

第二十二屆旺宏科學獎 成果報告書

參賽編號：SA22-498

姓名：蔡育嫻

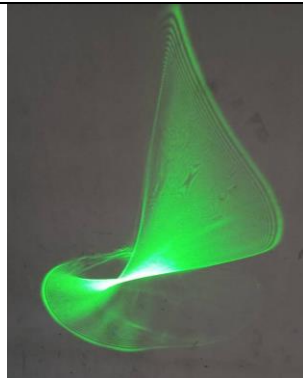
作品名稱：瓶底圖紋-焦散的面紗

參賽類別：物理

關鍵字：焦散曲線、折射、繞射

壹、研究動機

大自然中有很多因光線交會形成的圖形，如彩虹、咖啡杯裏的3字形(圖一)、有水玻璃杯在白光斜照下明亮的圖(圖二)、游泳池底(圖三)、海面的粼粼波光反射到船側(圖四)，河流下的砂礫光^{〔四〕}，瓶底曼妙舞姿都呈現光線形成的焦散圖案(圖五)，但大多不為人關注。網路上看到一篇名為水光交織的研究報告，它是用水滴在載玻片上，然後用雷射光射到水滴，經過折射反射就在光屏上出現一些不規則圖紋組成的焦散圖形，而水是一個均勻液體，如果玻璃表面雕上的形狀，是不是也會有交散圖形，於是好奇心趨動下，想一探究竟瓶底的神奇圖形。

		
圖一 咖啡杯裏的3字形	圖二 水玻璃杯在白光斜照下 明亮的圖	圖三 游泳池底
		
圖四 海面的粼粼波光反射到船側	圖五 5字型照出的焦散圖	

貳、研究目的

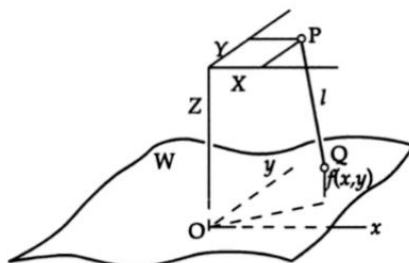
- 一、探討瓶底的焦散圖紋
- 二、探討光源與光屏距離與最外層亮帶寬度(簡稱寬度)的關係
- 三、探討入射角度與最外層亮帶寬度的關係
- 四、探討入射光波長與最外層亮帶寬度的關係
- 五、探討玻璃圖文曲率與最外層亮帶寬度的關係

參、文獻回顧

一、費馬原理

又名「最短時間原理」：光線傳播的路徑是需時最少的路徑。

二、連續曲面折射光波前與費馬光路徑原理



(圖六)平面波前的光程差示意圖^{〔二〕}

Q 是透過玻璃圖文後的波前上某一點，P 為焦散圖紋上的一個點。圖紋的點 P 交疊著來至 Q 點的各方向的光程差為 $\overline{PQ}$ ；當 Q 點上的 xyz 各方向的折射光是同相光，則光程差 $\overline{PQ}$ 為波長整數倍是亮帶，反之，若折射光是反相光，則光程差 $\overline{PQ}$ 為半波長的奇數倍時是暗帶。平行光通過玻璃凸起圖文，光經不平整的連續曲面後產生的波前(wavefront)曲面。

理論推導：

波前上某一點 Q(X, Y, f) 到屏幕上 P(X, Y, Z)

$$\ell = [(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-f)^2]^{\frac{1}{2}}$$

因實驗上 Z(屏距) $\gg$ f(曲面凸出)

$\therefore (X-x)$ 與 $(Y-y) \ll Z$ (屏距)

$\therefore \ell$ 的平方根的第一階展開式

$$\ell = (Z - f) + \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{2Z} \quad \text{--- (1)}$$

因此在屏幕為 Z 的(X, Y)平面上的條件是 $\frac{\partial \ell}{\partial X} = \frac{\partial \ell}{\partial Y} = 0$

依費馬光程最短原理(Fermat's principle)

$$\Phi(x, y, X, Y, Z) = f(X, Y) - \frac{x^2 + y^2}{2Z} + \frac{Xx + Yy}{Z} \quad \text{--- (2)}$$

Φ 函數「駐點(stationary point)」的一階導數為零，則 $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{x-X}{Z}$ ， $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{y-Y}{Z}$

焦散圖文最外層亮帶寬度是依次亮帶寬度兩倍，是曲面折射的波前上任意點是新點波的海更斯原理所改。

從曲面折射後的光以「多點波源」繞射原理在屏幕上 $\Delta \overline{PQ}$ 光程差在 $\pm \lambda$ 之間的暗紋範圍內皆是亮帶所在^{〔二〕}

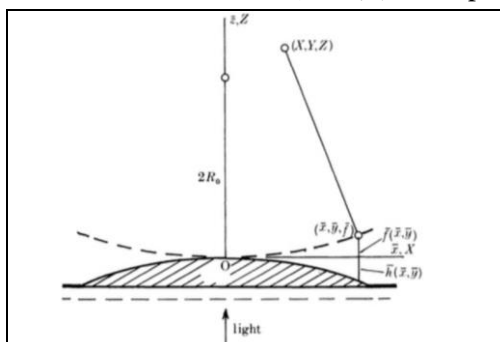
$$\therefore \Delta \overline{PQ} = \pm n\lambda \quad n=1, 2, 3, \dots \text{為暗紋}$$

$$m\lambda \quad m=0 \text{ 亮帶中央}$$

$$(m+\frac{1}{2})\lambda \quad m=1, 2, 3, \dots \text{為依次亮紋}$$

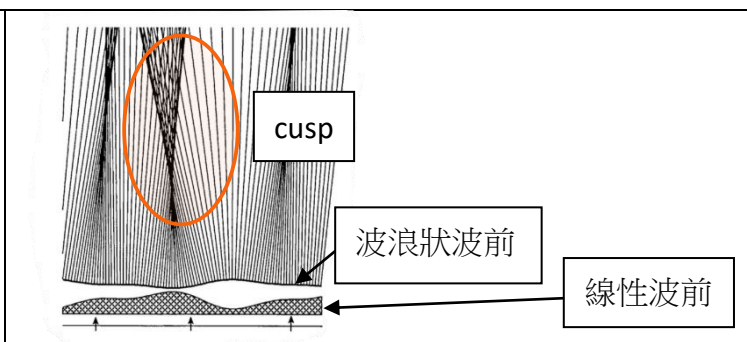
又 $\therefore P(X, Y, Z)$ Q(X, Y, f) 波前曲面範圍到屏上點 P 的相等角度與距離漸次改變，所以亮紋寬度會依次變小。

三、光經過凹凸面的現象，形成 Cusp 的示意圖



(圖七)玻璃凸面波前示意圖^{〔二〕}

如圖七，這是一個垂直平面的坐標系統，斜線部分就是突出區域，離開波前的點座標，為 $\bar{x}y\bar{f}$ ，水平虛線就是入射光的波前，凹下的弧形虛線，離開後波前的形狀為凹面，任一點的差別在 f



(圖八)凹凸面形成的波前以及形成 cusp 的示意圖^{〔二〕}

如圖八，黑色區域即網狀光線，即是焦散曲線，形成 cusp。

平行光從瓶底射入，形成一條水平線的波前，經玻璃凹凸處，形成波浪狀的波前，經折射形成 cusp 的示意圖

四、牛頓環

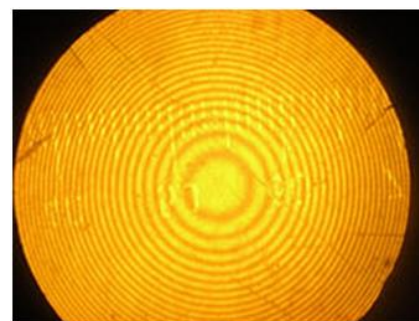
牛頓環的現象，是一種薄膜等厚干涉的現象，在厚度很小的情況下，薄膜厚度相同的位置，具有相同的光程差，故會對應同樣的干涉條紋。

五、焦散曲線的定義：

光經過介質的反射、折射，在空間中交會產生的明亮圖紋，也可說是大自然連續曲面的結構變化，幾近平行光的自動對焦的能力，解讀地表折射光反射光的干涉圖紋。空間中的光線經反射或折射後，無法集中於一點，而各自相交，相交的點之軌跡為一曲面，稱為焦散曲面。焦散曲面與任一平面的截線稱為焦散曲線



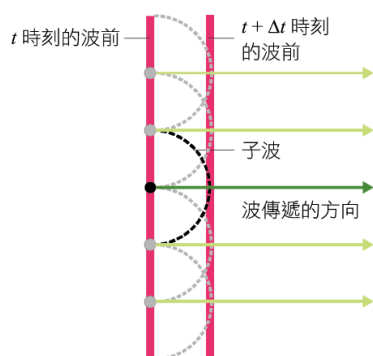
(圖九)牛頓環^{〔五〕}



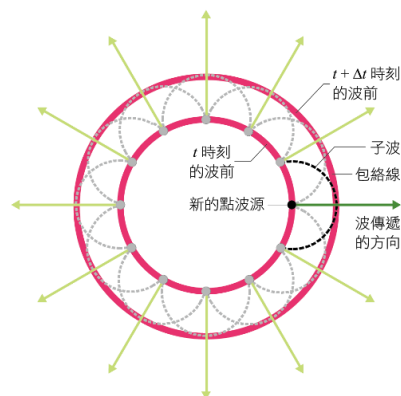
(圖九)牛頓環〔五〕

六、惠更斯原理^{〔六〕}

(一)波前：介質中各點振動情形相同的點稱為同相，將相鄰同相各點相連即為波前。



(圖十)
線性波前

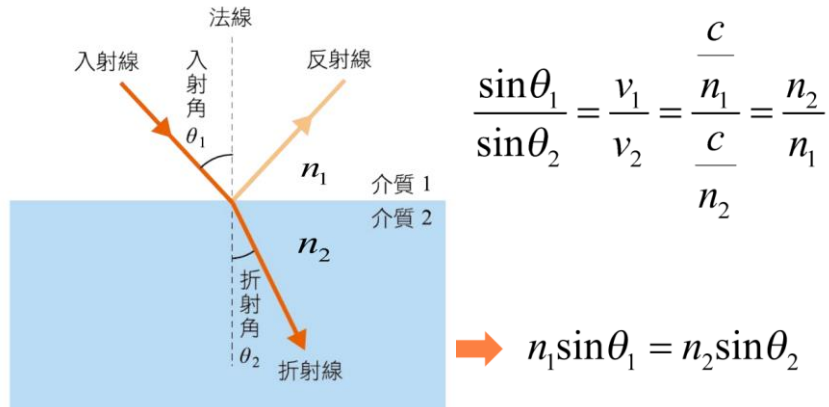


(圖十一)
圓形波前

波前上每一點視為新的點波源，各自發出子波(如圖十)

(二)波前上的每一點都可視為新的點波源，以此為圓心或球心，各自發出圓形子波或球面子波。在某一時刻這些圓形子波或球面子波相切的包絡面即形成新的波前。新波前與原波前恆平行，以相同波速沿傳遞方向前進。(如圖十一)

七、斯乃爾定律^{〔六〕}

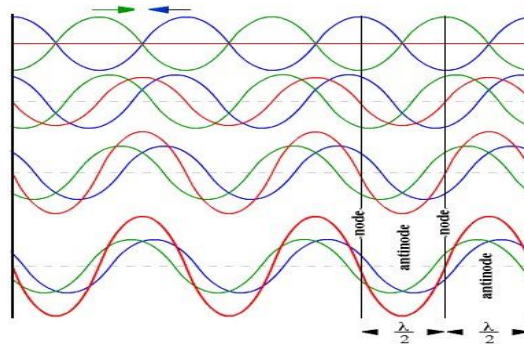


(圖十二)折射示意圖

八、干涉^{〔六〕}

(一)依重疊原理兩波交會時，合成波的振動位移為各成分波在該點的振動位移向量合。

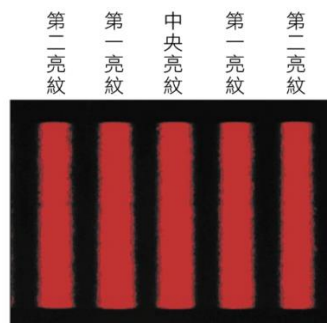
(二)交會時，兩波同相為建設性干涉，形成亮紋。兩波反相為破壞性干涉，形成暗紋。



(圖十三)兩波交會示意圖

建設性干涉形成亮紋，波程差滿足 $\Delta r = d \sin \theta = PS_1 - PS_2 = n\lambda$ $n=1,2,3,\dots$

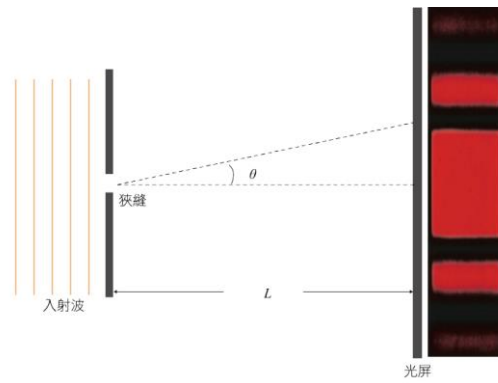
破壞性干涉形成暗紋，波程差滿足 $\Delta r = d \sin \theta = PS_1 - PS_2 = (2m-1)\lambda/2$ $m=1,2,3,\dots$



(圖十四)干涉條紋

九、繞射^{〔六〕}

光通過單狹縫繞射，可視為無限多個點波源干涉結果。
中央亮紋強度比其他亮紋高，且寬度是其他亮紋兩倍。



(圖十五)繞射條紋

肆、研究裝置與器材

裝置與器材表

		將玻璃分割 擷取有數字的瓶底
瓶底有英文字 APSLEY 旁邊有一圈穩定玻璃瓶的圖案 數字 08 出廠批號	明顯的數字 5 垂直照射	
玻璃瓶擷取的圖案數個		
簡報雷射筆		綠光波長 550nm 左右、 紅光波長 630nm 左右、 堇紫光波長 405nm 左右
光學平台		光學平台 長度 121cm 寬度 10cm 上面有自製雷射筆架 以及 360 度量角器 手機用固定架固定

長尾文書夾 50mm		固定玻璃片使用
實驗的玻璃及圖文		入射為 0 字的最上方如紅框所示 長 5.0mm 寬 3.0mm 厚度 5.0mm 入射為 0 字的最上方如紅框所示 長 8.5mm 寬 5.5mm 厚度 4.0mm

(圖十四)裝置器材圖

伍、研究過程或方法

一、探討瓶底的焦散圖紋

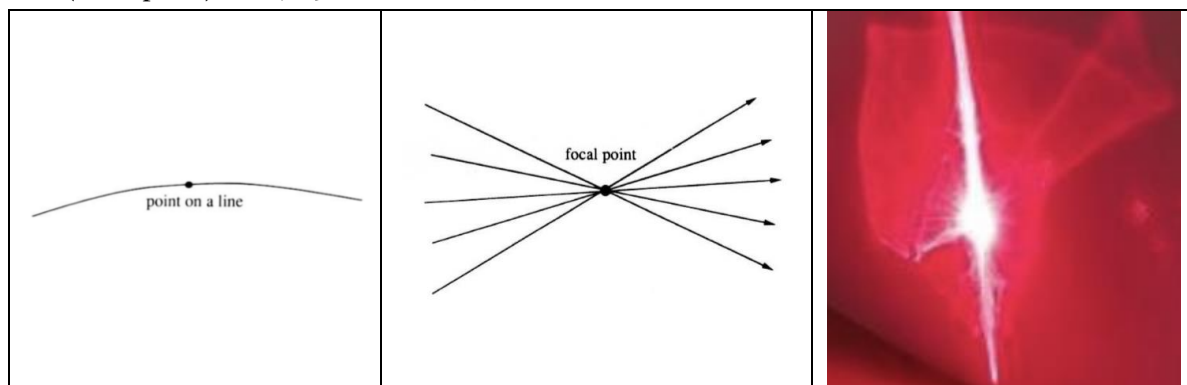
(一)實驗步驟

- 1.收集不同花色或數字數種
- 2.擷取圖紋以及數字
- 3.將擷取的圖紋以及數字放於光學平台，以雷射光垂直照射不同位置，搜尋不同位置圖案紀錄之
- 4.將實驗得到瓶底圖紋 1 字型、穩定玻璃瓶的斜紋、6 字型、環保標章字型、一個圓內接三角形字型、8 字型、0 字型、05 字型、5 字型不同位置處的焦散圖，分析瓶底圖紋的表徵與結構紀錄之
- 5.將得到的焦散圖案分析組成的基本單元

(二)歸納與分析出基本圖形^{〔三〕}

有焦點、褶皺、尖嘴、燕尾、雙曲、橢圓、類牛頓、海波紋、沙灘形九種如圖紀錄於表格

- 1.焦點(focal point)：無限多光線匯聚處



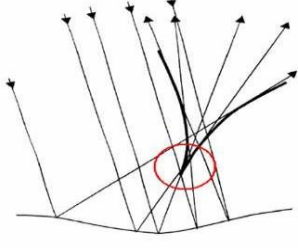
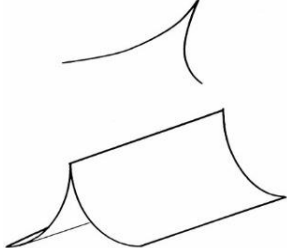
(圖十五)焦點示意圖與實驗圖

- 2.褶皺(fold)：每個亮點都是焦點，無限多個焦點所形成的弧形

線性平面弧形折疊 許多光線交會形成折疊	許多光線在平面上交會形成折疊	實驗摺疊圖
相關方程式 焦散讀紋的標準函數	$\text{Fold } \Phi = X^3 + Y^2 + aX$	不同方向的光交錯相遇，在空間中堆疊出明亮的弧線或弧面。

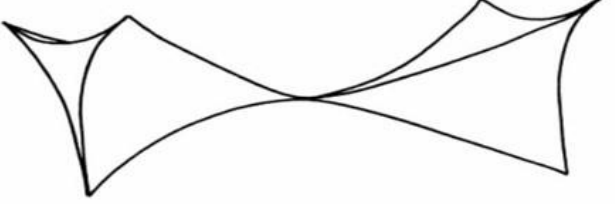
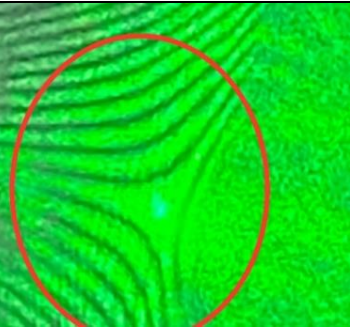
(圖十六) 褶皺示意圖與實驗圖及方程式

3.尖嘴(Cusp)：兩個 fold 所形成的

		 實驗圖
兩折疊在空間中相交形成一夾角，有如鳥的尖嘴一般的圖形，形成一點	兩折疊在空間中相交形成一夾角，有如鳥的尖嘴一般的圖形，形成立體尖嘴	尖嘴 Cusp $\Phi=\pm(X^4+aX^2+bX)+Y^2$ 正負代表相對應的上下 其中 a、b 為控制變數(Control variable)

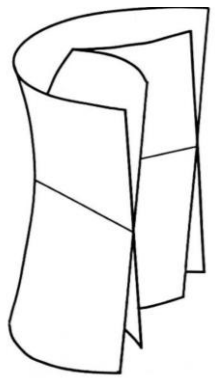
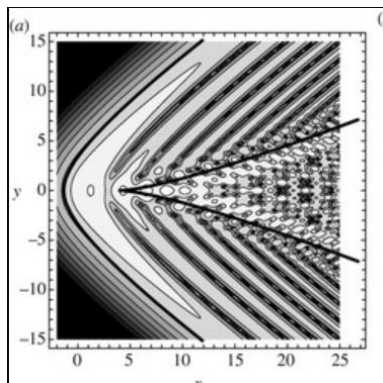
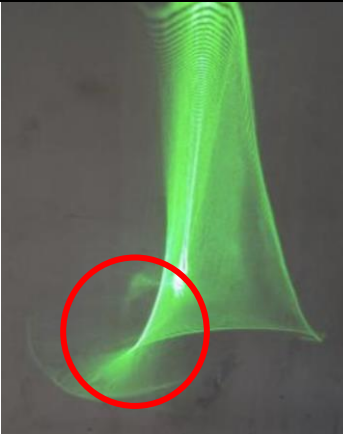
(圖十七) 尖嘴示意圖與實驗圖及方程式

4.燕尾 Swallowtail(又稱三曲)：三個 Cusp 所形成的

	 實驗圖
三個折疊交會而成的圖形，在交會點附近的截面會形成有如星星(star)形狀的立體圖形。	$\Phi=X^5+Y^2+aX^3+bX^2+cX$

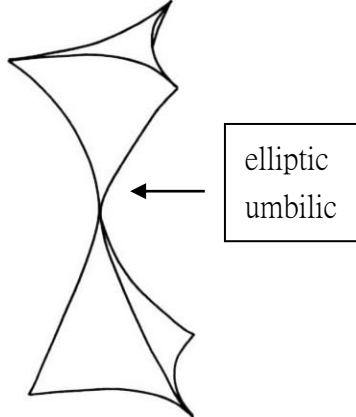
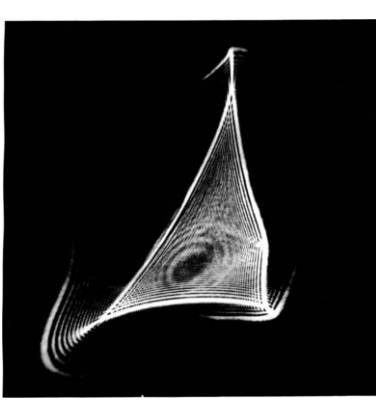
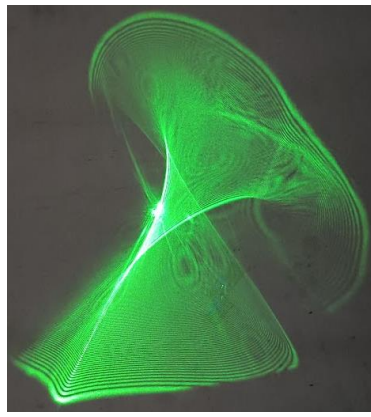
(圖十八) 燕尾示意圖與實驗圖及方程式

5.雙曲 hyperbolic umbilic：立體的前後兩個三曲組成的，形成一個雙曲線

		 實驗圖
$\Phi=X^3+XY^2+a(X^2+Y^2)+bX+cY$ abc 控制變數	立體的前後兩個三曲組成的，形成一個雙曲線	

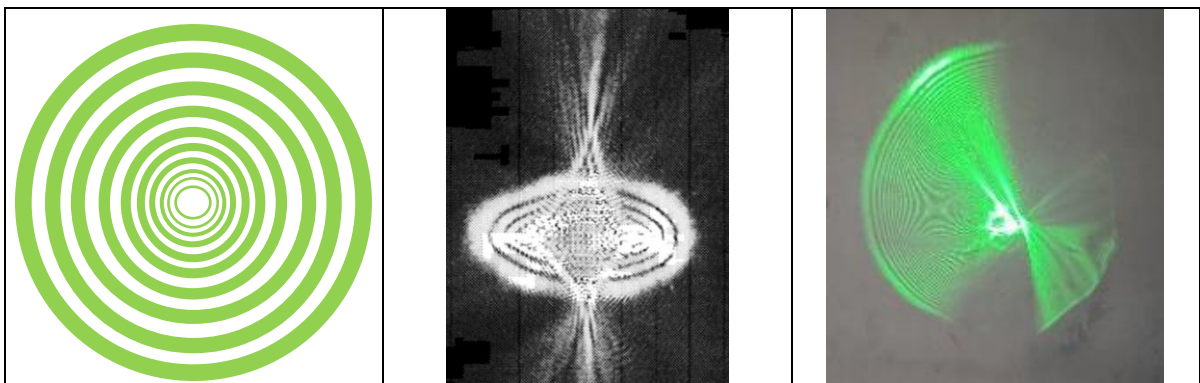
(圖十九) 雙曲示意圖與實驗圖及方程式

6.橢圓 elliptic umbilic：是個三角型的立體圖上下各一個三曲，立體變成橢圓形

		
是個三角型的立體圖 上下各一個三曲， 立體變成橢圓形	$\Phi = X^3 - XY^2 + a(X^2 + Y^2) + bX + cY$	本實驗結果

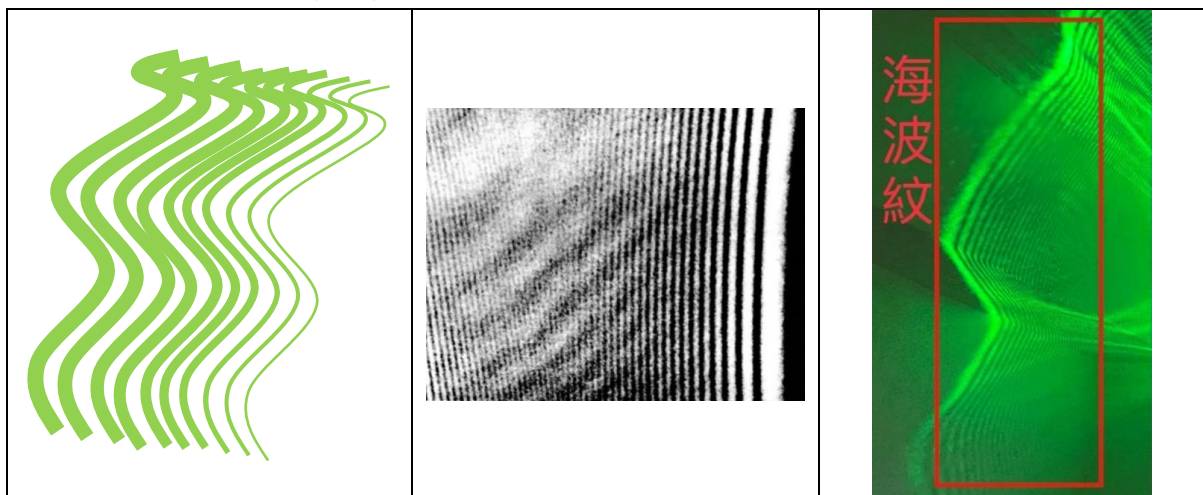
(圖二十) 橢圓示意圖與實驗圖及方程式

7.類牛頓環：一圈圈的環狀紋路，亮暗分布與牛頓環相反



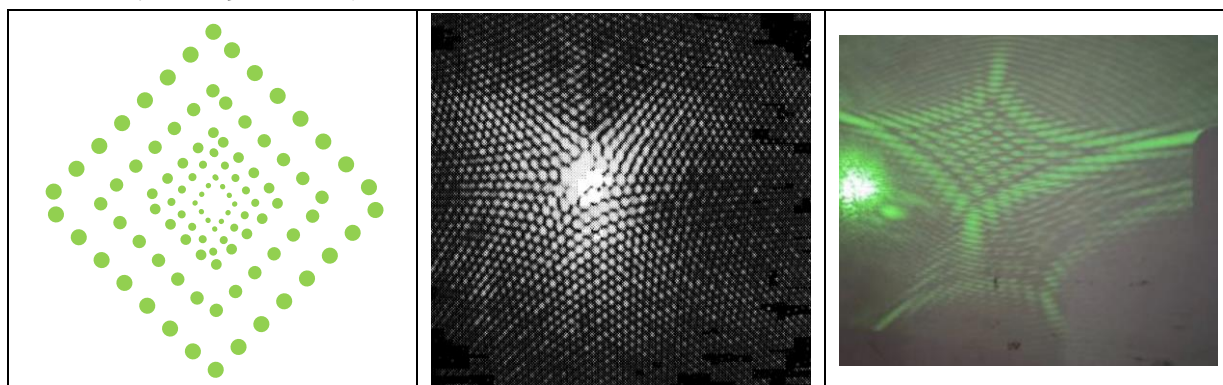
(圖二十一) 類牛頓環示意圖與實驗圖

8.海波紋：有多條折疊(Fold)組成



(圖二十一) 海波紋示意圖與實驗圖

9.沙灘形：有多個點組成如圖

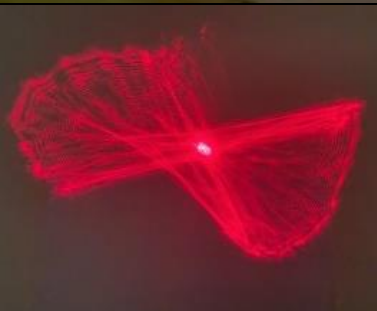


(圖二十一) 沙灘形示意圖與實驗圖

(三)歸納與統整

將有相同類型字的特徵或圖片歸類並敘述相關性於結論欄位

A. 1 字型的焦散圖案

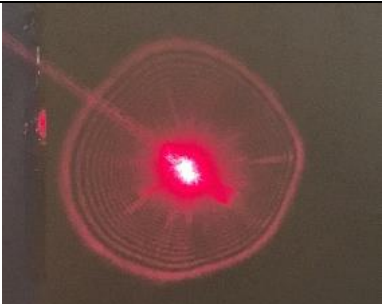
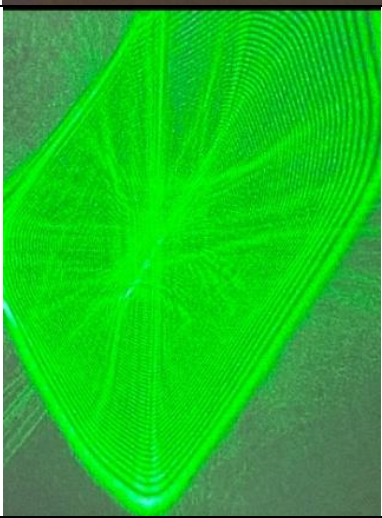
			褶皺 尖嘴 燕尾
			褶皺 尖嘴 海波紋

圖二十二 1 字圖文以及組成單元

分析：

1. 如上圖，紅框處就是雷射照射處，照在凸出的 1 字型的尖端處，造成的焦散圖案是立體的三角形，底部還有小環。
2. 如下圖，凸出的 1 字型圖文尖端，紅框處就是雷射照射處，造成 X 型交叉的焦散圖案。

B. 邊緣的焦散圖案

連續的斜 線紋路				焦點 褶皺 類牛頓環 海波紋
連續的斜 線紋路				褶皺 尖嘴 燕尾 類牛頓

圖二十三邊緣的圖文以及組成單元

分析

- 1.上表的突出的連續斜紋，造成圓型，中間有明亮的焦點，從焦點處有光線向上射出的焦散圖案。
- 2.下表的突出的連續直紋，造成一片如盾牌的形狀的焦散圖案。

C. 6字型的焦散圖案

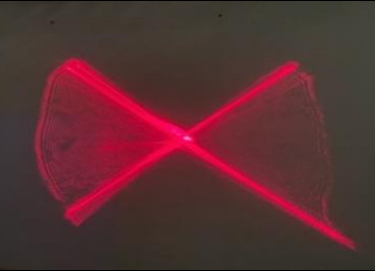
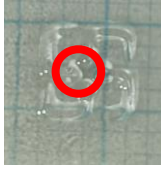
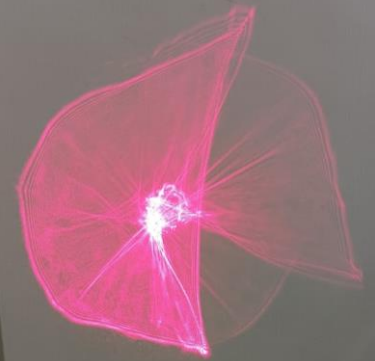
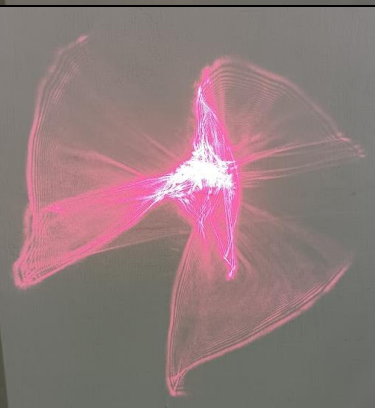
				褶皺 尖嘴 燕尾 類牛頓環
---	---	--	--	------------------------

圖二十四 6 字圖文以及組成單元

分析：

在突出的 6 字型的交接處，如紅框，得到環狀中間焦點長出了三角形的焦散圖案。

D. 環保標章字型的焦散圖案

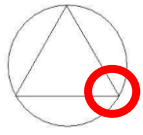
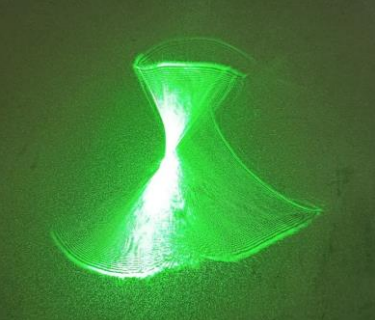
					線型褶皺 尖嘴
					褶皺 尖嘴 燕尾 類牛頓
					褶皺 尖嘴 燕尾 海波紋

圖二十五環保標章圖文以及組成單元

分析：

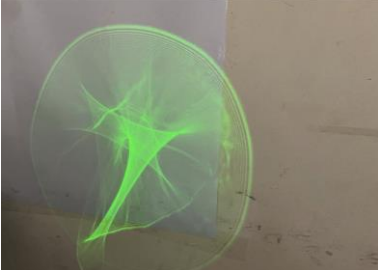
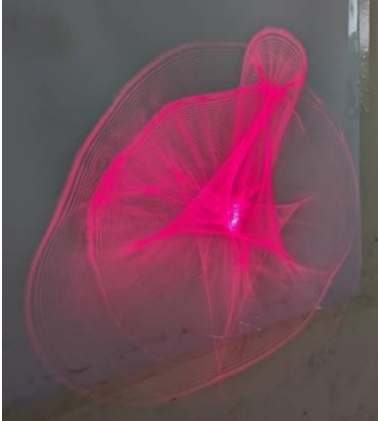
1. 如最上圖，紅框是框在凸出的，環保標章字型的直角，造成 X 型交叉的焦散圖案。
2. 如中間圖，紅框是框在凸出的，環保標章字型的箭頭，造成立體圖形，有三層弧形重疊著的焦散圖案。
3. 如最下圖，紅框是框在凸出的，環保標章字型的縫隙處，造成如同一朵蘭花的形狀的焦散圖案。

E. 一個圓內接三角形字型的焦散圖案

					褶皺 尖嘴 雙曲
---	---	--	--	--	----------------

圖二十六一個圓內接三角形圖文以及組成單元
照射在突出的一個圓內接三角形的交接處，造成如同古典宮廷服的的焦散圖案。

F.8 字型的焦散圖案

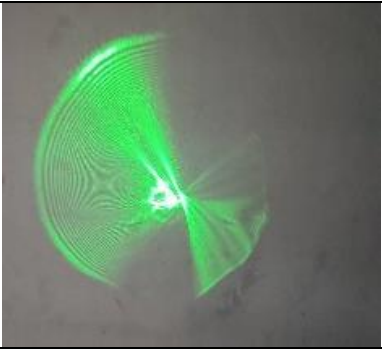
			褶皺 尖嘴 燕尾 類牛頓
			褶皺 尖嘴 燕尾 類牛頓
			褶皺 尖嘴 燕尾 類牛頓

圖二十七 8 字圖文以及組成單元

分析：

- 1.如最上圖，紅框處，表面突出的 8 字型的左側就是雷射照射處，焦散圖形是圓環上出現一個三角形向下的圖案。
- 2.如中間圖，紅框處，表面突出的 8 字型的中央，就是雷射照射處，圖形是圓環上出現兩個三角形，一個向下，一個向上的圖案。
- 3.如最下圖，紅框處，表面突出的 8 字型的右側，就是雷射照射處，圖形是圓環上出現一個三角形向上的圖案。

G.0 字型的焦散圖案

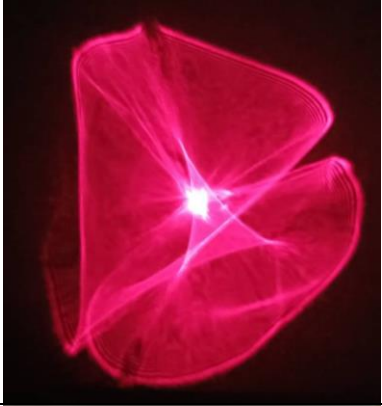
			褶皺 類牛頓
			褶皺 類牛頓

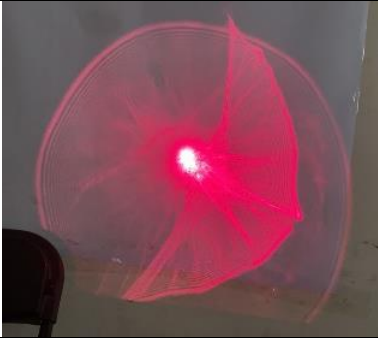
圖二十八 0 字圖文以及組成單元

分析：

- 1.如紅框處，表面突出的 0 字型的側面，就是雷射照射處，造成了有如扇子的焦散圖形。
- 2.如紅框處，表面突出的 0 字型的頂端，就是雷射照射處，造成了有如盤子的焦散圖形。

H.05 字型的焦散圖案

			褶皺 尖嘴 燕尾 雙曲
			褶皺 尖嘴 燕尾 雙曲

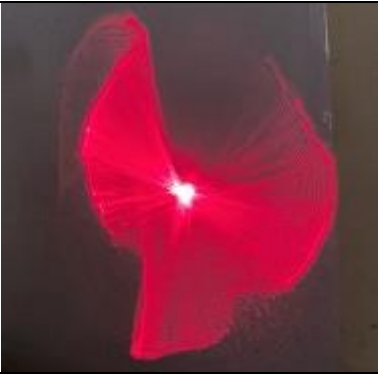
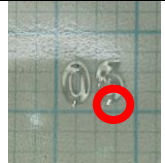
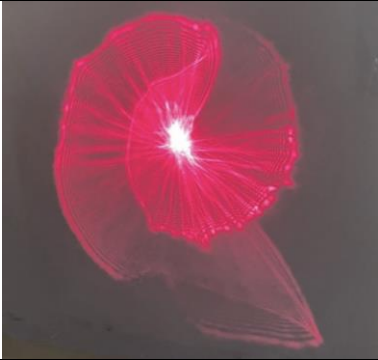
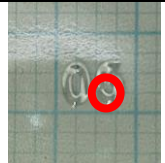
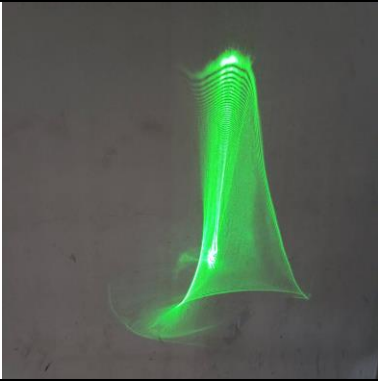
05					褶皺 尖嘴 燕尾 類牛頓
----	---	--	--	--	-----------------------

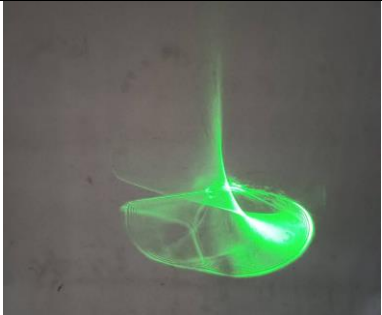
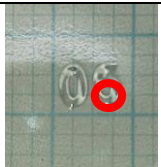
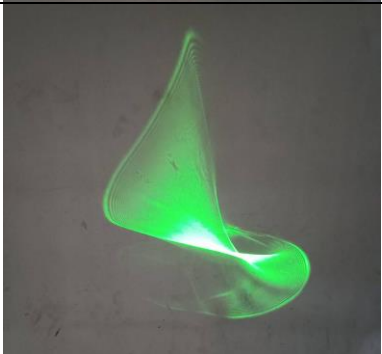
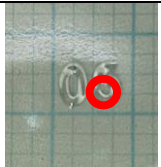
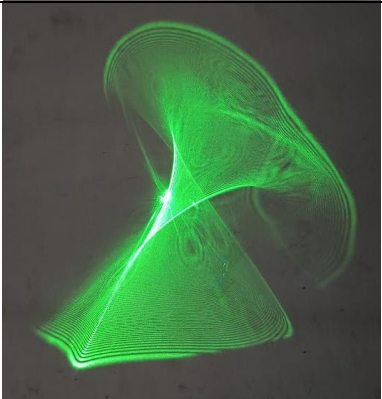
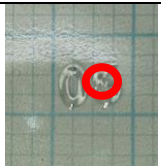
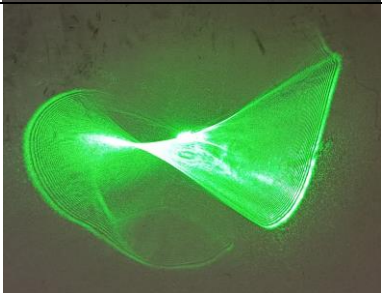
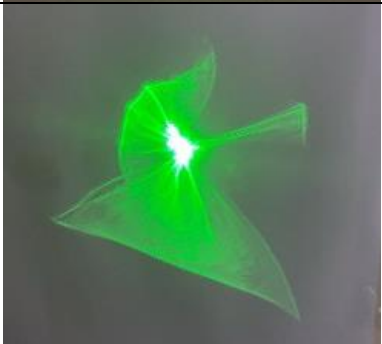
圖二十九 05 字圖文以及組成單元

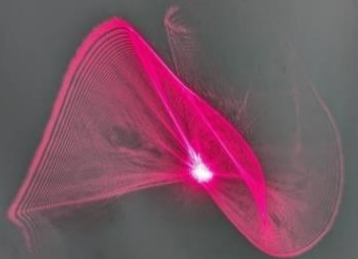
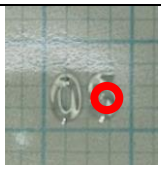
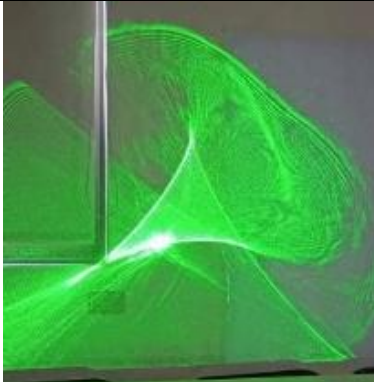
分析：

- 1.如紅框處，表面突出的 05 字型之間的頂端，就是雷射照射處，造成立體的，如同草莓的的焦散圖形。
- 2.如紅框處，表面突出的 05 字型之間的中央，就是雷射照射處，造成立體的，如同木耳的的焦散圖形。
- 3.如紅框處，表面突出的 05 字型之間的下端，就是雷射照射處，下方有如碟子，上方有如裸海蝶的的焦散圖形。

1.5 字型的焦散圖案

5	 編號(I)				褶皺 沙灘形
5	 編號(II)				褶皺 尖嘴 類牛頓 海波紋
5	 編號(III)				褶皺 類牛頓 海波紋

	 編號(IV)				褶皺 類牛頓 海波紋
	 編號(V)				褶皺 尖嘴 類牛頓 海波紋
	 編號(VI)				褶皺 尖嘴 燕尾 雙曲
	 編號(VII)				褶皺 尖嘴 雙曲
	 編號(VIII)				褶皺 尖嘴 燕尾

	 編號(IX)			褶皺 尖嘴 燕尾 雙曲 海波紋
	 編號(X)			褶皺 尖嘴 燕尾

圖三十十字圖文以及組成單元

分析：

1. 對應編號(I)，如紅框處，表面突出的 5 字型的下方轉彎偏弧形處，就是雷射照射處，造成如同鳥兒展翅高飛的焦散圖形。
2. 對應編號(II)，如紅框處，表面突出的 5 字型的弧形中間，就是雷射照射處，造成如同海螺的焦散圖形。
3. 對應編號(III)，如紅框處，表面突出的 5 字型的下方轉彎處，就是雷射照射處，造成如同海上風帆的焦散圖形。
4. 對應編號(IV)，如紅框處，表面突出的 5 字型的弧形下端，就是雷射照射處，造成如同一艘帆船的焦散圖形。
5. 對應編號(V)，如紅框處，表面突出的 5 字型的弧形上端，就是雷射照射處，造成如同漩渦的焦散圖形。
6. 對應編號(VI)，如紅框處，表面突出的 5 字型的上方直線，就是雷射照射處，造成如同女王頭的焦散圖形。
7. 對應編號(VII)，如紅框處，表面突出的 5 字型的上方轉彎處，就是雷射照射處，造成如同愛心的焦散圖形。
8. 對應編號(VIII)，如紅框處，表面突出的 5 字型的下方尖端，就是雷射照射處，造成如同蝴蝶的焦散圖形。
9. 對應編號(IX)，如紅框處，表面突出的 5 字型的上方橫桿，就是雷射照射處，造成如同隨風飛舞的裙擺的焦散圖形。
10. 對應編號(X)，如紅框處，表面突出的 5 字型的上方頂端，就是雷射照射處，造成外面一個較為圓滑的三角形，中間一個較為尖銳的三角形的焦散圖形。

討論

1. 分析光的路徑，光從瓶底塑形凸面或凹面射出到螢幕，呈現焦散圖紋：因從空氣進入玻璃，折射率變大，依據司乃耳定率將偏向法線，

- 2.到塑型的凸起及凹下面射出，經過空氣到銀幕，形成焦散圖案，因由玻璃到空氣，依據司乃耳定率，折射率變小，所以偏離法線，由凸起面射出的光徑會會聚，凹處會發散。
- 3.到銀幕處出現光程差，當此處光程差為波長整數倍時，出現亮帶，為半個波長的奇數倍時，出現暗帶，如圖三。
- 4.因塑形的凸凹面，就會形成多個折皺，實驗出現的圖紋如尖嘴（*cusp*）、燕尾（*swallow tail*），三曲等多個圖紋，就是由折皺建構的。
- 6.焦散圖紋的描述：
 - (1)大多數的圖文都是一圈一圈亮暗圖紋的分布，呈現繞射現象，最外層的亮帶寬度最寬，向內變小，繞射產生的原因是，因透明介質的連續曲面關係，所以平行光經曲面折射後波前也隨之成曲面波前。依「海更斯新點波源」觀念，屏幕上的圖紋是多波源、多角度、異波程、異相位的複合干涉結果。
 - (2)從焦散圖紋的共同性分析將圖文的形成，歸類為一焦點二由焦點形成褶皺兩個褶皺形成尖嘴三個褶皺形成三曲，在更複雜的組合，橢圓螢幕上看是平面，實際上看是立體由褶皺的延展，形成類牛頓環的環型結構，在郵摺皺的延伸，經由褶皺的變形出現了，海波，改波斷裂形成了沙灘，從焦散圖暗的組合形成了多樣化的組成圖案
 - (3)經由壓克力盒寶特瓶其他透明介質，無法形成明顯的焦散圖案

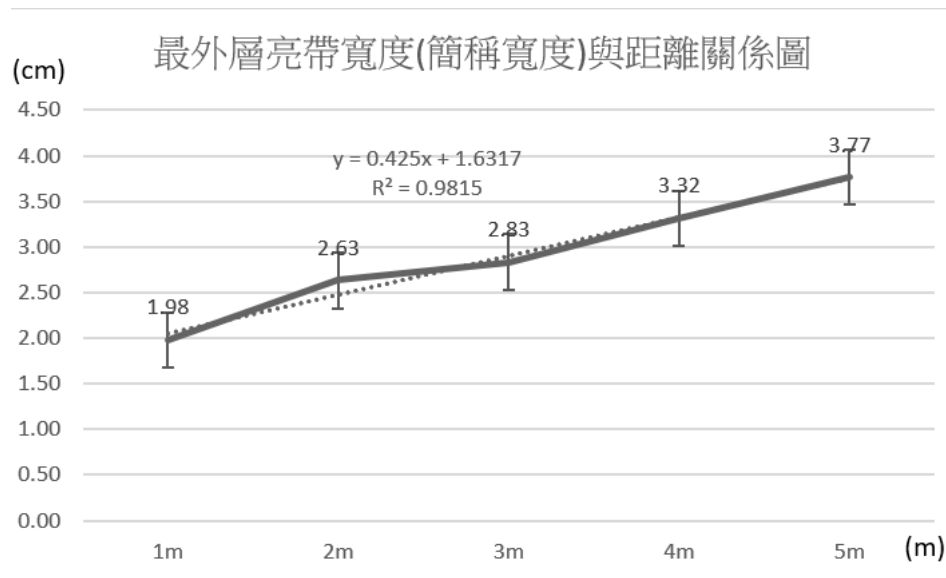
二、探討光源與光屏距離與最外層亮帶寬度的關係

(一)實驗步驟

- 1.固定綠色雷射光
- 2.光源與光屏的距離從一公尺開始，每隔一公尺增加
- 3.打開雷射光源在光頻上呈現焦散圖紋，量取最外層亮帶寬度(簡稱寬度)三個不同位置的寬度求平均值
- 4.繪出距離與最外層亮帶寬度(簡稱寬度)的關係圖並分析與討論

距離	寬度						測量值
	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	
1m	2.09	1.73	1.98	1.91	2.17	2.02	1.98 ± 0.08
2m	2.68	2.54	2.62	2.76	2.53	2.67	2.63 ± 0.06
3m	2.71	2.89	2.86	2.92	2.84	2.78	2.83 ± 0.06
4m	3.47	3.28	3.25	3.32	3.45	3.13	3.32 ± 0.07
5m	3.86	3.69	3.82	3.81	3.68	3.74	3.77 ± 0.08

(表一)寬度與距離



圖三十一最外層亮帶寬度(簡稱寬度)與距離關係圖

(二)數據分析與討論

- 1.由函數圖的分佈可知當距離愈大，最外層亮帶寬度(簡稱寬度)愈大，為線形增大，而趨勢線的方程式是 $y=0.425x+1.6317$ ， R 平方為 0.9815 可說是高度的符合
- 2.因光從被照體射出是在空間立體輻射出的，在空間形成的包絡面也是光速的往外輻射，所以距離愈遠，光從凹凸不平的玻璃射出，產生新的平面波前，經過空間設到螢幕，行程有亮暗袋的焦散圖型，如原理 7，產生光程差，形成的亮帶寬度會線形增加。
- 3.不確定度在 0.06 到 0.08 之間是可以接受的範圍，此不確定度是由 A 類及 B 類在族和成 C 類不確定度
- 4.焦散圖文最外層亮帶寬度是依次亮帶寬度兩倍，是曲面折射的波前上任意點是新點波的惠更斯原理所致，如原理六。

從曲面折射後的光以「多點波源」繞射原理在螢幕上 $\triangle PQ$ 光程差在 $\pm\lambda$ 之間的暗紋範圍內皆是亮帶區域所在

結果

最外層亮帶寬度且明亮是繞射現象，也因透明介質的連續曲面關係，所以平行光經曲面折射後波前也隨之成曲面波前。依「惠更斯新點波源」觀念，螢幕上點 P 的圖紋是多波源、多角度、異波程、異相位的複合干涉結果。

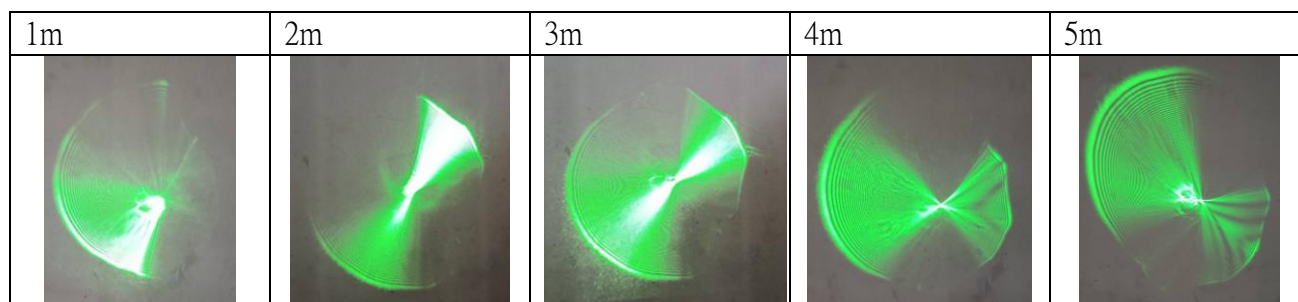
(四). 焦散圖文最外層亮帶：依據繞射理論(本實驗的結果最外層亮帶寬度最大，向內變小，原因為多點波原)

寬度是依次亮帶寬度兩倍，是經過曲面折射後的新波前，新波前上任意點是新的點波源，是海更斯原理所導致。

從曲面折射後的光以「多點波源」繞射原理在螢幕上 $\triangle PQ$ 光程差在 $\pm\lambda$ 之間的暗紋範圍內皆是亮帶所在

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PQ} &= \pm n\lambda & n=1、2、3\cdots\cdots &\text{為暗紋} \\ &m\lambda & m=0 &\text{亮帶中央} \\ &(m+\frac{1}{2})\lambda & m=1、2、3\cdots\cdots &\text{為依次亮紋} \end{aligned}$$

又 $\because P(X, Y, Z) \propto Q(X, Y, f)$ 波前曲面範圍到屏上點 P 的相等角度與距離漸次改變，所以亮紋寬度會依次變小。



圖三十二寬度與距離

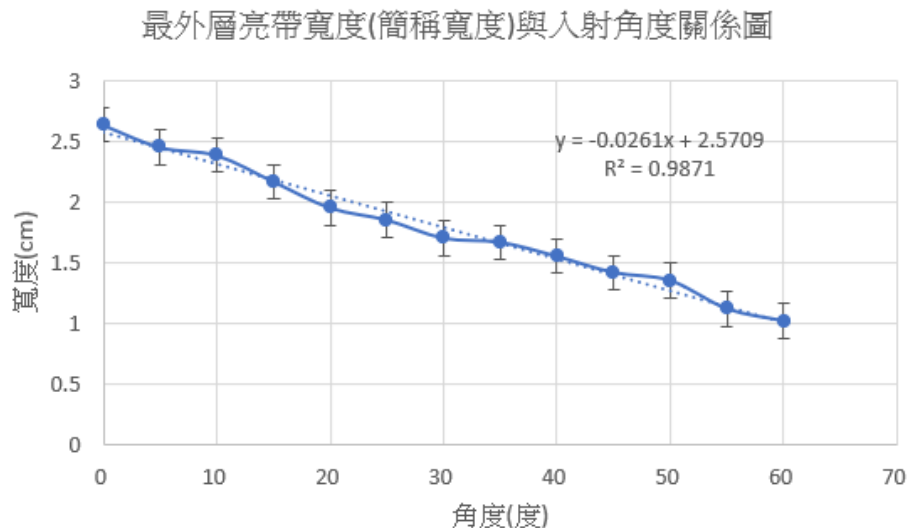
三、探討入射角度與最外層亮帶寬度的關係

(一)實驗步驟

- 1.固定綠色雷射光及距離
- 2.光源與光屏的入射角從垂直玻璃開始，順時針旋轉每隔 5 度的增加
- 3.打開雷射光源在光頻上呈現焦散圖紋，量取最外環亮帶三個不同位置的最外層亮帶寬度(簡稱寬度)求平均值
- 4.繪出入射角度與最外層亮帶寬度(簡稱寬度)的關係圖並分析與討論

入射角度	寬度						測量值
	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	
60	1.04	0.92	0.98	1.06	1.07	1.03	1.02 ± 0.06
55	1.04	1.07	1.22	1.03	1.06	1.28	1.12 ± 0.06
50	1.25	1.45	1.38	1.47	1.32	1.23	1.35 ± 0.06
45	1.43	1.52	1.37	1.38	1.44	1.36	1.42 ± 0.06
40	1.53	1.61	1.58	1.47	1.62	1.49	1.55 ± 0.06
35	1.61	1.62	1.65	1.78	1.55	1.79	1.67 ± 0.06
30	1.69	1.82	1.61	1.73	1.87	1.58	1.70 ± 0.06
25	1.84	1.79	1.86	1.72	1.91	1.98	1.85 ± 0.06
20	1.87	2.05	2.08	1.93	1.82	1.95	1.95 ± 0.06
15	2.12	2.27	2.18	2.09	2.13	2.21	2.17 ± 0.06
10	2.39	2.45	2.38	2.25	2.41	2.42	2.38 ± 0.06
5	2.43	2.37	2.53	2.36	2.47	2.54	2.45 ± 0.06
0	2.64	2.57	2.68	2.73	2.56	2.62	2.63 ± 0.06

(表二)寬度與入射角度

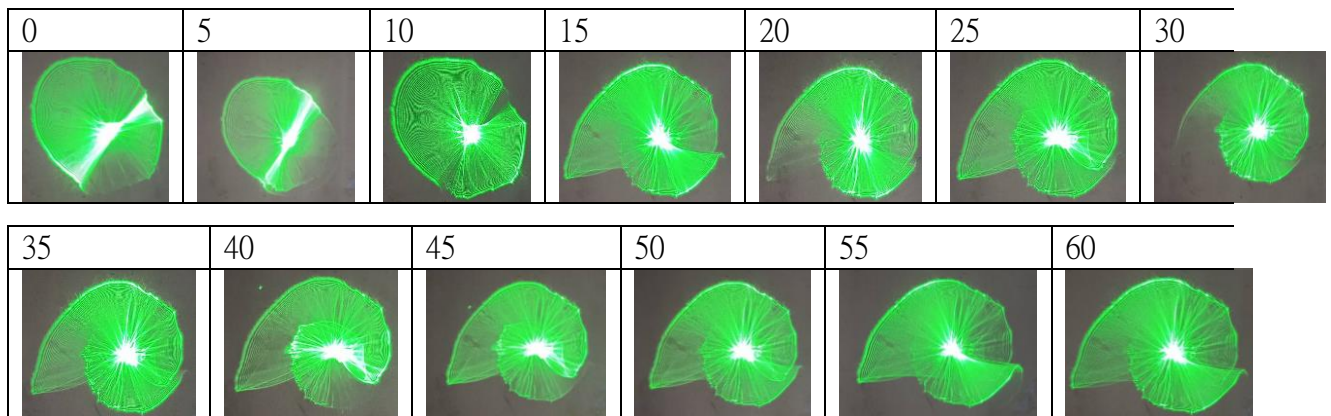


圖三十三最外層亮帶寬度(簡稱寬度)與入射角度關係圖

(二)數據分析與討論(設垂直入射為選轉角度 0 度)

圖十六

1. 由函數圖的分佈可知當從垂直照射開始逆時針旋轉角度愈大，最外層亮帶寬度(簡稱寬度)也愈大，為線形增大，而趨勢線的方程式是 $y=0.023x+0.246$ ，R 平方 0.99 可說是高度的符合，幾乎已是成正比關係，在入射角度的增加光在玻璃圖紋內的路程變大光從凹凸不平的玻璃射出，產生新的平面波前，經過空間設到螢幕，行程有亮暗袋的焦散圖型，如原理 7，產生光程差，最外層亮帶寬度(簡稱寬度)也增加。
2. 從圖形的呈現發現圖形有在旋轉，而且整個圖案輪廓有變化
3. 由函數分布圖知道，垂直入射(0 度)寬度最大，當角度越大，寬度越小，呈現性地檢方城市為 $y = -0.0261x + 2.5709$ $R^2 = 0.9871$



圖三十四寬度與入射角度

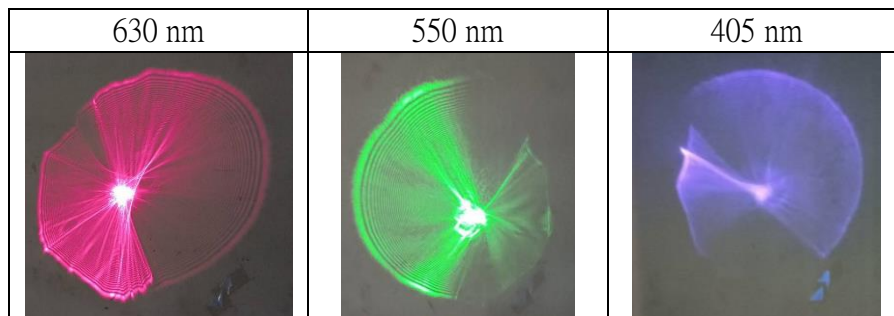
四、探討入射光波長與最外層亮帶寬度的關係

(一)實驗步驟

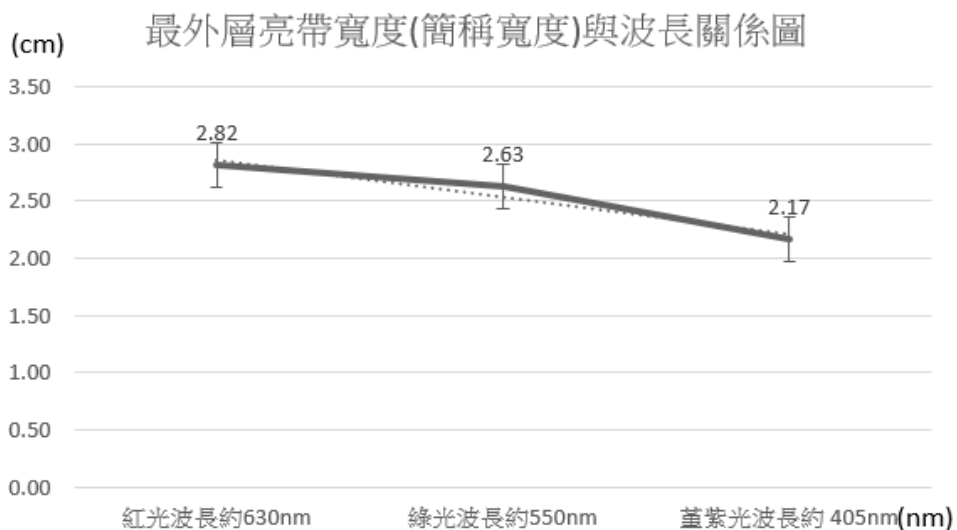
1. 固定距離及垂直入射
2. 改變波長(紅綠紫三種)
3. 打開雷射光源在光頻上呈現焦散圖紋，量取最外環亮帶三個不同位置的寬度求平均值
4. 繪出波長與最外層亮帶寬度的關係圖並分析與討論

波長	光帶寬度(cm)						測量值
	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	
紅光波長約 630nm	2.79	2.77	2.72	2.91	2.98	2.73	2.82 ± 0.06
綠光波長約 550nm	2.73	2.52	2.54	2.68	2.77	2.66	2.63 ± 0.06
藍紫光波長約 405nm	2.14	2.18	2.19	2.16	2.22	2.11	2.17 ± 0.07

(表二)寬度與入射波長



圖三十五寬度與入射波長



圖三十六最外層亮帶寬度(簡稱寬度)與入射波長關係圖

(二)數據分析與討論

- 1.因只能準備到紅、綠、藍三種不同波長的雷射筆，數據就以這三種波長來比較
- 2.從這三個數據分佈可顯示波長愈長，最外層亮帶寬度愈大，有正比的趨勢，方程式為 $y=0.0031x+0.086$ ，可說相當接近正比。

五、探討最外層光帶寬度(簡稱寬度)與曲率關係

(一)實驗步驟

- 1.固定距離及垂直入射
- 2 在 0 圖文上改變照射位置，隨機找六個不同弧度的點
- 3.打開雷射光源在光頻上呈現焦散圖紋，量取最外環亮帶六個不同位置的寬度求平均值

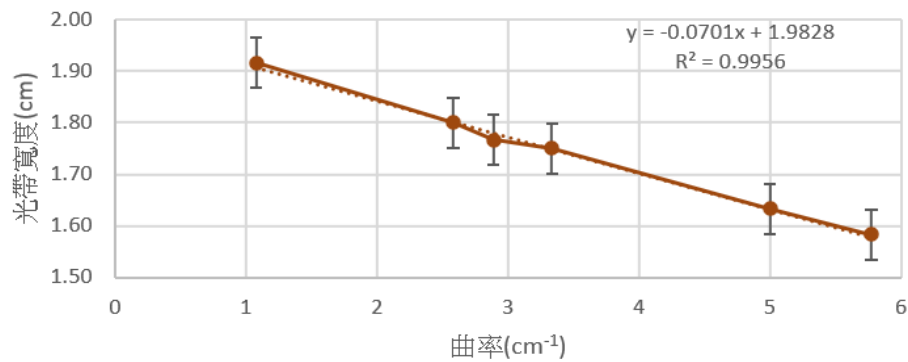
4.利用 geogebra 電腦繪圖求出曲率

4.繪出波長與最外層亮帶寬度的關係圖並分析與討論

曲率半徑(原)	曲率 (1/R)	寬度						
		第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	測量值
0.03	5.77	1.63	1.59	1.62	1.57	1.48	1.61	1.58 ± 0.06
0.04	5	1.56	1.68	1.74	1.67	1.53	1.62	1.63 ± 0.06
0.09	3.33	1.67	1.76	1.72	1.64	1.78	1.93	1.75 ± 0.07
0.12	2.89	1.58	1.71	1.63	2.02	1.67	1.99	1.97 ± 0.06
0.15	2.58	1.57	1.79	1.63	2.03	1.81	1.97	1.80 ± 0.10
0.86	1.08	1.98	1.93	2.01	1.82	1.89	1.97	1.92 ± 0.06

(表二)寬度與曲率

最外層亮帶寬度(簡稱寬度)與曲率關係圖

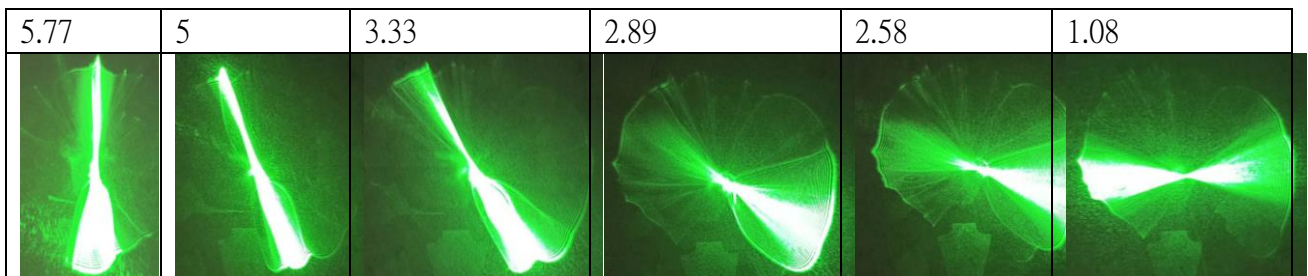


圖三十六最外層亮帶寬度(簡稱寬度)與曲率關係圖

(二)數據分析與討論

1.曲率越大，最外層亮帶寬度越小，呈線性關係 $y = -0.0701x + 1.9828$ ， $R^2 = 0.9956$

2. 推論是因為曲度大，左右兩邊路程小，光從凹凸不平的玻璃射出，產生新的平面波前，經過空間射到螢幕，形成有亮暗帶的焦散圖型，如原理 7，產生光程差，所以光程差小



圖三十七寬度與曲率

六、結論

- 一、探討瓶底的焦散圖紋，分類出了針對玻璃介質的九種基本圖形，焦點、折皺、尖嘴、三曲、雙曲、橢圓、類牛頓環、海波、沙灘，由這些基本圖案形成了圖形，而且從亮暗帶的現象知道了是為繞射現象
- 二、探討距離與最外層亮帶寬度關係，得到光源與屏幕距離越遠，光帶越寬，呈線性增加
- 三、探討入射角度與最外層亮帶寬度的關係，將光源逆時針旋轉，發現選轉角度越大，光帶越窄，呈現性減少
- 四、探討入射光波長與最外層亮帶寬度的關係，因只有三種不同的波長，實驗結果有波長越長，光帶越寬的趨勢
- 五、探討玻璃圖文曲率與最外層亮帶寬度的關係，曲率越大，光帶寬度越小，呈線性減少

柒、未來研究方向

- 一、探討折射率對焦散圖紋的影響
- 二、更複雜的焦散圖如泳池底的圖形
- 三、光在玻璃內部的路徑分析
- 四、研究 3D 立體的實像圖，可應用光學藝術的創作。

捌、參考文獻

- 一、王子嘉、林琬婷、賈斯嘉、魏敏家，(2010)水光交織 中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會作品說明書·高中組·物理科·第三名·
- 二、Nye, J. F.(1986), The catastrophe optics of liquid drop lenses, Proc. R. Soc. London, A403, 1—26. . P6.P12.P18.
- 三、MICHAEL BERRY (1988)Beyond Rainbows by MICHAEL BERRY, H. H. Wills Physics Laboratory, Bangalore. P1177
- 四、Keith Beven(2019)Physics of Caustic Light in Water & Photography I On Landscape
取自 <https://www.onlandscape.co.uk/2019/01/physics-of-caustic-light-in-water/>
- 五、王尊信、洪連輝(2011)牛頓環 I 科學 Online
取自 <https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=29515>
- 六、高中物理課本龍騰版(三)第四章物理光學