2^{t-1}m}{3})輪}(2^{t-1}m+2^{t-1}m,2^{t-1}m-2^{t-1}m)=(2^t m)\to 成功$$

又 $\frac{m}{3}+\frac{2m}{3}+\cdots+\frac{2^{t-1}m}{3}=\frac{m}{3}\times\frac{1-2^t}{1-2}=\frac{m}{3}(n-1)\quad\therefore R=\frac{m}{3}(n-1)$

(三) $t\neq 0, k\neq 1$ 即 $n\in even$

$$\underbrace{(m,m,m,\ldots,m)}_{n個}\xrightarrow{1輪}\underbrace{(m+3,m-3,m+3,\ldots,m-3)}_{n個}\xrightarrow{2輪}\underbrace{(m+6,m-6,m+6,\ldots,m-6)}_{n個}\to\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{m}{3}輪後}\underbrace{(m+m,m-m,m+m,\ldots,m-m)}_{n個}=\underbrace{(2m,2m,2m\ldots,2m)}_{n/2個}\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{mt}{3}輪後}\underbrace{(m+tm,m+tm,\ldots\ldots,m+tm)}_{k個}=\underbrace{((t+1)m,(t+1)m,\ldots\ldots,(t+1)m)}_{k個}\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{(2^t-1)m}{3}輪}\underbrace{(\frac{n\times m}{k},\frac{n\times m}{k}-1,\frac{n\times m}{k}+1,\frac{n\times m}{k}-1,\frac{n\times m}{k}+1\ldots)}_{k個}$$

十二、定理九證明

(一) $t=0, k\neq 1$ 即 $n\in odd$，令 $n=2s+1, s\in\mathbb{N}$

$$\underbrace{(m,m,m,\ldots,m)}_{2s+1個}\xrightarrow{1輪}\underbrace{(m,m-j,m+j,\ldots,m-j,m+j)}_{2s+1個}\xrightarrow{2輪}\underbrace{(m,m,m,\ldots,m)}_{2s+1個}$$

(二) $t\neq 0, k=1$ 即 $n=2^t, t\in\mathbb{N}$

$$\underbrace{(m,\ldots,m)}_{2^t個}\xrightarrow{1輪}\underbrace{(m+j,m-j,m+j,\ldots,m-j)}_{2^t個}\xrightarrow{2輪}\underbrace{(m+2j,m-2j,m+2j,\ldots,m-2j)}_{2^t個}\to\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{m}{j}\text{輪}}(\underbrace{2m,2m,...,2m}_{2^{t-1}\text{個}})\xrightarrow{(\frac{m}{j}+\frac{2m}{j})\text{輪}}(\underbrace{4m,4m,...,4m}_{2^{t-2}\text{個}})\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{(\frac{m}{j}+\frac{2m}{j}+\cdots+\frac{2^{t-1}m}{j})\text{輪}}(2^{t-1}m+2^{t-1}m,2^{t-1}m-2^{t-1}m)=(2^t m)\to\text{成功}$$

$$\text{又}\frac{m}{j}+\frac{2m}{j}+\cdots+\frac{2^{t-1}m}{j}=\frac{m}{j}\times\frac{1-2^t}{1-2}=\frac{m}{j}(n-1)\quad\therefore R=\frac{m}{j}(n-1)$$

(三) $t\neq 0,k\neq 1$即$n\in even$

$$(\underbrace{m,...,m}_{n\text{個}})\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{m+j,m-j,m+j,...,m-j}_{n\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(\underbrace{m+2j,m-2j,m+2j,...,m-2j}_{n\text{個}})\to\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{m}{j}\text{輪後}}(\underbrace{m+m,m-m,m+m,...,m-m}_{n\text{個}})=(\underbrace{2m,2m,2m...,2m}_{n/2\text{個}})\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{mt}{j}\text{輪後}}(\underbrace{m+tm,m+tm,......,m+tm}_{k\text{個}})=(\underbrace{(t+1)m,(t+1)m,......,(t+1)m}_{k\text{個}})\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{(2^t-1)m}{j}\text{輪}}(\underbrace{\frac{n\times m}{k},\frac{n\times m}{k}-j,\frac{n\times m}{k}+j,\frac{n\times m}{k}-j,\frac{n\times m}{k}+j...}_{k\text{個}})$$

十三、性質七證明

(一) $t=0,k\neq 1$即$n\in odd$, 令$n=2s+1,s\in\mathbb{N}$

$$(\underbrace{m,m+d,m,m+d,...,m}_{2s+1\text{個}})$$

$$\xrightarrow{1\text{輪}}(\underbrace{m,m+d-j,m+j,m+d-j,...,m+j}_{2s+1\text{個}})\xrightarrow{2\text{輪}}(\underbrace{m,m+d,m,m+d...,m}_{2s+1\text{個}})$$

$$\Rightarrow \mathrm{C}_n(n)=(m,m+d,m,m+d,...,m)\rightleftharpoons(m,m+d-j,m+j,m+d-j,...,m+j)$$

(二) $t\neq 0,k=1$即$n=2^t,t\in\mathbb{N}$

$\because j\mid d\ \therefore$令$d=j\times s,s\in\mathbb{N}$

$$(\underbrace{m,m+d,...,m+d}_{2^t\text{個}})$$

$$\xrightarrow{\text{第}1\text{輪}}(\underbrace{m+j,m+d-j,m+j,...,m+d-j}_{2^t\text{個}})\xrightarrow{\text{第}2\text{輪}}(\underbrace{m+2j,m+d-2j,m+2j,...,m+d-2j}_{2^t\text{個}})\to\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{第}\frac{m+d}{j}\text{輪}}(\underbrace{2m+d,2m+d,...,2m+d}_{2^{t-1}\text{個}})\to\cdots\cdots\xrightarrow{\text{第}(\frac{m+d}{j}+\frac{2m+d}{j})\text{輪}}(\underbrace{4m+2d,4m+2d,...,4m+2d}_{2^{t-2}\text{個}})\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{第}(\frac{m+d}{j}+\frac{2m+d}{j}+\cdots+\frac{2^{t-1}m+2^{t-2}d}{j})\text{輪}}(2^{t-1}m+2^{t-2}d+2^{t-1}m+2^{t-2}d,2^{t-1}m+2^{t-2}d-2^{t-1}m-2^{t-2}d)$$

$=(2^t m+2^{t-1}d)\rightarrow$ 成功

又 $\frac{m+d}{j}+\frac{2m+d}{j}+\cdots+\frac{2^{t-1}m+2^{t-2}d}{j}$

$$=\frac{m}{j}\times\frac{1-2^t}{1-2}+\frac{d}{j}\times(1+\frac{1-2^{t-1}}{1-2})=\frac{1}{j}[(2^t-1)m+2^{t-1}d]=\frac{1}{j}(2^t M-m)$$

$$\therefore R=\frac{1}{j}(2^t M-m)$$

(三) $t\neq 0,k\neq 1$ 即 $n\in even$

$$(\underbrace{m,m+d,...,m+d}_{2^t\times k\text{個}})$$

$$\xrightarrow{\text{第1輪}}(\underbrace{m+j,m+d-j,m+j,...,m+d-j}_{2^t\times k\text{個}})\xrightarrow{\text{第2輪}}(\underbrace{m+2j,m+d-2j,m+2j,...,m+d-2j}_{2^t\times k\text{個}})\rightarrow\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{第}\frac{m+d}{j}\text{輪}}(\underbrace{2m+d,2m+d,...,2m+d}_{2^{t-1}\times k\text{個}})\rightarrow\cdots\cdots\xrightarrow{\text{第}(\frac{m+d}{j}+\frac{2m+d}{j})\text{輪}}(\underbrace{4m+2d,4m+2d,...,4m+2d}_{2^{t-2}\times k\text{個}})\rightarrow\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{第}(\frac{m+d}{j}+\frac{2m+d}{j}+\cdots+\frac{2^{t-1}m+2^{t-2}d}{j})\text{輪}}(\underbrace{2^t m+2^{t-1}d,2^t m+2^{t-1}d,...,2^t m+2^{t-1}d}_{k\text{個}})$$

十四、二階行列式性質證明

由定理九可知，在傳遞規則 ${}_mT_{i,i+j}(n)$: n 每人分別有 m 顆，依序傳遞 i 、$i+j$ 顆，

$(m \geq i+j \wedge j \mid m)$ ，n 表示成 $n=2^t \cdot k(t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 2 \nmid k)$ ，則循環只發生在以下兩種情形。

(1)若 $t=0, k \neq 1$ ，則 $a_n^1=(m, m-j, m+j, m-j, m+j, \ldots, m-j, m+j) \rightleftharpoons a_n^0=(m, m, \ldots, m)$

(2)若 $t \neq 0, k \neq 1$ ，則 $a_n^0=(\frac{nm}{k}, \frac{nm}{k}, \cdots, \frac{nm}{k}) \rightleftharpoons a_n^1=(\frac{nm}{k}, \frac{nm}{k}-j, \frac{nm}{k}+j, \cdots, \frac{nm}{k}-j, \frac{nm}{k}+j)$

$Case\,1: t=0, k \neq 1$

$$a_n^1=(\underbrace{m, m-j, m+j, m-j, m+j, \ldots, m-j, m+j}_{n人}) \rightleftharpoons a_n^0=(\underbrace{m, m, \ldots, m}_{n人})$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{\left[\frac{n'}{p}\right]}\left|\det(a_x)\right|=\sum_{x=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left|\det(a_x)\right|=\left|\det(a_0)\right|+|\overbrace{\begin{vmatrix} m-j & m+j \\ m & m \end{vmatrix}|+|\begin{vmatrix} m-j & m+j \\ m & m \end{vmatrix}|+\cdots+|\begin{vmatrix} m-j & m+j \\ m & m \end{vmatrix}}^{\frac{n-1}{2}}|$$

$$=|\begin{vmatrix} m & m-j \\ m & m \end{vmatrix}|+|\begin{vmatrix} m-j & m+j \\ m & m \end{vmatrix}| \times \frac{(n-1)}{2}$$

$$=\left|m^2-m(m-j)\right|+\left|(m-j)m-(m+j)m\right| \times \frac{(n-1)}{2}$$

$$=mj+2mj \times \frac{(n-1)}{2}=nmj \quad 得證$$

$Case\,2: t \neq 0, k \neq 1$

$$a_n^0=(\frac{nm}{k}, \frac{nm}{k}, \cdots, \frac{nm}{k}) \rightleftharpoons a_n^1=(\frac{nm}{k}, \frac{nm}{k}-j, \frac{nm}{k}+j, \cdots, \frac{nm}{k}-j, \frac{nm}{k}+j)$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{\left[\frac{n'}{p}\right]}\left|\det(a_x)\right|=\sum_{x=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left|\det(a_x)\right|=\left|\det(a_0)\right|+|\overbrace{\begin{vmatrix} \frac{nm}{k} & \frac{nm}{k} \\ \frac{nm}{k}-j & \frac{nm}{k}+j \end{vmatrix}|+|\begin{vmatrix} \frac{nm}{k} & \frac{nm}{k} \\ \frac{nm}{k}-j & \frac{nm}{k}+j \end{vmatrix}|+\cdots+|\begin{vmatrix} \frac{nm}{k} & \frac{nm}{k} \\ \frac{nm}{k}-j & \frac{nm}{k}+j \end{vmatrix}}^{\frac{k-1}{2}}|$$

$$=|\begin{vmatrix} \frac{nm}{k} & \frac{nm}{k} \\ \frac{nm}{k} & \frac{nm}{k}-j \end{vmatrix}|+|\begin{vmatrix} \frac{nm}{k} & \frac{nm}{k} \\ \frac{nm}{k}-j & \frac{nm}{k}+j \end{vmatrix}| \times \frac{(k-1)}{2}$$

$$=\left|\frac{nm}{k}(\frac{nm}{k}-j)-(\frac{nm}{k})^2\right|+\left|\frac{nm}{k}(\frac{nm}{k}+j)-\frac{nm}{k}(\frac{nm}{k}-j)\right| \times \frac{(k-1)}{2}$$

$$=\frac{nmj}{k}+\frac{2nmj}{k} \times \frac{(k-1)}{2}=nmj \quad 得證$$