第五屆旺宏科學獎

創意說明書

參賽編號：SA5-131
作品名稱：颼風來嚕—對角線與方格圖之關係探討與推廣
姓名：潘建綱
關鍵字： 對角線、方格圖、格子點

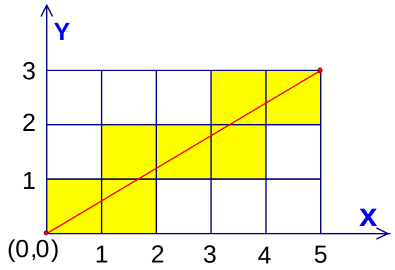
目錄

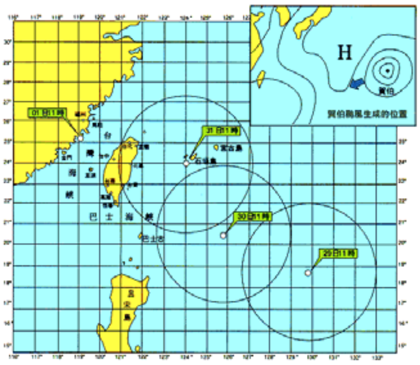
摘要

在數學思考這本書中，提到一個關於矩形對角線的問題：「方格紙上畫一個三格乘五格的長方形，並且連起一條對角線，有多少方格和對角線接觸？ 」本篇研究除了將邊長爲正整數之矩形的情形一般化外，同時也將結論推廣至邊長爲實數之矩形，更近一步地將對角線推廣至有寬度的「線」，並導出有系統且漂亮的規則與一般式。除此之外，我們更利用將立體空間問題轉換成平面模式的方式，將二維的情形推廣到三維空間之情形，並且由對角直線延伸出任意曲線的解題原理。

壹、研究動機

某天，在數學課中，老師丟給我們一個問題：「一個長為 5、寬為 3 的矩形，內部分割成 15 個單位方格，則其對角線會經過幾個方格？你如何將這個問題推廣成一般情形呢？」這個問題讓我們聯想到每當颱風來襲時，氣象台都會播放一張颱風路徑圖以及其暴風圈掃過的區域範圍以便發布警戒區域，這引起了我們繼續追尋答案的動機。此外，我們可利用高中課程中「數與座標系」、「空間中的直線與平面」、「圓與球面」、「圓錐曲線」、「二階方陣所對應之平面變換」等單元之概念來解題。





貳、研究目的

一、探討平面上 m×n 的方格圖中，對角線所經過的格子數(由 $m,n\in N$ 的情形推廣到 $m,n\in Q^{+}$ 的情形，最後整理出 $m,n\in R^{+}$ 之一般情形)。

二、探討平面上 m×n($m,n\in N$)的方格圖中，寬度為 2r 之對角線所經過的方格數。

三、探討空間中 m×n×l($m,n,l\in N$)的立方格圖中，對角線所經過的立方格數。

四、探討空間中 m×n×l($m,n,l\in N$)的立方格圖中，寬度為 2r 之對角線所經過的立方格數。

五、探討空間中 m×n×l($m,n,l\in N$)的立方格圖中，球體半徑 r，球心在對角線移動所經過之立方格數。

參、研究設備與器材

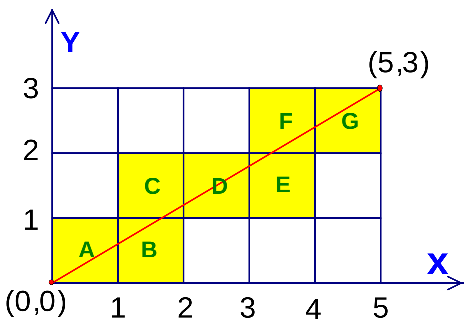
電腦、紙、筆、動態幾何軟體(GSP)

肆、研究過程與方法

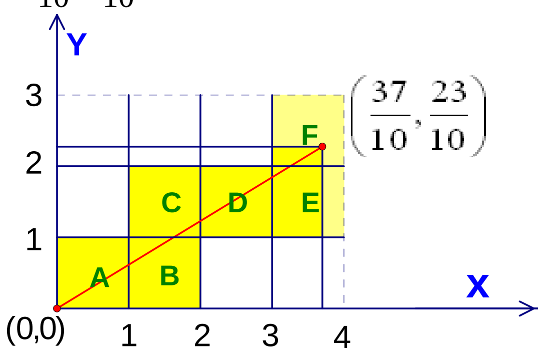
在著手研究這個問題之前，我們先給 <u>m×n 的方格圖</u>一個明確的定義：

【定義】在方格紙中，以格子點為一頂點，取長為 m 寬為 n 的矩形，則此種內部被分割為數個完整或不完整單位正方格之矩形，我們稱為 <u>m×n 的方格圖</u>。

例如：5×3 之方格圖

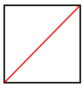


$\frac{37}{10}\times\frac{23}{10}$ 之方格圖

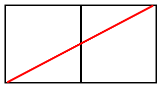


我們先從 $m,n\in N$ 的情形開始著手。

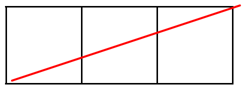
剛開始接觸這個問題時，我們毫無頭緒，因此用最土法煉鋼的方法從最小方格圖 1×1 開始討論，想從其中找尋到漂亮的規則，不失一般性，我們只討論了 $m \geq n$ 的情形。



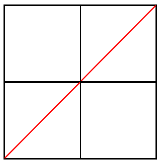
1×1　通過1格



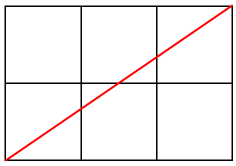
2×1　通過2格



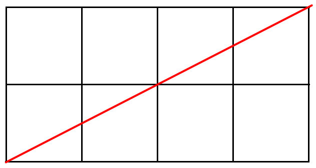
3×1　通過3格



2×2　通過2格



3×2　通過4格



4×2　通過4格

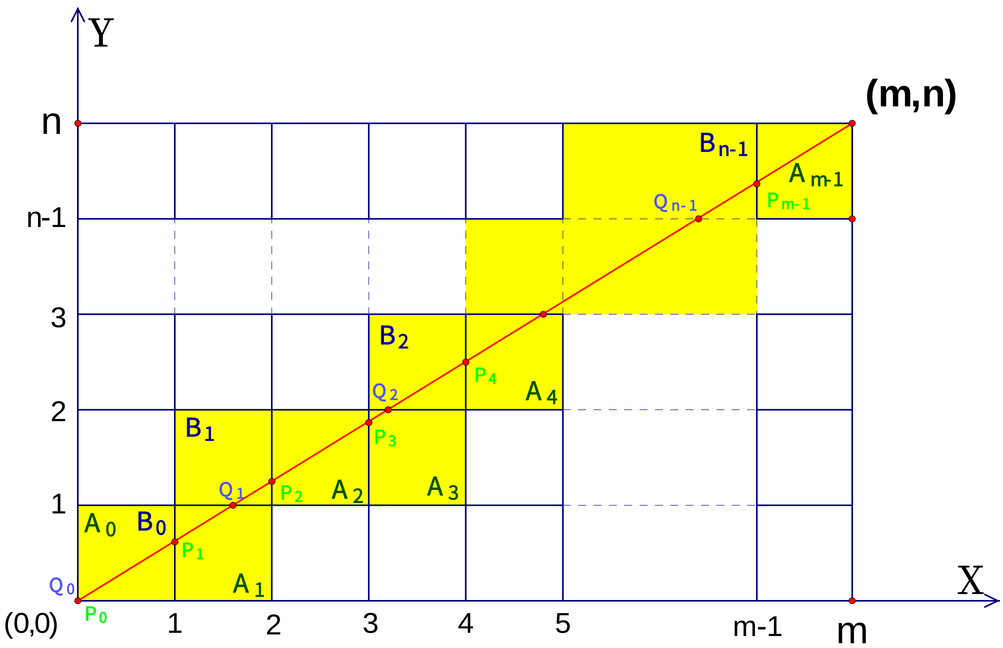
當畫2×2和4×2的圖時，我們發現它們的對角線會碰到格子間的十字交點，也就是格子點。2×2的圖是由兩個1×1的圖所構成；4×2的圖是由兩個2×1的圖所構成。

由以上幾個例子看，我們可歸納出，m×n($m,n \in N$)的方格圖中，對角線所經過的格子數似乎是 m+n-(m,n)，我們試過好幾個 m,n 值都剛剛好是對的。當然，這樣的結論是需要更嚴謹的去說明與驗證的，於是我們試著用數學理論來堅定我們的推測是正確的。

一、m×n($m,n \in N$)的方格圖

我們觀察到，所有 m×n 的方格圖中，可以分成兩大類型，一爲(m,n)=1 的情形(即 m,n 互質)，此情形的對角線不會通過方格圖內部任何一個格子點。另一種形式爲(m,n)=d, $d \neq 1$的情形(即 m,n 不互質)，這種情形的對角線會碰到方格圖內部的格子點。以下我們就此兩種情形分別討論。

定理一：m×n($m,n \in N,(m,n)=1$)的方格圖中，對角線所經過的格子數爲 m+n-1 個。



【證明】

（一）首先，我們得說明：<u>爲什麼當(m,n)=1 時，其對角線不會通過方格圖內部的格子點呢?</u>

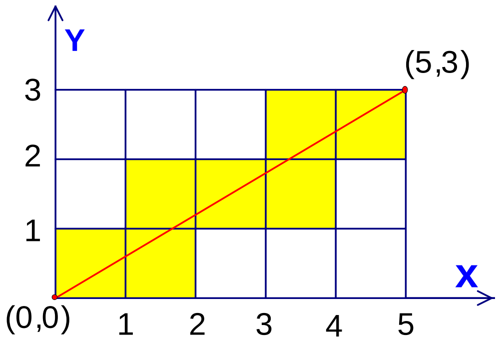
這個證明，其實只要運用到我們高一所學到的反證法就可以解決了。

如圖，在 m×n($m,n\in N,(m,n)=1$)的方格圖中，若將其座標化，以 O 為原點，則對角線方程式為 $y=\dfrac{n}{m}x$ 。假設對角線 $y=\dfrac{n}{m}x$ 會通過方格圖內部格子點 (x_0,y_0) ，其中 $0<x_0<m$, $0<y_0<n$ ， $x_0,y_0\in N$ ，則 $y_0=\dfrac{n}{m}x_0\Rightarrow my_0=nx_0$ ，但 $\because (m,n)=1\quad \therefore m|x_0$ →← 故得證。

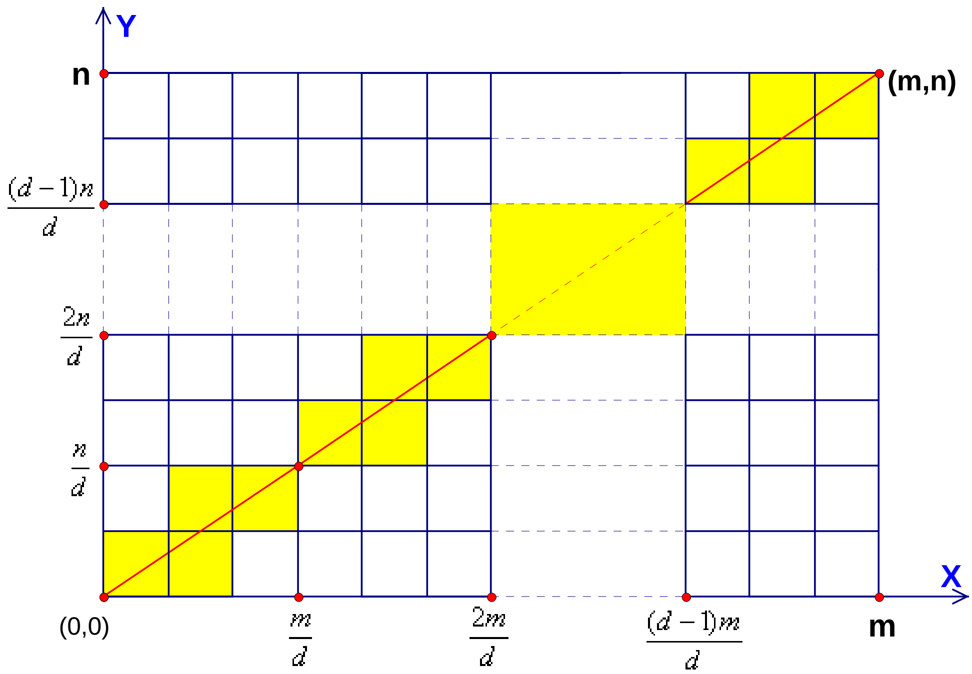
（二）接下來，我們就來說明 m+n-1 的公式由來。

由圖可知，當對角線由(0,0)到(m,n)的過程中，與每一鉛直線(除 x=m 外)必定都恰會有一個交點，即與 x=0,x=1,x=2,⋯,x=m-1 分別交於 $P_0,P_1,\cdots,P_{m-1}$ (除 P_0 外其餘均非格子點)，因此 $P_0,P_1,\cdots,P_{m-1}$ 的右方(對 P_0 而言為右上方)的小方格 $A_0,A_1,\cdots,A_{m-1}$ (共 m 個)必會被對角線所經過。同理，對角線與每一水平線(除 y=n 外)也必定都恰會有一個交點，即與 y=0,y=1,y=2,⋯,y=n-1 分別交於 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_{n-1}$ (除 Q_0 外其餘均非格子點)，因此 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_{n-1}$ 的上方(對 Q_0 而言為右上方)的小方格 $B_0,B_1,\cdots,B_{n-1}$ (共 n 個)必會被對角線所經過。很顯然的，除了 $A_0\equiv B_0$ (重合)外，對於 $\forall i,j\quad (i=1,2,\cdots,m-1$ 、 $j=1,2,\cdots,n-1)$，方格 A_i 均不會與方格 B_j 重合。故 m×n ($m,n\in N,(m,n)=1$)的格子圖中，對角線所經過的格子數為 m+n-1。

例如：5×3 之方格圖共會經過 5+3-1=7 個格子。



定理二：m×n($m,n\in N,(m,n)=d,d\neq 1$)的方格圖中，對角線所經過的格子數為 m+n-d 個



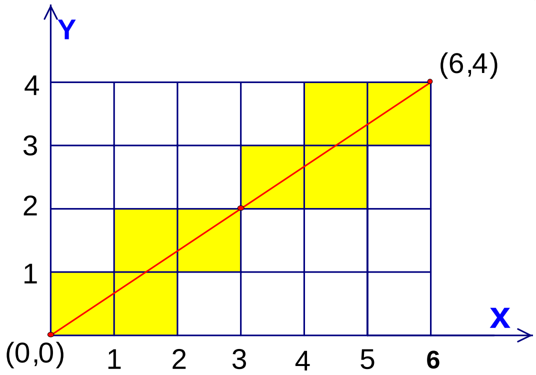
【證明】

（一）說明：當(m,n)=d, $d\neq 1$ 時，對角線會通過方格圖內部格子點。

很顯然的，當(m,n)=d 時，可令 m=dh,n=dk,其中(h,k)=1，則對角線方程式爲 $y=\frac{n}{m}x=\frac{k}{h}x$，其通過內部格子點(h,k),(2h,2k),⋯,((d-1)h,(d-1)k)。

（二）由圖，m×n 方格圖中，(m,n)=d 的情形可將其分割成 d 個 $\frac{m}{d}\times\frac{n}{d}$(其中$\left(\frac{m}{d},\frac{n}{d}\right)=1$)的方格圖來討論。由【定理一】知，每一個 $\frac{m}{d}\times\frac{n}{d}$ 方格圖對角線會經過 $\frac{m}{d}+\frac{n}{d}-1$ 個格子，因此 m×n 方格圖之對角線共經過 d($\frac{m}{d}+\frac{n}{d}-1$)=m+n-d 個格子。

例如：6×4 的方格圖中，其對角線會通過 6+4-(6,4)=8 個格子。



事實上，在【定理二】中，若 d=1，便是【定理一】的情形，因此我們可以修正定理二的公式如下：

定理一、二之結論：m×n($m,n\in N,(m,n)=d$)的方格圖中，對角線所經過的格子數爲 m+n-d 個

※ 由定理一與定理二的結論我們可以發現，這個問題根本就是<u>排容原理</u>，對角線所經過的格數爲：<u>number(對角線與水平線交點)＋number(對角線與鉛直線交點)－number(對角線同時與水平線、鉛直線相交之交點)</u>

<u>注意</u>:該式子之水平線與鉛直線不含方格圖之上界與右界(即圖中之 x=m,y=n) 。

二、m×n($m,n\in Q^+$)的方格圖

我們輕易的解決了老師給我們的問題，然而，我們並不因此而滿足，我們將問題更加以延伸，當 $m,n\in Q^+$ 時，那麼 m×n 的方格圖中，對角線所經過的格子數是多少呢？與 $m,n\in N$ 的情形是否有相關呢？這都是我們很有興趣知道的。

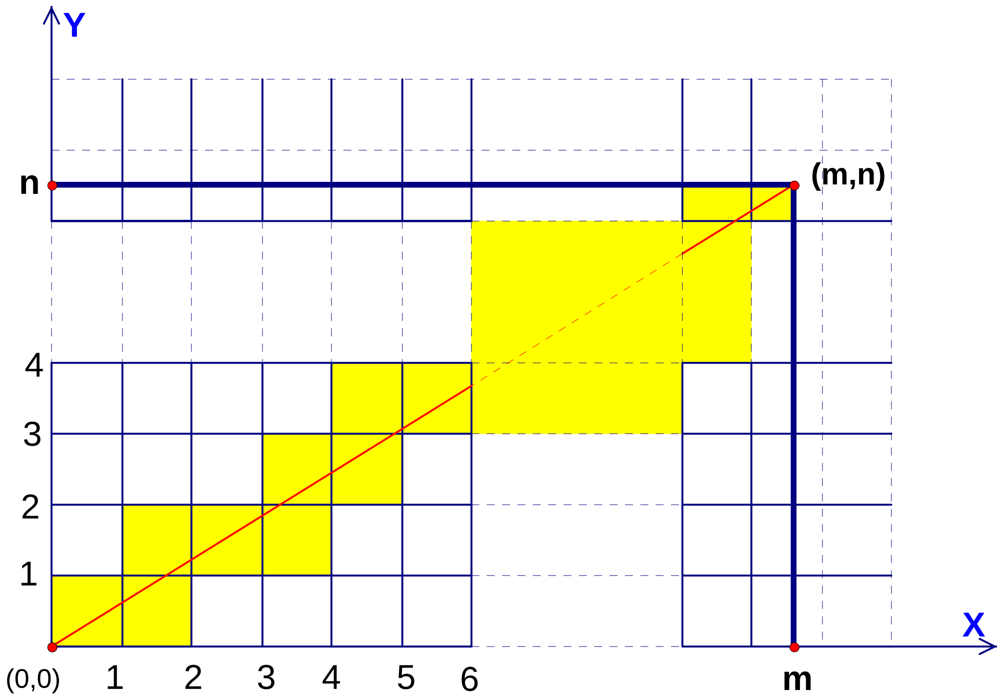
有了之前經驗，我們還是將其分成對角線經過內部格子點與不經過內部格子點兩種情形來討論。

爲了方便我們表達公式，在此先定義兩個函數如下：

【定義】1. $[x]$：小於或等於 x 之最大整數，如$[2]=2$，$[3.5]=3$。
2. $\lceil x\rceil$：大於或等於 x 之最小整數，如$\lceil 2\rceil=2$，$\lceil 3.5\rceil=4$。

第一種情形：對角線不過內部格子點

定理三：m×n($m,n\in Q^+$)的方格圖中，若 $\frac{n}{m}=\frac{q}{p}$，其中 $p,q\in N$ 且 p,q 互質，則當 $p\geq m$時，對角線所經過的格子數爲$\lceil m\rceil+\lceil n\rceil-1$個。



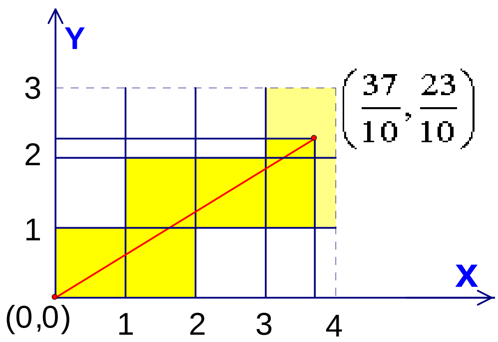
【證明】

（一）說明：當 $p \ge m$ 時，對角線必不會通過方格圖內部格子點。

將方格圖座標化，以 O 爲原點，則對角線斜率爲 $\dfrac{n}{m}$，若 $\dfrac{n}{m}=\dfrac{q}{p}$，其中 $p,q \in N$ 且 p、q 互質，則對角線方程式爲 $y=\dfrac{q}{p}x$，通過最小正整數格子點(p,q)，故當 $p \ge m$ 時，對角線必不會過內部格子點。

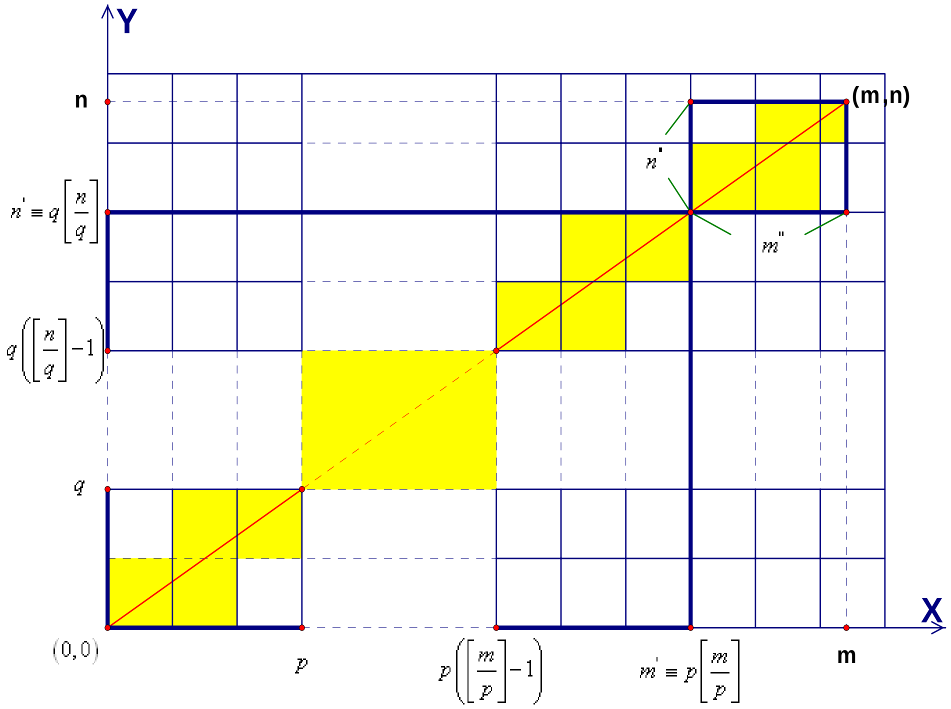
（二）由圖可知，當對角線由(0,0)到(m,n)的過程中，與每一鉛直線(除 x=m 外)必定都恰會有一個交點，即與 x=0,x=1,x=2,⋯,x=$\lceil m \rceil -1$ 分別交於 $P_0,P_1,\cdots,P_{\lceil m \rceil -1}$ (除 P_0 外其餘均非格子點)，(<u>注意</u>:此處爲什麼不取到 x=$[m]$呢?因爲當 $m \in N$ 時，x=m 上的交點(m,n)恰爲邊界上的格子點，而此點並不列入計算。)因此 $P_0,P_1,\cdots,P_{\lceil m \rceil -1}$ 的右方(對 P_0 而言爲右上方)的小方格 $A_0,A_1,\cdots,A_{\lceil m \rceil -1}$ 會被對角線所經過。同理，對角線與每一水平線(除 y=n 外)也必定都恰會有一個交點，即與 y=0,y=1,y=2,⋯,y=$\lceil n \rceil -1$ 分別交於 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_{\lceil n \rceil -1}$ (除 Q_0 外其餘均非格子點)，因此 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_{\lceil n \rceil -1}$ 的上方(對 Q_0 而言爲右上方)的小方格 $B_0,B_1,\cdots,B_{\lceil n \rceil -1}$ 必會被對角線所經過。很顯然的，除了 $A_0 \equiv B_0$ 外，對於 $\forall i,j$ ($i=1,2,\cdots,\lceil m \rceil -1$、$j=1,2,\cdots,\lceil n \rceil -1$)，方格 A_i 均不會與方格 B_j 重合。故 m×n($m,n \in Q^+$)的方格圖中，對角線所經過的格子數爲 $\lceil m \rceil + \lceil n \rceil -1$。

例如：$\dfrac{37}{10}\times\dfrac{23}{10}$ 之方格圖其對角線會通過 $\left\lceil \dfrac{37}{10} \right\rceil + \left\lceil \dfrac{23}{10} \right\rceil -1=4+3-1=6$ 個格子。



第二種情形：對角線會通過內部格子點

> 定理四：m×n($m,n\in Q^+$)的方格圖中，若$\frac{n}{m}=\frac{q}{p}$，其中$p,q\in N$且p、q互質，則當$p<m$且$p\nmid m$時，對角線所經過的格子數為$\lceil m\rceil+\lceil n\rceil-\left[\frac{m}{p}\right]-1$個。當p<m且$p|m$，即$m,n\in N$的情形，對角線所經過的格子數為m+n-(m,n)個。



【證明】

如【定理三】之證明(一)，若$\frac{n}{m}=\frac{q}{p}$，其中$p,q\in N$且p,q互質，則當$p<m$時，對角線會通過內部格子點。如圖，我們可以把m×n($m,n\in Q^+$)的方格圖拆成兩大部分。

第一部分為$m'\times n'(m',n'\in N)$的方格圖，由$\left[\frac{m}{p}\right]$個p×q方格圖所組成，我們可以利用【定理一】的結論知，共會經過$\left[\frac{m}{p}\right]$×(p+q-1)個格子。第二部份為$m''\times n''(m'',n''\in Q^+)$的方格圖，即為(m-p$\left[\frac{m}{p}\right]$)×(n-q$\left[\frac{m}{p}\right]$)的方格圖，我們可利用【定理三】的結論知，共會經過

$$\left\lceil m-p\left[\frac{m}{p}\right]\right\rceil+\left\lceil n-q\left[\frac{m}{p}\right]\right\rceil-1=\lceil m\rceil-p\left[\frac{m}{p}\right]+\lceil n\rceil-q\left[\frac{m}{p}\right]-1$$

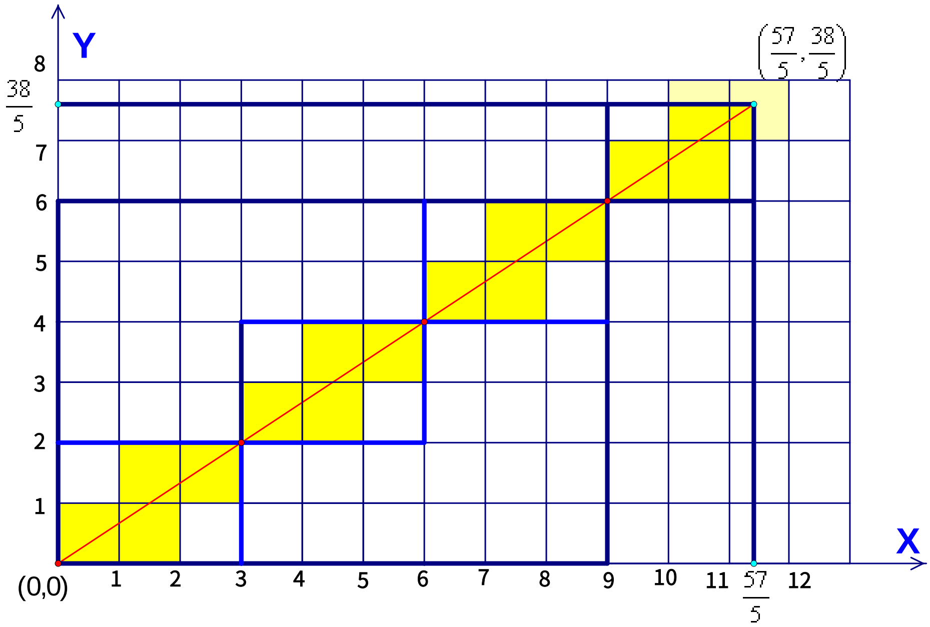
個方格。則m×n($m,n\in Q^+$)的方格圖中，若對角線通過內部格子點，對角線所經過的格子數為

$$\left[\frac{m}{p}\right]\times(p+q-1)+\lceil m\rceil-p\left[\frac{m}{p}\right]+\lceil n\rceil-q\left[\frac{m}{p}\right]-1=\lceil m\rceil+\lceil n\rceil-\left[\frac{m}{p}\right]-1$$

個。

<u>注意</u>：當$p|m$時，並無第二部份，因此公式只有$\left[\frac{m}{p}\right]$×(p+q-1)=m+n-(m,n)。

例如：$\frac{57}{5}\times\frac{38}{5}$之方格圖其對角線會通過$\left\lceil\frac{57}{5}\right\rceil+\left\lceil\frac{38}{5}\right\rceil-\left[\frac{\frac{57}{5}}{3}\right]-1=16$個格子。



三、m×n($m,n\in R^{+}$)的方格圖

顯然的，以上的結論在$m,n\in R^{+}$的條件下依然可成立。(證明與定理一~四相似)

推廣：m×n($m,n\in R^{+}$)的方格圖中，

(一) 若$\frac{n}{m}\notin Q$時，對角線所經過的格子數爲$\lceil m\rceil+\lceil n\rceil-1$個

(二) 若$\frac{n}{m}\in Q$，即$\frac{n}{m}=\frac{q}{p}$，其中$p,q\in N$且 p,q 互質，

(1)當$p\geq m$時，對角線所經過的格子數爲$\lceil m\rceil+\lceil n\rceil-1$個；特別的是，當 p=m 時，即$m,n\in N$且(m,n)=1，則角線所經過的格子數爲 m+n-1 個。

(2)當$p<m$且 $p\nmid m$ 時，對角線所經過的格子數爲$\lceil m\rceil+\lceil n\rceil-\left[\frac{m}{p}\right]-1$個。

(3)當 p<m 且$p\mid m$，即$m,n\in N$的情形，則對角線所經過的格子數爲 m+n-(m,n)個

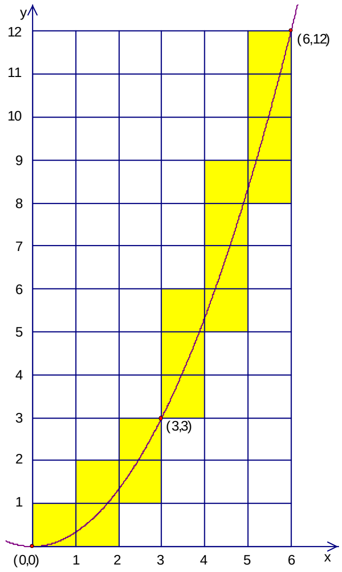
事實上，我們發現，無論m,n值爲何，其所導出的公式均與 number(對角線與水平線交點)＋number(對角線與鉛直線交點)－number(對角線同時與水平線、鉛直線相交之交點)的原理相同，而這樣的原理其實不只針對直線所經過的方格可處理，甚至任意的函數曲線所經過的方格數，亦可同理推導。

解題原理:在方格圖中，設曲線 y=f(x)在閉區間[a,b]爲一連續嚴格遞增(遞減)函數且$a\in Z$，則 number(曲線在[a,b]經過的方格)=number(曲線與[a,b)間水平線交點)＋number(曲線與[a,b)間鉛直線交點)－number(曲線同時與[a,b)間水平線、鉛直線相交之交點)。

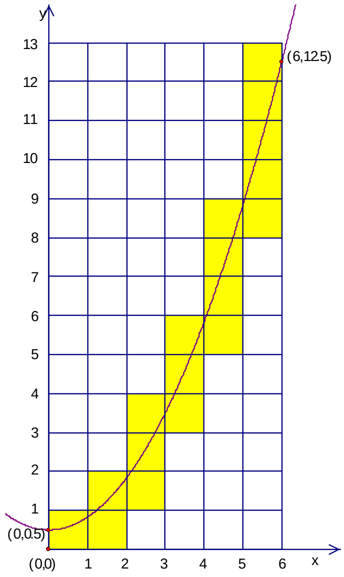
例如：

1. 在 6×12 的方格圖中，曲線 $y=\frac{1}{3}x^2$

2. 在 6×13 的方格圖中，曲線 $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}$



經過 6+12-2=16 個方格



經過 6+12-0=18 個方格

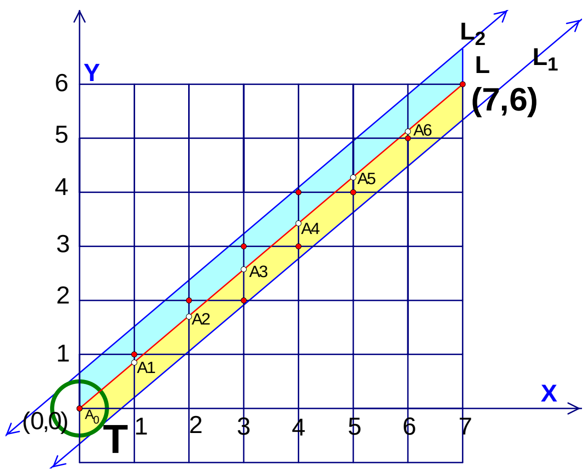
由此可知，任何一個函數曲線 y=f(x)，我們都可將其分割成數個嚴格遞增或嚴格遞減(monotone)的區間，利用上述解題原理，求出其在某個區域範圍內所經過之方格數，而其通過格子點個數爲數論的範疇，在此不予討論。

做到這兒，讓我們聯想到氣象預報時的颱風路徑圖與暴風半徑，假設將某個矩形區域分割成單位方格(比如地球的經線、緯線)，颱風中心的路徑恰爲整區域之對角線時，有多少個方格區域會被暴風圈掃到呢? 這個問題其實就是將原始問題的直線推廣至有寬度的直線，而直線的寬度恰爲此颱風暴風圈之直徑。這讓我們很有興趣繼續找尋有寬度直線所掃過格子數的漂亮規則。

首先，我們先討論 m×n($m,n\in N$)的方格圖中(m,n)=1 的情形，並先探討寬度爲 1 的直線。我們利用 GSP 數學幾何軟體做出 m×n(m、n$\in N$ ，$1\le m\le 5$ 、$1\le n\le 9$)的方格圖，並且做成表格，以便我們來觀察規律。不失一般性，我們只討論 $m\ge n$ 的部份。

發現一：格子點與格子數的關係

我們已經知道，在 m×n 的方格圖中，其對角線所掃過的格子數爲 m+n-(m,n)，因此，我們就由此公式出發，想找出直線加寬時對掃過格子數的變化與影響。我們很驚奇的發現，當慢慢的將直線寬度加寬的過程中，每多通過一個格子點，就會多掃出一個格子數，於是我們大膽猜測，答案必定與直線內部的格子點總數脫離不了關係。



以 7×6 的方格圖(如圖)為例，L 為其對角線，L_1、L_2 為半徑為 $\frac{1}{2}$ 的圓所掃出區域之上下界，L 本身所經過的格子數為 7+6-(7,6)=12，而直線 L 與 L_1 間的格子點共有四個，所以會多掃出 4 個格子。且 L 與 L_2 之間的區域與 L 與 L_1 間區域全等，因此寬度為 $\frac{1}{2}$ 的直線所掃過的格子數共 12+4×2=20 個。

<u>發現二：當對角線向下平移時，格子點增加的頻率一定</u>

一樣以上圖 7×6 的方格圖為例，若我們將圖形座標化，並以 A_0 為原點，則對角線 L 的方程式為:y=$\frac{6}{7}$x。圓 C：$x^2+y^2=\frac{1}{4}$，則 L_1 可視做平行對角線且與圓 C 相切之切線，由圓之切線公式得知，L_1 之方程式為 $y=\frac{6}{7}x-\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{6}{7}x-\frac{\sqrt{85}}{14}$，也就是 L_1 為 L 向下平移 $\frac{\sqrt{85}}{14}$ 而得。於是我們利用我們電腦所做出的圖形，慢慢將對角線向下平移，觀察其通過格子點的時機。不難發現，L 與各鉛直線的交點分別為 $A_0(0,0)$、$A_1(1,\frac{6}{7})$、$A_2(2,\frac{12}{7})$、$A_3(3,\frac{18}{7})$、$A_4(4,\frac{24}{7})$、$A_5(5,\frac{30}{7})$、$A_6(6,\frac{36}{7})$。而在這些點下方且與其距離最近的格子點之距離分別為 $\frac{7}{7}$、$\frac{6}{7}$、$\frac{5}{7}$、$\frac{4}{7}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{2}{7}$、$\frac{1}{7}$，形成一組間隔 $\frac{1}{7}$ 的數列，也就是說，每當 L 向下平移 $\frac{1}{7}$ 時，L 與 L_1 之間內部區域就會多一個格子點，而 $\frac{4}{7}<\frac{\sqrt{85}}{14}\le\frac{5}{7}$，因此 L 與 L_1 間的格子點共有四個，亦即多掃出 4 個格子。我們相信，利用這樣的性質我們一定有辦法推導出ㄧ個完美公式並且加以證明。

引理：$m,n\in N$，且(m,n)=1，若 $in=mq_i+r_i$，$0\le r_i<m$，其中 $i\in\{0,1,\cdots,m-1\}$，則 $\{r_0,r_1,r_2,...,r_{m-1}\}=\{0,1,2,...,m-1\}$。

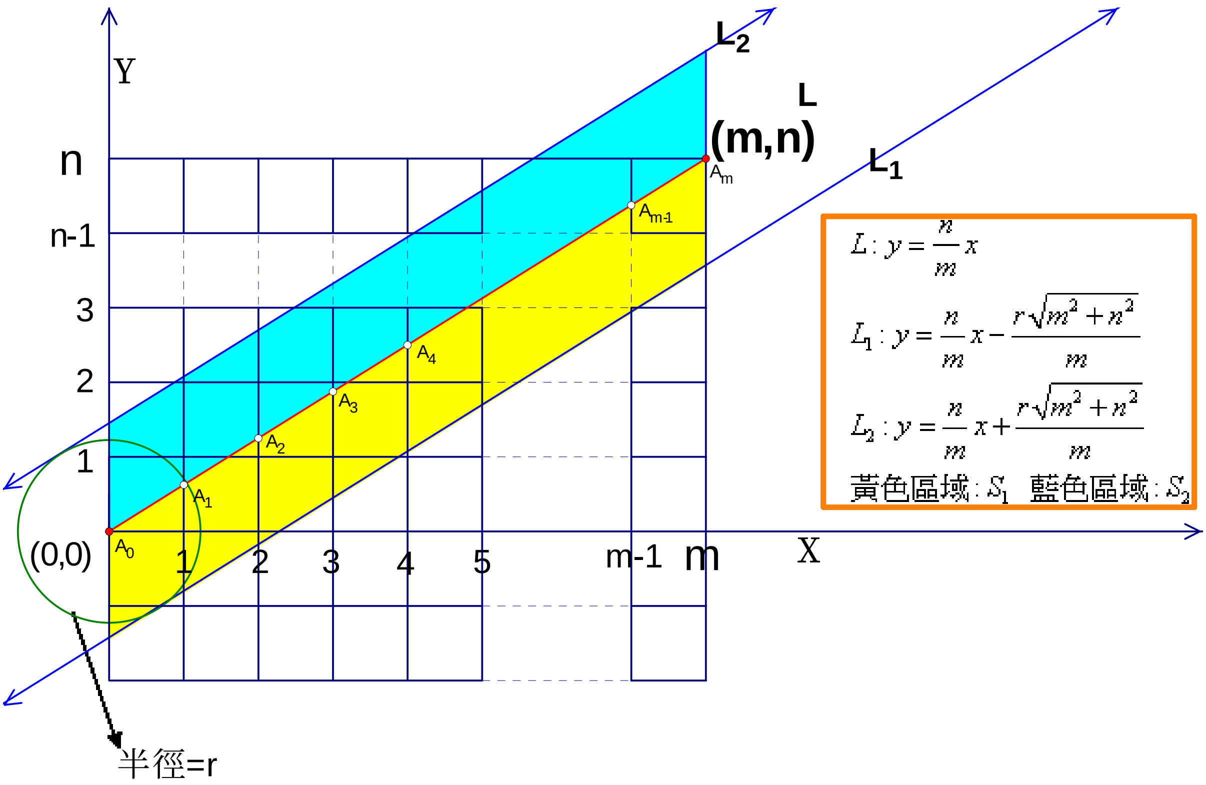
【證明】令 $in=mq_i+r_i$，$jn=mq_j+r_j$，$\forall i\ne j$

要證明 $\{r_0,r_1,r_2,...,r_{m-1}\}=\{0,1,2,...,m-1\}$，只需證明 $r_i\ne r_j$

假設 $r_i=r_j\Rightarrow in-mq_i=jn-mq_j\Rightarrow n(i-j)=m(q_i-q_j)$

$\because(m,n)=1\ \therefore m|(i-j)$　但 $i\ne j$ 且 $0<|i-j|\le m-1$　$\rightarrow\leftarrow$　故 $r_i\ne r_j$　得證。

定理五：m×n($m,n\in N,(m,n)=1$)的方格圖中，對角線寬度為 2r($r\le\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$)，若 k<$r\sqrt{m^2+n^2}\le k+1$，$k\in N\cup\{0\}$，則對角線所經過的方格數為 m+n-1+2(k-$\left[\frac{k}{m}\right]-\sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{m}\right]}\left[\frac{k-lm}{n}\right]$)個。



【證明】

如圖，m×n 之方格圖，L 爲其對角線，L_1、L_2 爲半徑爲 r 的圓 C 所掃出區域之上下界，令 L 與 L_1 間區域爲 S_1，L 與 L_2 之間的區域爲 S_2，S_1、S_2 全等。由【定理一】知，L 所通過之方格數爲 m+n-1。

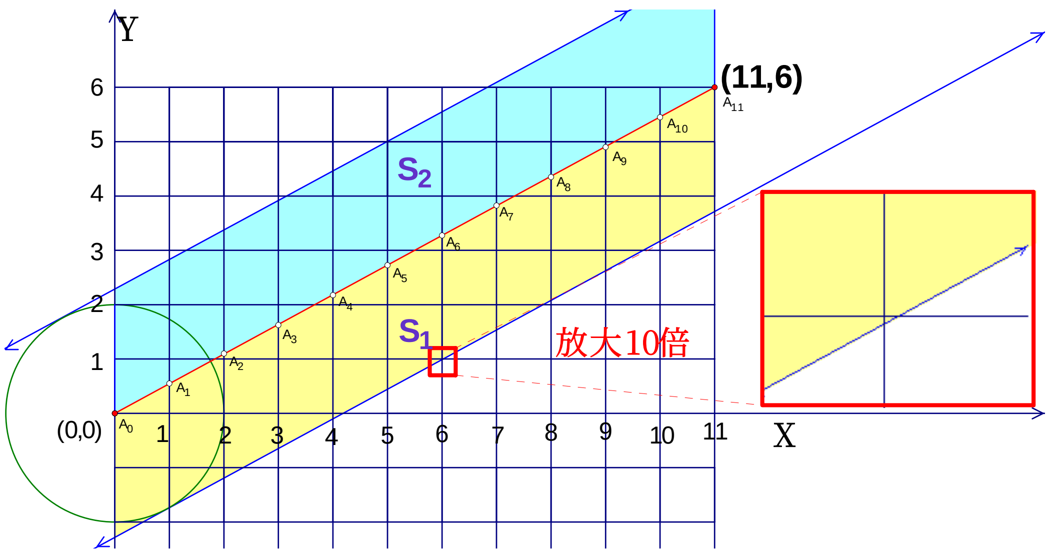
將圖形座標化，並以 A_0 爲原點，則 L 的方程式爲：y=$\frac{n}{m}$x。圓 C：$x^2+y^2=r^2$，則 L_1、L_2 可視做平行對角線且與圓 C 相切之兩條切線，因此，由圓之切線公式得知，L_1、L_2 之方程式爲 $y=\frac{n}{m}x\pm r\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}=\frac{n}{m}x\pm\frac{r\sqrt{m^2+n^2}}{m}$。由於 S_1、S_2 全等，因此我們只需要討論其中一個區域 S_1 所包含的格子點個數即可。我們觀察到，L_1 爲 L 向下平移 $\frac{r\sqrt{m^2+n^2}}{m}$ 而得，而當 L 向下平移的過程中，會隨著平移量的增加而增加掃過的格子點個數。L 與各鉛直線(除 x=m 外)的交點分別爲 $A_0(0,0), A_1(1,\frac{n}{m}), A_2(2,\frac{2n}{m}), A_3(3,\frac{3n}{m}), \cdots\cdots, A_{m-1}(\text{m-1},\frac{(m-1)n}{m})$。由除法原理知 $in=mq_i+r_i$ $0\le r_i<m$ 其中 $i\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，即 A_i 向下 $\frac{r_i}{m}$ 單位會遇到第一個格子點($i\in\{0,1,\cdots,m-1\}$)，又由引理知 $\{r_0,r_1,r_2,...,r_{m-1}\}=\{0,1,2,...,m-1\}$。因此，直線 L 每向下平移 $\frac{1}{m}$ 即會多掃出一個格子點。故當 $\frac{k}{m}<\frac{r\sqrt{m^2+n^2}}{m}\le\frac{k+1}{m}(k\in N\cup\{0\})$，$S_1$ 區域(不含 x=m 與 L_1)會包含(k+1)個格子點(包含原點 A_0)，也就是說，當 $k<r\sqrt{m^2+n^2}\le k+1$ 時，S_1 共會多經過(k+1)個方格。但是 x 軸下方的部份不能納入計算，因此必須扣除。因爲 L_1 與 x 軸的交點爲($\frac{r\sqrt{m^2+n^2}}{n}$,0)和 y 軸的交點爲(0,$-\frac{r\sqrt{m^2+n^2}}{m}$)，已知

$\frac{k}{m}<\frac{r\sqrt{m^2+n^2}}{m}\le\frac{k+1}{m}$，因此在$\begin{cases}x\ge 0\\ x\le 1\\ y\le 0\end{cases}$區域內需扣除$\left[\frac{k}{m}\right]+1$個方格數。又 L_1 與 y=-1 交於
($\frac{r\sqrt{m^2+n^2}-m}{n}$,-1)，與 y=-2 交於($\frac{r\sqrt{m^2+n^2}-2m}{n}$,-2)，……，且與 y=$-\left[\frac{k}{m}\right]$交於
($\frac{r\sqrt{m^2+n^2}-\left[\frac{k}{m}\right]m}{n}$,$-\left[\frac{k}{m}\right]$)，因此必須再扣除

$$\left[\frac{k}{n}\right]+\left[\frac{k-m}{n}\right]+\left[\frac{k-2m}{n}\right]+\cdots\cdots+\left[\frac{k-\left[\frac{k}{m}\right]m}{n}\right]=\sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{m}\right]}\left[\frac{k-lm}{n}\right]$$個格子。

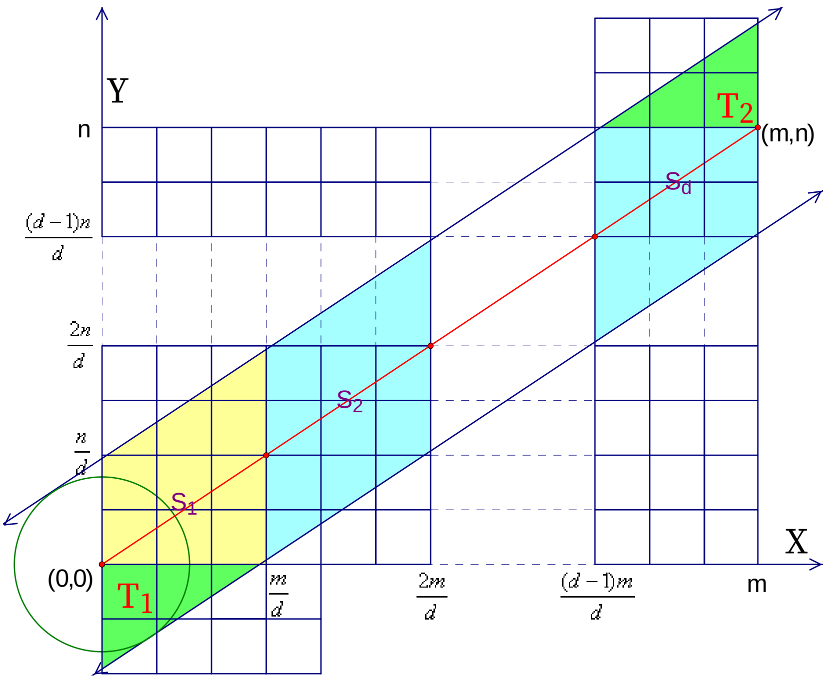
故平行四邊形區域 $S_1\cup S_2$ 共經過 m+n-1+2(k+1)個格子，再扣除上下兩塊超出範圍部分得，寬度爲 2r 的直線所經過的方格數爲 m+n-1+2(k+1)-2($\left[\frac{k}{m}\right]+1+\sum_{k=0}^{\left[\frac{k}{m}\right]}\left[\frac{k-lm}{n}\right]$)=m+n-1+2(k-$\left[\frac{k}{m}\right]-\sum_{k=0}^{\left[\frac{k}{m}\right]}\left[\frac{k-lm}{n}\right]$)。

例如：11x6 的方格圖中，取對角線寬度爲 4(r=2)，$\because 2\times\sqrt{11^2+6^2}=25.06$，$\therefore k=25$，故寬度爲 4 的對角線經過的格子數爲 11+6-1+2x(25$-\left[\frac{25}{11}\right]-\sum_{l=0}^{\left[\frac{25}{11}\right]}\left[\frac{25-11l}{6}\right]$)=50。



定理六：mxn($m,n\in N,(m,n)=d$)的方格圖中，對角線寬度爲 2r($r\le\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$)，若 $k_d<\frac{r\sqrt{m^2+n^2}}{d}\le k_d+1$，$k_d\in N\cup\{0\}$，則對角線所經過的方格數爲

m+n-d+$2d(k_d+1)$-2($\left[\frac{dk_d}{m}\right]+1+\sum_{l=0}^{\left[\frac{dk_d}{m}\right]}\left[\frac{dk_d-lm}{n}\right]$)個。



【證明】

由圖知，m×n 方格圖中，(m,n)=d 的情形可將其分割成 d 個 $\frac{m}{d}\times\frac{n}{d}$（其中 $\left(\frac{m}{d},\frac{n}{d}\right)=1$）的方格圖來討論。我們發現，直線內部區域可視作為 d 個全等平行四邊形區域(令為 $S_1 \sim S_d$)扣除上下兩三角形區域(令為 T_1、T_2)所組成。

由【定理五】之證明過程知，在 $\frac{m}{d}\times\frac{n}{d}$ 的方格圖中，若 $k_d < r\sqrt{\left(\frac{m}{d}\right)^2+\left(\frac{n}{d}\right)^2} \le k_d+1$ $(K_d \in N\cup\{0\})$，即 $K_d < \frac{r\sqrt{m^2+n^2}}{d} \le K_d+1$，每個平行四邊形區域 $S_i\,(i=1,2,\cdots,d)$ 所經過的格子數為 $\frac{m}{d}+\frac{n}{d}-1+2(k_d+1)$，每個三角形區域 T_1,T_2 所經過的方格數為 $\left[\frac{dk_d}{m}\right]+1+\sum_{l=0}^{\left[\frac{dk_d}{m}\right]}\left[\frac{dk_d-lm}{n}\right]$。因此寬度為 2r 的對角線所掃過的方格數為 d×($\frac{m}{d}+\frac{n}{d}-1+2(k_d+1)$)-2($\left[\frac{dk_d}{m}\right]+1+\sum_{l=0}^{\left[\frac{dk_d}{m}\right]}\left[\frac{dk_d-lm}{n}\right]$)＝

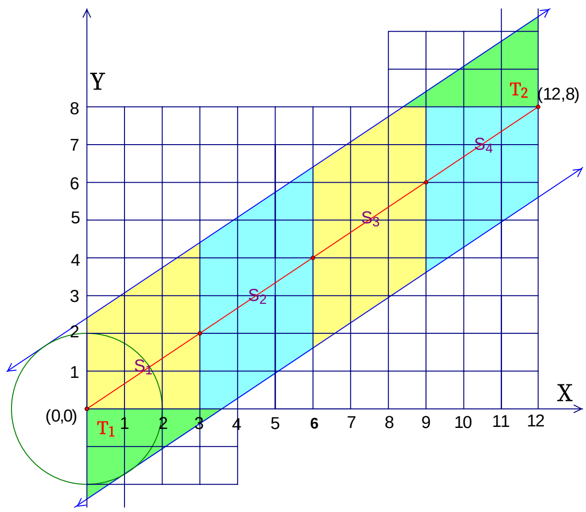
m+n-d+$2d(k_d+1)$-2($\left[\frac{dk_d}{m}\right]+1+\sum_{l=0}^{\left[\frac{dk_d}{m}\right]}\left[\frac{dk_d-lm}{n}\right]$)。

例如：１２×８的方格圖中，取對角線寬度為 4(r=2)，

$\because (12,8)=4$，$\frac{2\sqrt{12^2+8^2}}{4}=7.211$，$\therefore k_d=7$，

故寬度為 4 的對角線經過的格子數為

12+8-4+2×4×(7+1)-2($\left[\frac{4\times7}{12}\right]-\sum_{l=0}^{\left[\frac{4\times7}{12}\right]}\left[\frac{4\times7-12l}{8}\right]$)=64。



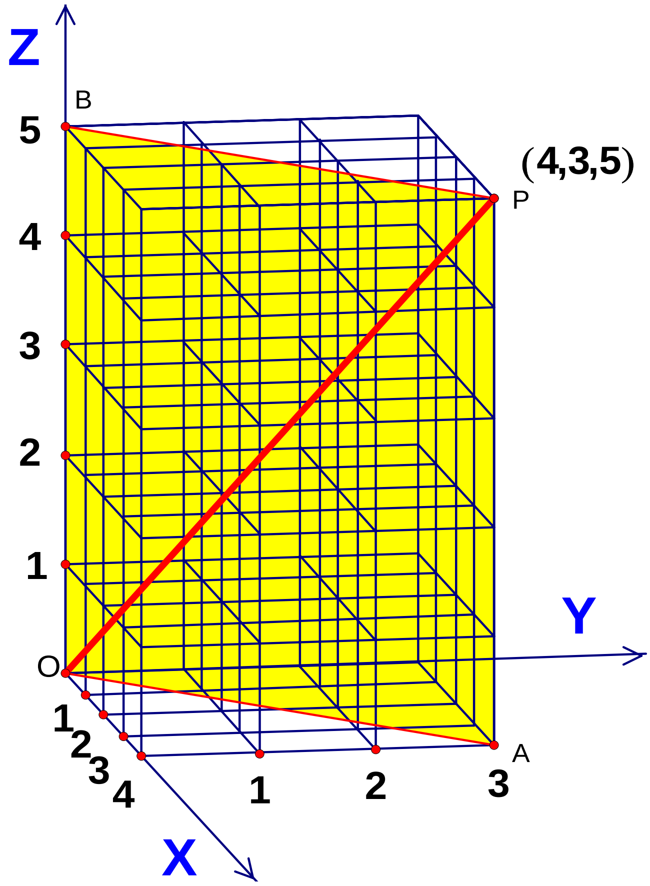
對於這樣的漂亮公式的出爐，真是振奮人心，讓我對於這個研究主題充滿了繼續研究下去的濃厚興趣，於是決定挑戰空間中的立方格圖。

<u>問題</u>：空間中 m×n×l($m,n,l \in N$) 的立方格圖中，對角線共會經過幾個立方格？

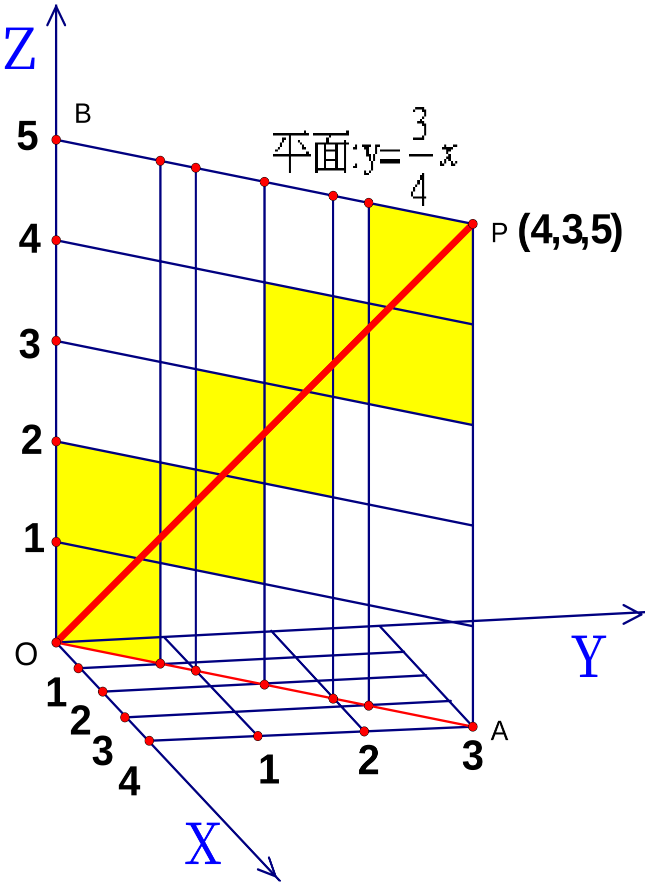
<u>猜測</u>：如同平面上 m×n($m,n \in N$)之情形，我們猜測空間中 m×n×l($m,n,l \in N$) 的立方格圖也與排容原理脫離不了關係，會是 m+n+l-(m,n)-(n,l)-(m,l)+(m,n,l)嗎？這當然需要更進一步的去驗證！

如同平面的過程，我一樣先從 1×1×1 的立方格圖開始逐漸增加 m、n、l 的值來找答案，然而，在沒有任何工具的幫助下，想要想像立體空間的狀況實在是相當困難，於是我找老師討論，尋求是否有工具可以幫助我們來看三度空間的幾何問題。老師從網路上（阿壽工坊）下載了 GSP 軟體的立體座標系，這個軟體讓我對三度空間裡的立方格及其對角線的分佈與變化，能更簡單的觀察。

首先，我們先討論(m,n,l)=1 的情形，利用 GSP 軟體作一 4×3×5 的立方格圖，如下圖一：

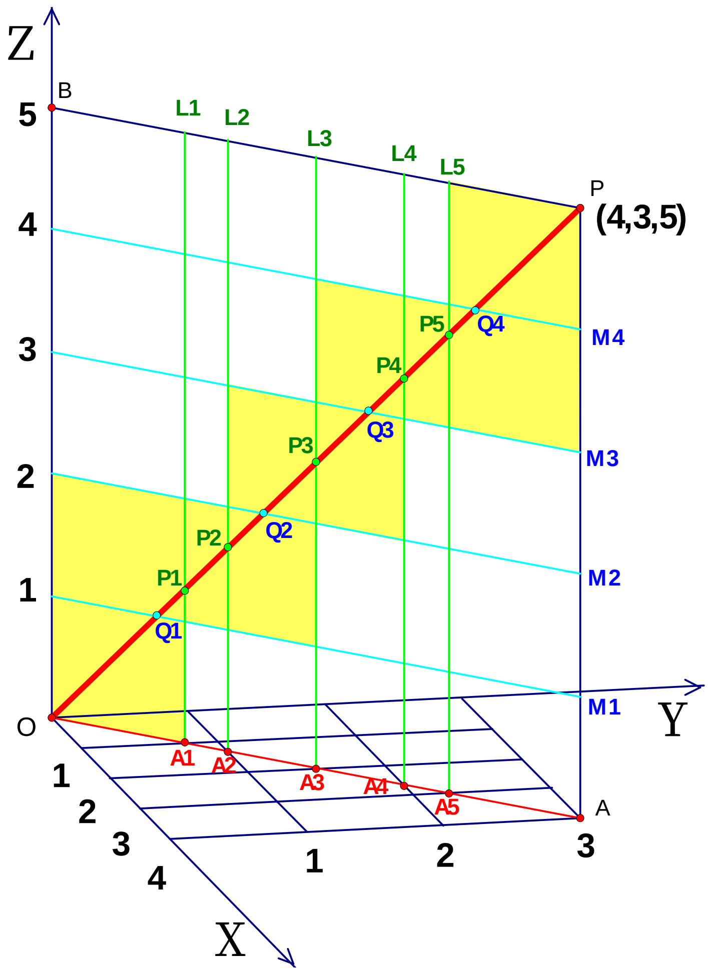


（圖一）



（圖二）

如（圖一），我們發現，對角線 $\overline{OP}$ 其實會落在 $y=\frac{3}{4}x$ 的平面上，因此我們只要觀察 $y=\frac{3}{4}x$ 平面上 $\overline{OP}$ 與各立方格的交集狀況(圖二)。如(圖三)，$\overline{OP}$ 在 xy 平面的投影就是 $\overline{OA}$，而 $\overline{OA}$ 是 xy 平面上 4x3 的方格圖之對角線。

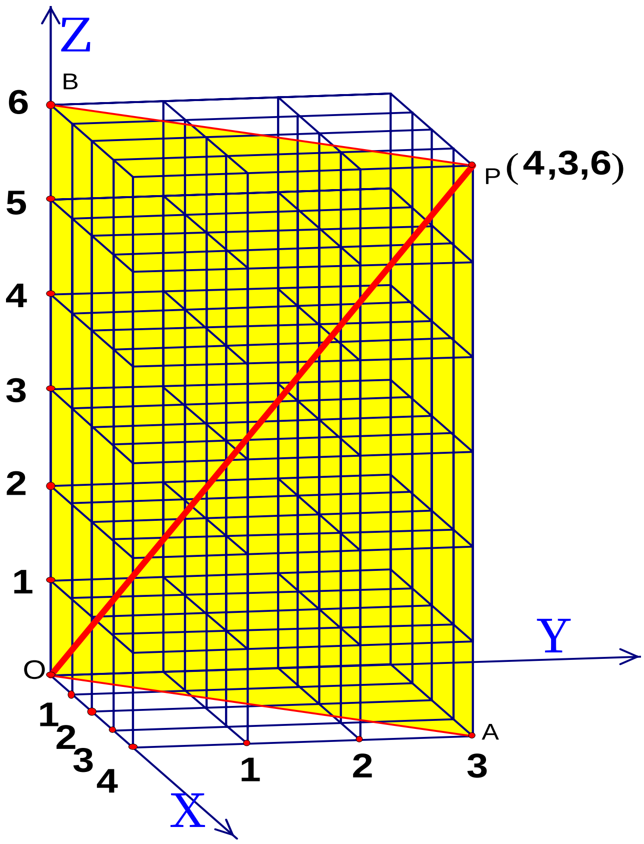


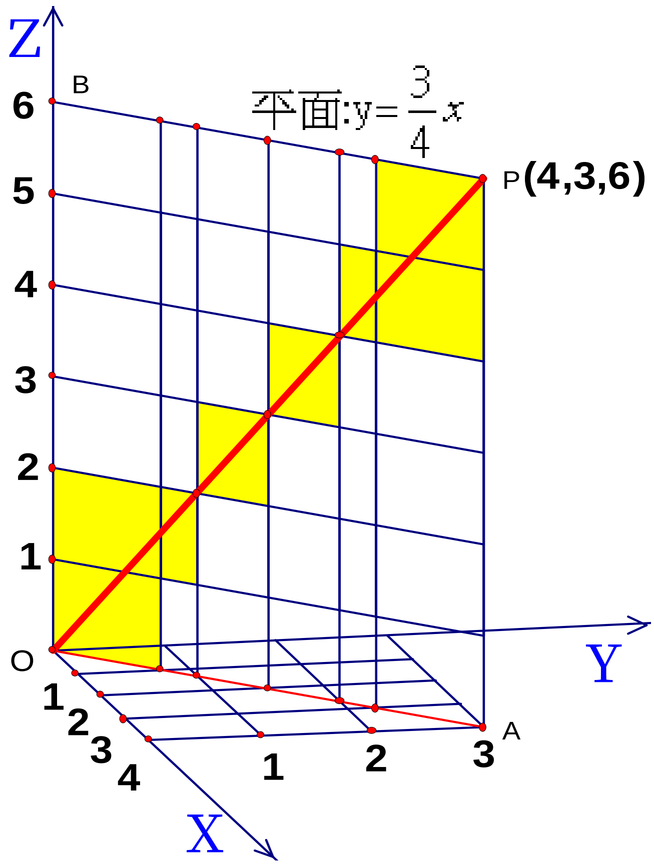
（圖三）

此外，$\overline{OA}$ 與 4x3 之方格圖的橫線與直線共交出 5 個點 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5，將 $\overline{OA}$ 分成 6 個線段，.過這五點作出垂直於 xy 平面的直線 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5，且平面 z=1,z=2,z=3,z=4 與平面 $y=\frac{3}{4}x$ 分別交出直線 M_1, M_2, M_3, M_4，則四邊形 OAPB 共被分割成 6x5 個大小不等的格子，而對角線 $\overline{OP}$ 與每條水平線($\overline{OA}$, M_1, M_2, M_3, M_4)交 5 個點(O, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)，與每條鉛直線($\overline{OB}$, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)交於 6 個點($O, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$)，這 11 個點除了 O 點重複外其餘均不重複，因此，<u>對角線 $\overline{OP}$ 在 OAPB 內部共通過 10 個格子，則 10 即為其所通過的立方格數。</u>
爲什麼呢？解釋如下：
因爲對角線 $\overline{OP}$ 其實就是四邊形 OAPB 之對角線，而 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 是在區分 $\overline{OP}$ 投影到 xy 平面時所落在的方格位置，比如 $\overline{OP_1}$ 在 xy 平面的投影爲 $\overline{OA_1}$，代表 $\overline{OP_1}$ 會落在第一行第一列的正上方的立方格，而 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 是在區分其所在層數，如 $\overline{OP_1}$ 又可分成 $\overline{OQ_1}, \overline{Q_1P_1}$ 兩線段，其中 $\overline{OQ_1}$ 代表其落在第一行第一列第一層的立方格中，而 $\overline{Q_1P_1}$ 代表落在第一行第一列第二層的立方格中，以此類推。故 $\overline{OP}$ 在四邊形 OAPB 每經過一個格子就代表在立體空間中經過一個小立方格。

我們很驚喜的發現，10 這個答案竟然與我們猜測的公式 4+3+5-(4,3)-(3,5)-(4,5)+(4,3,5)=10 不謀而合，爲了更謹慎，我們再找一個不互質的例子！

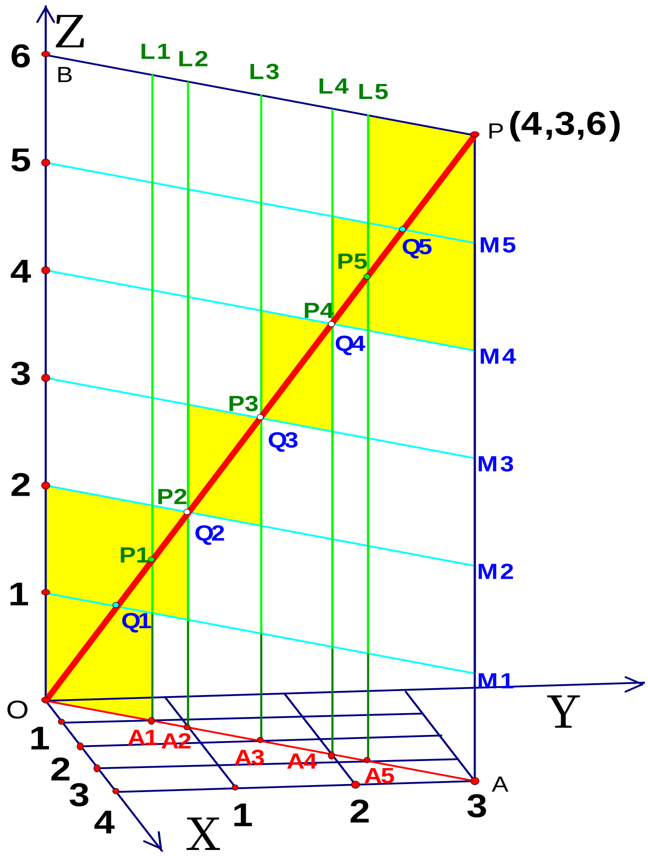
作 4x3x6 之立方格圖如下圖四：





（圖四）　　　　　　　　　　　　　　　（圖五）

如(圖四)，與 4x3x5 之情形相同，對角線 $\overline{OP}$ 落在 $y=\frac{3}{4}x$ 的平面上，因此我們只要觀察 $y=\frac{3}{4}x$ 平面上 $\overline{OP}$ 與各立方格的交集狀況(圖五)。



（圖六）

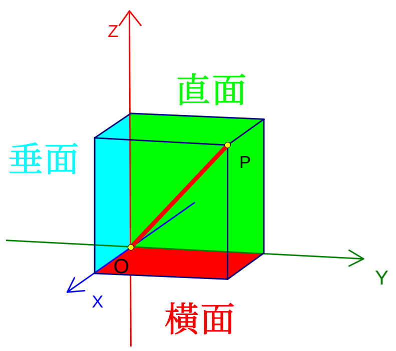
如上圖六，$\overline{OA}$ 與 4x3 之方格圖之橫線與直線交出 5 個點 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5，將 $\overline{OA}$ 分成 6 個線段，過這五點作出垂直於 xy 平面的直線 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5，平面 z=1,z=2,z=3,z=4,z=5 與平面 $y=\frac{3}{4}x$ 分別交出直線 M_1, M_2, M_3, M_4, M_5，則四邊形 OAPB 共被分割成 6x6 個格子，而對角線 $\overline{OP}$ 與每條水平線 ($\overline{OA}$, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)共交 6 個點($O, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$)，與每條鉛直線($\overline{OB}, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$)交於 6 個點($O, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$)，我們發現，這 12 個點有 4 個點重複($O, P_2 \equiv Q_2, P_3 \equiv Q_3, P_4 \equiv Q_4$)，因此，<u>對角線 $\overline{OP}$ 在 OAPB 內部共通過 8 個格子，則 8 即爲其所通過的立方格數</u>。

沒錯，帶入我們猜測的公式中，4+3+6-(4,3)-(3,6)-(6,4)+(4,3,6)=8。這讓我們更加堅定公式的正確性，且我們也認爲這個公式必定可以以排容原理的觀點來解釋。

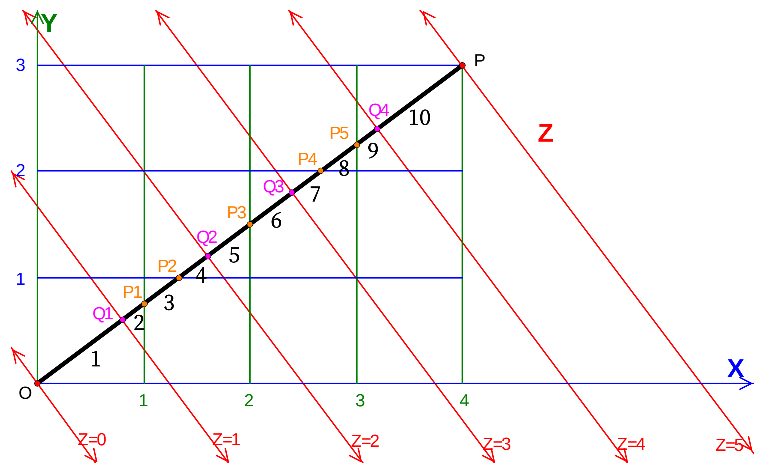
做完了以上這兩個例子，我們有了幾個重大發現：

一、以(圖六)爲例，在 $\overline{OP}$ 上，$O, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ 是用來區分層數，而 $O, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ 是用來區分投影到 xy 平面所在方格位置。即 $\overline{OP}$ 與每條水平線($\overline{OA}$, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)之交點($O, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$)代表 $\overline{OP}$ 與每個橫面(平行 xy 平面)的交點(共 6 個)，也就是說交點之上方立方格必會被 $\overline{OP}$ 通過；同理，$\overline{OP}$ 與每條鉛直線($\overline{OB}, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$)之交點($O, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$)代表 $\overline{OP}$ 與每個直面(平行於 yz 平面)與垂面(平行於 xz 平面)的交點，其中若交點投影至 xy 平面落在 xy 平面之鉛直線(平行 y 軸)上，則代表 $\overline{OP}$ 與直面的交點(O, P_1, P_3, P_5 共 4 個)，也就是說其前方立方格會被 $\overline{OP}$ 所通過；若交點投影至 xy 平面落在 xy 平面之水平線(平行 x 軸)上，則代表 $\overline{OP}$ 與垂面的交點(O, P_2, P_4 共 3 個)，也就是說其右方方格會被 $\overline{OP}$ 所通過。由排容原理知，n($\overline{OP}$ 通過之立方格)=n($\overline{OP}$ 與直面交點)+ n($\overline{OP}$ 與垂面交點)+n($\overline{OP}$ 與橫面交點)－n($\overline{OP}$ 與直面、垂面同時相交之交點)－n($\overline{OP}$ 與垂面、橫面同時相交之交點)－n($\overline{OP}$ 與橫面、直面同時相交之交點)+n($\overline{OP}$ 與直面、垂面、橫面同時相交之交點) =4+3+6-(4,3)-(3,6)-(6,4)+(4,3,6)=8。我們可以解釋了公式的由來。

二、**【橫截點投影法】**在不斷的觀察對角線上的點落在哪一個立方格的過程當中，我們發現一個很有趣的現象，大大的解決了在空間思考的困難。我們將整個立方格圖之橫面、直面、垂面及其交集狀況全部對應到平面上，得到(圖八)，將之稱爲 <u>*mxnxl*($m, n, l \in N$) *的立方格圖之平面對應圖*</u>。(圖中藍線爲垂面對應線、綠線爲直面對應線、紅線爲橫面對應線，其中橫面對應線與對角線交點 O, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, P 爲橫截點投影點。)



(圖七)



(圖八)

如上圖八，因爲對角線會被所有的對應線分割成 10 小段，事實上每一小段均代表其落在的立方格方位，如圖中$\overline{OQ_1}$代表著其落在第一行第一列第一層的立方格中，$\overline{Q_1P_1}$代表其落在第一行第一列第二層的立方格中以此類推。因此，10 便是對角線$\overline{OP}$所經過的立方格數。此種將立體問題轉化成平面模式來求解之方法，我們稱之爲橫截點投影法。

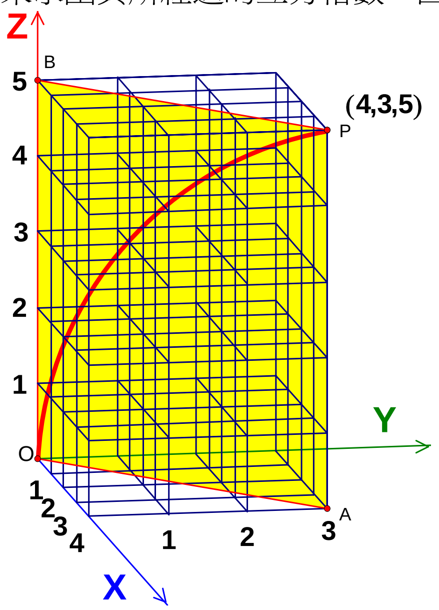
定理七：空間中 m×n×l($m,n,l \in N$)的立方格圖中，對角線所經過的立方格數爲 m+n+l-(m,n)-(n,l)-(l,m)+(m,n,l)個。

【證明】n(對角線通過之方塊)=n(對角線與直面交點)+ n(對角線與垂面交點)+n(對角線與橫面交點)

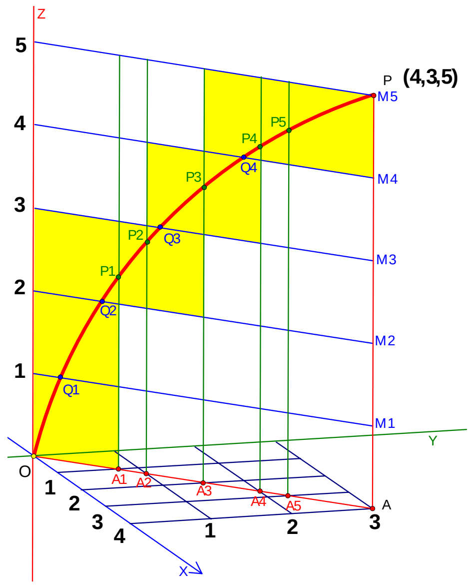
－n(對角線與直面、垂面同時相交之交點)
－n(對角線與垂面、橫面同時相交之交點)
－n(對角線與橫面、直面同時相交之交點)
+n(對角線與直面、垂面、橫面同時相交之交點)
=m+n+l-(m,n)-(n,l)-(l,m)+(m,n,l)

<u>注意</u>:直面不含 x=m，垂面不含 y=n，橫面不含 z=l。

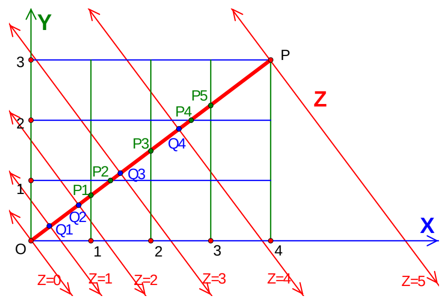
事實上，上述討論的過程與原理也適用於解決空間上立方格圖中任意曲線所經過的方格數。舉例來說，我們定義一個向量值函數(Vector-Valued Function) $r(t)=(4t)i+(3t)j+(10t-5t^2)k \quad 0 \le t \le 1$ 其圖形軌跡如(圖九)，顯然的，r(t)在 xy 平面的投影仍爲$\overline{OA}$，在(圖十)中，曲線 r(t)共經過 10 個格子，則表示 r(t)在 4×3×5 的立方格圖中共經過 10 個立方格。我們將此問題轉化成對應平面圖的形式來觀察，如圖(十一)，P_1代表 r($\frac{1}{4}$)之投影點，P_2代表 r($\frac{1}{3}$)之投影點，P_3代表 r($\frac{1}{2}$)之投影點，P_4代表 r($\frac{2}{3}$)之投影點，P_5代表 r($\frac{3}{4}$)之投影點。要決定區分層數之$Q_1 \sim Q_4$位置，即求$10t-5t^2=k$ $(k=1,2,3,4)$之正數解t_k，顯然$P_1 \sim P_5$與$Q_1 \sim Q_4$這九個分點完全不會重合，因此$\overline{OP}$被分割成 10 個小線段，一對一至曲線 r(t)所經過的每個立方格。以排容原理的觀點來看，亦即經過 4+3+5-(4,3)-(3,5)-(5,4)+(4,3,5)=10 個立方格。而對於任意一曲線 f(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k，可以利用此原理來求出其所經過的立方格數，因時間有限，在此不予討論。



圖九

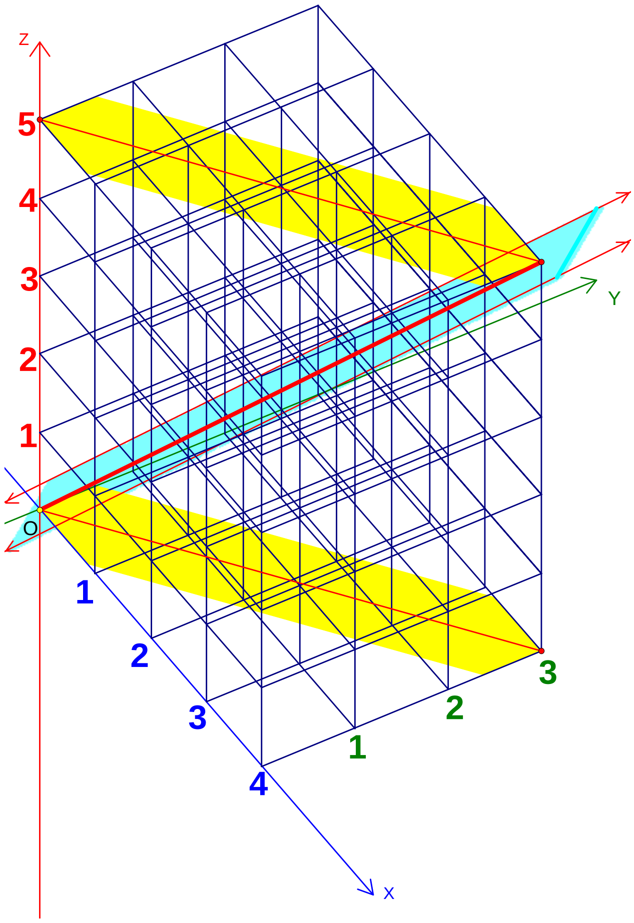


圖十

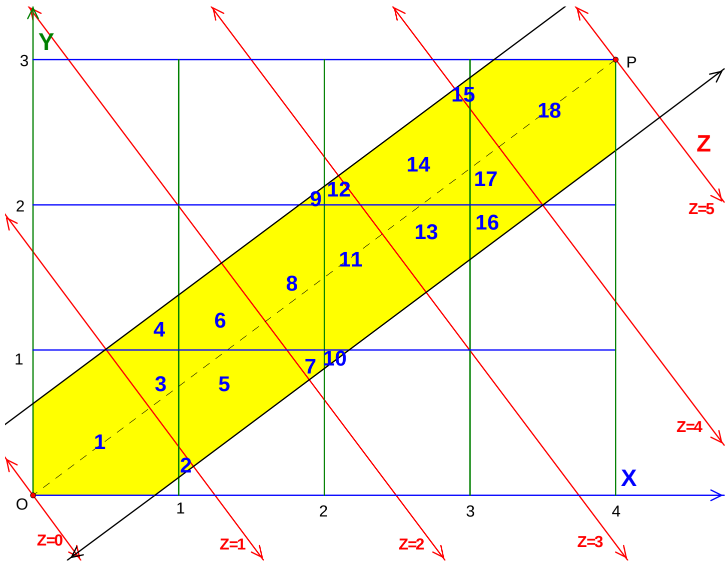


圖十一

解決了空間中對角線的問題，我們更試圖將直線的寬度加寬成 2r，想知道有寬度的對角線所經過的立方格數是多少呢? (如圖十二，我們令此有寬度對角線所在平面垂直於截面 OAPB)比如，4×3×5 的立方格圖中，寬度爲 1 的對角線會通過幾個立方格呢?我們發現，利用我剛剛所找出的對應平面圖竟然讓我馬上找出了答案!【**橫截線投影法**】



(圖十二)



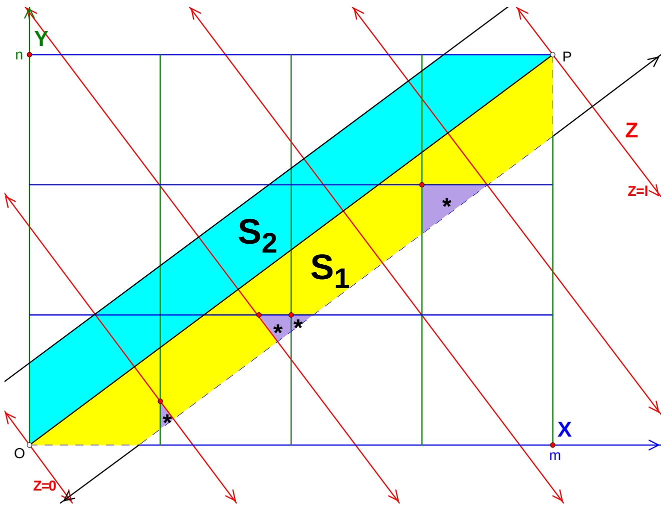
(圖十三)

如圖十三，其爲 4×3×5 的立方格圖之對應平面圖。黃色區域內共被分割成 18 個區域，每個區域都一對一至其經過的不同立方格，我們將其對應關係整理成以下表格：

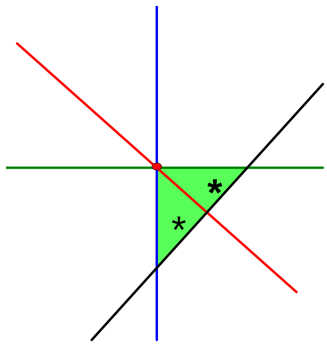
區域	對應立方格方位 (行、列、層)	區域	對應立方格方位 (行、列、層)	區域	對應立方格方位 (行、列、層)
1	(1,1,1)	7	(2,1,3)	13	(3,2,4)
2	(2,1,1)	8	(2,2,3)	14	(3,3,4)
3	(1,1,2)	9	(3,1,3)	15	(4,2,4)
4	(1,2,2)	10	(3,2,3)	16	(4,3,4)
5	(2,1,2)	11	(2,3,3)	17	(3,3,5)
6	(2,2,2)	12	(3,3,3)	18	(4,3,5)

因此 4×3×5 的立方格圖中，寬度爲 1 的對角線會通過 18 個立方格。當然，如果我們可以把它寫出一個漂亮的一般式就更完美了。

定理八：空間中 m×n×l($m,n,l \in N$)的立方格圖中，對角線寬度爲 2r，則所經過的立方格數爲 m+n+l-(m,n)-(n,l)-(l,m)+(m,n,l)+2P+2Q，其中 P 爲其對應平面圖上(下圖十四)落在 S_1 區域中(含內部與不含端點之對角線上)橫面、直面、垂面對應線之交點個數，Q 爲其對應面圖上落在 S_1 區域中(含內部與不含端點之對角線上)橫面、直面、垂面對應線三線共點之個數。特別的是，若 $l \nmid \dfrac{k(m^2+n^2)}{(m,n)}, \forall k \in \{1,2,\cdots,l-1\}$ 時，則 Q=0。



(圖十四)



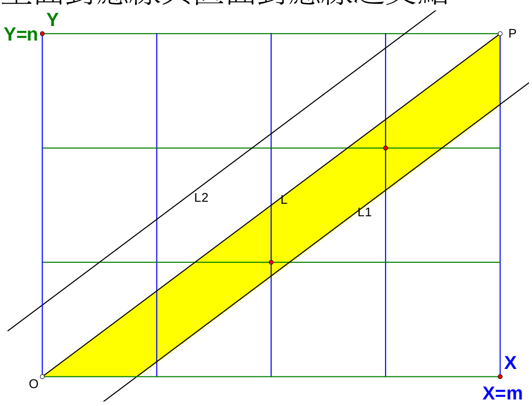
（圖十五）

【證明】由之前討論知，m×n×l 的立方格圖之對應平面圖中(如圖十四)，圖色範圍中每個由橫面、直面、垂面對應線所分割成的區域均一對一至空間中經過之不同的立方格。且由【定理七】知，平面對應圖之對角線共經過 m+n+l-(m,n)-(n,l)-(l,m)+(m,n,l)個區域，由於 S_1、S_2 為全等區域，因此我們只要討論在 S_1 區域多的小區域數再乘以 2 倍即可。顯然的，當對角線逐漸往下平移的過程中，每通過一個交點就會多切割出一個區域(若此交點為橫面、直面、垂面對應線之共交點，則通過此點會增加兩個區域)(如圖十五)，因此 S_1 區域的交點個數加上三線共點之個數再乘以 2 倍便是其增加的區域數。

【求法】至於 P 值與 Q 值該如何尋找呢？對於較小 m,n,l 值之立方格圖，我們發現只要畫出其對應平面圖，就可很快的數出答案。因此，以下的方法，是針對大數值 m,n,l 來用的。

我們觀察到，S_1 區域之交點可分四類來討論：

一、垂面對應線與直面對應線之交點

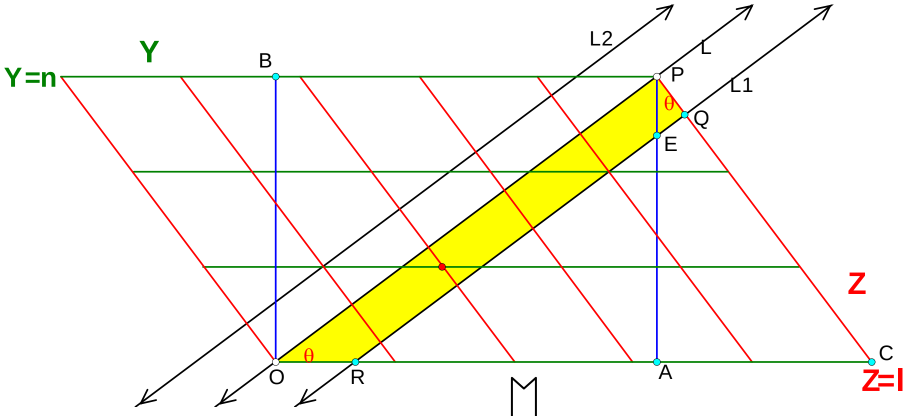


（圖十六）

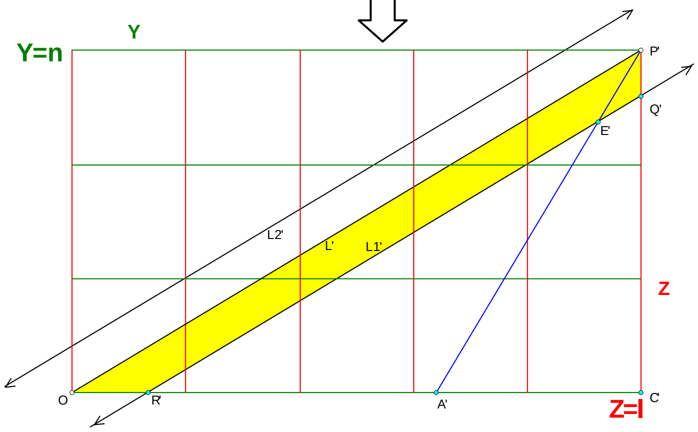
此種情形為【定理六】之情形。若(m,n)= d_1，則當 $k_{d_1} < \dfrac{r\sqrt{m^2+n^2}}{d_1} \le k_{d_1}+1$，$k_{d_1} \in N \cup \{0\}$ 時，

其交點數為 $\alpha = d_1(k_{d_1}+1) - (\left[\dfrac{d_1 k_{d_1}}{m}\right] + 1 + \sum_{i=0}^{\left[\frac{d_1 k_{d_1}}{m}\right]} \left[\dfrac{d_1 k_{d_1} - im}{n}\right])$ 個。

二、垂面對應線與橫面對應線之交點



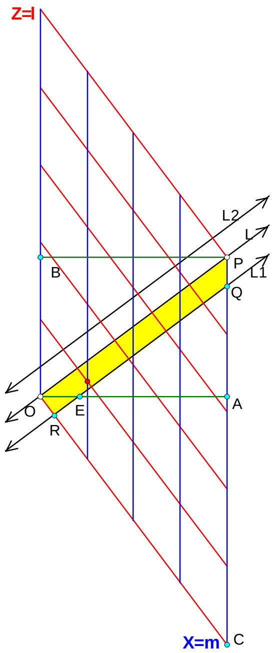
(圖十七-1)



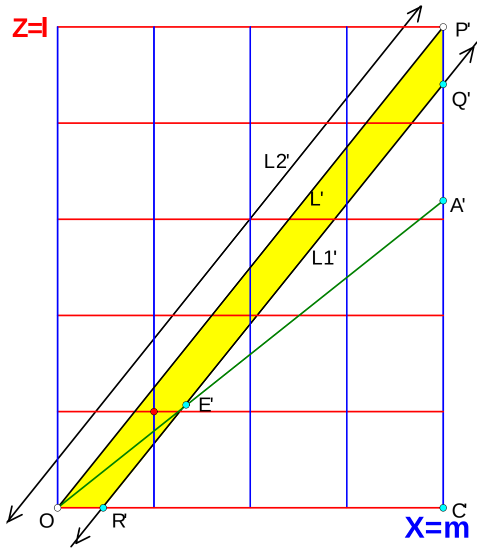
(圖十七-2)

如圖十七-1，為一由 l×n 個平行四邊形所組成的格子圖，經 $(x,y)\to(x+\frac{n}{m}y,y)$ 之推移變換後，再經由 $(x,y)\to(\frac{ml}{m^2+n^2}x,y)$ 之伸縮變換後變為一 l×n 的方格圖(圖十七-2)。因此對角線 L: $y=\frac{n}{m}x$ 變換至 $L':y=\frac{n}{l}x$，邊界 $\overline{PA}$:x=m 變換至 $\overline{P'A'}:y=\frac{(m^2+n^2)}{nl}x-\frac{m^2}{n}$，直線 $L_1:y=\frac{n}{m}x-\frac{r\sqrt{m^2+n^2}}{m}$ 變換至 $L_1':y=\frac{n}{l}x-\frac{mr}{\sqrt{m^2+n^2}}$，也就是向下平移量為 $\frac{mr}{\sqrt{m^2+n^2}}$。由【定理六】知，若(l,n)=$d_2$，則當 $k_{d_2}<\frac{lmr}{d_2\sqrt{m^2+n^2}}\le k_{d_2}+1$，$k_{d_2}\in N\cup\{0\}$時，四邊形 OPQR 區域中(含內部及不含端點之 $\overline{OP}$ 上)交點數為 $\beta=d_2(k_{d_2}+1)-(\left[\frac{d_2k_{d_2}}{l}\right]+1+\sum_{i=0}^{\left[\frac{d_2k_{d_2}}{l}\right]}\left[\frac{d_2k_{d_2}-il}{n}\right])$ 個。但 $\triangle PQE$ 區域已經超出原始 m×n 之方格圖範圍，其中的交點(包含內部及不含 P、E 之 $\overline{PE}$ 上)必須扣除(即 $\triangle P'Q'E'$ 區域中之格子點)。由圖十四-2，因為 $\overline{P'A'}$ 與 $x=j\ (j=1,2,\cdots,l-1)$ 之交點為 $A_j(j,\frac{m^2+n^2}{nl}j-\frac{m^2}{n})$，$L_1'$ 與 x=j($j=1,2,\cdots,l-1$)之交點為 $B_j(j,\frac{n}{l}j-\frac{mr}{\sqrt{m^2+n^2}})$，令 $P_j=\frac{m^2+n^2}{nl}j-\frac{m^2}{n},Q_j=\frac{n}{l}j-\frac{mr}{\sqrt{m^2+n^2}}$，求滿足 $P_j\ge Q_j$ 之最小正整數解，即 $\frac{m^2+n^2}{nl}j-\frac{m^2}{n}\ge\frac{n}{l}j-\frac{mr}{\sqrt{m^2+n^2}}\Rightarrow j\ge l-\frac{rnl}{m\sqrt{m^2+n^2}}$，取 j=$\left\lceil l-\frac{rnl}{m\sqrt{m^2+n^2}}\right\rceil$，則 $\triangle P'Q'E'$ 區域中之格子點個數為 $\beta'=\sum_{j=\left\lceil l-\frac{rnl}{m\sqrt{m^2+n^2}}\right\rceil}^{l-1}(\left[P_j\right]-\left[Q_j\right])$。

二、直面對應線與橫面對應線之交點



(圖十八-1)



(圖十八-2)

如圖十八-1，為一由 m×l 個平行四邊形所組成的格子圖，經 $(x,y)\to(x,y+\frac{m}{n}x)$ 之推移變換後，再經由 $(x,y)\to(x,\frac{nl}{m^2+n^2}y)$ 之伸縮變換後變為一 m×l 的方格圖(圖十八-2)。因此對角線 L: $y=\frac{n}{m}x$ 變換至 $L':y=\frac{l}{m}x$，邊界 $\overline{OA}:y=0$ 變換至 $\overline{O'A'}:y=\frac{lm}{m^2+n^2}x$，直線 $L_1:y=\frac{n}{m}x-\frac{r\sqrt{m^2+n^2}}{m}$ 變換至 $L_1':y=\frac{l}{m}x-\frac{rnl}{m\sqrt{m^2+n^2}}$，也就是向下平移量為 $\frac{rnl}{m\sqrt{m^2+n^2}}$。由【定理六】的結論知，若(m,l)=$d_3$，則當 $k_{d_3}<\frac{rnl}{d_3\sqrt{m^2+n^2}}\le k_{d_3}+1$，$k_{d_3}\in N\cup\{0\}$ 時，四邊形 OPQR 區域中(含內部及不包含端點之 $\overline{OP}$ 上)交點數為 $\gamma=d_3(k_{d_3}+1)-(\left[\frac{d_3k_{d_3}}{m}\right]+1+\sum_{i=0}^{\left[\frac{d_3k_{d_3}}{m}\right]}\left[\frac{d_3k_{d_3}-im}{l}\right])$ 個。但是 $\triangle ORE$ 區域已經超出原始 m×n 之方格圖範圍，其中的交點(包含內部及不含 O、E 之 $\overline{OE}$ 上)必須扣除(即 $\triangle O'R'E'$ 區域中之格子點)。因為 $\overline{O'A'}$ 與 y=j($j=1,2,\cdots,l-1$)之交點為 $C_j(\frac{m^2+n^2}{lm}j,j)$，$L_1'$ 與 y=j($j=1,2,\cdots,l-1$)之交點為 $D_j(\frac{m}{l}j+\frac{rn}{\sqrt{m^2+n^2}},j)$，令 $S_j=\frac{m^2+n^2}{lm}j$，$T_j=\frac{m}{l}j+\frac{rn}{\sqrt{m^2+n^2}}$，求滿足 $T_j\ge S_j$ 之最大整數解，即 $\frac{m}{l}j+\frac{rn}{\sqrt{m^2+n^2}}\ge\frac{m^2+n^2}{lm}j\Rightarrow j\le\frac{rlm}{n\sqrt{m^2+n^2}}$，取 $j=\left[\frac{rlm}{n\sqrt{m^2+n^2}}\right]$，則 $\triangle O'R'E'$ 區域中之格子點個數為 $\gamma'=\sum_{j=1}^{\left[\frac{rlm}{n\sqrt{m^2+n^2}}\right]}(\lceil T_j\rceil-\lceil S_j\rceil)$。

四、垂面對應線、直面對應線與橫面對應線三線之共點

假設此共點爲$(x_0, y_0), x_0, y_0 \in N$，則此點必爲滿足$\begin{cases} 0 < x < m \\ 0 < y < n \\ 0 \le nx - my < r\sqrt{m^2+n^2} \end{cases}$且滿足

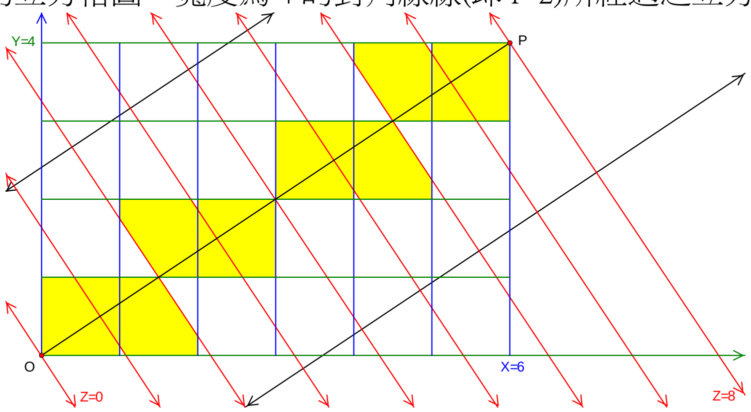
$y = -\dfrac{m}{n}x + \dfrac{k(m^2+n^2)}{\ln}$對於某個 $k \in \{1, 2, \cdots, l-1\}$的整數解，我們令共$\delta$個解。值得注意的是，$y = -\dfrac{m}{n}x + \dfrac{k(m^2+n^2)}{\ln} \Rightarrow mx + ny = \dfrac{k(m^2+n^2)}{l}$，若方程式有整數解，則

$(m,n) \left| \dfrac{k(m^2+n^2)}{l} \right. \Rightarrow l \left| \dfrac{k(m^2+n^2)}{(m,n)} \right.$，因此，若$l \nmid \dfrac{k(m^2+n^2)}{(m,n)}, \forall k \in \{1, 2, \cdots, l-1\}$時，Q=0。

由一～四知，P=$\alpha + (\beta - \beta') + (\gamma - \gamma') - 2\delta$，Q=$\delta$。因此空間中 m×n×l$(m, n, l \in N)$的立方格圖中，對角線寬度爲 2r，則其所經過的立方格數爲

$$\boxed{m + n + l - (m,n) - (n,l) - (l,m) + (m,n,l) + 2(\alpha + \beta + \gamma - \beta' - \gamma' - \delta)}$$

例如：求 6×4×8 的立方格圖，寬度爲 4 的對角線線(即 r=2)所經過之立方格數。



(圖十九)

1.∵ (6,4)=2 且$\dfrac{2\sqrt{6^2+4^2}}{2} \doteq 7.21$，$\therefore k_{d_1} = 7 \Rightarrow \alpha = 2(7+1) - \left(\left\lceil \dfrac{2\times 7}{6} \right\rceil + 1 + \sum_{i=0}^{\left\lceil \frac{2\times 7}{6} \right\rceil} \left\lceil \dfrac{2\times 7 - 6i}{4} \right\rceil\right)$=8

2.∵ (4,8)=4 且$\dfrac{8\times 6\times 2}{4\sqrt{6^2+4^2}} \doteq 3.33$，$\therefore k_{d_2} = 3 \Rightarrow \beta = 4(3+1) - \left(\left\lceil \dfrac{4\times 3}{8} \right\rceil + 1 + \sum_{i=0}^{\left\lceil \frac{4\times 3}{8} \right\rceil} \left\lceil \dfrac{4\times 3 - 8i}{4} \right\rceil\right)$=10

且$\beta' = \sum_{j=\left\lceil 8 - \frac{2\times 4\times 8}{6\sqrt{52}} \right\rceil}^{7} \left(\left\lceil \dfrac{13}{8}j - 9 \right\rceil - \left\lceil \dfrac{1}{2}j - \dfrac{6}{\sqrt{13}} \right\rceil\right) = 1$

3.∵ (6,8)=2 且$\dfrac{2\times 4\times 8}{2\sqrt{6^2+4^2}} \doteq 4.44$，$\therefore k_{d_3} = 4 \Rightarrow \gamma = 2(4+1) - \left(\left\lceil \dfrac{2\times 4}{6} \right\rceil + 1 + \sum_{i=0}^{\left\lceil \frac{2\times 4}{6} \right\rceil} \left\lceil \dfrac{2\times 4 - 6i}{8} \right\rceil\right)$=7

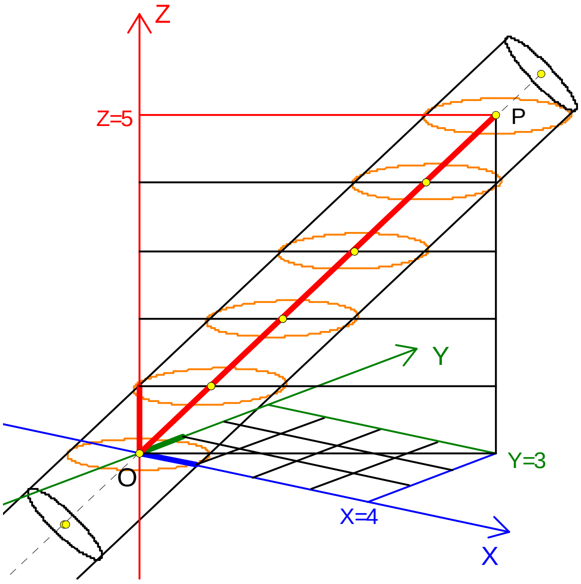
且$\gamma' = \sum_{j=1}^{\left\lceil \frac{2\times 8\times 6}{4\sqrt{6^2+4^2}} \right\rceil} \left(\left\lceil \dfrac{3}{4}j + \dfrac{4}{\sqrt{13}} \right\rceil - \left\lceil \dfrac{13}{12}j \right\rceil\right) = 0$

4.求滿足$\begin{cases}0<x<6\\0<y<4\\0\le 4x-6y<2\sqrt{6^2+4^2}\end{cases}$ (*)且滿足 $y=-\dfrac{6}{4}x+\dfrac{k(6^2+4^{2})}{8\times4}=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{8}k$,k=1,2,⋯,7 的整數解個數。$\because 3x+2y=\dfrac{13k}{4}\in N\Rightarrow k=4$，$\therefore$ 滿足 3x+2y=13 且符合(*)的整數解只有(3,2)一組，即$\delta=1$。

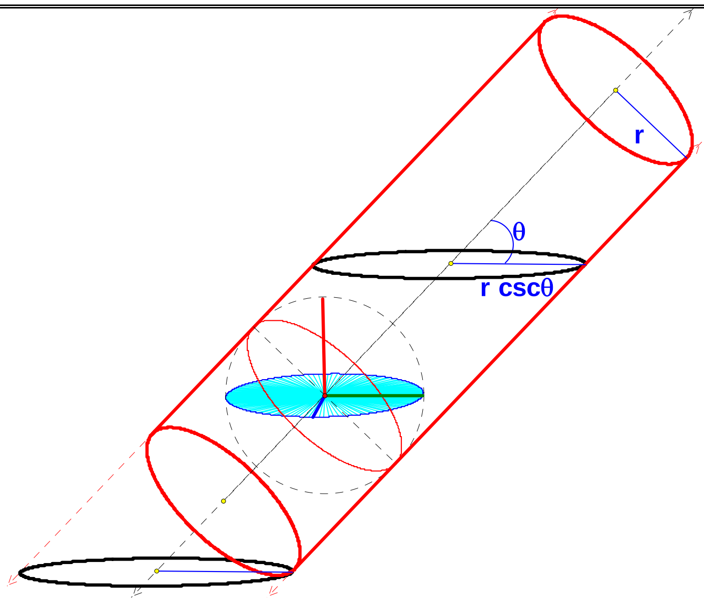
由 1~4 知，6x4x8 的立方格圖中，寬度為 4 的對角線(即 r=2)經過的立方格數為 6+4+8-(6,4)-(4,8)-(8,6)+(6,4,8)+2(8+10+7-1-0-1)=58 個。

最後，我們要來探討空間中 mxnxl($m,n,l\in N$)的立方格圖中，球體半徑 r，球心在對角線移動所經過之立方格數。我們發現，要整理出如同前面定理的漂亮公式似乎有些困難度，然而，我們卻可利用之前所研究出的「對應平面圖」所衍生出的「橫截面投影法」來解決已知 m、n、l 值之立方格圖。

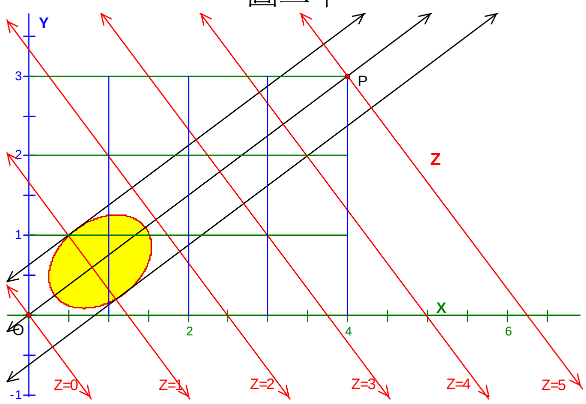
【橫截面投影法】: 空間中 mxnxl($m,n,l\in N$)的立方格圖中，球體半徑 r，球心在對角線移動所掃出的軌跡為一軸傾斜角度θ之圓柱(其中 $\tan\theta=\dfrac{l}{\sqrt{m^2+n^2}}$)，其與 z=k(k∈R)的截面為一橢圓，將橢圓投影至 mxnxl 的立方格圖之平面對應圖上(xy 平面上)，橢圓中心投影位置代表其層數，而橢圓內部之投影掃過之方格為球體掃過之立方格之投影位置，則可以此求出球心在各層移動時，球體所經過之立方格數以及確實位置。



圖二十



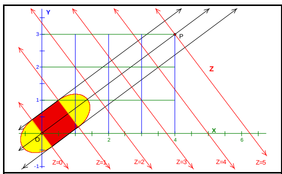
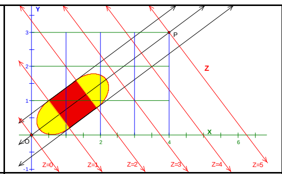
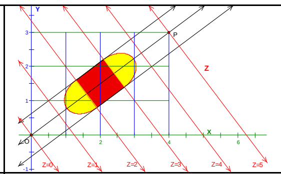
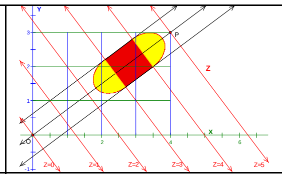
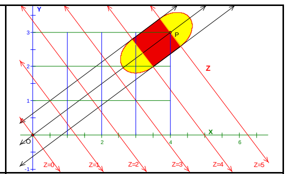
圖二十一



圖二十二

例如：4x3x5 的立方格圖，球體半徑為$\dfrac{1}{2}$:

如圖二十二，$\angle PAB = 45°$，因此截面橢圓長軸長 $2a=\sqrt{2}$，短軸長 2b=1，故橢圓橫截面在對應平面圖上之方程式爲 $2(\frac{4x+3y}{5}-4t)^2+4(\frac{-3x+4y}{5}-3t)^2=1, 0\le t\le 1$。($2(x-4t)^2+4(y-3t)^2=1$ 逆時針旋轉 θ，即經 $(x,y)\to(\cos\theta x-\sin\theta y, \sin\theta x+\cos\theta y)$ 之旋轉變換後而得，其中 $\cos\theta=\frac{4}{5}, \sin\theta=\frac{3}{5}$)，將其利用 GSP 繪出，以橢圓中心點爲動點，令動點在對角線上移動，則我們可將其在每層所經過之立方格方位一一列出於下表:

				
第一層	第二層	第三層	第四層	第五層

第一層所在立方格(行、列、層)	第二層所在立方格(行、列、層)	第三層所在立方格(行、列、層)	第四層所在立方格(行、列、層)	第五層所在立方格(行、列、層)
(1,1,1)	(1,1,2)	(1,1,3)	(2,2,4)	(3,2,5)
(1,2,1)	(1,2,2)	(1,2,3)	(2,3,4)	(3,3,5)
(2,1,1)	(2,1,2)	(2,1,3)	(3,2,4)	(4,2,5)
(2,2,1)	(2,2,2)	(2,2,3)	(3,3,4)	(4,3,5)
	(3,1,2)	(2,3,3)	(4,2,4)	
	(3,2,2)	(3,1,3)	(4,3,4)	
		(3,2,3)		
		(3,3,3)		
		(4,2,3)		
		(4,3,3)		

由上表知:4×3×5 的立方格圖中，球體半徑 $\frac{1}{2}$，球心在對角線移動所經過之立方格數爲 4+6+10+6+4=30 個。

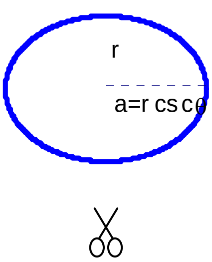
【製作快速解題工具】

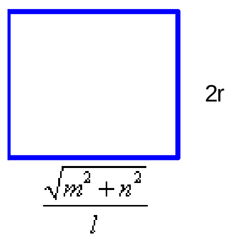
求空間中 m×n×l($m,n,l\in N$)的立方格圖中，球體半徑 r，球心在對角線移動所經過之立方格數。步驟如下:

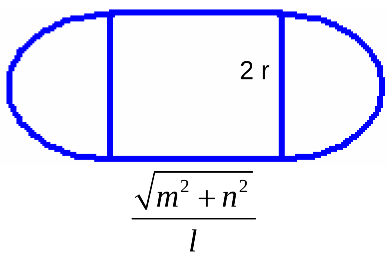
一、繪製出 m×n×l 的立方格圖之對應平面圖。

二、求出橫截面橢圓長軸長 $2a=2r\csc\theta$，短軸長 2b=2r，其中 $\tan\theta=\frac{l}{\sqrt{m^2+n^2}}$。

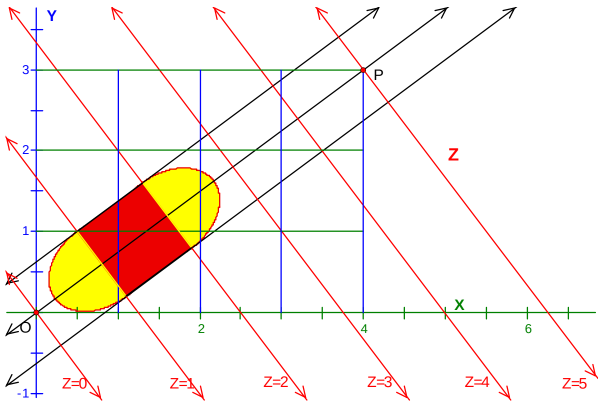
三、繪出方程式爲 $\frac{x^2}{r^2\csc^2\theta}+\frac{y^2}{r^2}=1$ 之橢圓，剪下切半，製成如下圖之小圖片:







四、將步驟三所製成之小圖片中間矩形重合於對應平面圖中各層之矩形，則小圖片於各層所覆蓋到之方格數和即爲所求。



<u>注意</u>：$1 \sim l$ 層中，第 k 層與第 l-k 層所經過之方格數相等，因此只需求出 1～$\left[\frac{l}{2}\right]$層即可。除此之外，若(m,n,l)=d, $d \neq 1$，則可將對應平面圖分割成 d 個$\frac{m}{d} \times \frac{n}{d} \times \frac{l}{d}$之情形來討論。以這兩個性質，可更簡化解題的過程。

伍、研究結果

一、在 m×n($m,n \in R^+$)的格子圖中，(包含 $m,n \in N$ 與 $m,n \in Q^+$ 之情形)

(一) 若$\frac{n}{m} \notin Q$時，對角線所經過的格子數為$\lceil m \rceil + \lceil n \rceil - 1$。

(二) 若$\frac{n}{m} \in Q$，即$\frac{n}{m} = \frac{q}{p}$，其中 $p,q \in N$ 且 p,q 互質，

(1)當 $p \geq m$ 時，對角線所經過的格子數為$\lceil m \rceil + \lceil n \rceil - 1$個；特別的是，當 p=m 時，即 $m,n \in N$ 且(m,n)=1，則對角線所經過的格子數為 m+n-1 個。

(2)當 $p < m$ 且 $p \nmid m$ 時，對角線所經過的格子數為$\lceil m \rceil + \lceil n \rceil - \left[\frac{m}{p}\right] - 1$個。

(3)當 p<m 且 $p|m$，即 $m,n \in N$ 的情形，則對角線所經過的格子數為 m+n-(m,n)。

二、m×n($m,n \in N, (m,n) = d$)的方格圖中，對角線寬度為 2r($r \leq \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$)，若

$k_d < \frac{r\sqrt{m^2+n^2}}{d} \leq k_d + 1$，$k_d \in N \cup \{0\}$，則對角線所經過的方格數為

m+n-d+$2d(k_d+1)$-2($\left[\frac{dk_d}{m}\right] + 1 + \sum_{l=0}^{\left[\frac{dk_d}{m}\right]} \left[\frac{dk_d - lm}{n}\right]$)。

三、空間中 m×n×l($m,n,l \in N$)的立方格圖中，對角線所經過的立方格數為 m+n+l-(m,n)-(n,l)-(l,m)+(m,n,l)。

四、空間中 m×n×l($m,n,l \in N$)的立方格圖中，對角線寬度為 2r，則所經過的立方格數為 m+n+l-(m,n)-(n,l)-(l,m)+(m,n,l)+2P+2Q，其中 P 為其對應平面圖上(圖十四)落在 S_1 區域中(含內部與不含端點之對角線上)橫面、直面、垂面對應線之交點個數，Q 為其對應面圖上落在 S_1 區域中(含內部與不含端點之對角線上)橫面、直面、垂面對應線三線共點之個數。特

別的是，若$l \nmid \dfrac{k(m^2+n^2)}{(m,n)}, \forall k \in \{1,2,\cdots,l-1\}$時，則 Q=0。

五、利用【橫截面投影法】之原理以及特製解題工具求出空間中 m×n×l($m,n,l \in N$)的立方格圖中，球體半徑 r，球心在對角線移動所經過之立方格數。

陸、討論與結論

關於這次研究的主題，除了很完整的推導出平面情形的公式，並利用將立體空間問題轉化成平面模式的方式，成功的推廣至三維空間之情形，除此之外，更由對角直線延伸出任意曲線的解題原理。然而，還有許多推廣的空間值得我們繼續研究，比如，平面上的方格圖中，若將有寬度的對角線改成有寬度的曲線，其掃過之格數是否可以找到解題方法或是整理出公式呢?更進一步，空間中的立方格圖中，若球體球心移動的軌跡非對角線而是任意曲線時，是否仍能找出解題方法或是整理出公式呢?由於時間有限，我期待將來能夠繼續完成它。

在這次的研究中，我學到如何思考、切入問題並運用嚴謹的證明推出公式，此外，我還學到如何用 GSP 幾何軟體繪製我們所需要的幾何圖，學會這項軟體，不僅幫助我更清楚地看出問題的答案，我也能運用這項軟體，解決生活上、課業上一些有關數學、物理的問題，真是受益良多。

柒、參考資料

一、數學思考,九章出版社,台北市立建國高中 49 屆 314 班全體同學合譯
John Mason with Leone Burton & Kave Stacey 原著
二、高級中學數學課本第一冊第二章　數與座標系　南一出版社
三、高級中學數學課本第三冊第二章　空間中的直線與平面　南一出版社
四、高級中學數學課本第三冊第四章　圓與球面　南一出版社
五、高級中學數學課本第四冊第一章　圓錐曲線　南一出版社
六、高級中學數學課本數學甲上冊第四章　二階方陣所對應的平面變換　南一出版社
七、國立鳳山高中編印"當直線碰到格子"—第四十一屆校內科展作品
八、David L.Pagni (1991December),"Counting Squares",Mathematics Teacher　P754-758
九、John Holding(1991) "A Resource Book for Teachers of　Mathematics" Cambridge University　Press
十、阿壽工坊：http://140.111.115.8/longlife/.