第五屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA5-167

作品名稱：史坦納樹之研究

姓名：鄒宗辰

關鍵字：最佳化、取代點、取代路徑

壹、研究動機：

閒暇時翻閱《打開魔數箱》(Martin Gandner 著) 一書，其中「史坦納樹」吸引我們的注意力。史坦納樹是尋找已知各點間最短路徑的最佳化問題，我們可發現這些點中加入若干規則性的點，再加以連接可得最短路徑，而這些線段會構成一個樹狀的網路，故得名。舉例來說，三角形的史坦納樹是在三角形內部或邊上加入一點，而此點即有名的費馬點，但定義上有很大的不同，費馬點是圖形中加入一點，而史坦納點則可加入不只一點，直到其路徑和最短，這個最佳化問題非常吸引人，所以決定作更深入的研究。

貳、研究目的：

一. 研究平面上已知有規律點的最短連接路徑
二. 平面上不規則圖形的探討
三. 探討空間中是否存在史坦納樹
四. 尋找平面上史坦納樹規律
五. 研究平面上的直角史坦納樹
六. 研究立體空間中的史坦納樹

參、研究過程：

本研究為連接已知點來求取其最短路徑和，並尋找連接之方法及規律。我們將欲連接的各點當成一多邊形之各頂點，以凸多邊形為準。先從正三角形、任意三角形、正方形、長方形、正五邊、正六邊來做分析。再推廣至任意四邊形、任意五邊形、任意六邊形。最後合理的提出七邊形至 n 邊形史坦納樹之猜測。除了平面上的圖形，立體亦是，我們先由正四面體和六面體著手。另外僅由鉛直及水平線所連結而成的垂直史坦納樹，我們也做了部分的探討。

除了三角形、四邊形和五邊形有證明，可稱為史坦納樹以外，尚缺乏其他部分有力之證明，故在尋找的時候，以最接近史坦納樹原本定義之情況，做圖形的連接，找出目前已知的最短路徑情況，稱為取代路徑，而其未證明圖形加入的點即稱為取代點。

一、 平面

(一) 基礎圖形

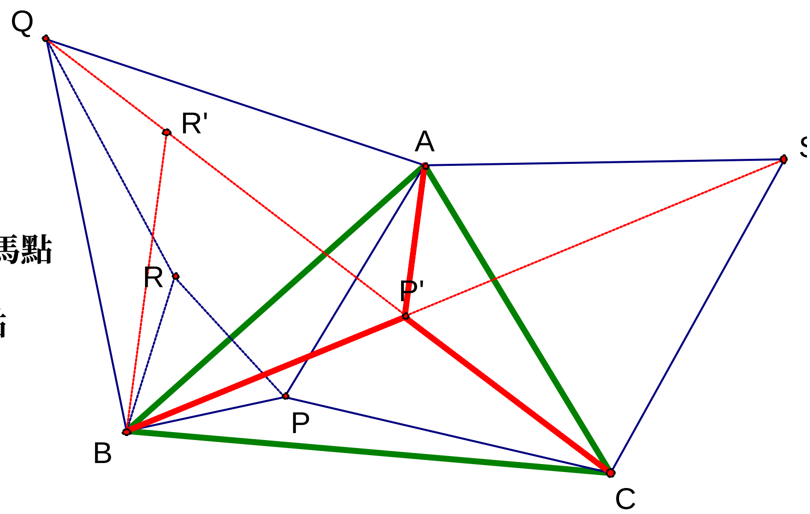
1.三角形

(1) .證明三角形的史坦納點即費馬點

在△ABC 中，P 為△ABC 內部任一點

以 $\overline{PB}$ 為一邊作正△PBR

以 $\overline{AB}$ 為一邊作正△ABQ



連接 $\overline{QR}$ →△ABP ≅ △QBR〈SAS〉

$\rightarrow \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{RQ}+\overline{PR}+\overline{PC}$

則當 Q、R、P、C **四點共線時(即為虛線部分** Q、R、P、C)

$\overline{R'Q}+\overline{P'R'}+\overline{P'C}$ **最小(∵恰為一直線)**< $\overline{RQ}+\overline{PR}+\overline{PC}$

$\overline{R'Q}+\overline{P'R'}+\overline{P'C}=\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}$ **最小**< $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$

此點 P **點即為費馬點**

且此時∠BPC＝180°－∠RPB＝120°

∠APB＝∠QRB＝180°－∠BRP＝120°

→∠APC＝120°

★.由上得知，除了鈍角 $\geq 120^\circ$ **，其他三角形的史坦納點(費馬點)都有相同的特性，即史坦納點到相鄰兩頂點連線夾角均為** 120° **。也證明出若要達到路徑和最短，史坦納點與相鄰頂點所連出來的路徑，線與線之間均夾** 120° **。**

★.當角度 $\geq 120^\circ$ **時，此鈍角兩夾邊為史坦納樹。證明詳見附錄。**

2.正方形

(1).正方形史坦納樹猜想：

我們發現，圖形內加入史坦納點，加入點的個數，與頂點數有密切的關係。作圖時，目的要做出夾角均為 120° **的史坦納樹，所以一個交會點(史坦納點)一定會由三條線各自夾120度組成。**

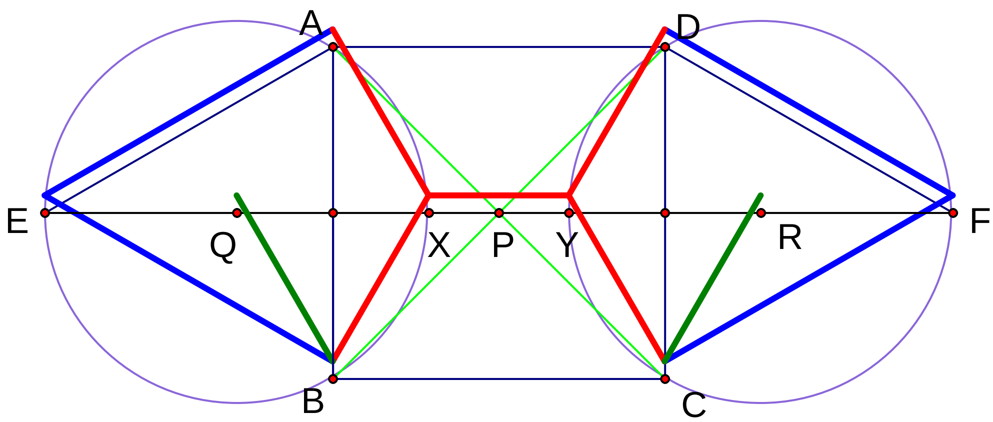
例：

三角形：史坦納樹各邊恰連接每一頂點。

四邊形：若是其中有一條路又有分叉，則連的頂點數又會多一個。所以判定有兩個史坦納點在其中。

以此類推，若是某圖形有 n **個頂點，猜測所擁有的史坦納點，** $(n-3)+1=m$ **個**

(2).畫四邊形史坦納樹



做圖：

1. **以** $\overline{AB}$**，** $\overline{CD}$ **為邊向外做正三角形，得**△ABE、△CDF **兩三角形**
2. **作**△ABE, △CDF **之外接圓**
3. **連接** E、F **交兩外接圓於** X、Y **兩點，此** X、Y **就是史坦納點**
4. **連接** $\overline{AX}$ 、 $\overline{BX}$ 、 $\overline{XY}$ 、 $\overline{YD}$、 $\overline{CY}$ **就是我們要的史坦納樹**

(三)**證明此圖會最小：**

連接 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ **交於** P **點**

在□ABCD **中，** XY **為**△ABC **內部兩點(同三角形費馬點之理證明)**

△ BQX、△ABE、△YDR、△CDF **皆為正三角形**

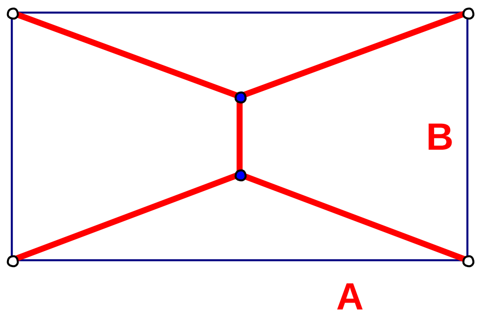
△AXB ≅ △EQB〈SAS〉, △DYC ≅ △FRC〈SAS〉

故 $\overline{BX}=\overline{BQ}=\overline{QX}$ 、 $\overline{AX}=\overline{EQ}$， $\overline{CY}=\overline{FR}$、 $\overline{YC}=\overline{RC}=\overline{YR}$

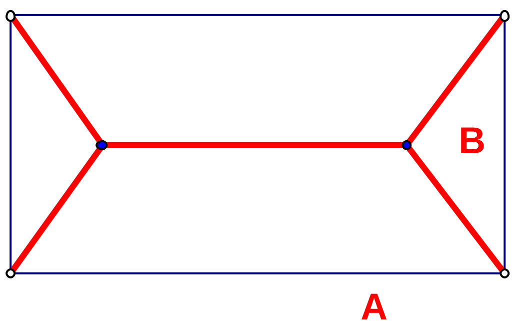
則 $\overline{BX}+\overline{AX}+\overline{XY}+\overline{CY}+\overline{YD}=\overline{BQ}+\overline{EQ}+\overline{XY}+\overline{RC}+\overline{FR}$

$=\overline{QX}+\overline{EQ}+\overline{XY}+\overline{FR}+\overline{YR}=\overline{EF}$ **(恰為一直線，故為最短)**

3.長方形史坦納樹



$\sqrt{3}A+B$

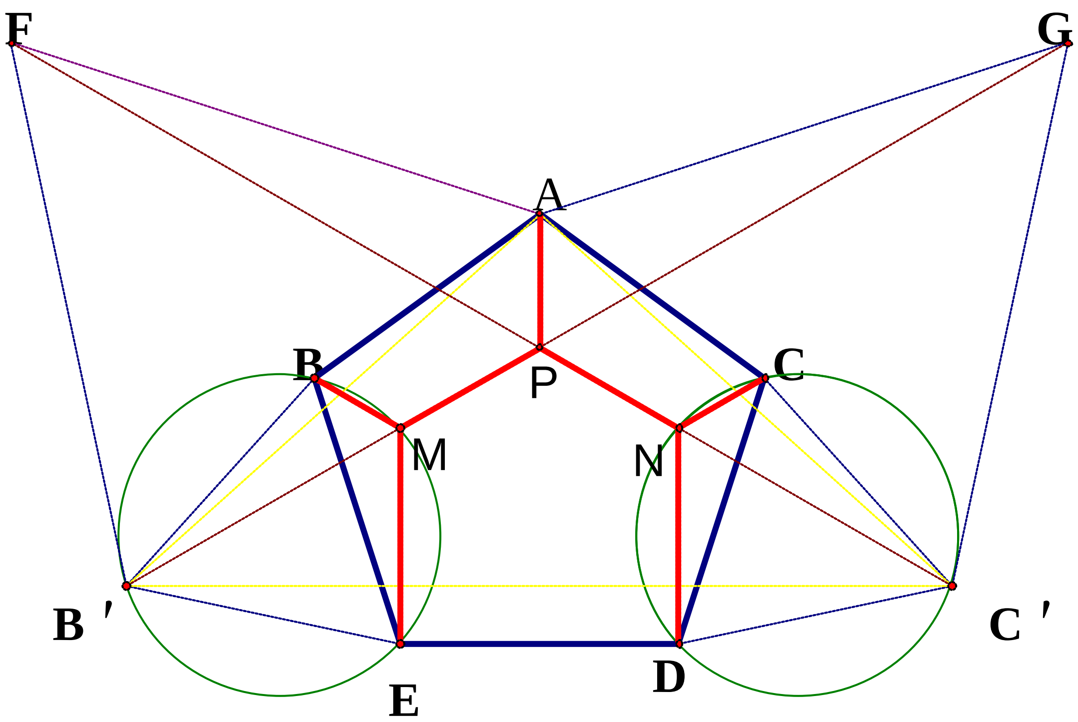


$A+\sqrt{3}B$

(A+ $\sqrt{3}$ B) －($\sqrt{3}A+B$)= (1- $\sqrt{3}$) A-(1- $\sqrt{3}$)B=(1- $\sqrt{3}$)(A-B)<0

∴ (A+ $\sqrt{3}$ B) **較**($\sqrt{3}A+B$)**短，所以我們判斷，以短邊為主作史坦納樹會比用長邊作史坦納樹還要短**

4.正五邊形



1. 以 $\overline{BE}$ 和 $\overline{CD}$ 往外做兩正三角形△BB′E，△CC′D
2. 做 $\Delta AB'C'$，再以 $\overline{AB'}$ $\overline{AC'}$ 為邊往外做兩正三角形△AB′F，△AC′G。
3. 連接 $\overline{GB'}$ $\overline{FC'}$，交點 P 就是 $\Delta AB'C'$ 的費馬點。
4. 為了做出 120° 三角形，作△BB′E，△CC′D 兩正三角形之外接圓。
5. 連接 $\overline{PB'}$ $\overline{PC'}$，交於兩外接圓於 M、N 兩點，連接 $\overline{MB}$、$\overline{ME}$、$\overline{NC}$、$\overline{ND}$。
6. 最後在連接 $\overline{PM}$、$\overline{PN}$、$\overline{PA}$，此樹狀圖即為所求
7. 證明其最短的方法同三角形證法相同，以□B’EBM 這圖形，$\overline{MB}+\overline{ME}=\overline{MB'}$，而□C’DNC 也同理，$\overline{NC}+\overline{ND}=\overline{NC'}$。就看 $\Delta AB'C'$ 其 $\overline{PB'}=\overline{PM}+\overline{MB'}$，$\overline{PC'}=\overline{PN}+\overline{NC'}$。而 $\overline{PA}+\overline{PB'}+\overline{PC'}$＝此 $\Delta AB'C'$ 的史坦納樹，故得證。

5.正 N 邊形

正六邊形以後，角度都≧120°。樹的做法，繞著邊長走一圈，再減其中一邊（圖 1、圖 2、圖 3、圖 4）。這方法，到正 N 邊形都成立。

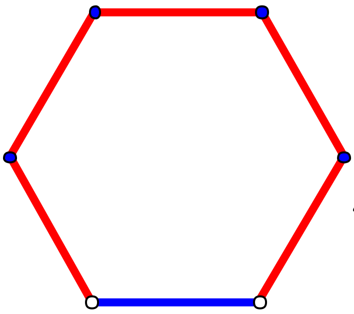


圖 1　正六邊形

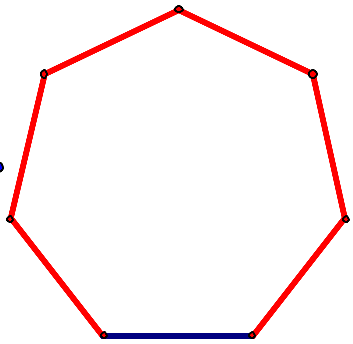


圖 2　正七邊形

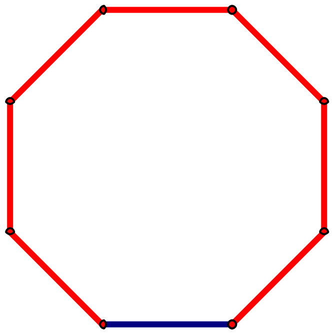


圖 3　正八邊形

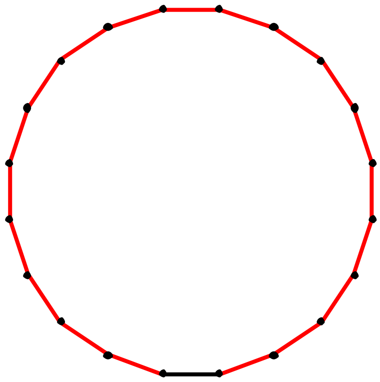


圖 4　正二十邊形

二.任意多邊形

四邊形為例，之前方法有特殊情況。三角形頂點相連線段與三角形外接圓交點為新加入的取代點。如圖(圖 5)、(圖 6)，取代點在圖形外，**這做法是錯誤**。

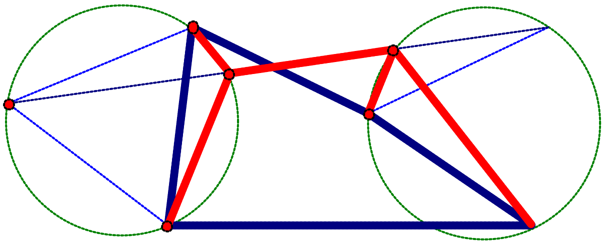


圖 5

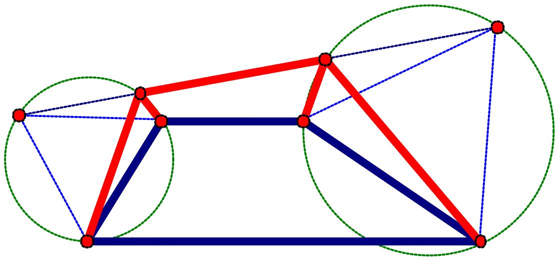


圖 6

五邊形也是(圖 7)、(圖 8)

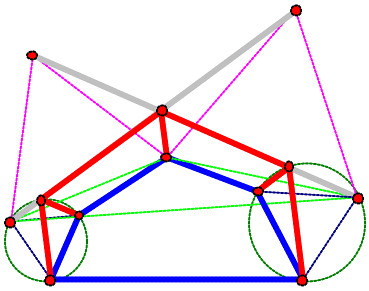


圖 7

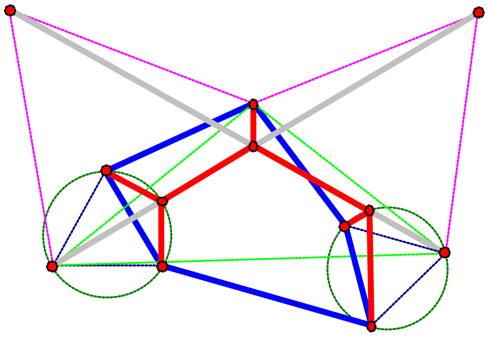


圖 8

以下使用 *GSP* 跑圖形，試圖找出能畫與不能畫的規則。

(一).任意四邊形

1.分類：

四邊形可分出四類。(圖 11) (圖 12)是兩個取代點均與頂點重合的圖形，如果兩個取代點均在圖形外(圖 20.21)，這時則以離 *L* 最近的頂點為新的取代點，而不取圖外的取代點。

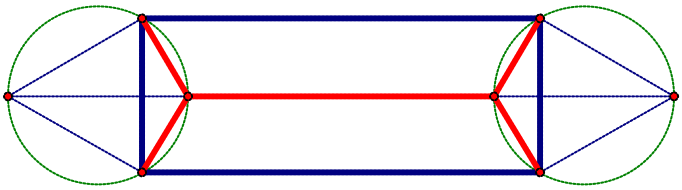


圖 9

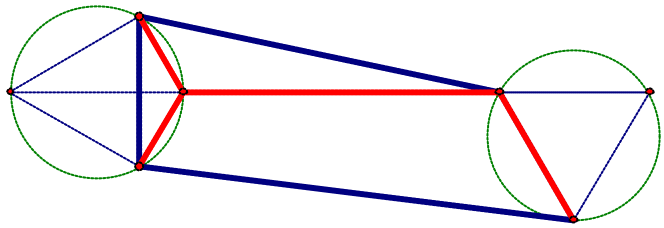


圖 10

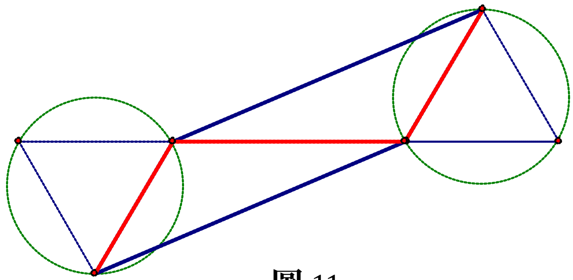


圖 11

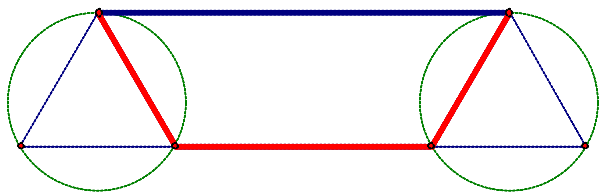


圖 12

(圖 10)是只有一個取代點在圖外，若一個取代點在圖外(*B*2) (圖 13)，則以離 *L* 最近的頂點為新取代點(*B*1)。是以 *B*1 為新路徑連接，若直接以 *S*1 連接，會有角度不為120°， *S*1的位子也需跟著變動。做法是把與 *S*1 共圓的兩個頂點 A、C 與另一端 *B*1 當一三角形 (綠色)，做此三角形的費馬點(圖 14)

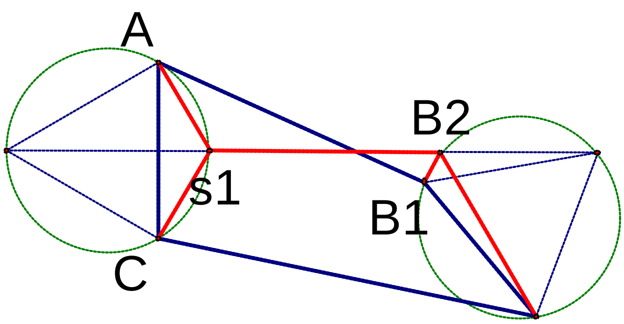


圖 13

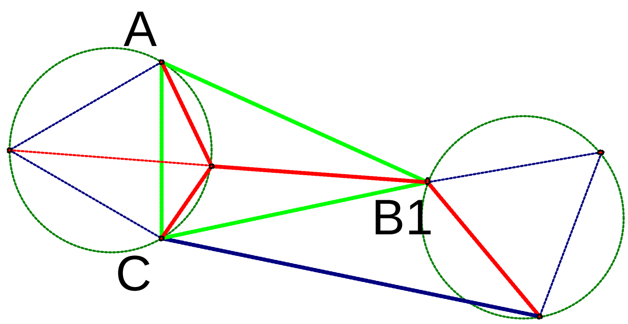


圖 14

2.任意四邊畫圖法

(1).挑一組對邊向外做正三角形。

(2).正三角形頂點連線，令為 L 〈圖 15~18 中之紅線〉。

(3).分類：

類型 a. L 同時過此組對邊 (圖 15)

類型 b. L 只過其中一邊(圖 16)

類型 c. L 與此組對邊均不相交，但與另兩邊相交(圖 17)

類型 d. L 與四邊均不相交(圖 18)

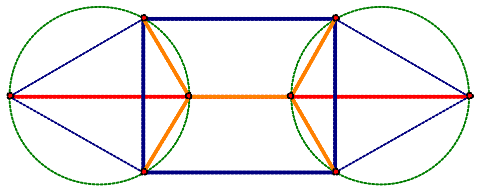


圖 15

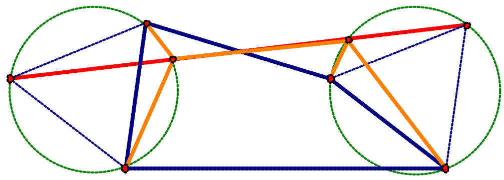


圖 16

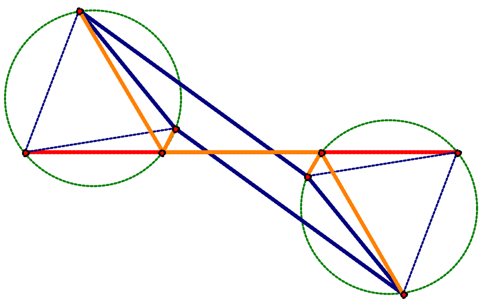


圖 17

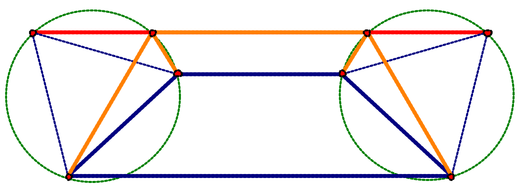


圖 18

上圖中橘色線表示與正方形相同畫法時的取代路徑，以下為修正畫法

(4).**畫圖法：**

類型 a：畫法與正方形同 (圖 19)

類型 b：*L* 沒過的邊，以最靠近 *L* 的頂點為取代點。此點與對邊兩端點當三角形做費馬點，再相連 *L* 沒過的邊。(圖 20)

類型 c：取最靠近 *L* 之 2 點為 *S* 點，將點相連。(圖 21)

類型 d：取最靠近 *L* 之 2 點為 *S* 點，將點相連。(圖 22)

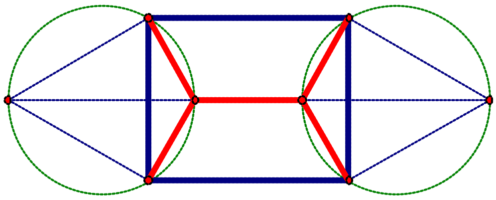


圖 19

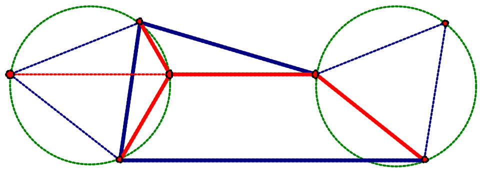


圖 20

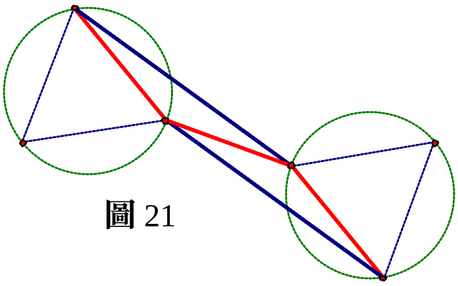


圖 21

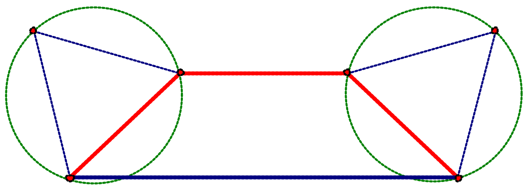


圖 22

四邊形最多兩組畫法 (對邊共 2 組) （圖 23)，但也可能只有一組（圖 24）

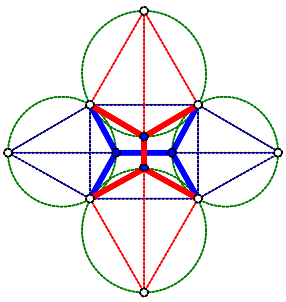


圖 23

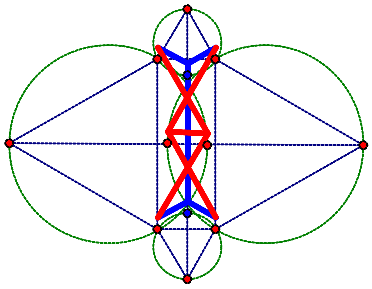


圖 24

(二).任意五邊形

以四邊形的方法，依取代點的位置，找出 18 種類型(圖３１~圖４８)

A.**作法：**

1. **挑一組不相鄰兩邊各往外做小正三角形**
2. **將兩三角形頂點與沒做三角形的點(圖中 E 點)連線，以此兩線各往外做大正三角形**
3. **將大正三角形頂點與對面小正三角形頂點相連如圖中紅線** L_1、L_2。

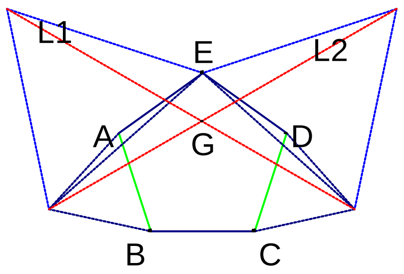


圖 25

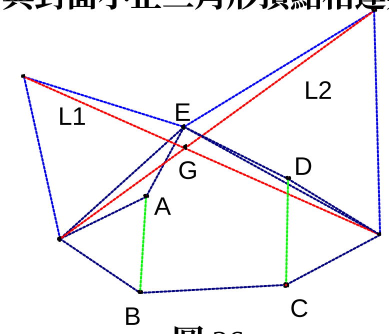


圖 26

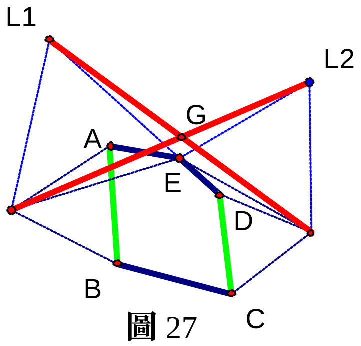


圖 27

B.**定義類型**

以(a，b，c)表 18 種類型其中一種

當 a=1，L2 **與** $\overline{AB}$ **相交**(圖 25)

a=1A，L2 **與** $\overline{AB}$ **不相交**(圖 26)，L2 **與** A **較接近**

a=1B，L2 **與** $\overline{AB}$ **不相交，**L2 **與** B **較接近**

當 b=2，L1 **與** $\overline{CD}$ **相交**(圖 25)

b=2C，L1 **與** $\overline{CD}$ **不相交，**L1 **與** C **較接近**

b=2D，L1 **與** $\overline{CD}$ **不相交**(圖 27)，L1 **與** C **較接近**

當 c=3，L2 **與** L1 **之交點** G **在圖形內**(圖 26)

c=4，L2 **與** L1 **之交點** G **在圖形外**(圖 27)

C.**各類型圖示：以下各圖紅線即為取代路徑畫法**

a. (1，2，3)：(圖 28)。
(1，2，4)：(圖 29)。

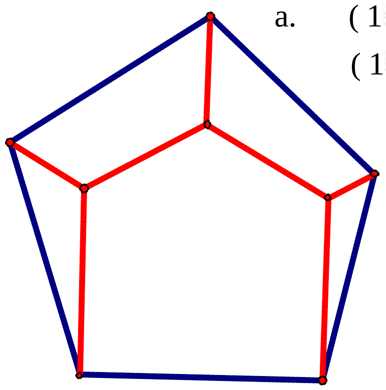


圖 28

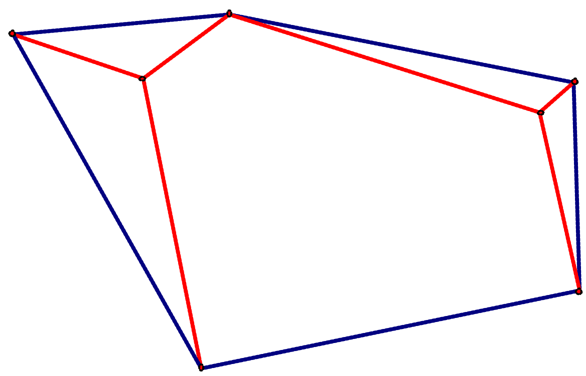


圖 29

b. **圖形分成四邊形圖形第一類加上一條最短的連線。**

(1A，2，3)：（圖 30)。

(1B，2，3)：（圖 31)。

(1，2C，3)：（圖 32)。

(1，2D，3)：（圖 33)。

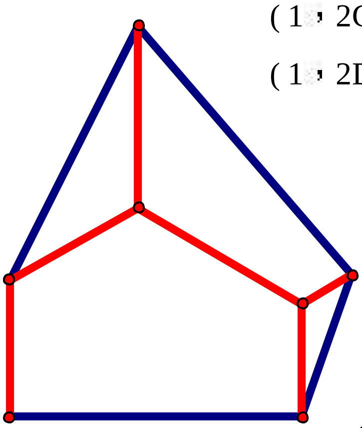


圖 30

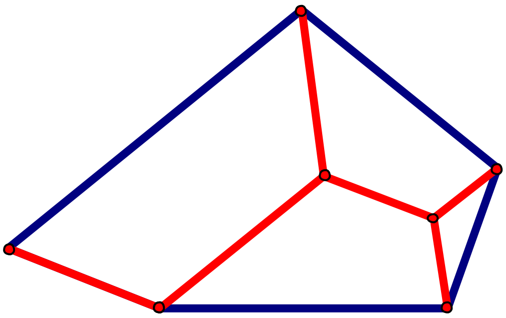


圖 32

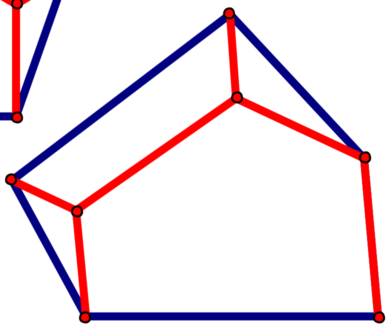


圖 31

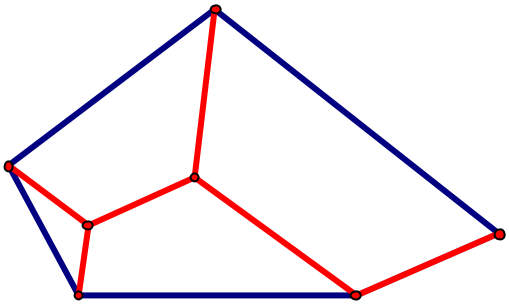


圖 33

c. **圖形分成四邊形圖形第二類加上一條最短的連線。**

(1A，2，4)：（圖 34)。

(1B，2，4)：（圖 35)。

(1，2C，4)：（圖 36)。

(1，2D，4)：（圖 37)。

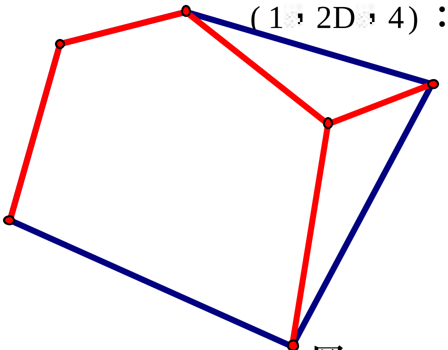


圖 34

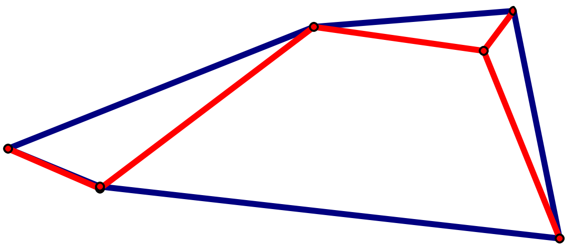


圖 35

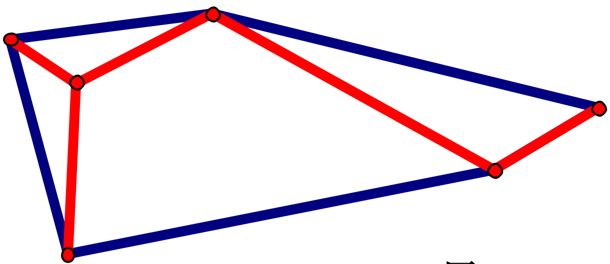


圖 36

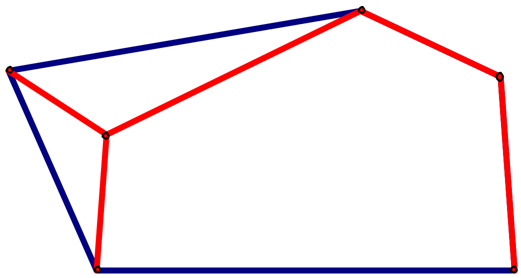


圖 37

d. **圖形分成一個三角形圖形加上 2 條最短的連線，此三角為小於** 120°**三角形**。

(1A，2D，3)：（圖 38）。

(1B，2D，3)：(圖 39)。

(1A，2C，3)：(圖 40)。

(1B，2C，3)：(圖 41)。

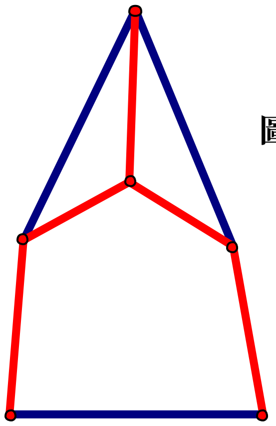


圖 38

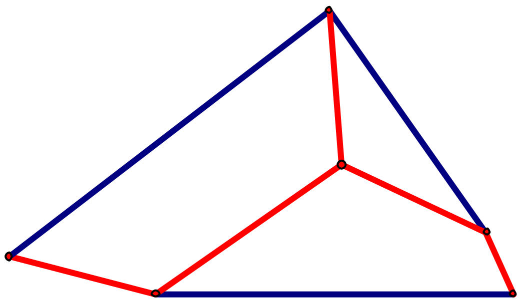


圖 39

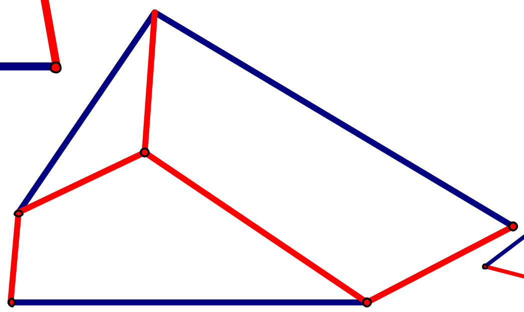


圖 40

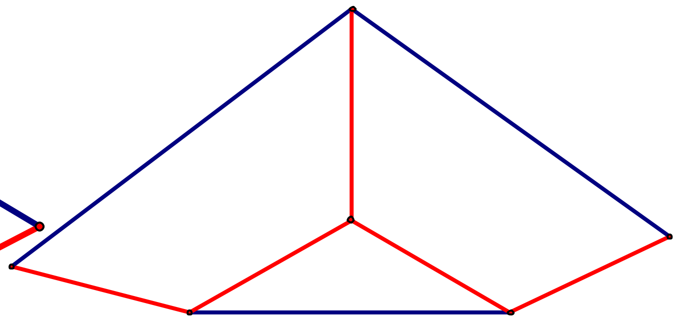


圖 41

e. **圖形分成一個三角形圖形加上 2 條最短的連線，此三角為大於** 120°**三角形**

(1A，2D，4)：(圖 42)。

(1B，2D，4)：(圖 43)。

(1A，2C，4)：(圖 44)。

(1B，2C，4)：(圖 45)。

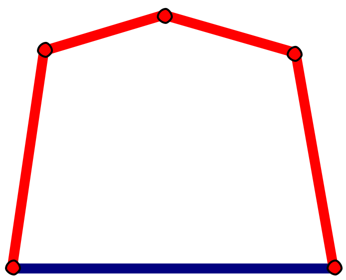


圖 42

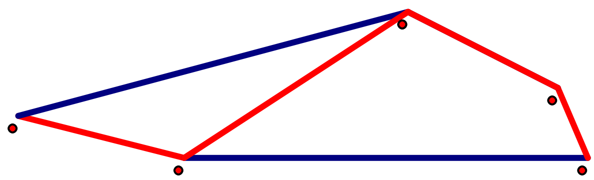


圖 43

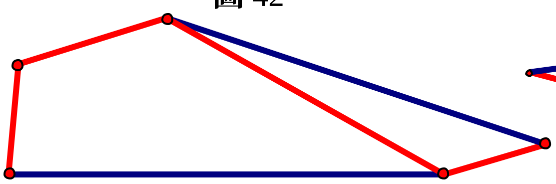


圖 44

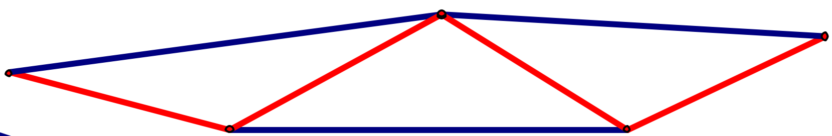


圖 45

五邊形(圖 46)的大正三角形(藍色)是由2小正三角形(深藍色)頂點(K、L)與]剩餘那一點(E)形成三角形($\triangle KLE$)的邊長做出來的，大正三角形與對面小正三角形頂點相線會有兩條($L1$、$L2$)。在證正五邊形已證出取代路徑長度為$L1$、$L2$。五邊形可畫5組取代路徑(圖 47)，有五條線，故比較何條最短，以何組做取代路徑，即為最短。

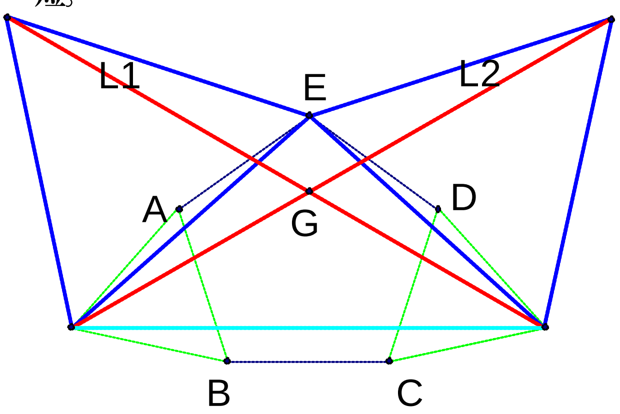


圖 46

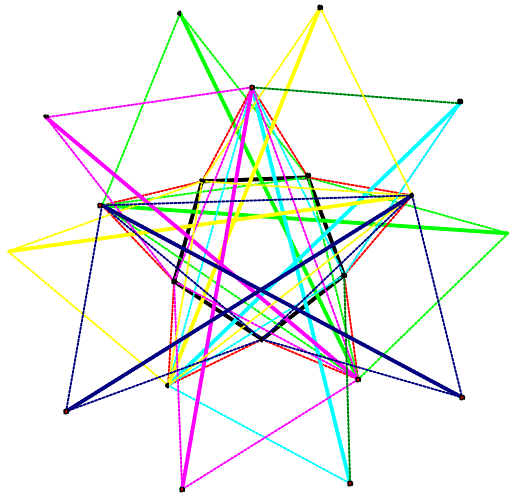


圖 47

(三).目前為止的結論：

觀察所有的圖形，歸納出以下結論。

1. 若樹上的點，只有一條線，則此點必為圖形上的頂點。

2. 若樹上的點，只有兩條路，則此點必為圖形上的頂點，且兩邊路線必夾$\geq 120^{\circ}$。

3. 若樹上的點，有三條線，則此點必為圖內外加取代點。三線互夾120°

(四).任意六邊形：

發現正六邊形可分成三個三角形(圖 48)各作取代路徑。把這方法用到任意六邊形去。六邊形可分成2組三角形群，每組各三個三角形，底邊頂點都相連，(綠、黃、粉紅)和(紅、菊黃、藍)(圖 49)。

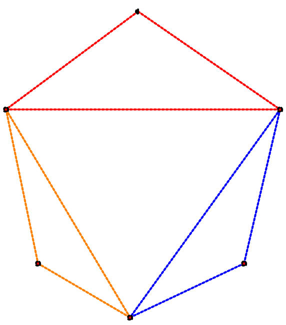


圖 48

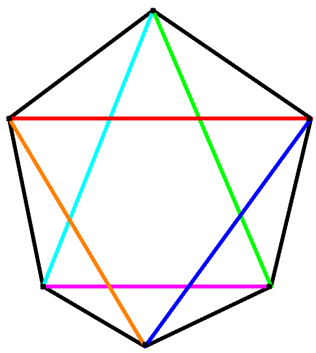


圖 49

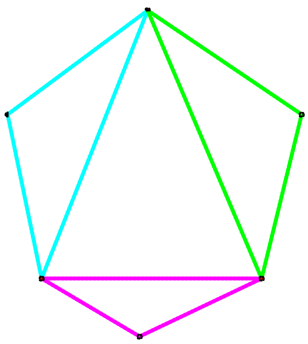


圖 50

經由 GSP 觀察出的做法

將 2 組中三角形分別做取代路徑 (圖 52）圖 54 中紅色為一組三角形的取代路徑、圖 56 中淡藍色為另一組三角形的史坦那樹(即圖形本身)。每組各自選最小 2 個取代路徑相加，再把剩餘點挑最短邊連上。最後再把 2 組比較大小，較短即此圖取代路徑。

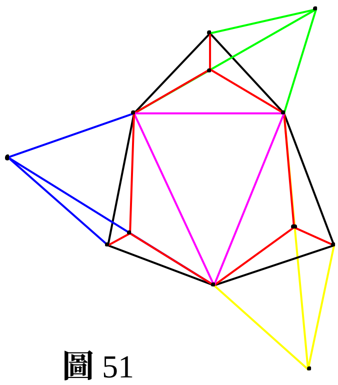


圖 51

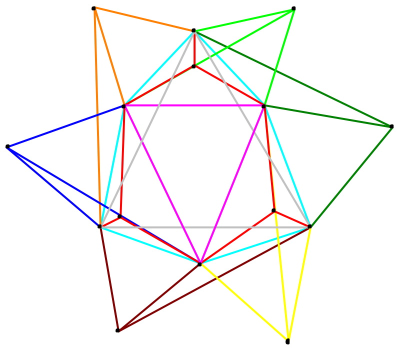


圖 52

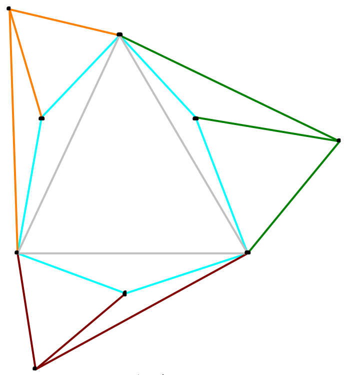


圖 53

(五).任意N邊形：

因為正６邊形　正ｎ邊形都是以最外圈為取代路徑。

又因為任意六邊形以切三角形來做取代路徑。

故猜想這原理可用到＞６邊形以上的圖形 (７邊形 (圖 54)、８邊形 (圖 55）)。

經 *GSP* 證實原理正確。整理出以下流程

1. a.ｎ為偶數：將圖切成許多底邊頂點相連三角形。可分成 2 組三角形群，每組各 N ／2 個三角形。

   b.ｎ為奇數：除了最長邊，以外將圖切成許多底邊頂點相連三角形，除最長邊的兩點沒重疊。一圖會有 (N －１) ／2 個三角形。

2. 兩組中的三角形各畫取代路徑。

3. a. *n* 為偶數：兩組各把最大取代路徑的三角形除外其餘都相加。比較大小，最小的為此圖取代路徑。

   b. *n* 為奇數：全部取代路徑相加

4. 有無犯第 2 項。如有，將兩條線夾的角度小於 120 所夾的那個點。將重複此點的三角形 (即此點左右兩個三角形) 上的頂點，共五點，當一個五邊形，做此五邊形的取代路徑。

二、垂直

因為在電路板中，要做出交錯複雜的史坦納樹（夾角皆為120°) 的電線連接，不僅由於機械手臂在方向上的限制，而且技術上也很困難。

我們從不規則排列的圖形中，發現一些規則。這些史坦納樹有些可以在圖形中橫移，所以認為應該有能直接算出總長度的方法。

(一) 三角形：

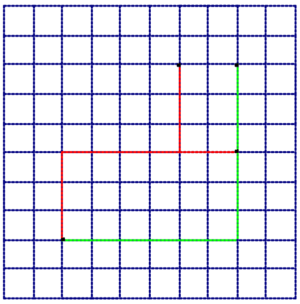


圖 68

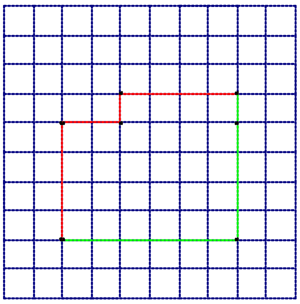


圖 69

圖中紅色線為連接三個點目前最短垂直取代路徑，綠色則是將其圖形歸納以後的線段，不難發現，所有三個點的垂直史坦納圖形都是由 x 方向最長的距離和 y 軸方向最長的距離組成。

即令在座標點上：三個點 (x1,y1) (x2,y2) (x3,y3)

可以比較 (x1.x2.x3) 和 (y1.y2.y3) 中，每個差值的大小,就能夠計算總長度。

例如現有三個點 (5.7) (6.2) (1.8)

排列後 (5.6.1) (7.2.8)　　(6-1) + (8-2) =11 即為所求長度

現在以四邊形開始探討

(二) 四邊形

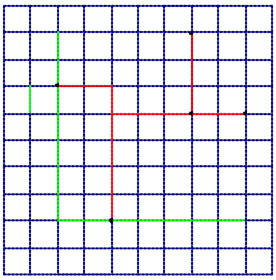


圖 70

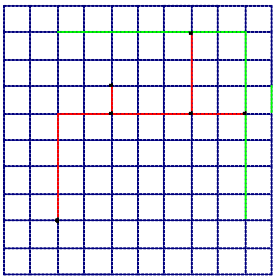


圖 71

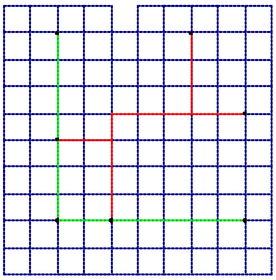


圖 72

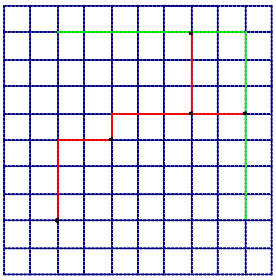


圖 73

圖 70 和圖 71，圖 72 和圖 73 我們分為兩類，因為平移以後除了 x . y 軸最遠的距離外，還會出一小段不在其規則內。

我們嘗試了很多種方法來區分這兩類的圖形，例如：角度，長度，是否有兩個以上的點在同一直線上…等。但是每個假設都不盡理想，總是在檢查時出現一些特例來推翻假設，直到單獨討論凸四邊形的時候，有一個猜想竟成立了，以兩條對角線交點當成原點，若是將四個點分在兩個象限（一.三) 或 (二四) ,就能做出長度和三角形畫法雷同的垂直取代路徑 。

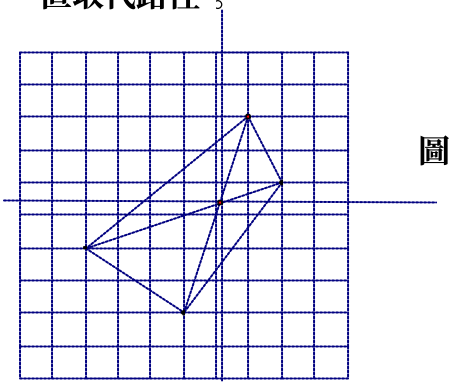


圖 78

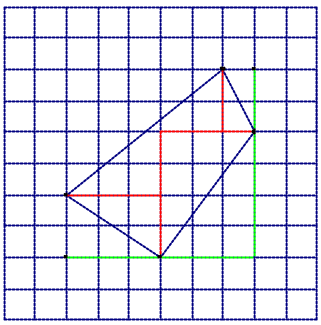


圖 79

我們觀察其規則，這類的四邊形的共同特徵：對角線斜率同號

至於其他對角線斜率異號的圖形，就無法把其畫出的取代路徑整理成兩個軸上的最長距離，還會出現一個短邊，我們稱之為重複邊：

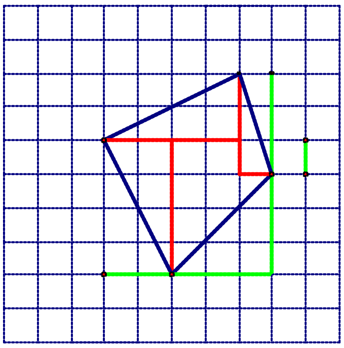


圖 80

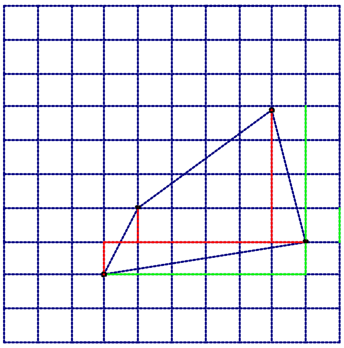


圖 81

至於短邊就是後期的研究重點，第一步驟由比較法來決定兩個方向的最長邊，第二步驟就是要判斷重複邊的長度了，需由對角線上來判定需要重複的邊。

第一步驟：先以斜率判斷有無重複邊

第二步驟：以對角線兩端點分別作長方形如圖 83 所示

第三步驟：依照三角形作圖法，取出橫向和縱向的最長邊後，再加上重疊長方形上的寬得到總長度 $6+5+1=12$。

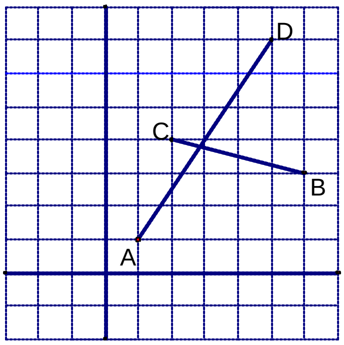


圖 82

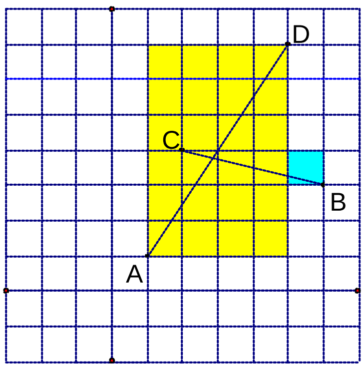


圖 83

至於作圖，判斷上由於上圖重複邊1為點 $B.C$ 所成，作圖時只需先連 BC，其餘點再直接連上即可(圖 84 中紅線)

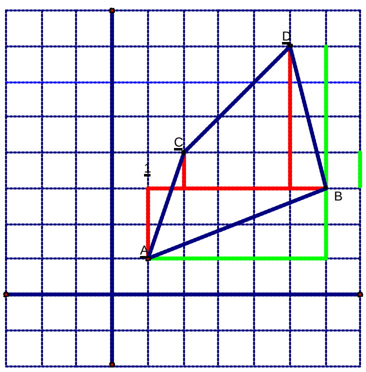


圖 84

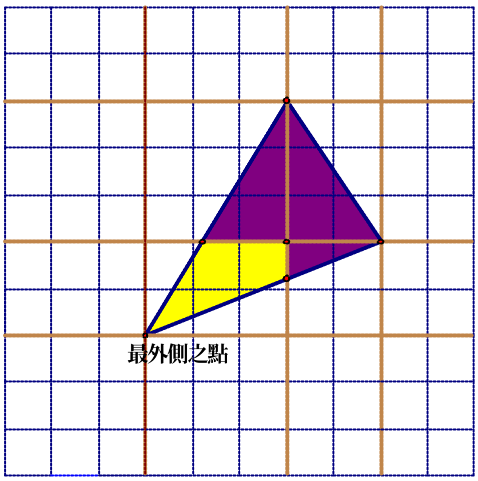


圖 85

（三）凹四邊形：

將凹四邊形看成在三角形內部，再加一點。因位置關係，可分四部分。垂直座標系中的三角形，一定能找出一點以上的點，居於圖形的最外側，即同時在橫向和縱向上的最遠點，若任意抓兩點作對角線依上述作圖，可以發現若第四個點出現在黃色區塊，又與最外側點當成一雙對角時，能夠做出兩個完全不相交的長方形。若已知圖形第四點在其他區域時，也需要判斷重複邊來決定其線段大小。

（四）凸五邊形

我們以凸五邊形最為我們研究五個點的樣本

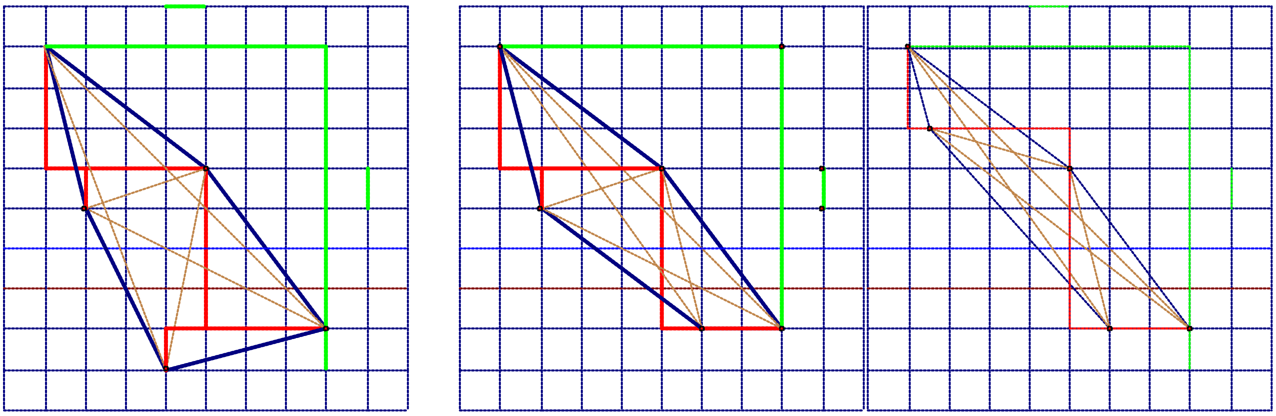
同樣的，用對角線的方式先檢查有無對角線，因為一個五邊形總共有五條對角線，我們發現:

若對角線斜率正負號的比率為3：2或是2：3會出現兩條重複邊，而且這種類型的圖形在隨機的凸五邊形中，出現的比率最高。如例一

若是對角線斜率正負號的比率為4：1或是1：4會出現一條重複邊。如例二

若是對角線斜率全為例2：斜率正，或是全為負，將圖形畫出後會和三角形類似，不會有重複邊的情況發生。如例三

例一：斜率三負二正	例二：斜率四負一正	例三斜率均為負值
總長度為 8+7+1+1＝17	總長度為 7+7+1＝15	總長度為 7+7＝14



依照假設和觀察驗算歸納出：

凸 N 邊形其最大重複邊線段個數為 $(N-1)/2$

設對角線斜率正號 n 個負號 m 個

若 $n>m$ 則重複邊長為 m 段

若 $n<m$ 則重複邊長為 n 段

若是斜率有∞or 0 則不列入 n 和 m 的計算

若是圖形為凹多邊形，取確定重複邊和判定長度時

依照三角形內部再多做一點的方法作圖。

根據重複邊長的規則，作圖時宜以最外側點開始作圖。

隨著 N 越來越大時，

長度得應重複邊長排序後取最小值

三、立體

(一)正四面體

(1).將正四面體 $ABCD$ 之一組對邊 $\overline{AB}$ 線段和 $\overline{CD}$ 線段各取中點 K、L 做 $\overline{KL}$ 線段，取此線段中點 O。

(2).做一通過 A、B、O、K 的平面，在平面上做一三角形 ΔABO，做此三角形費馬點 X，而此點必在 $\overline{KL}$ 線段上。(圖 56)

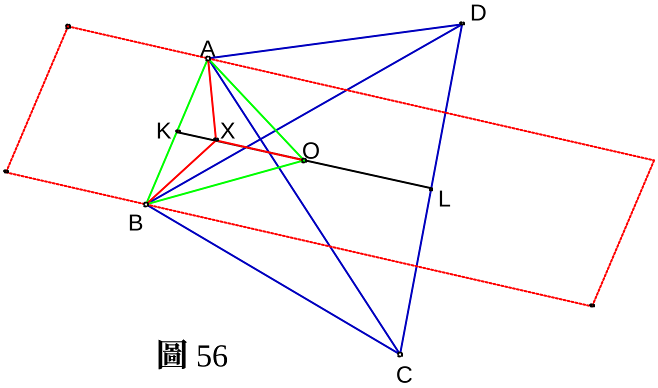


圖 56

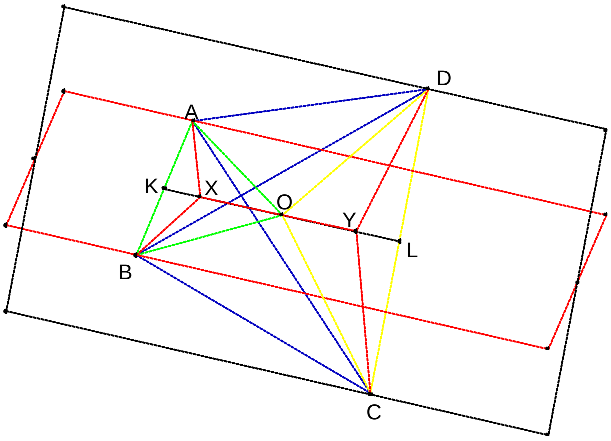


圖 57

(3).同理，做一另平面三角形 ΔDCO，做一另費馬點 Y，此點也在 $\overline{KL}$ 線段。(圖 61)

(4).再回到立體的圖形上看，連接 $\overline{AX}$、$\overline{BX}$、$\overline{XO}$、$\overline{CY}$、$\overline{DY}$，此圖形為我們要的取代路徑。(圖 58)

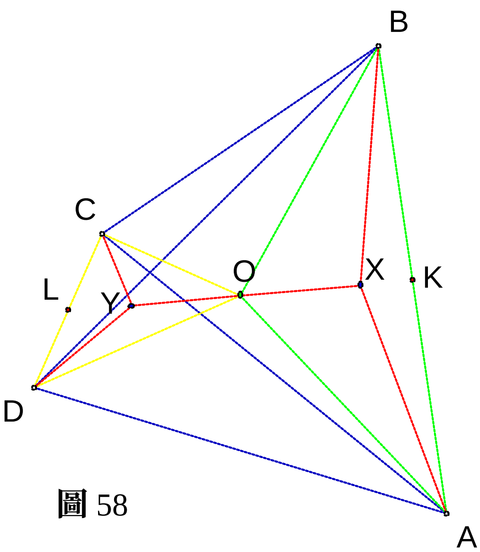


圖 58

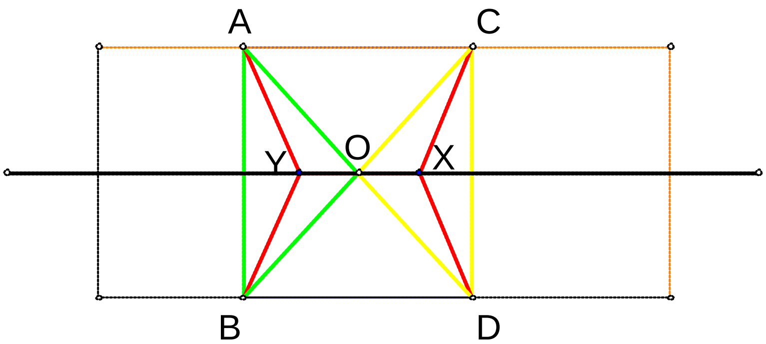


圖 59

(5).要證明其為最短，於是我們做一平面 R 通過 A，B，O，X，再做另一平面 P 通過 C，D，O，Y，以 $\overline{KL}$ 線段為轉軸將 R 平轉成與 P 平面重合，此時圖形視作一個長方形的取代路徑，而且它做在短邊。(圖 57)

(二)正六面體

1.六面體正確畫法

(1).將正六面體 $ABCD\text{-}EFGH$ 選出四組平行的邊 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$，$\overline{EF}$，$\overline{GH}$。

(2).先做一平面 L 包含 $\overline{AB}$ 線段，然後在此平面上，以 $\overline{AB}$ 為底做一 120 等腰三角形 ΔABW，在底線 $\overline{AB}$ 線段中點做一通過頂點 W 垂直射線。(圖 60)

(3).再以 $\overline{AB}$ 為轉軸，轉此平面，則不管此平面怎麼轉，120° 等腰三角形 ΔABW，不會變且永遠在平面 L 上。(圖 61)

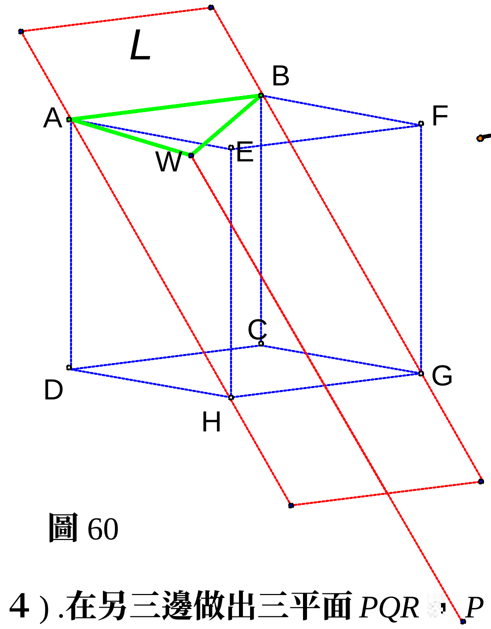


圖 60

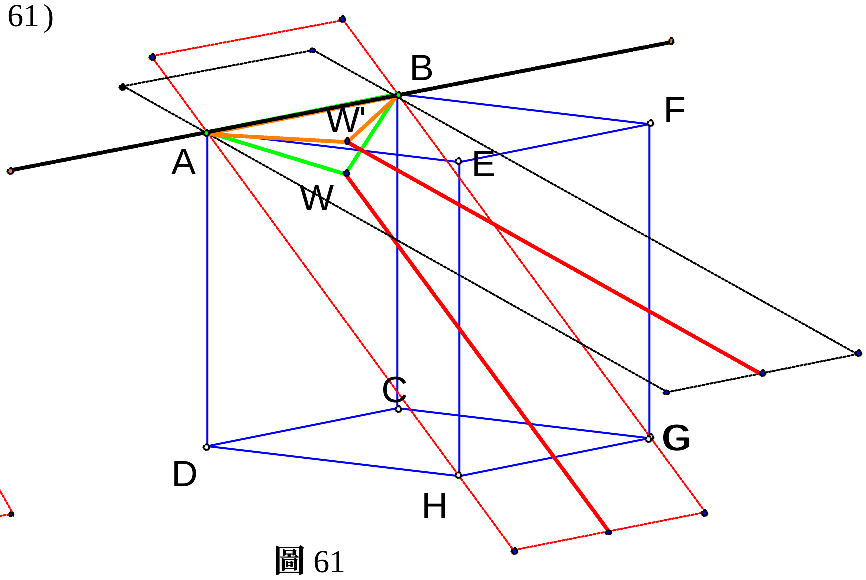


圖 61

(4).在另三邊做出三平面 PQR，P 平面包含 120° 等腰三角形 ΔCDX，Q 平面 120° 等腰三角形 ΔEFZ，R 平面 120° 等腰三角形 ΔGHY。(圖 62) 只做 2 面、(圖 63) 做 4 面。

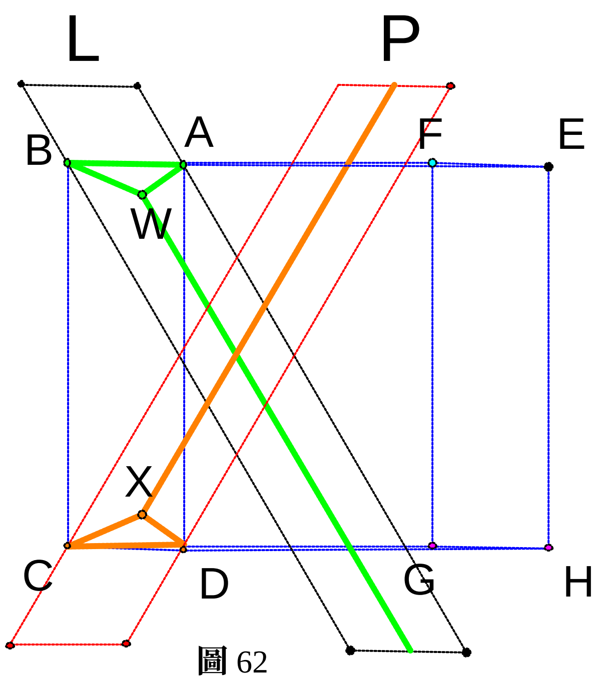


圖 62

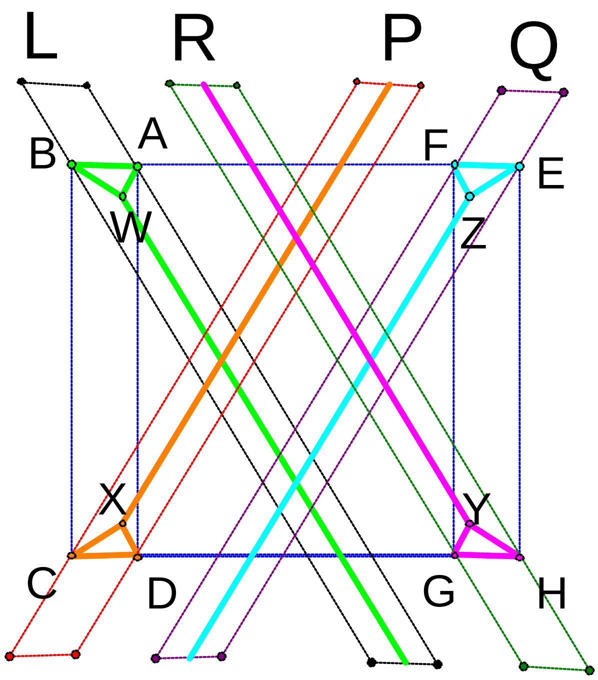


圖 63

(5).再回來看立體圖，在立體圖上找一面與 L 平面，P 平面，Q 平面，R 平面垂直的面 K 平面。看 K 平面，就為一正方形的圖，然後 L 平面，P 平面，Q 平面，R 平面因是從旁邊看，所以會看起來是一直線。所以轉動這些線。(圖 64)只做2面、(圖 65)做4面。

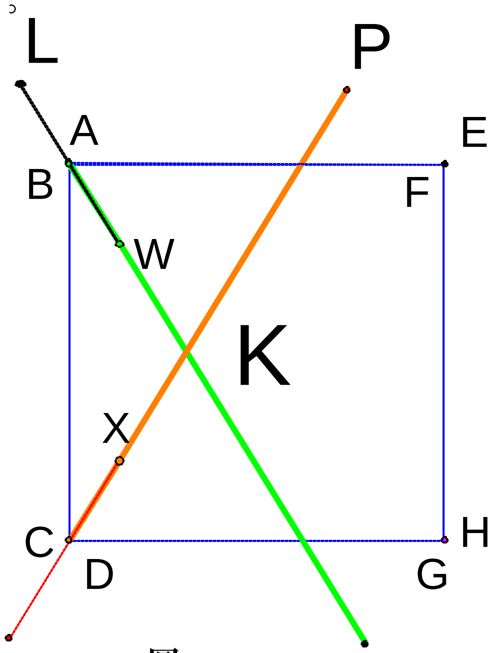


圖 64

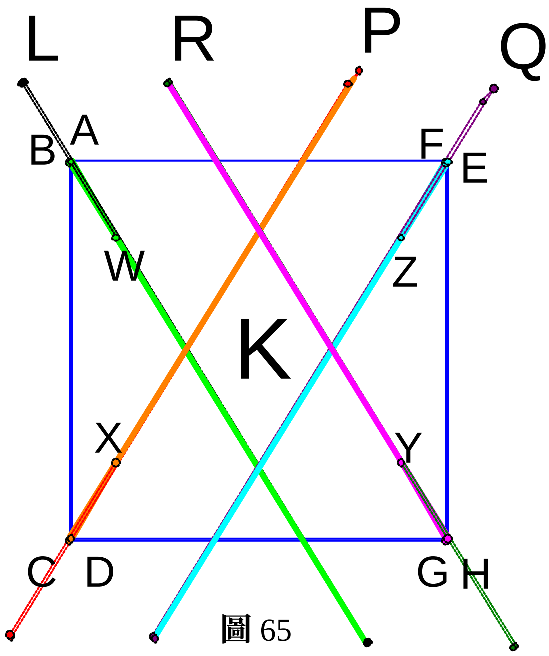


圖 65

(6). L 平面與 P 平面三角形上的射線會交一點 N，Q 平面與 R 平面也會交出點 M，做出正方形史坦納樹的樣子。(圖 66)

(7).W、X、Y、Z、N、M 即所謂的取代點，連接起來的圖即正六面體取代路徑。(圖 67)

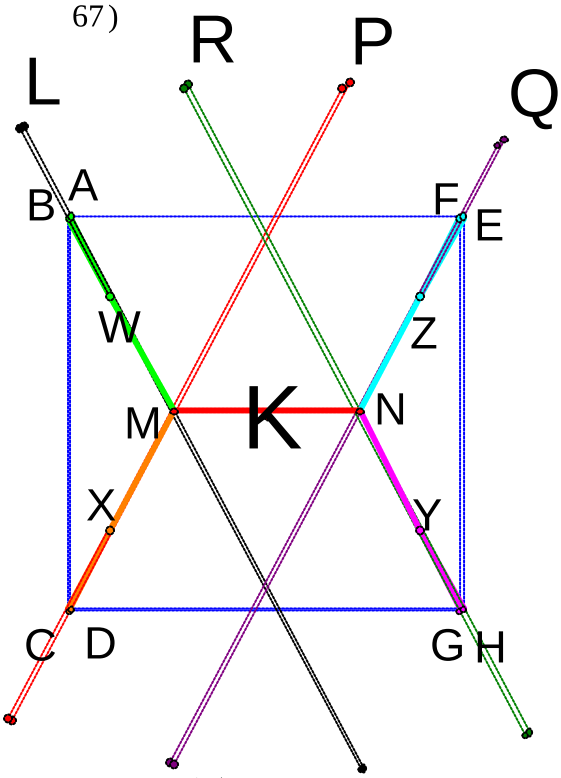


圖 66

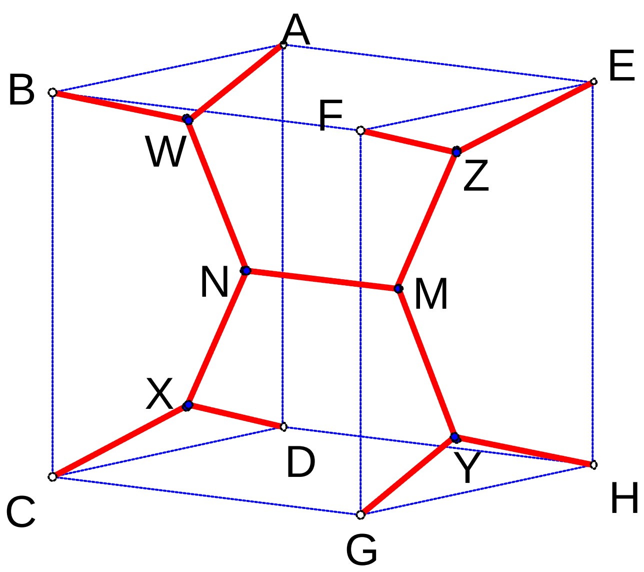


圖 67

$$3\sqrt{3}a + a \approx 6.196a$$

(三)立體的推廣

再尋找空間中的取代點時，曾經試用過座標化的方法，但效果並不好，後來發現由切平面去解析是很好的方法。由此方法可以將立體的問題轉為平面，配合前面平面圖形的研究成果，去做進一步的探討。

由前正四面體及正六面體研究結果，我們發現立體取代路徑，有兩種特點可以研究，再加以利用。

1.在空間中皆有不只一個可供旋轉的中間軸。此中間軸是指平面作旋轉時所用的軸。從最主的中間軸的兩端向外延伸，各延伸出兩條線，且每端延伸出的兩條線與主軸皆在同一平面上，並使三線段互夾 120 度。各延伸線段又可當主軸再向外延伸，長成一複雜的樹狀。

2.又因為在空間中，只要整體架構不變，各線段可以做伸長或縮短。也可以以線段為軸，將它長出去的樹枝，在不變形的條件下，作一旋轉的動作。只要線與連接的線之間的夾角不變，整體還是一個完整的圖形。

我們只要好好利用此兩特點，就可以連接出空間中的取代路徑。

當遇到一任意立體圖形，先將其圖形簡化成一簡單圖形，一個具有對稱性圖形。就以任意四面體為例，其最簡化的圖形為正四面體。將圖形簡化的用意是在於要先找出基礎樹，如正四面體的取代路徑。將此基礎樹，利用以上兩特點，將線段做延伸，或縮短。再將樹狀做旋轉，最後將樹狀的最外層終點連接在任意圖形的各頂點上。此就為立體圖的取代路徑。

正多面體在三維空間中，有所謂的對稱性，所以由我們先從正多面體下手，較為容易，再往任意多面體做推廣。我們第一個要解決的是，基礎樹的找法。並不是所有簡化後的圖形，都可以輕鬆找到。我們的想法是將簡化後的圖形，以對稱性為原則直接切一平面，用之前平面方法，作此平面的取代路徑。用此平面的取代路徑當主軸，向外延展，長樹，做出基礎樹。

當基礎樹做出來後，再用上面的方法，作旋轉和伸長、縮短，改成任意多面體的圖形。但在任意多面體時，或許會出現不合的狀態，比如說像平面中的取代點會跑出圖形外一般。要是有這種情況，可能就要以平面時用的方法來修正，內縮成另一圖形做取代路徑，剩下一點，就在邊上或立體表面上加以連接。

由於時間緊湊，很難有空閒去作畫圖、跑檔、分析、做實驗。再加上立體較難於剖析及理解。所以目前，還沒辦法判斷出，會有哪些不合的情況。以及當出現不合的情況時，該用什麼方法，來修正這些情形。所以，接下來的目標，找出常見的簡易圖形的基礎樹，和所有不合的圖形和修正方法。以及所有各式各樣圖形的証明方法。

肆、結論

我們已發現了平面上任意圖形的畫法，立體上的正四面體和正六面體的畫法和垂直取代路徑。並歸納出其特性

1. 一般書上都不難看到正三角形（費馬點）和正方形，以及網路上找到正五邊形的畫法，正 N 邊形只要 $N \geq 6$，取代路徑的做法為沿著邊長做出不封閉均連接的圖形。
2. 任意四邊型和五邊形用普通畫法，依取代點的位置，四邊形可分成４種畫法，五邊可分成１８種畫法。各有挑最短的方法
3. 在平面上，若樹上的點，只有兩條路，則此點必為圖形上的頂點，且兩邊路線必夾大於等於120°。若樹上的點，有三條路線，則此點必為圖形內外加的取代點。三線互夾120°。此可幫助判斷是否最短
4. 任意 n 邊形($N \geq 6$)，將圖切成許多底邊頂點重疊的三角形。

   n為奇：除最長邊，其餘都切，共(N－１)／2 個，各作取代路徑，相加即此圖取代路徑和。

   n為偶：可切成２組各N／2 個，兩組三角形各作取代路徑，各組除了最大三角，其餘相加，再以最短線連剩餘點，比較兩組，最短即是。
5. 立體上，我們理用了空間翻轉的概念，與平面上所知的規則結合，四面體即是很好的例子
6. 垂直中出發點以連接電路為主，所以作圖上不全然要以最短為主，但力求精簡
7. 立體的推廣方面，找出一定的尋找方法及初步的理論

   (1) 空間中不只有一條旋轉軸，將軸兩端向外延伸與主軸皆在同一平面上的兩條線，並使三線段互夾 120 度。各延伸線段又可當主軸再向外延伸，成複雜樹狀。

   (2)只要整體架構不變，各線段可以做伸長或縮短。將它長出去的樹枝，再不變形的條件下，作一旋轉的動作。只要線與連接的線之間的夾角不變，整體還是一個完整的圖形。
8. 先將任意圖形畫成簡化圖形，將簡化圖形切一具有對稱性的平面，作此平面的取代路徑放入空間中當做主軸，以此主軸項外伸展，連接原始圖形的各頂點，利用旋轉、伸縮等技巧做出取代路徑。

伍、討論

這次研究目標是找出方法能使平面(空間)中的點能夠有效的連接起來，雖然在任意ｎ邊形還沒有快速判斷法，做出最短需要一點時間，未來將改進方法加快作圖速度。

尋找日常中的史坦納樹：在我們應用史坦納樹的同時，應先探討自然中的最短連接路徑，目前我們已知能夠用在大廈配管線，電路板，運輸站等等。而由於生物的演化論，也相信在生物體中的血管神經中多多少少存在著史坦納樹，運送到各個組織器官的總線路最短，不僅能使輸送時間縮短，也能節省構成循環系統的養分及能量。

陸、應用

在平面史坦納樹上，假設在地圖上有四所學校，他們要再各校間建立起一個光纖網路，又由於光纖線的成本非常高，所以必須盡可能縮短架設的網路線總長，但又因架設的路線受到道路的影響，所以必須沿著馬路走，而道路又多成垂直，必須以互相垂直之史坦納樹畫法加以連接即可求得最短路徑。再舉個例，若在整個工廠的生產線上，有若干個部門，則各個部門之間，要如何以輸送帶來連接才可以得到最低成本以及最短路徑？這時便可將其轉換為史坦納樹問題

因在電路板中，如果要做出交錯複雜的史坦納樹（夾角皆為120°）的電線連接，不僅由於機械手臂在方向上的限制，而且技術上也很困難。所以就要用到垂直史坦納樹的技術。

柒、參考資料

1. 打開魔術箱

   Martin Gardner 著　遠流出版事業股份有限公司 出版發行

2. 高中數學實驗教材

   高中數學實驗教材小組 著　　國立編譯館 出版發行

3. 五邊形證法

   http://www.ntsec.gov.tw/activity/race-1/43/pdf/e/040407.pdf

4. F.R.K.Chung and R.L. Graham 1976 (Steiner trees for ladders)
5. Michael Herring 2004(The Euclideam Steiner Tree Problem)

附錄

一.史坦納生平

Jacob Steiner 1798-1863

Steiner 到 14 歲才會讀與寫,18 歲不顧父母的反對去上學,後來在 Heidelberg 和 Berlin 大學求學,以家教微薄的收入維生,他發明了等週長定理、反射原理等的定理,但有關於 Steiner 樹是最短路徑問題,據考證,Steiner 並沒有直接的貢獻。據推測,應是 Steiner 為當時很有名的數學家,而以他來命名。

二.當頂點等於１２０度

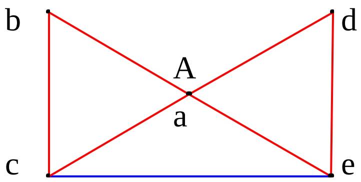


圖 1

當∠a 為 120 度時

若以上述作費馬點方法連接 $\overline{be}$ 和 $\overline{cd}$ 會交於 A 點

所以我們推論，若三角形中有一角為１２０度，其費馬點會在此鈍角上，史坦納樹也會貼著兩個短邊長走。

三.當頂點大於 120 度時

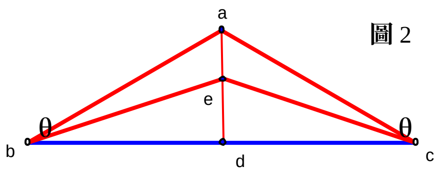


圖 2

令 $\overline{ad}=D$，$\overline{bd}=A$

$2A\sec\theta - A\tan\theta + D = 0$ 一次微分後

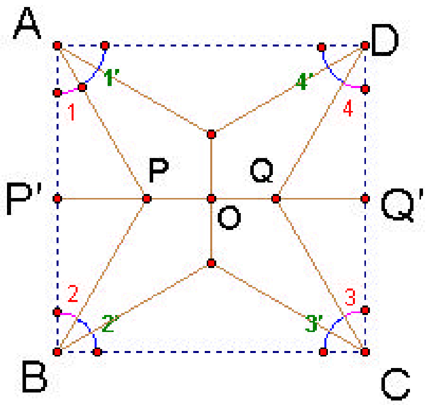
$2A\sec\theta\tan\theta - A\sec^2\theta = 0$

$2\tan\theta - \sec\theta = 0$

$2\sin\theta = 1$ sin θ =30? or 120?有極值

若是三角形中有角度超過１２０度，即以該角為此三角形的費馬點。

四.對邊相等且度相等的情況



∵ ∠APB＝∠APQ＝∠BPQ＝

$\angle DQC=\angle DQP=\angle CQP=\dfrac{p}{3}$

$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=\dfrac{p}{3}$

$\angle 1' + \angle 4' = \angle 2' + \angle 3' = (2\pi - \dfrac{4p}{3}) = \dfrac{2p}{3}$

亦即$(\dfrac{p}{2}-\angle 1)+(\dfrac{p}{2}-\angle 4)=(\dfrac{p}{2}-\angle 2)+(\dfrac{p}{2}-\angle 3)=\dfrac{2p}{3}$

$\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3=\dfrac{p}{3}$

$\angle 1-\angle 4=\angle 3-\angle 2$

$\longrightarrow$ ∠1＝∠3，∠2＝∠4

可知△APB ≅ △CDQ →∠1＝∠2

$=\angle 3=\angle 4=\dfrac{p}{6}$

五.四邊形探索過程

1.四邊分類(１)……等邊平形任意四邊形

以基礎方法來畫皆可(圖 3)。∵在取代點快出去時，圖形就會變成一條線，不成圖形(圖 4)。

2.四邊分類(２)……圓內接任意四邊形

以基礎畫法皆可(圖 5)。∵在取代點快出去時，圖形就會變成一三角形，不成圖形(圖 6)。

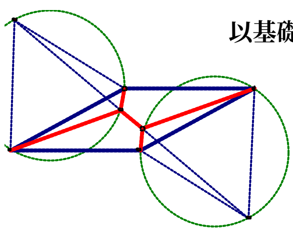


圖 3

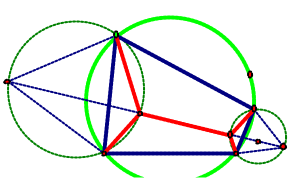


圖 5

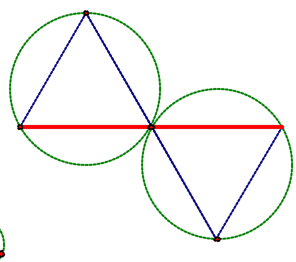


圖 4

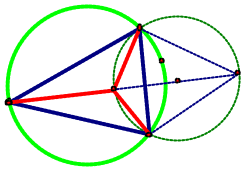


圖 6

3.四邊分類(3)……箏形任意四邊形

在一範圍內，可以畫出來。(下圖)，原以為畫不出來與角度有關係，但還是沒有規則。

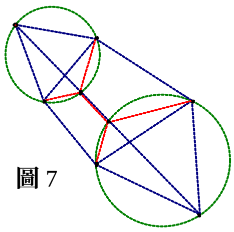


圖 7

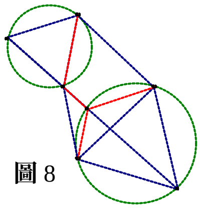


圖 8

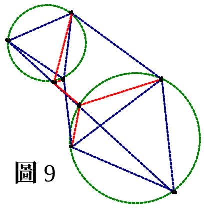


圖 9

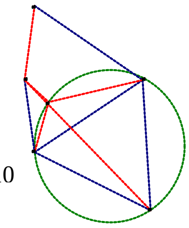


圖 10

重看箏形，定義範圍。範圍的分界線指能畫與不能畫之間的圖形 8。此圖取代路徑會與圖的邊重疊，某頂點為取代點。這讓我們想起之前類似的例子，三角形角度=120 時，以夾鈍角兩邊為取代路徑。而當角度＞120° 時，取代點就是夾鈍角那一點。就是在四邊形時，用基礎畫法，當取代點在圖外時，會有一頂點為新取代點。

經研究可知取代點在哪，對圖形的樹有很大的影響。可用做法來分。∵基礎做法是將兩三角形頂點連之線段 L 交三角形外接圓為取代點。而以其中一邊的去帶點來看，點會以用來做三角形的圖形邊上之兩頂點之間的圓弧上為範圍(圖 9)，(圖 12) 頂點為取代點。當 L 超出範圍時，史坦那點就會在圖外 (圖 13)。故可用三角形頂點連之線段與圖形邊的關係分類。

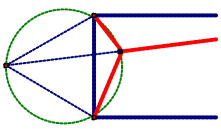
圖 11


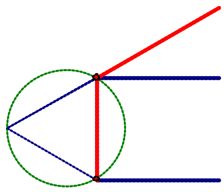
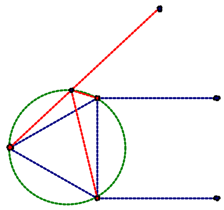
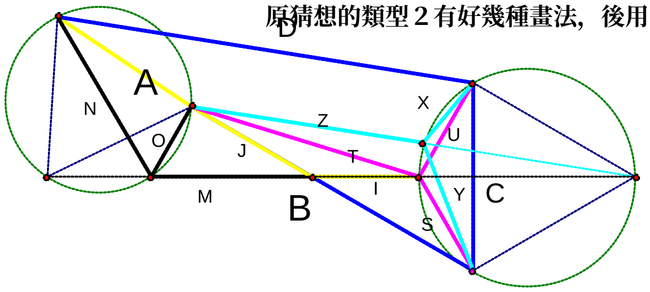
圖 12


圖 13


原猜想的類型 2 有好幾種畫法，後用 g s p 跑圖，最後以做三角史坦納樹(淡藍)為最小

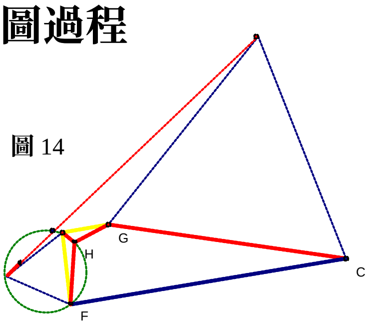


ABCD 為圖形本體

黑色線段	淡藍線段	粉紅線段	黃色線段
N = 3.19 公分 O = 1.41 公分 M = 4.58 公分 U = 1.86 公分 S = 1.88 公分	Z = 4.02 公分 X = 1.33 公分 Y = 2.36 公分 A = 2.77 公分	A = 2.77公分 T = 4.06公分 U = 1.86公分 S = 1.88公分	A = 2.77公分 J = 2.40公分 I = 1.81公分 U = 1.86公分 S = 1.88公分
N+O+M+U+S= 12.92公分	Z+X+Y+A = 10.49 公分	A+T+U+S= 10.58公分	A+J+I+U+S = 10.72公分

六.五邊形繪圖過程

圖 14



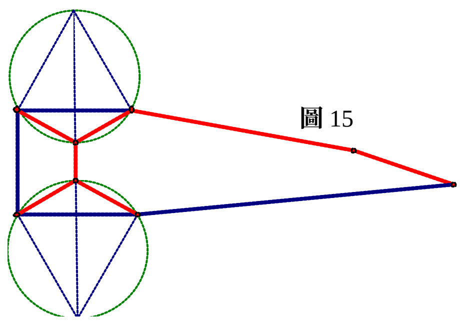


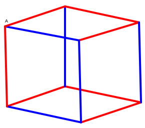
圖 15

七.圖形修改

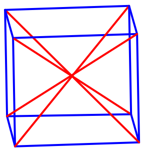
四邊形的類型四，當取代路徑上的某點，為圖形上的頂點，且此點兩邊的線夾的角度小於120°，此圖會錯誤。解決方法，將此點與夾此點兩線之端點當三角形做取代路徑。 (圖 14)

n＞6時，當目前最小的取代路徑，犯了第２項錯誤時。因為本身即以三角形為基礎做拼湊，如果用四邊形的方法，左右各抓一點的畫，就會破壞到三角形。所以，正確劃法是，將兩條線夾的角度小於 120 所夾的那個點。將重複此點的三角形（即此點左右兩個三角形）上的頂點，共五點，當一個五邊形，做此五邊形的取代路徑。(圖 15)

八.六面體的研究過程

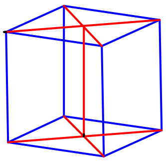


利用各個邊長來連成 7 ×a = a



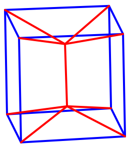
以中心點向八個頂點作圖

$4\sqrt{3}a \approx 6.928a$



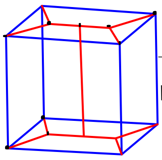
上下兩面各作對角線，以高ａ連接

$4\sqrt{2}a + a \approx 6.656a$



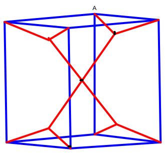
各個線段仰角３０度

$7\sqrt{\frac{2}{3}}a + a \approx 6.714a$



上下兩面各做史坦納樹，

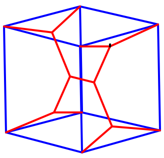
以高連接 $3a\ 2\sqrt{3}a \approx 6.464a$



各以一組相對邊作長方形，

然後做出史坦那圖形

$2\sqrt{3}a + 2\sqrt{2}a \approx 6.292a$



圖六中間四個連接點，為一個正方圖形，在將其做史坦納樹

$$\frac{8}{\sqrt{3}}a + \frac{5\sqrt{3}}{6}a + a - \frac{\sqrt{6}}{6}a \approx 6.236\ a$$