

第十屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA10-275

作品名稱：布豐針估計球體網格大小

姓名：陳偉寧

關鍵字：網格、布豐擲針問題

布豐針估計球體網格大小

摘要

將球體表面劃分成許多相同幾何圖形的網格，在地球科學、資訊科學上是很重要的課題，常見的網格圖形包括正方形、平行四邊形、正三角形與正六邊形。影像處理的原則上，將二個目標物分屬於不同的網格較易辨識。為了使二個目標物落在不同的網格，所需要將地球劃分的網格個數，可視為布豐擲針問題(Buffon's Needle Problem)的推廣與應用。

本文研究矩形、平行四邊形、正三角形、正六邊形網格的擲針壓線的機率問題，結果這些機率值均可得到精簡的形式。除此之外，並以 Visual Basic 寫成動態模擬的程式，驗證理論推導的結果。

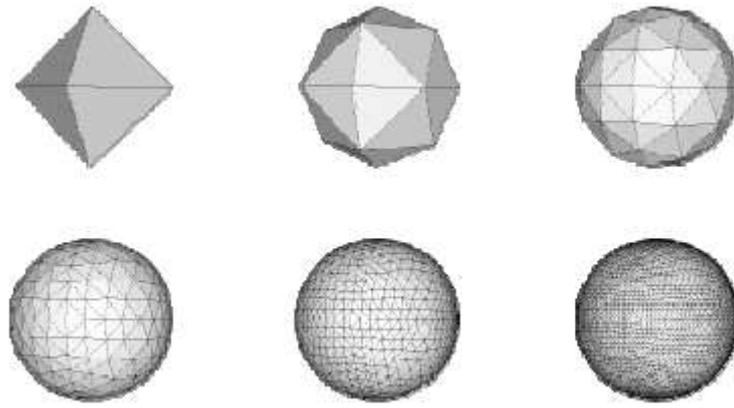
因此，只要確定使用何種網格(矩形、平行四邊形、正三角形或正六邊形)，知道二點的距離，並設定一個機率值當做門檻，就可得到網格邊長，進而決定將球體分成幾層。

壹、研究動機

在瀏覽 Google Earth 時，為了看清楚我們所要搜尋的目標，必須要調整不同的層(level)。將地球表面網格化，網格的數量會影響地圖的解析度與瀏覽地圖的速度。對於要細分多少網格才能兼顧地圖的解析度與瀏覽的速度，是一個值得探討的問題。

我搜尋這方面的論文，如參考資料一與參考資料二。下圖(一)是取自參考資料二，以正三角形網格劃分球體，先將球體劃分成 8 個正三角形，如圖(一)左上，稱為第 0 層；接著將原來每個正三角形細分為 4 個正三角形，因此共劃分成 32 個正三角形，如圖(一)中上，稱為第 1 層；依此類推，到了第 5 層，即圖(一)右下，已經劃分成 8192 個正三角形。

閱讀參考資料一後，經過思考，發現網格的大小竟然與著名的布豐擲針問題有密切關係，因此引起我很大的好奇。在實際推導過程中，大量使用高中數學教材中三角函數的半角、倍角、和差化積、積化和差，正餘弦的疊合以及基本的定積分公式，也因此對於這些公式的威力與內涵有更深入的了解。



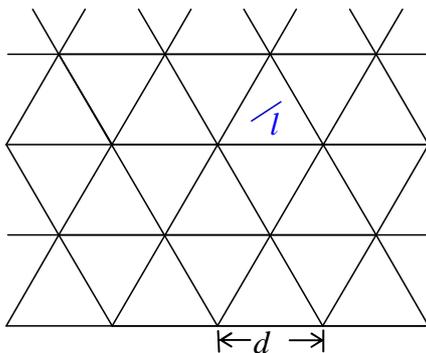
圖(一)

貳、研究目的

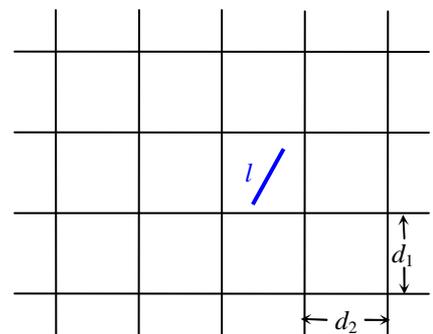
以正三角形網格為例，如圖(二)，如果給定兩個目標物(即二點)的距離為 l ，要將球體劃分幾層(即正三角形的邊長 d 為何?)，才能使大部分距離為 l 的點落入不同的正三角形中?

因為距離為 l 的二點落入不同的正三角形的機率 p 與 l, d 有關，因此，給定一個機率門檻值與兩點的距離 l ，即可求出正三角形的邊長 d ，使得此兩點落入不同的正三角形的機率 p 大於門檻值，詳細說明請參閱討論一。落入不同的正三角形的機率 p 與 l, d 的關係究竟為何?是一個值得研究的問題。

若網格是邊長 d_1 與 d_2 的矩形(如圖(三))、平行四邊形，或邊長 d 的正六邊形，我們也要研究落入不同的區域的機率與 l, d 的關係。



圖(二)



圖(三)

參、研究設備及器材

- 一. 紙、筆。
- 二. 電腦。
- 三. Word, Mathtype, Geometer's Sktchpad(G.S.P.), Matlab, Visual Basic 等軟體。

肆、研究過程

一、布豐擲針問題

西元1770年法國數學家布豐(Buffon)的一篇論文中，考慮在畫有距離為 d 的平行線的紙上，隨機擲一根長為 l (其中 $l < d$) 的針，求出針掉落壓線的機率為 $2r/\pi$ ，其中 $r = l/d$ ，這就是所謂布豐擲針問題。因為此機率與 π 值有關，因此也提供估計 π 值的一個著名方法。西元1812年拉普拉斯(Laplace)將此問題推廣到佈滿長寬分別為 d_1 與 d_2 的方格紙上，隨機擲一根長為 l (其中 $l < \min\{d_1, d_2\}$) 的針，推得針掉落壓線的機率為 $(2r_1 + 2r_2 - r_1r_2)/\pi$ ，其中 $r_1 = l/d_1$ 且 $r_2 = l/d_2$ ，一般稱這個問題為布豐-拉普拉斯擲針問題(Buffon-Laplace needle problem)。

歷史上對於布豐擲針問題有許多延伸，例如考慮長針($l > d$)或是針的形狀是凸多邊形，針壓線的機率也可求得；也有學者研究針隨機掉落在同心圓或是輻射狀的直線的平面上，求出針壓線的機率。但對於在平面上佈滿全等多邊形網格的擲針問題，我們一直未發現相關的討論。因此更激發我探索的動機。

二、矩形網格

首先考慮網格是邊長 d_1 與 d_2 的矩形，如圖(三)，事實上，二點的落入不同的矩形的機率就是著名的布豐擲針問題，有文獻可參考，如參考資料三，因此較容易解決。

定理一

若網格是邊長 d_1 與 d_2 的矩形，二點相距 l ，其中 $l < d_1$ ， $l < d_2$ ，則此二點的落入不同的矩形的機率

$$P(\text{相異矩形}) = \frac{1}{\pi} [2(r_1 + r_2) - r_1r_2]，\text{其中 } r_1 = \frac{l}{d_1} \text{ 且 } r_2 = \frac{l}{d_2} \quad (1)$$

推導過程如下：

如圖(四)，將距離為 l 的兩點視為長度為 l 的一根針。針的位置可由針的中點與針的斜角決定，

在 $ABCD$ 區域中，當針與水平線夾角(即斜角)是 $\phi (0 \leq \phi \leq \pi)$ 時，針的中點落入 $EFGH$ 區域才會與網格不相交。

因為 $\overline{HJ} = \left| \frac{l}{2} \cos \phi \right|$ ， $\overline{HI} = \frac{l}{2} \sin \phi$ ，因此將斜角 ϕ 分成 $\left[0, \frac{\pi}{2} \right)$ 與 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ 二部份討論。

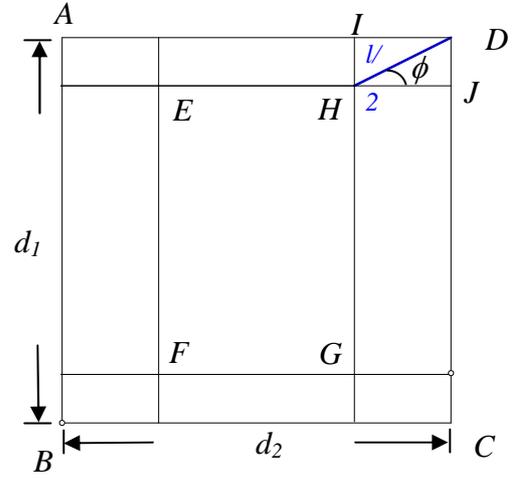
(一)當 $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$ 時：

$$\overline{HJ} = \frac{l}{2} \cos \phi, \quad \overline{HI} = \frac{l}{2} \sin \phi,$$

$$\text{所以 } \overline{EH} = d_2 - l \cos \phi, \quad \overline{EF} = d_1 - l \sin \phi$$

矩形 $EFGH$ 面積

$$\begin{aligned} EFGH(\phi) &= (d_1 - l \sin \phi)(d_2 - l \cos \phi) \\ &= d_1 d_2 - d_1 l \cos \phi - d_2 l \sin \phi + l^2 \sin \phi \cos \phi \\ &= d_1 d_2 - d_1 l \cos \phi - d_2 l \sin \phi + \frac{1}{2} l^2 \sin 2\phi. \end{aligned}$$



圖(四)

(二)當 $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$ 時：

$$\overline{HJ} = -\frac{l}{2} \cos \phi, \quad \overline{HI} = \frac{l}{2} \sin \phi,$$

$$\text{所以 } \overline{EH} = d_2 + l \cos \phi, \quad \overline{EF} = d_1 - l \sin \phi$$

矩形 $EFGH$ 面積

$$\begin{aligned} EFGH(\phi) &= (d_1 - l \sin \phi)(d_2 + l \cos \phi) \\ &= d_1 d_2 + d_1 l \cos \phi - d_2 l \sin \phi - l^2 \sin \phi \cos \phi \\ &= d_1 d_2 + d_1 l \cos \phi - d_2 l \sin \phi - \frac{1}{2} l^2 \sin 2\phi \end{aligned}$$

由 (一)，(二)

針沒壓線的機率

$$\begin{aligned} P(\text{針沒壓線}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{EFGH(\phi)}{ABCD \text{面積}} d\phi \\ &= \frac{1}{\pi d_1 d_2} \left\{ \left[d_1 d_2 \phi - d_1 l \sin \phi + d_2 l \cos \phi - \frac{1}{4} l^2 \cos 2\phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \left[d_1 d_2 \phi + d_1 l \sin \phi + d_2 l \cos \phi + \frac{1}{4} l^2 \cos 2\phi \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi d_1 d_2} (d_1 d_2 \pi - 2d_1 l - 2d_2 l + l^2)$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} \left(r_1 + r_2 - \frac{r_1 r_2}{2} \right)$$

因此，針壓線的機率

$$P(\text{針壓線}) = \frac{2}{\pi} \left(r_1 + r_2 - \frac{r_1 r_2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} [2(r_1 + r_2) - r_1 r_2] \square$$

三、平行四邊形網格

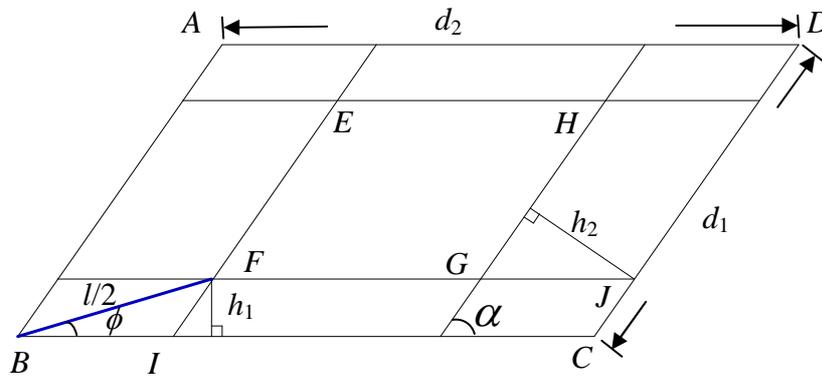
其次，考慮網格是平行四邊形的情形。

定理二

若網格是邊長 d_1 與 d_2 ，且一內角是 α 弧度 ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) 的平行四邊形，如圖(五)，二點相距 l ，

其中 $l < d_1 \sin \alpha$ ， $l < d_2$ ，則此二點的落入不同平行四邊形的機率

$$P(\text{相異平行四邊形}) = \frac{1}{\pi} \left[2(r_1 + r_2) - r_1 r_2 + \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) r_1 r_2 \cot \alpha \right] \csc \alpha, \text{ 其中 } r_1 = \frac{l}{d_1} \text{ 且 } r_2 = \frac{l}{d_2} \quad (2)$$



圖(五)

推導過程如下：

將此問題視為布豐擲針問題的推廣，距離為 l 的兩點視為長度為 l 的針，針的位置可由針的中點與針的斜角決定，如圖(五)。在 $ABCD$ 區域中，當針的斜角是 ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) 時，針的中點落入 $EFGH$ 區域才會與網絡不相交。

因為 $h_1 = \frac{l}{2} \sin \phi$ ， $h_2 = \left| \frac{l}{2} \sin(\alpha - \phi) \right|$ ，因此將斜角 ϕ 分成 $[0, \alpha]$ 與 $[\alpha, \pi]$ 二部份討論。

(一)當 $0 \leq \phi < \alpha$ 時:

$$h_1 = \frac{l}{2} \sin \phi, \quad h_2 = \frac{l}{2} \sin(\alpha - \phi),$$

$$\overline{FI} = h_1 \csc \alpha = \frac{l}{2} \sin \phi \csc \alpha, \quad \overline{GJ} = h_2 \csc \alpha = \frac{l}{2} \sin(\alpha - \phi) \csc \alpha$$

$$\text{所以 } \overline{EF} = d_1 - l \sin \phi \csc \alpha, \quad \overline{FG} = d_2 - l \sin(\alpha - \phi) \csc \alpha$$

$EFGH$ 面積

$$EFGH(\phi) = (d_1 - l \sin \phi \csc \alpha) [d_2 - l \sin(\alpha - \phi) \csc \alpha] \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{AIFE(\phi)}{ABCD \text{面積}} &= \frac{(d_1 - l \sin \phi \csc \alpha) [d_2 - l \sin(\alpha - \phi) \csc \alpha] \sin \alpha}{d_1 d_2 \sin \alpha} \\ &= \left(1 - \frac{l}{d_1} \sin \phi \csc \alpha\right) \left[1 - \frac{l}{d_2} \sin(\alpha - \phi) \csc \alpha\right] \end{aligned}$$

$$\text{令 } r_1 = \frac{l}{d_1} \text{ 且 } r_2 = \frac{l}{d_2}, \text{ 則}$$

$$\frac{EFGH(\phi)}{ABCD \text{面積}} = (1 - r_1 \csc \alpha \sin \phi) [1 - r_2 \csc \alpha \sin(\alpha - \phi)]$$

$$= 1 - r_2 \csc \alpha \sin(\alpha - \phi) - r_1 \csc \alpha \sin \phi + r_1 r_2 \csc^2 \alpha \sin \phi \sin(\alpha - \phi)$$

$$= 1 - r_2 \csc \alpha \sin(\alpha - \phi) - r_1 \csc \alpha \sin \phi + r_1 r_2 \csc^2 \alpha \left(-\frac{1}{2}\right) (\cos \alpha - \cos(2\phi - \alpha))$$

$$= 1 - r_2 \csc \alpha \sin(\alpha - \phi) - r_1 \csc \alpha \sin \phi - \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos(2\phi - \alpha)$$

(二)當 $\alpha \leq \phi \leq \pi$ 時:

$$h_1 = \frac{l}{2} \sin \phi, \quad h_2 = -\frac{l}{2} \sin(\alpha - \phi),$$

$$\overline{FI} = h_1 \csc \alpha = \frac{l}{2} \sin \phi \csc \alpha, \quad \overline{GJ} = h_2 \csc \alpha = -\frac{l}{2} \sin(\alpha - \phi) \csc \alpha,$$

$$\text{所以 } \overline{EF} = d_1 - l \sin \phi \csc \alpha, \quad \overline{FG} = d_2 + l \sin(\alpha - \phi) \csc \alpha$$

$EFGH$ 面積

$$EFGH(\phi) = (d_1 - l \sin \phi \csc \alpha) [d_2 + l \sin(\alpha - \phi) \csc \alpha] \sin \alpha$$

$$\frac{EFGH(\phi)}{ABCD \text{面積}} = \frac{(d_1 - l \csc \alpha \sin \phi) [d_2 + l \csc \alpha \sin(\alpha - \phi)] \sin \alpha}{d_1 d_2 \sin \alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{l}{d_1} \csc \alpha \sin \phi\right) \left[1 + \frac{l}{d_2} \csc \alpha \sin(\alpha - \phi)\right] \\
&= (1 - r_1 \csc \alpha \sin \phi) [1 + r_2 \csc \alpha \sin(\alpha - \phi)] \\
&= 1 + r_2 \csc \alpha \sin(\alpha - \phi) - r_1 \csc \alpha \sin \phi - r_1 r_2 \csc^2 \alpha \sin \phi \sin(\alpha - \phi) \\
&= 1 + r_2 \csc \alpha \sin(\alpha - \phi) - r_1 \csc \alpha \sin \phi - r_1 r_2 \csc^2 \alpha \left(-\frac{1}{2}\right) (\cos \alpha - \cos(2\phi - \alpha)) \\
&= 1 + r_2 \csc \alpha \sin(\alpha - \phi) - r_1 \csc \alpha \sin \phi + \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos \alpha - \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos(2\phi - \alpha)
\end{aligned}$$

由 (一), (二)

針沒壓線的機率

$$\begin{aligned}
P(\text{針沒壓線}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{EFGH(\phi)}{ABCD \text{面積}} d\phi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \left[1 - \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos \alpha - r_2 \csc \alpha \sin(\alpha - \phi) - r_1 \csc \alpha \sin \phi + \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos(2\phi - \alpha)\right] d\phi \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\pi \left[1 + \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos \alpha + r_2 \csc \alpha \sin(\alpha - \phi) - r_1 \csc \alpha \sin \phi - \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos(2\phi - \alpha)\right] d\phi \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\left(1 - \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos \alpha\right) \phi - r_2 \csc \alpha \cos(\alpha - \phi) + r_1 \csc \alpha \cos \phi + \frac{1}{4} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \sin(2\phi - \alpha) \right]_0^\alpha \\
&+ \frac{1}{\pi} \left[\left(1 + \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos \alpha\right) \phi + r_2 \csc \alpha \cos(\alpha - \phi) + r_1 \csc \alpha \cos \phi - \frac{1}{4} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \sin(2\phi - \alpha) \right]_\alpha^\pi \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos \alpha\right) \alpha - r_2 \csc \alpha (1 - \cos \alpha) + r_1 \csc \alpha (\cos \alpha - 1) + \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \sin \alpha \right. \\
&+ \left. \left(1 + \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos \alpha\right) (\pi - \alpha) + r_2 \csc \alpha (-\cos \alpha - 1) + r_1 \csc \alpha (-1 - \cos \alpha) - \frac{1}{4} r_1 r_2 \csc^2 \alpha (-2 \sin \alpha) \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos \alpha\right) \pi - 2r_2 \csc \alpha - 2r_1 \csc \alpha + r_1 r_2 \csc^2 \alpha \sin \alpha - \alpha r_1 r_2 \csc^2 \alpha \cos \alpha \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc \alpha \cot \alpha\right) \pi - 2(r_1 + r_2) \csc \alpha + r_1 r_2 \csc \alpha - \alpha r_1 r_2 \csc \alpha \cot \alpha \right\} \\
&= 1 + \frac{1}{2} r_1 r_2 \csc \alpha \cot \alpha - \frac{1}{\pi} [2(r_1 + r_2) - r_1 r_2 + \alpha r_1 r_2 \cot \alpha] \csc \alpha
\end{aligned}$$

因此，針壓線的機率

$$\begin{aligned}
P(\text{針壓線}) &= -\frac{1}{2}r_1r_2 \csc \alpha \cot \alpha + \frac{1}{\pi} \left[2(r_1+r_2) - r_1r_2 + \alpha r_1r_2 \cot \alpha \right] \csc \alpha \\
&= \frac{1}{\pi} \left[2(r_1+r_2) - r_1r_2 + \alpha r_1r_2 \cot \alpha - \frac{\pi}{2} r_1r_2 \cot \alpha \right] \csc \alpha \\
&= \frac{1}{\pi} \left[2(r_1+r_2) - r_1r_2 + \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) r_1r_2 \cot \alpha \right] \csc \alpha \square
\end{aligned}$$

四、正三角形網格

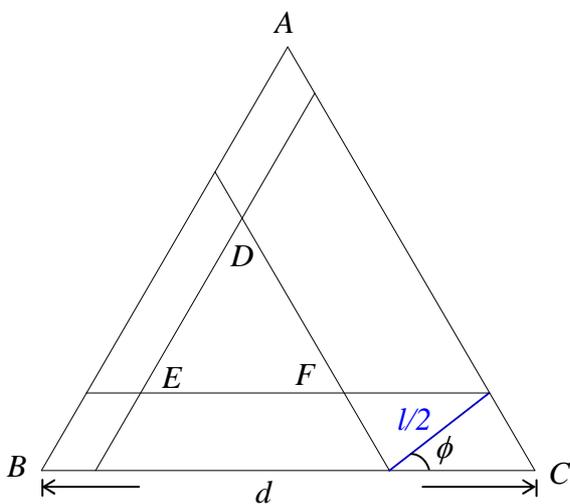
接著研究正三角形網格的問題。

定理三

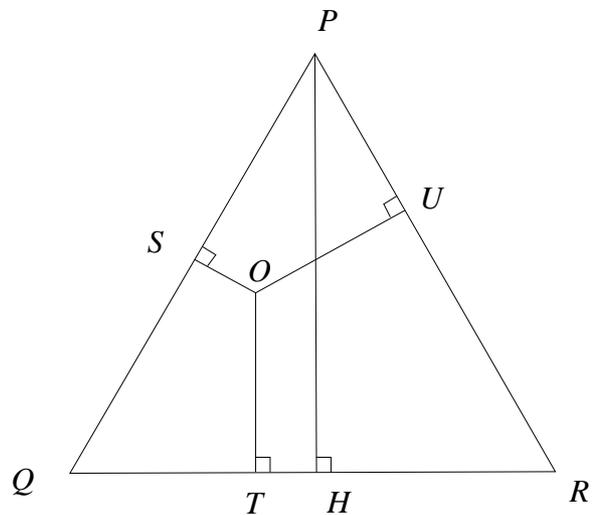
如圖(六)，設正三角形邊長 d ，二點相距 l ，其中 $l < \frac{\sqrt{3}}{2}d$ ，則此二點的落入不同的正三角形的機率

$$P(\text{相異三角形}) = \frac{1}{\pi} \left[4\sqrt{3}r - \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) r^2 \right], \text{ 其中 } r = \frac{l}{d} \quad (3)$$

推導過程如下：



圖(六)



圖(七)

先利用動態幾何軟體 G.S.P. 實驗並畫出圖(六)。在網格 ΔABC 區域中，當針的斜角是 ϕ 時，針的中點落入 ΔDEF 區域才會與網絡不相交。因為 ΔDEF 的三邊分別與 ΔABC 的三邊平行，因此 ΔDEF 為正三角形。

如何求 ΔDEF 的面積呢? 以下利用一個簡單的引理，簡化計算。

引理 1

如圖(七)，設 O 是 ΔPQR 內任一點，則 O 到 ΔPQR 三邊的距離和等於 ΔPQR 的高，

$$\text{即 } \overline{OS} + \overline{OT} + \overline{OU} = \overline{PH}。$$

將此引理 1 應用於求正 ΔDEF 的高。

在圖(八)中， O 是 ΔDEF 內任一點，則正 ΔDEF 的高

$$\begin{aligned} \overline{DN} &= \overline{OK_4} + \overline{OK_5} + \overline{OK_6} \text{ (由引理 1)} \\ &= (\overline{OK_1} - \overline{K_1K_4}) + (\overline{OK_2} - \overline{K_2K_5}) + (\overline{OK_3} - \overline{K_3K_6}) \end{aligned}$$

令 $\overline{K_1K_4} = h_2$ ， $\overline{K_2K_5} = h_1$ ， $\overline{K_3K_6} = h_3$ ，則

$$\begin{aligned} \overline{DN} &= (\overline{OK_1} - h_2) + (\overline{OK_2} - h_1) + (\overline{OK_3} - h_3) \\ &= (\overline{OK_1} + \overline{OK_2} + \overline{OK_3}) - (h_1 + h_2 + h_3) \end{aligned}$$

$$= \overline{AM} - (h_1 + h_2 + h_3) \text{ (由引理 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}d - (h_1 + h_2 + h_3)$$

至於 h_1 ， h_2 ， h_3 如何求得呢？在圖(九)中，當針的斜角是 $(0 \leq \phi \leq \pi)$ 時，

$$h_1 = \frac{l}{2} \sin \phi, \quad h_2 = \left| \frac{l}{2} \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) \right|, \quad h_3 = \left| \frac{l}{2} \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) \right|,$$

因此，將斜角 ϕ 分成 $\left[0, \frac{\pi}{3} \right)$ ， $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$ 與 $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi \right]$ 三部份討論。

(一) 當 $0 \leq \phi < \frac{\pi}{3}$ 時:

$$h_1 = \frac{l}{2} \sin \phi, \quad h_2 = \frac{l}{2} \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right), \quad h_3 = \frac{l}{2} \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right),$$

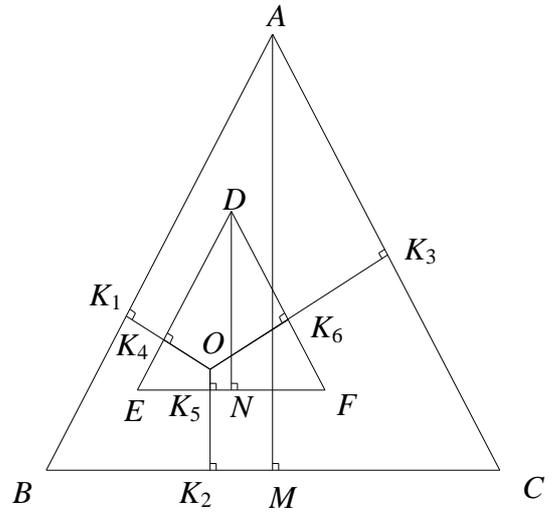
$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{l}{2} \left[\sin \phi + \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= \frac{l}{2} \left(\sin \phi + 2 \cos \phi \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

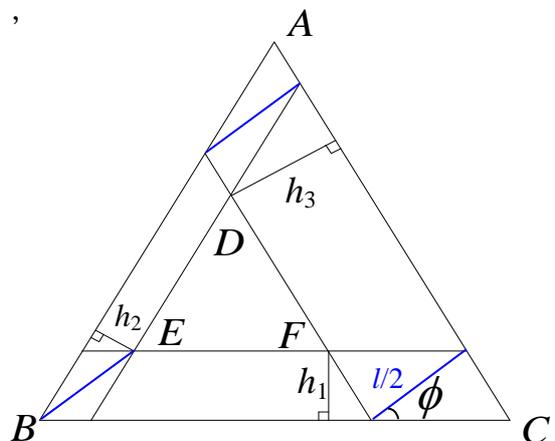
$$= l \left(\frac{1}{2} \sin \phi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi \right)$$

$$= l \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right)$$

因為 ΔDEF 是正三角形，所以 ΔDEF 的面積



圖(八)



圖(九)

$$\begin{aligned}
\Delta DEF(\phi) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \overline{DN} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{DN}^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} d - l \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) \right]^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{3}{4} d^2 - \sqrt{3} dl \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) + l^2 \cos^2 \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{3}{4} d^2 - \sqrt{3} dl \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{l^2}{2} \left[1 + \cos \left(2\phi - \frac{\pi}{3} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ d^2 - \frac{4ld}{\sqrt{3}} \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{2}{3} l^2 \left[1 + \cos \left(2\phi - \frac{\pi}{3} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\left(d^2 + \frac{2}{3} l^2 \right) - \frac{4ld}{\sqrt{3}} \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{2}{3} l^2 \cos \left(2\phi - \frac{\pi}{3} \right) \right]
\end{aligned}$$

(二) 當 $\frac{\pi}{3} \leq \phi < \frac{2\pi}{3}$ 時:

$$h_1 = \frac{l}{2} \sin \phi, \quad h_2 = -\frac{l}{2} \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right), \quad h_3 = \frac{l}{2} \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{l}{2} \left[\sin \phi - \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= \frac{l}{2} \left[\sin \phi + 2 \sin \phi \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

$$= l \sin \phi$$

$$\begin{aligned}
\Delta DEF(\phi) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \overline{DN} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{DN}^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d - l \sin \phi \right)^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4} d^2 - \sqrt{3} dl \sin \phi + l^2 \sin^2 \phi \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{3}{4} d^2 - \sqrt{3} dl \sin \phi + \frac{l^2}{2} (1 - \cos 2\phi) \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[d^2 - \frac{4dl}{\sqrt{3}} \sin \phi + \frac{2l^2}{3} (1 - \cos 2\phi) \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\left(d^2 + \frac{2l^2}{3} \right) - \frac{4dl}{\sqrt{3}} \sin \phi - \frac{2l^2}{3} \cos 2\phi \right]
\end{aligned}$$

(三)當 $\frac{2\pi}{3} \leq \phi \leq \pi$ 時:

$$h_1 = \frac{l}{2} \sin \phi, \quad h_2 = -\frac{l}{2} \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right), \quad h_3 = -\frac{l}{2} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{l}{2} \left[\sin \phi - \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$= \frac{l}{2} \left(\sin \phi - 2 \cos \phi \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= l \left(\frac{1}{2} \sin \phi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi \right)$$

$$= -l \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Delta DEF(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \overline{DN} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{DN}^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} d + l \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \right]^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{3}{4} d^2 + \sqrt{3} dl \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) + l^2 \cos^2\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{3}{4} d^2 + \sqrt{3} dl \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{l^2}{2} \left[1 + \cos\left(2\phi + \frac{\pi}{3}\right) \right] \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ d^2 + \frac{4dl}{\sqrt{3}} \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2l^2}{3} \left[1 + \cos\left(2\phi + \frac{\pi}{3}\right) \right] \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\left(d^2 + \frac{2l^2}{3} \right) + \frac{4dl}{\sqrt{3}} \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2l^2}{3} \cos\left(2\phi + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

由 (一), (二), (三),

針沒有壓線的機率

$$P(\text{針不壓線}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\Delta DEF(\phi)}{\Delta ABC} d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi \Delta ABC} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \Delta DEF(\phi) d\phi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \Delta DEF(\phi) d\phi + \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi \Delta DEF(\phi) d\phi \right)$$

$$= \frac{1}{\pi d^2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\left(d^2 + \frac{2}{3} l^2 \right) - \frac{4ld}{\sqrt{3}} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{3} l^2 \cos\left(2\phi - \frac{\pi}{3}\right) \right] d\phi \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left[\left(d^2 + \frac{2l^2}{3} \right) - \frac{4dl}{\sqrt{3}} \sin \phi - \frac{2l^2}{3} \cos 2\phi \right] d\phi \\
& + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left[\left(d^2 + \frac{2l^2}{3} \right) + \frac{4dl}{\sqrt{3}} \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{2l^2}{3} \cos \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) \right] d\phi \\
& = \frac{1}{\pi d^2} \left\{ \left[\left(d^2 + \frac{2}{3} l^2 \right) \phi - \frac{4dl}{\sqrt{3}} \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{3} l^2 \sin \left(2\phi - \frac{\pi}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \right. \\
& + \left[\left(d^2 + \frac{2l^2}{3} \right) \phi + \frac{4dl}{\sqrt{3}} \cos \phi - \frac{l^2}{3} \sin 2\phi \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\
& \left. + \left[\left(d^2 + \frac{2l^2}{3} \right) \phi + \frac{4dl}{\sqrt{3}} \sin \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{l^2}{3} \sin \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \right\} \\
& = \frac{1}{\pi d^2} \left[\left(d^2 + \frac{2}{3} l^2 \right) \pi - 4\sqrt{3}dl + \sqrt{3}l^2 \right] \\
& = \frac{1}{\pi} \left[\left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{l}{d} \right)^2 \right) \pi - 4\sqrt{3} \left(\frac{l}{d} \right) + \sqrt{3} \left(\frac{l}{d} \right)^2 \right] \\
& = 1 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{l}{d} \right)^2 \pi - 4\sqrt{3} \left(\frac{l}{d} \right) + \sqrt{3} \left(\frac{l}{d} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

令 $r = \frac{l}{d}$ ，則針壓線的機率

$$\begin{aligned}
P(\text{針壓線}) & = \frac{1}{\pi} \left[4\sqrt{3} \left(\frac{l}{d} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{l}{d} \right)^2 \pi - \sqrt{3} \left(\frac{l}{d} \right)^2 \right] \\
& = \frac{1}{\pi} \left[4\sqrt{3}r - \left(\frac{2}{3} \pi + \sqrt{3} \right) r^2 \right] \square
\end{aligned}$$

五、正六邊形網格

最後，研究正六邊形網格的問題。

定理四

如圖(十)，設正六邊形邊長 d ，二點相距 l ，其中 $l < d$ ，則此二點的落入不同的正六邊形的機率

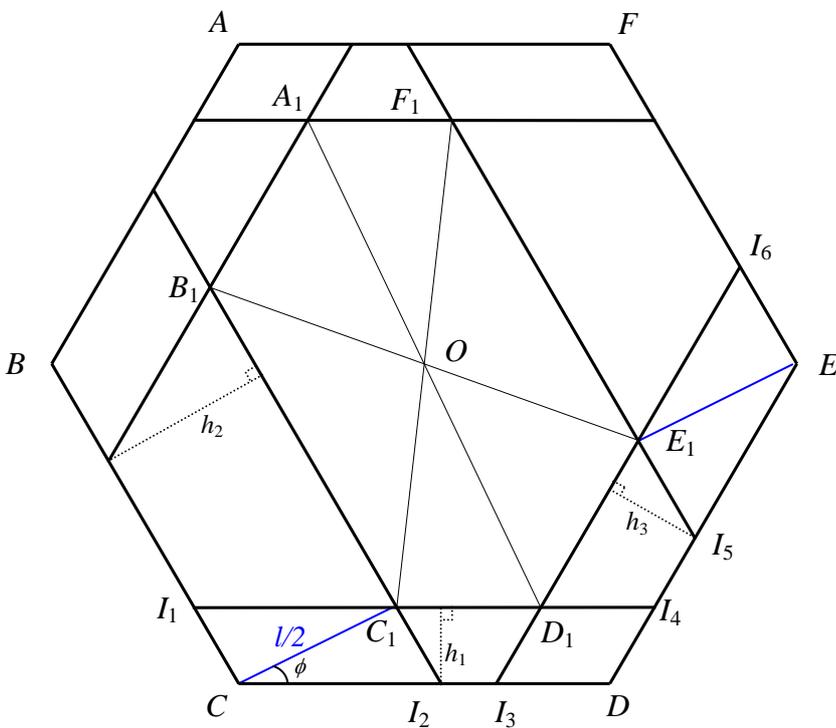
$$P(\text{相異正六邊形}) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4}{\sqrt{3}} r - \left(\frac{7}{6\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{27} \right) r^2 \right], \text{ 其中 } r = \frac{l}{d} \quad (4)$$

這個機率值似乎不容易求得，我們利用下列簡單的引理，再次避開繁複的計算。

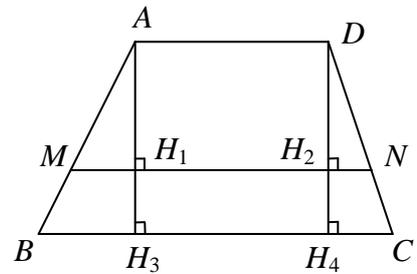
引理 2

如圖(十一)，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{MN}$ ， $\overline{AH_3} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{DH_4} \perp \overline{BC}$ ，若

$$\overline{AH_1} : \overline{H_1H_3} = p : q, \text{ 則 } \overline{MN} = \frac{p\overline{BC} + q\overline{AD}}{p+q}。$$



圖(十)



圖(十一)

證明引理 2：

因為 $\Delta ABH_3 \sim \Delta AMH_1$ ， $\overline{AH_1} : \overline{AH_3} = p : (p+q)$ ， $\overline{MH_1} = \frac{p}{p+q} \overline{BH_3}$ ，同理， $\overline{NH_2} = \frac{p}{p+q} \overline{CH_4}$ 。

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \overline{MH_1} + \overline{H_1H_2} + \overline{NH_2} \\ &= \frac{p}{p+q} (\overline{BH_3} + \overline{CH_4}) + \overline{H_1H_2} \\ &= \frac{p}{p+q} \left(\overline{BH_3} + \overline{CH_4} + \frac{p+q}{p} \overline{H_1H_2} \right) \\ &= \frac{p}{p+q} \left(\overline{BH_3} + \overline{CH_4} + \overline{H_1H_2} + \frac{q}{p} \overline{H_1H_2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{p}{p+q} \left(\overline{BC} + \frac{q}{p} \overline{AD} \right)$$

$$= \frac{p\overline{BC} + q\overline{AD}}{p+q} \quad \square$$

證明定理四：

設 $\overline{C_1D_1}$ 與 \overline{CD} 的距離為 h_1 ， $\overline{B_1C_1}$ 與 \overline{BC} 的距離為 h_2 ， $\overline{D_1E_1}$ 與 \overline{DE} 的距離為 h_3 。

如圖(十)，當針的斜角是 ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) 時，

$$h_1 = \frac{l}{2} \sin \phi, \quad h_2 = \frac{l}{2} \left| \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) \right|, \quad h_3 = \frac{l}{2} \left| \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) \right|$$

$$\overline{I_1I_4} = \overline{CD} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}d - h_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}d} + \overline{BE} \cdot \frac{h_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}d} \quad (\text{由引理 2})$$

$$= d \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}d - h_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}d} + 2d \cdot \frac{h_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}d}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}d - h_1 + 2h_1 \right)$$

$$= d + \frac{2}{\sqrt{3}}h_1$$

$$\overline{C_1I_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}h_2, \quad \overline{D_1I_4} = \frac{2}{\sqrt{3}}h_3,$$

$$\overline{C_1D_1} = \overline{I_1I_4} - \overline{C_1I_1} - \overline{D_1I_4}$$

$$= d + \frac{2}{\sqrt{3}}h_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}(h_2 + h_3)$$

$$= d + \frac{2}{\sqrt{3}}(h_1 - h_2 - h_3)$$

$$\Delta OC_1D_1 + \Delta OA_1F_1 = \overline{C_1D_1} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}d - h_1 \right)$$

$$= \left(d + \frac{2}{\sqrt{3}}(h_1 - h_2 - h_3) \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}d - h_1 \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}d^2 - dh_1 + d(h_1 - h_2 - h_3) - \frac{2}{\sqrt{3}}(h_1^2 - h_1h_2 - h_1h_3)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}d^2 - d(h_2 + h_3) - \frac{2}{\sqrt{3}}(h_1^2 - h_1h_2 - h_1h_3)$$

$$\text{同理， } \Delta OD_1E_1 + \Delta OA_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}d^2 - d(h_1 + h_2) - \frac{2}{\sqrt{3}}(h_3^2 - h_1h_3 - h_2h_3)$$

$$\Delta OB_1C_1 + \Delta OE_1F_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}d^2 - d(h_1 + h_3) - \frac{2}{\sqrt{3}}(h_2^2 - h_1h_2 - h_3h_2)$$

因此，六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1(\phi)$

$$\begin{aligned} &= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2d(h_1 + h_2 + h_3) - \frac{2}{\sqrt{3}}[h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 2(h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3)] \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2d(h_1 + h_2 + h_3) - \frac{2}{\sqrt{3}}[(h_1 + h_2 + h_3)^2 - 4(h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3)] \end{aligned}$$

(一)當 $0 \leq \phi < \frac{\pi}{3}$:

$$h_1 = \frac{l}{2} \sin \phi, \quad h_2 = \frac{l}{2} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right), \quad h_3 = \frac{l}{2} \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{l}{2} \left[\sin \phi + \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$= \frac{l}{2} \left(\sin \phi + 2 \cos \phi \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= l \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3$$

$$= \frac{l^2}{4} \left[\sin \phi \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) + \sin \phi \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[\sin\left(2\phi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \frac{\pi}{6} + \cos(2\phi) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2\phi + \frac{\pi}{6}\right) - \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[\sin\left(2\phi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos(2\phi) + \frac{1}{2} + \sin\left(2\phi + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[2 \sin(2\phi) \cos \frac{\pi}{6} + \cos(2\phi) + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[\sqrt{3} \sin(2\phi) + \cos(2\phi) + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{l^2}{4} \left[\cos\left(2\phi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \right]$$

六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1(\phi)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2d(h_1 + h_2 + h_3) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[(h_1 + h_2 + h_3)^2 - 4(h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3) \right] \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2dl \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ l^2 \cos^2\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) - l^2 \left[\cos\left(2\phi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \right] \right\} \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2dl \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{l^2}{2} \left[1 + \cos\left(2\phi - \frac{\pi}{3}\right) \right] - l^2 \left[\cos\left(2\phi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \right] \right\} \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2dl \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2} \cos\left(2\phi - \frac{\pi}{3}\right) \right] \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2dl \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{l^2}{\sqrt{3}} \left[\cos\left(2\phi - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \right]
 \end{aligned}$$

(二) 當 $\frac{\pi}{3} \leq \phi < \frac{2}{3}\pi$:

$$h_1 = \frac{l}{2} \sin \phi, \quad h_2 = \frac{l}{2} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right), \quad h_3 = -\frac{l}{2} \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{l}{2} \left[\sin \phi + \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$= \frac{l}{2} \left(\sin \phi + 2 \sin \phi \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= l \sin \phi$$

$$h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3$$

$$= \frac{l^2}{4} \left[\sin \phi \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) - \sin \phi \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[\sin\left(2\phi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \frac{\pi}{6} - \cos(2\phi) - \cos \frac{\pi}{3} - \sin\left(2\phi + \frac{\pi}{6}\right) + \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[\sin\left(2\phi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos(2\phi) - \sin\left(2\phi + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[-2 \cos 2\phi \sin \frac{\pi}{6} - \cos(2\phi) + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[-2 \cos(2\phi) + \frac{1}{2} \right]$$

六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1(\phi)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2d(h_1 + h_2 + h_3) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[(h_1 + h_2 + h_3)^2 - 4(h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3) \right] \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2dl \sin \phi - \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ l^2 \sin^2 \phi - \frac{l^2}{2} \left[-2 \cos 2\phi + \frac{1}{2} \right] \right\} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2dl \sin \phi - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(l^2 \sin^2 \phi + l^2 \cos 2\phi - \frac{l^2}{4} \right) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2dl \sin \phi - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{l^2}{2} \left(\frac{1 - \cos 2\phi}{2} \right) + l^2 \cos 2\phi - \frac{l^2}{4} \right] \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2dl \sin \phi - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4} l^2 \cos 2\phi \right) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}d^2 - 2dl \sin \phi - \frac{\sqrt{3}}{2} l^2 \cos 2\phi
\end{aligned}$$

(三) 當 $\frac{2}{3}\pi \leq \phi \leq \pi$:

$$h_1 = \frac{l}{2} \sin \phi, \quad h_2 = -\frac{l}{2} \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right), \quad h_3 = -\frac{l}{2} \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{l}{2} \left[\sin \phi - \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= \frac{l}{2} \left(\sin \phi - 2 \cos \phi \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= l \sin \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3$$

$$= \frac{l^2}{4} \left[-\sin \phi \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) - \sin \phi \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[-\sin \left(2\phi - \frac{\pi}{6} \right) - \sin \frac{\pi}{6} + \cos(2\phi) + \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(2\phi + \frac{\pi}{6} \right) + \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[-\sin \left(2\phi - \frac{\pi}{6} \right) + \cos(2\phi) + \frac{1}{2} - \sin \left(2\phi + \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[\cos 2\phi - 2 \sin 2\phi \cos \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{l^2}{8} \left[\cos 2\phi - \sqrt{3} \sin 2\phi + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{l^2}{4} \left[\cos \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{4} \right]$$

六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1(\phi)$

$$\begin{aligned} &= \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 - 2d(h_1 + h_2 + h_3) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[(h_1 + h_2 + h_3)^2 - 4(h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3) \right] \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 - 2dl \sin \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ l^2 \sin^2 \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) - l^2 \left[\cos \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{4} \right] \right\} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 - 2dl \sin \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{l^2}{2} \left[1 - \cos \left(2\phi - \frac{2\pi}{3} \right) \right] - l^2 \left[\cos \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{4} \right] \right\} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 - 2dl \sin \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{l^2}{2} \left[1 + \cos \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) \right] - l^2 \left[\cos \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{4} \right] \right\} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 - 2dl \sin \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2} \cos \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 + 2dl \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{l^2}{\sqrt{3}} \left[\cos \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

由(一)、(二)、(三)，

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi A_1B_1C_1D_1E_1F_1(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 - 2dl \cos \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{l^2}{\sqrt{3}} \left[\cos \left(2\phi - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} d\phi \\ &+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 - 2dl \sin \phi - \frac{\sqrt{3}}{2} l^2 \cos 2\phi \right\} d\phi \\ &+ \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 + 2dl \cos \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{l^2}{\sqrt{3}} \left[\cos \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} d\phi \\ &= \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \phi - 2dl \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{l^2}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} \sin \left(2\phi - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \phi \right] \right\}_0^{\frac{\pi}{3}} + \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \phi + 2dl \cos \phi - \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \sin 2\phi \right\}_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\ &+ \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \phi + 2dl \sin \left(\phi + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{l^2}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} \sin \left(2\phi + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \phi \right] \right\}_{\frac{2\pi}{3}}^\pi \\ &= \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \cdot \frac{\pi}{3} - 2dl + \frac{l^2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right] \right\} + \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \cdot \frac{\pi}{3} - 2dl + \frac{3}{4} l^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \cdot \frac{\pi}{3} - 2dl + \frac{l^2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \right] \right\} \\
& = \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \cdot \frac{\pi}{3} - 2dl + \frac{l^2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right] \right\} + \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \cdot \frac{\pi}{3} - 2dl + \frac{3}{4} l^2 \right\} \\
& + \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \cdot \frac{\pi}{3} - 2dl + \frac{l^2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right] \right\} \\
& = \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \pi - 6dl + \left(\frac{7}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right) l^2
\end{aligned}$$

二點的落入相同的正六邊形的機率

$$\begin{aligned}
P(\text{相同正六邊形}) &= \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1(\phi) d\phi}{\frac{3\sqrt{3}}{2} d^2} \\
&= \frac{\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 \pi - 6dl + \left(\frac{7}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right) l^2 \right\}}{\frac{3\sqrt{3}}{2} d^2} \\
&= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} d^2 - \frac{1}{\pi} \left[6dl - \left(\frac{7}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right) l^2 \right]}{\frac{3\sqrt{3}}{2} d^2} \\
&= 1 - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[6r - \left(\frac{7}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right) r^2 \right] \\
&= 1 - \frac{1}{\pi} \left[\frac{4}{\sqrt{3}} r - \left(\frac{7}{6\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{27} \right) r^2 \right]
\end{aligned}$$

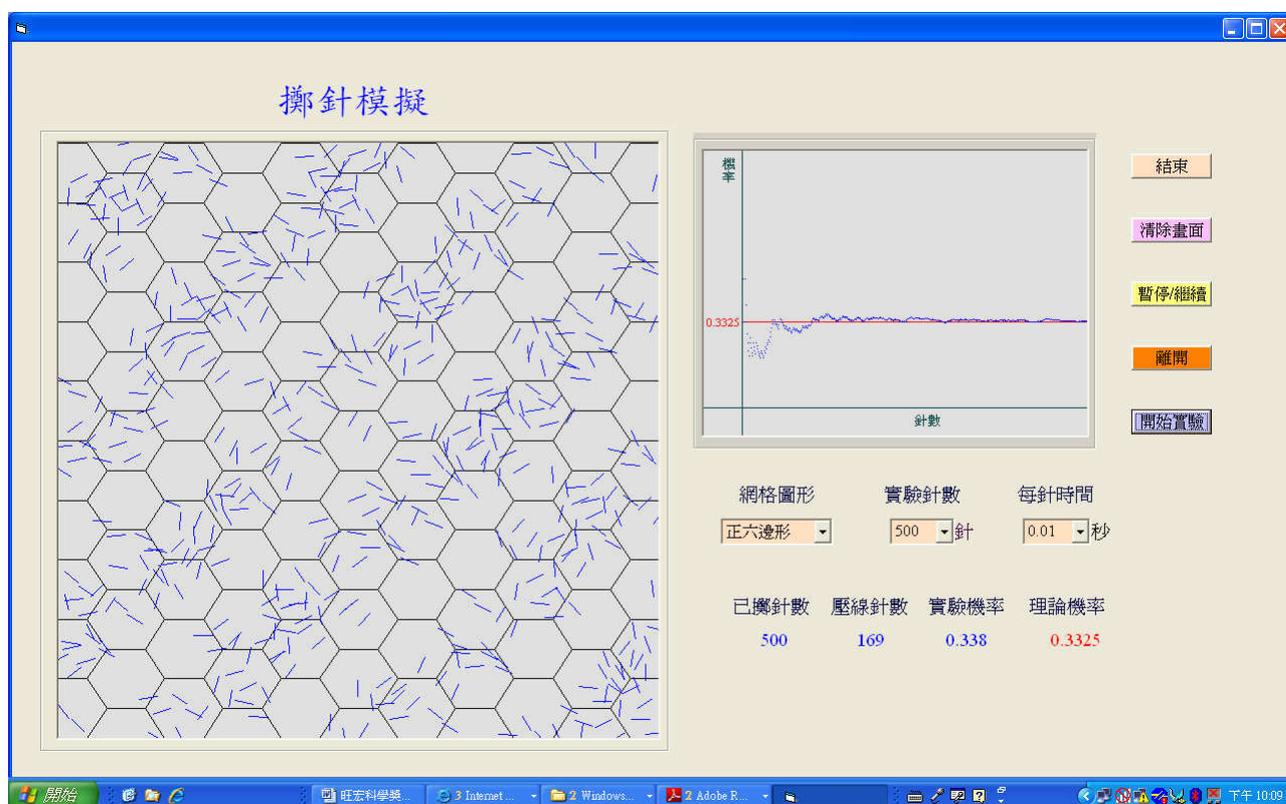
因此，二點的落入不同的正六邊形的機率

$$P(\text{相異正六邊形}) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4}{\sqrt{3}} r - \left(\frac{7}{6\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{27} \right) r^2 \right] \square$$

伍、模擬

對於矩形，平行四邊形，正三角，正六邊形的網格，利用Visual Basic寫出模擬擲針試驗的程式並編譯成執行檔，如圖(十二)，有興趣的讀者可向作者索取檔案。

模擬方法如下：對於每一種網格，共擲 m 回，每一回擲 n 次，每次擲一根針。若第 i 回第 j 次擲針壓網格的邊線，則令隨機變數 $X_{ij}=1$ ，若沒有壓線，則令 $X_{ij}=0$ ，其中 $i=1,\dots,m$ ， $j=1,\dots,n$ 。因為 X_{ij} 服從參數為 p 的柏努力分配(Bernoulli distribution)，所以第 i 回壓線的總次數 $M_i = \sum_{j=1}^n X_{ij}$ 可以視為參數為 n 與 p 的二項分配(binomial distribution)，因此對於針壓線機率 p ，第 i 回試驗的估計量為 $\hat{p}_i = M_i/n$ ； m 回試驗對於 p 的估計量是 $\hat{p} = \sum_{i=1}^m \hat{p}_i/m$ ； \hat{p} 的變異數 $Var(\hat{p}) = p(1-p)/n$ ， \hat{p} 的樣本變異數 $S^2(\hat{p}) = \sum_{i=1}^m (\hat{p}_i - \hat{p})^2 / (m-1)$ 。



圖(十二)

表(一)至表(三)是對於每一種網格模擬3000回($m=3000$)，每一回擲100或200次($n=100$ ，200)。三個表中 p 代表由(2)，(3)與(4)式所得的理論機率值， \hat{p} 代表3000回模擬所得 p 的估計值； \hat{p} 的樣本變異數與變異數分別以 $S^2(\hat{p})$ 與 $Var(\hat{p})$ 表示。表(一)是平行四邊形網格中，將(2)

式中內角 $\alpha = \pi/3$ 且 $r_1 = r_2 = 0.5$ 的結果；表(二)與表(三)分別是正三角，正六邊形的網格中，將(3)與(4)式中 r 均取為0.5的模擬結果。

由表(一)至表(三)顯示， p 與其估計值 \hat{p} 都很接近， $Var(\hat{p})$ 與其估計值 $S^2(\hat{p})$ 也相差不遠，當樣本數增為2倍($n=100$ 增為 $n=200$)， $S^2(\hat{p})$ 也約減少為1/2倍，這也和理論吻合。

表(一) 平行四邊形網格模擬的結果				
	p	\hat{p}	$S^2(\hat{p})$	$Var(\hat{p})$
$n=100$	0.6154	0.6147	0.00203	0.00237
$n=200$	0.6154	0.6161	0.00099	0.00118

表(二) 正三角形網格模擬的結果				
	p	\hat{p}	$S^2(\hat{p})$	$Var(\hat{p})$
$n=100$	0.7982	0.7987	0.00134	0.00161
$n=200$	0.7982	0.7989	0.00061	0.00081

表(三) 正六邊形網格模擬的結果				
	p	\hat{p}	$S^2(\hat{p})$	$Var(\hat{p})$
$n=100$	0.3325	0.3414	0.00237	0.00222
$n=200$	0.3325	0.3397	0.00123	0.00111

陸、結論

綜觀定理一到定理四，發現不同的幾何網格，其二點落入相異區域的機率值最後都能得到精簡的形式，不僅都與 π 有關，且都是 r (二點距離與網格邊長比) 的二次式。

定理一

網格是邊長 d_1 與 d_2 的矩形，二點相距 l ，其中 $l < d_1$ ， $l < d_2$ ，則此二點的落入不同的矩形的機率

$$P(\text{相異矩形}) = \frac{1}{\pi} [2(r_1 + r_2) - r_1 r_2]，\text{其中 } r_1 = \frac{l}{d_1} \text{ 且 } r_2 = \frac{l}{d_2}$$

定理二

網格是邊長 d_1 與 d_2 ，且一內角是 α 弧度 ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) 的平行四邊形，二點相距 l ，其中 $l < d_1 \sin \alpha$ ， $l < d_2$ ，則此二點的落入不同平行四邊形的機率

$$P(\text{相異平行四邊形}) = \frac{1}{\pi} \left[2(r_1 + r_2) - r_1 r_2 + \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) r_1 r_2 \cot \alpha \right] \csc \alpha，\text{其中 } r_1 = \frac{l}{d_1} \text{ 且 } r_2 = \frac{l}{d_2}$$

定理三

設正三角形邊長 d ，二點相距 l ，其中 $l < \frac{\sqrt{3}}{2}d$ ，則此二點的落入不同的正三角形的機率

$$P(\text{相異三角形}) = \frac{1}{\pi} \left[4\sqrt{3}r - \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) r^2 \right]，\text{其中 } r = \frac{l}{d}$$

定理四

正六邊形邊長 d ，二點相距 l ，其中 $l < d$ ，則此二點的落入不同的正六邊形的機率

$$P(\text{相異正六邊形}) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4}{\sqrt{3}}r - \left(\frac{7}{6\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{27} \right) r^2 \right]，\text{其中 } r = \frac{l}{d}$$

此外，對於定理一到定理四，我們也以 Visual Basic 寫成動態模擬的程式，驗證這四個定理的正確性。

柒、討論及應用

一. 得到定理一到定理四這些個公式有什麼實際上的用處呢?其中一個用處是，只要確定使用

何種網格(矩形、平行四邊形、正三角形或正六邊形)，知道二點的距離 l ，並設定一個機率值當做門檻，就可得到邊長 d (或 d_1, d_2)值，因此可以決定將球體分成幾層。

至於邊長與層的關係，表(四)是一個實用的資料。表(四)取自參考資料四，將地球使用正三角形網格分割，表中數據是各層(level)的三角形邊長，表中將地球視為球體，因此有以赤道為大圓(Along Equator)與以子午線為大圓(Along meridian)二種不同的邊長，但結果相差不大。

Level	Degree	Along Equator (lat)	Along meridian (lon)
0	90°	10018.538 km	9983.8912 km
2	22° 30'	2504.6345 km	2495.9953 km
4	5° 37' 30"	626.1586 km	623.9988 km
6	1° 24' 22.5"	156.5397 km	155.9997 km
8	21' 5.625"	39.1349 km	38.9999 km
10	5' 16.40625"	9.7837 km	9.7500 km
12	1' 19.11015"	2.4459 km.	2.4376 km.
14	19.77539"	611 m	609 m
16	4.9438"	153.9 m	152.3 m
18	1.23596"	38.2 m	38.1 m
20	0.3089904"	9.55 m	9.525 m

表(四)

舉例而言，相距 30 公里的兩個城市，若要求 95%的機率使得這兩個城市位於不同的網格，則應至少細分到第幾層?

做法如下：

$$\text{由(3)式， } p = \frac{1}{\pi} \left[4\sqrt{3}r - \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) r^2 \right], \text{ 即 } \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) r^2 - 4\sqrt{3}r + \pi p = 0$$

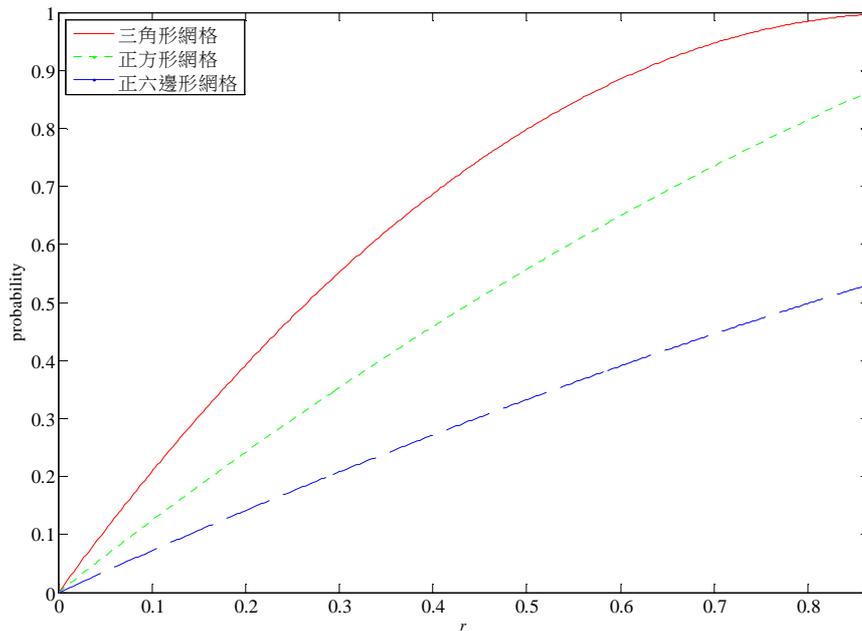
$$\text{因為 } r = \frac{l}{d} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) \pi p}}{\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}}, \text{ 所以 } d = \frac{\left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) l}{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) \pi p}}$$

$$\text{因為 } d > \frac{2}{\sqrt{3}}l, \text{ 所以 } d = \frac{\left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) l}{2\sqrt{3} - \sqrt{12 - \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) \pi p}}$$

以 $l = 30$ ， $p = 0.95$ 代入，得 $d = 42.5$ ，對照表(四)，所以應細分到第 8 層。

二. 因為矩形是平行四邊形的特例，所以在中平行四邊形網格機率值(即(2)式)中 α 取為 $\frac{\pi}{2}$ ，應該等於矩形網格的機率(即(1)式)，經化簡確實如此，這也是一種簡單的驗算。

三. 以 Matlab 軟體將(1)，(4)，(5)三式繪成圖(十三)，橫軸是 r ，其中 $0 < r < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，縱軸是落入相異區域的機率。圖(十三)顯示，在正三角形、正方形與正六邊形三種網格中，若邊長相同(即正三角形、正方形與正六邊形邊長均相等)時，相距 l 的二點落入相異區域的機率以正三角形網格最高，其次正方形網格，而正六邊形網格最低。



圖(十三)

四. 其次討論相同面積的正三角形、正方形與正六邊形網格，距離為 l 的二點落入相異區域的機率，做法如下：

設正三角形、正方形與正六邊形網格的邊長分別是 d_3 、 d_4 與 d_6 ，因為面積相同，所以

$$\frac{\sqrt{3}}{4} d_3^2 = d_4^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} d_6^2, \text{ 即 } d_4 = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} d_3 \text{ 且 } d_6 = \frac{1}{\sqrt{6}} d_3$$

$$\text{所以 } \frac{l}{d_4} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \frac{l}{d_3} \text{ 且 } \frac{l}{d_6} = \sqrt{6} \frac{l}{d_3}$$

$$\text{令 } x = \frac{l}{d_3}, \text{ 則 } \frac{l}{d_4} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} x, \frac{l}{d_6} = \sqrt{6} x$$

由(3)式，

$$P(\text{相異三角形}) = \frac{1}{\pi} \left[4\sqrt{3} \left(\frac{l}{d_3} \right) - \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) \left(\frac{l}{d_3} \right)^2 \right] = \frac{1}{\pi} \left[4\sqrt{3}x - \left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \right) x^2 \right] \quad (5)$$

由(1)式，

$$P(\text{相異正方形}) = \frac{1}{\pi} \left[4 \left(\frac{l}{d_4} \right) - \left(\frac{l}{d_4} \right)^2 \right] = \frac{1}{\pi} \left(\frac{8}{\sqrt{3}} x - \frac{4}{\sqrt{3}} x^2 \right) \quad (6)$$

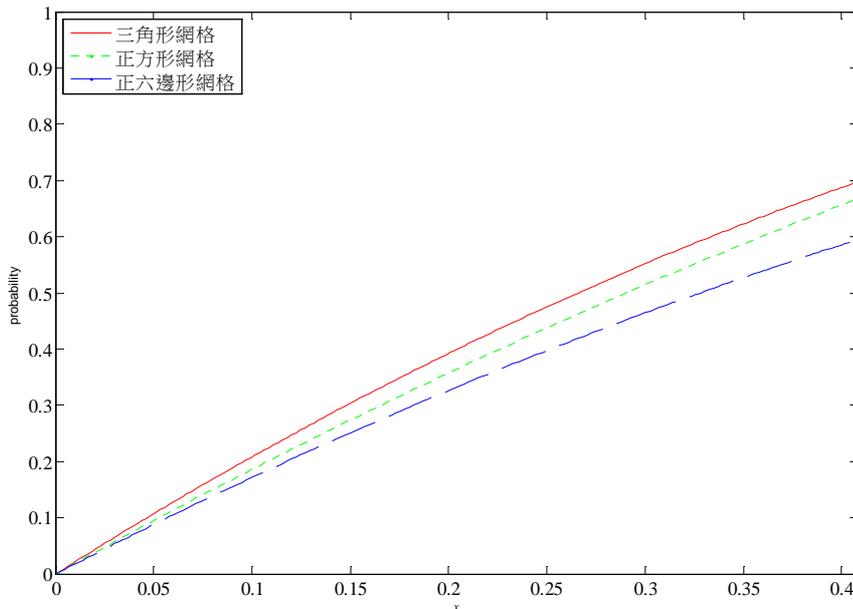
由(4)式，

$$P(\text{相異正六邊形}) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{l}{d_6} \right) - \left(\frac{7}{6\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{27} \right) \left(\frac{l}{d_6} \right)^2 \right] = \frac{1}{\pi} \left[4\sqrt{2}x - \left(\frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{4\pi}{9} \right) x^2 \right] \quad (7)$$

至於 x 的範圍為何? 由定理一， $\frac{l}{d_4} < 1$ ，即 $x < \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0.658$ ；由定理三 $\frac{l}{d_3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即

$x < \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0.866$ ；由定理四 $\frac{l}{d_6} < 1$ ，即 $x < \frac{1}{\sqrt{6}} \doteq 0.408$ ，因此取 $x < \frac{1}{\sqrt{6}}$ 。

以 Matlab 軟體將(5)，(6)，(7)三式繪成圖(十四)，其中橫軸是 x ，縱軸是落入相異區域的機率。圖(十四)顯示，在正三角形、正方形與正六邊形三種網格中，若面積相同(即正三角形、正方形與正六邊形面積均相等)時，相距 l 的二點落入相異區域的機率以正三角形網格最高，其次正方形網格，而正六邊形網格最低。



圖(十四)

捌、參考資料

- 一. Ashton Shortridge. Finding a (Buffon's) needle in a hierarchical triangular haystack.
<http://www.ncgia.ucsb.edu/globalgrids/papers/shortridge.pdf>
- 二. Alexander S. Szalay¹, Jim Gray², George Fekete¹, Peter Z. Kunszt³, Peter Kuko^{1,2}, Ani Thakar¹. Indexing the Sphere with the Hierarchical Triangular Mesh. Technical Report 2005
<http://arxiv.org/ftp/cs/papers/0701/0701164.pdf>
- 三. Wolfram MathWorld: Buffon's Needle Problem
<http://mathworld.wolfram.com/BufonsNeedleProblem.html>
- 四. Goodchild, M. F. and Yang, S., 1992, A hierarchical spatial data structure for global geographic information systems. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing* **54**(1), 31-44.
- 五. 高級中學理科數學(上) (民 83)。國立編譯館。
- 六. 余文卿主編(民 98)。高中數學第四冊。翰林出版社。
- 七. 余文卿主編(民 98)。高中選修數學 I。翰林出版社。