# 第十屆旺宏科學獎

# 成果報告書

參賽編號：SA10-284

作品名稱：給我三個點，來畫平行多邊形

姓名：蘇智彥

關鍵字：_遞迴_、_軸對稱_、_伸縮變換_

# 給我三個點，來畫平行多邊形

## 摘　　要


任意給定不共線相異三點 $A_1$、$A_2$、$A_3$，想要利用邊與其對應對角線平行的方式依序作得 $A_4$、$A_5$、⋯、$A_m$，並且再作 $A_{m+1}$、$A_{m+2}$、$A_{m+3}$ 重合於三點 $A_1$、$A_2$、$A_3$，這是一件不簡單的事！我們把這樣的多邊形稱之爲平行 $m$ 邊形。

爲了方便探討，首先固定邊與其對應對角線長度比值固定爲 $\dfrac{1}{t}$，在複數平面上，寫成遞迴式 $z_{n+3}-z_n=t(z_{n+2}-z_{n+1})$，可求得 $z_n=p\alpha^n+q\beta^n+s$，以此可以作出任意平行 $m$ 邊形，並證明平行 $m$ 邊形會內接於一橢圓或圓。

其次，探討邊與其對應對角線長度比值不爲定值的平行 $m$ 邊形。我們求得圓內接平行 $m$ 邊形，邊與其對應對角線長度比值：若 $m$ 爲偶數，則比值爲 $\dfrac{1-\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}{1+\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}$ 及 $\dfrac{\cot\alpha}{\sin\frac{4\pi}{m}-\cos\frac{4\pi}{m}\cot\alpha}$；若 $m$ 爲奇數，則只有 $2\cos\dfrac{2k\pi}{m}+1$ 一種比例。接著將任意給定的三點對直線作伸縮變換成特定的共圓狀態，作出圓內接平行 $m$ 邊形的 $m$ 個頂點，再反變換回平行 $m$ 邊形。

對於順序三點已有解決方式，我們再利用線性組合的性質，使任意三點只要給定邊數、不共線三點之序數及其值，便可以利用 $z_n=p\beta^n+q\overline{\beta}^{\,n}+s$ 和 $z_n=p\beta^{k_n}\alpha^{t_n}+q\overline{\beta}^{\,k_n}\overline{\alpha}^{\,t_n}+s$ 兩式分別求出等比例和不等比例的平行多邊形。

最後，探討橢圓內接面積最大的 $m$ 邊形必爲邊與其對應對角線長度比值固定的平行 $m$ 邊形。

# 目　　錄

# 壹、研究動機

校內數學學科能力競試遴選出了一道題目：「凸五邊形 $ABCDE$，已知 $a\triangle ABC=a\triangle BCD=a\triangle CDE=a\triangle DEA=a\triangle EAB=400$，求凸五邊形 $ABCDE$ 的面積？」一看到「兩三角形面積相等」自然要聯想到同底等高，必須作出：每一邊相鄰的兩頂點所連對角線與該邊皆能夠平行的五邊形方能符合題意，雖然解得出面積值，但是卻難以作出圖形，我們對此圖形性質更加感興趣，於是我們便開始著手研究神秘的平行多邊形。第 24 屆全國中小學科學展覽作品「平行五邊形」，有別於其作品，我們應用完全不同的數學方法，更廣泛地處理了平行多邊形的相關性質。

# 貳、研究目的

任意給定三個不共直線的相異點，以此三點爲相鄰三頂點並以平行的方式依序完成其他頂點，如何得到此種平行多邊形？以下是研究目的：

一、邊與其對應對角線長度比例爲定值的平行多邊形。

二、邊與其對應對角線長度比例不爲定值的平行多邊形。

三、橢圓內接面積最大的 $m$ 邊形必爲邊與其對應對角線長度比值固定的平行 $m$ 邊形。

# 參、研究設備及器材

一、文房四寶（ 筆、紙、尺、立可白 ）

二、電腦軟體：*Word*、*Excel*、*Geogebra*、*The Geometer's Sketchpad*

三、手提電腦

# 肆、研究方法及過程

「凸五邊形 $ABCDE$，已知 $a\triangle ABC=a\triangle BCD=a\triangle CDE=a\triangle DEA=a\triangle EAB=400$，求凸五邊形 $ABCDE$ 的面積？」的解法如下：

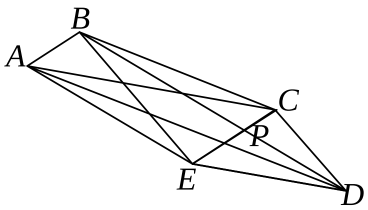
① $\because a\triangle BCD=a\triangle ECD$ $\therefore \overline{BE}//\overline{CD}$，同理 $\overline{BD}//\overline{AE}$、$\overline{CE}//\overline{AB}$、$\overline{DA}//\overline{BC}$、$\overline{AC}//\overline{DE}$

② 設 $\overline{BD}$ 與 $\overline{CE}$ 交於 $P$ 點　$\because ABPE$ 爲平行四邊形　$\therefore a\triangle BEP=a\triangle ABE=100$

③ 設 $a\triangle CPD=x$，則 $a\triangle BCP=400-x=a\triangle DPE\Rightarrow\dfrac{\overline{BP}}{\overline{DP}}=\dfrac{a\triangle BCP}{a\triangle DCP}=\dfrac{a\triangle BPE}{a\triangle DPE}$

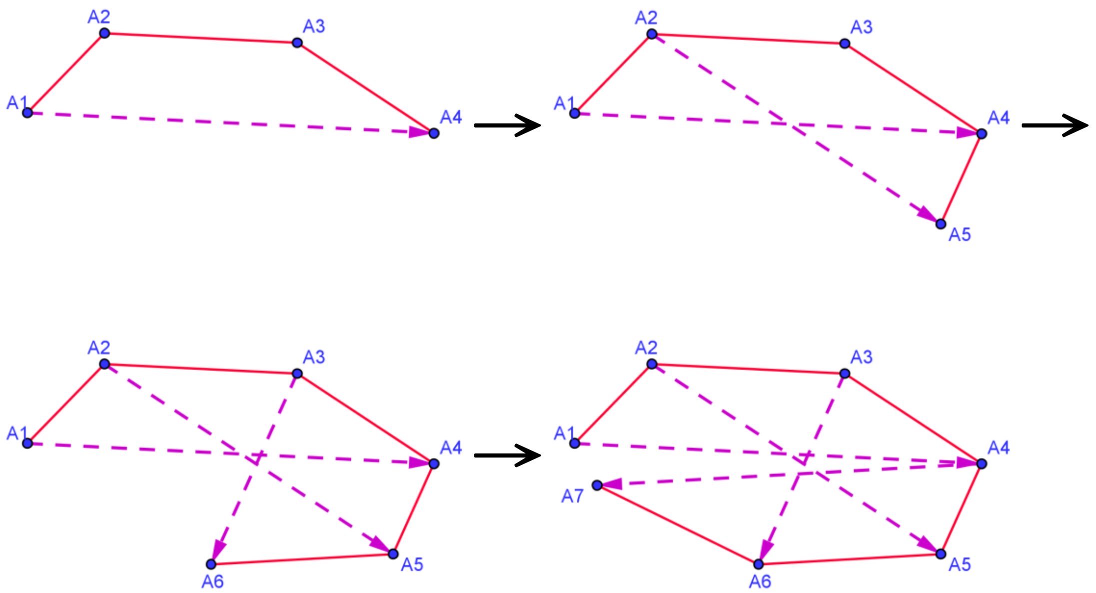
$\therefore\dfrac{400-x}{x}=\dfrac{400}{400-x}\Rightarrow x^2-1200x+160000=0\Rightarrow x=600\pm200\sqrt{5}$(＋不合)

④ $ABCDE$ 的面積$=a\triangle ABE+a\triangle BPE+a\triangle BCD+a\triangle PDE=1600-x=1000+200\sqrt{5}$




上題由於 $a\triangle ABC=a\triangle BCD=a\triangle CDE=a\triangle DEA=a\triangle EAB$，造成 $\overline{BE}//\overline{CD}$、$\overline{BD}//\overline{AE}$、$\overline{CE}//\overline{AB}$、$\overline{DA}//\overline{BC}$、$\overline{AC}//\overline{DE}$，再巧妙地利用同高的條件下面積比等於底邊比逐步求得答案。在此之中，我們注意到：這樣的五邊形和**正五邊形**同樣具有黃金比的性質，再經過一番測試，所有邊與其對應對角線長度比例亦相等，這是給定三點而能夠作出平行多邊形的重要啓發！

以平行方式製作平行多邊形不是一件容易的工作，比如：任意給定三個不共直線的相異點 $A_1$、$A_2$、$A_3$，想要作出平行七邊形，參考下圖，利用平行的方式依序作得 $A_4$、$A_5$、…、$A_7$、…，但是接下來的 $A_8$、$A_9$、$A_{10}$ 卻不會重合回到 $A_1$、$A_2$、$A_3$，所以無法作出平行七邊形。找出邊與其對應對角線長度比例是首要工作！




## 一、邊與其對應對角線長度比例爲定值的平行多邊形

## (一)定義

1.邊的對應對角線　多邊形的邊相鄰的兩頂點所連成的對角線。

意即：$N$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_N$ 中，

$\overline{A_1A_2}$ 邊的對應對角線爲 $\overline{A_NA_3}$

$\overline{A_nA_{n+1}}$ 邊的對應對角線爲 $\overline{A_{n-1}A_{n+2}}$，$\forall 2\le n\le N-2$

$\overline{A_{N-1}A_N}$ 邊的對應對角線爲 $\overline{A_{N-2}A_1}$

$\overline{A_NA_1}$ 邊的對應對角線爲 $\overline{A_{N-1}A_2}$

，

以七邊形 $ABCDEFG$ 爲例：

$\overline{AB}$ 邊的對應對角線爲 $\overline{GC}$

$\overline{BC}$ 邊的對應對角線爲 $\overline{AD}$

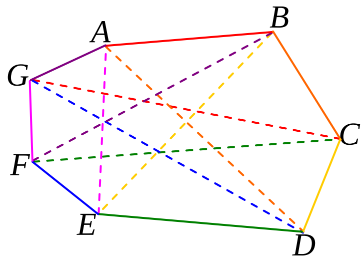
$\overline{CD}$ 邊的對應對角線爲 $\overline{BE}$

$\overline{DE}$ 邊的對應對角線爲 $\overline{CF}$

$\overline{EF}$ 邊的對應對角線爲 $\overline{DG}$

$\overline{FG}$ 邊的對應對角線爲 $\overline{EA}$

$\overline{GA}$ 邊的對應對角線爲 $\overline{FB}$




2.平行多邊形的意義　每一邊與其對應對角線皆平行的多邊形。

以平行七邊形 $ABCDEFG$ 爲例：

$\overline{AB}\ //\ \overline{GC}$

$\overline{BC}\ //\ \overline{AD}$

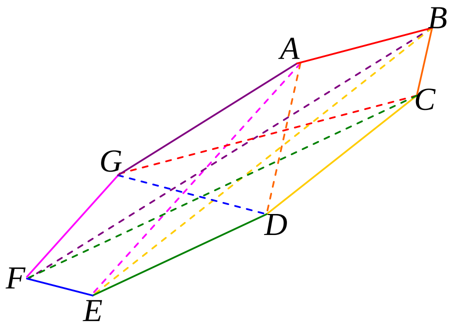
$\overline{CD}\ //\ \overline{BE}$

$\overline{DE}\ //\ \overline{CF}$

$\overline{EF}\ //\ \overline{DG}$

$\overline{FG}\ //\ \overline{EA}$

$\overline{GA}\ //\ \overline{FB}$




## (二)邊與其對應對角線長度比值

由於比值固定，我們把各頂點化爲高斯平面上的複數，依順序定爲 $z_1$、$z_2$、$z_3$、…、$z_m$，可得三階齊次遞迴 $z_{n+3}-z_n=t(z_{n+2}-z_{n+1}),\ \forall n\in\mathbf{N}$，進而求出此固定比值 $\frac{1}{t}$，並研究所構成平行多邊形的性質。

**定理一**　設 $z_1$、$z_2$、$z_3$ 爲複數平面上不共線相異三點，$z_{n+3}-z_n=t(z_{n+2}-z_{n+1}),\ \forall n\in\boldsymbol{N}$，其中 $t$ 爲正實數。若 $m\in\boldsymbol{N}$，$z_{m+1}=z_1$、$z_{m+2}=z_2$、$z_{m+3}=z_3$，則 $t=2\cos\dfrac{2k\pi}{m}+1$，$0<k<\dfrac{m}{3}$ 且 $k\in\boldsymbol{N}$。

**證明**　$z_{n+3}-z_n=t(z_{n+2}-z_{n+1})\Rightarrow z_{n+3}-tz_{n+2}+tz_{n+1}-z_n=0\Rightarrow$特徵方程式 $x^3-tx^2+tx-1=0$

(1)$t=3$ 時，特徵方程式的爲 1 是三重根，令 $z_n=pn^2+qn+s$ 滿足 $\begin{cases}p+q+s=z_1\\2^2p+2q+s=z_2\\3^2p+3q+s=z_3\end{cases}$

$\Rightarrow\triangle=\begin{vmatrix}1&1&1\\2^2&2&1\\3^2&3&1\end{vmatrix}\neq0$　$\therefore p$、$q$、$s$ 有唯一解。

又$\begin{cases}z_{m+1}=z_1\\z_{m+2}=z_2\\z_{m+3}=z_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p(m+1)^2+q(m+1)+s=p+q+s\\p(m+2)^2+q(m+2)+s=2^2p+2q+s\\p(m+3)^2+q(m+3)+s=3^2p+3q+s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p[(m+1)^2-1]+q[(m+1)-1]=0\\p[(m+2)^2-2^2]+q[(m+2)-2]=0\\p[(m+3)^2-3^2]+q[(m+3)-3]=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}p[(m+1)+1]+q=0\\p[(m+2)+2]+q=0\\p[(m+3)+3]+q=0\end{cases}\Rightarrow p=q=0$ 代回 $z_n=s$(不合)，所以 $t\neq3$。

(2)$t\neq3$ 時，特徵方程式 $x^3-tx^2+tx-1=0\Rightarrow(x-1)[x^2+(1-t)x+1]=0\Rightarrow x=1,\beta,\overline{\beta}$

【$\because\ (1-t)^2-4<0$　$\therefore$方程式 $x^2+(1-t)x+1=0$ 的解爲共軛虛根】

並且由根與係數的關係 $\beta+\overline{\beta}=t-1$、$\beta\overline{\beta}=1$。

① 令 $z_n=p\beta^n+q\overline{\beta}^{\,n}+s$ 滿足 $\begin{cases}p\beta+q\overline{\beta}+s=z_1\\p\beta^2+q\overline{\beta}^{\,2}+s=z_2\\p\beta^3+q\overline{\beta}^{\,3}+s=z_3\end{cases}$

$\Rightarrow\triangle=\begin{vmatrix}\beta&\overline{\beta}&1\\\beta^2&\overline{\beta}^{\,2}&1\\\beta^3&\overline{\beta}^{\,3}&1\end{vmatrix}=\beta\overline{\beta}(1-\overline{\beta})(1-\beta)(\overline{\beta}-\beta)\neq0$　　$\therefore p$、$q$、$s$ 有唯一解。

② $\begin{cases}z_{m+1}=z_1\\z_{m+2}=z_2\\z_{m+3}=z_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p\beta^{m+1}+q\overline{\beta}^{\,m+1}+s=p\beta+q\overline{\beta}+s\\p\beta^{m+2}+q\overline{\beta}^{\,m+2}+s=p\beta^2+q\overline{\beta}^{\,2}+s\\p\beta^{m+3}+q\overline{\beta}^{\,m+3}+s=p\beta^3+q\overline{\beta}^{\,3}+s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p\beta(\beta^m-1)+q\overline{\beta}(\overline{\beta}^{\,m}-1)=0\\p\beta^2(\beta^m-1)+q\overline{\beta}^{\,2}(\overline{\beta}^{\,m}-1)=0\\p\beta^3(\beta^m-1)+q\overline{\beta}^{\,3}(\overline{\beta}^{\,m}-1)=0\end{cases}$

由於 $p\beta^3(\beta^m-1)+q\overline{\beta}^{\,3}(\overline{\beta}^{\,m}-1)$

$=[p\beta^2(\beta^m-1)+q\overline{\beta}^{\,2}(\overline{\beta}^{\,m}-1)](\beta+\overline{\beta})-\beta\overline{\beta}[p\beta(\beta^m-1)+q\overline{\beta}(\overline{\beta}^{\,m}-1)]$

若 $\begin{cases} p\beta(\beta^m-1)+q\overline{\beta}(\overline{\beta}^m-1)=0 \\ p\beta^2(\beta^m-1)+q\overline{\beta}^2(\overline{\beta}^m-1)=0 \end{cases}$，則 $p\beta^3(\beta^m-1)+q\overline{\beta}^3(\overline{\beta}^m-1)$顯然也為 0。

考慮方程式 $\begin{cases} p\beta x+q\overline{\beta}y=0 \\ p\beta^2 x+q\overline{\beta}^2 y=0 \end{cases} \Rightarrow \triangle'=\begin{vmatrix} p\beta & q\overline{\beta} \\ p\beta^2 & q\overline{\beta}^2 \end{vmatrix}=pq\beta\overline{\beta}(\overline{\beta}-\beta)=pq(\overline{\beta}-\beta)$

$i)\triangle'\neq 0\Rightarrow$方程式 $\begin{cases} p\beta x+q\overline{\beta}y=0 \\ p\beta^2 x+q\overline{\beta}^2 y=0 \end{cases}$有唯一解 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \beta^m=1 \\ \overline{\beta}^m=1 \end{cases}$

$ii)\triangle'=0\Rightarrow pq=0$，設 $\beta^m\neq 1$，若 $q=0$ 代回原方程式 $\begin{cases} q\beta(\beta^m-1)=0 \\ q\beta^2(\beta^m-1)=0 \end{cases}\Rightarrow p=0\Rightarrow z_1=z_2=z_3=s$(矛盾)。

由 $i)$、$ii)$ $\beta^m=1$ 且 $p$、$q$ 不可同時為 0。

③ 因為 $\beta^m=1$，可設 $\beta=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}$，$k\in\boldsymbol{Z}$，所以 $t=\alpha+\beta+1=2\cos\frac{2k\pi}{m}+1$，$k\in\boldsymbol{Z}$

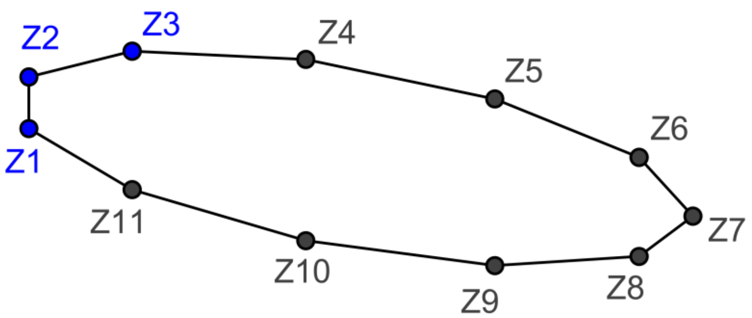
又 $\begin{cases} t>0 \\ t\neq 3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2\cos\frac{2k\pi}{m}+1>0 \\ 2\cos\frac{2k\pi}{m}+1\neq 3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \cos\frac{2k\pi}{m}>-\frac{1}{2} \\ \cos\frac{2k\pi}{m}\neq 1 \end{cases}\Rightarrow 0<\frac{2k\pi}{m}<\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 0<k<\frac{m}{3}$ 且 $k\in\boldsymbol{N}$。

---

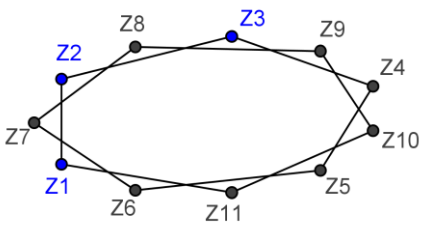
例一　給定三點 $z_1=-1$、$z_2=-1+2i$、$z_3=3+3i$，由於 $0<k<\frac{11}{3}$，$k$ 值可為 1, 2, 3

對應 $t=2\cos\frac{2k\pi}{11}+1$，作 $z_{n+3}=t(z_{n+2}-z_{n+1})+z_n$，依序連接 $z_1z_2z_3z_4z_5z_6z_7z_8z_9z_{10}z_{11}$

① $k=1$ 時，$t=2\cos\frac{2\pi}{11}+1\fallingdotseq 2.682507$，連接出平行十一邊形

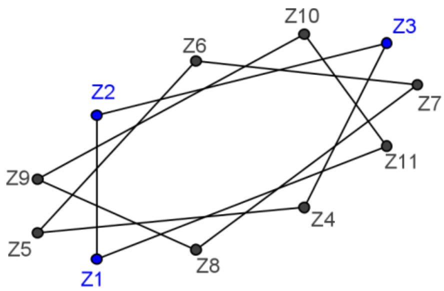


② $k=2$ 時，$t=2\cos\frac{4\pi}{11}+1\fallingdotseq 1.830830$




呈現 1 組交錯成星形

③ $k=3$ 時，$t=2\cos\frac{6\pi}{11}+1\fallingdotseq 0.715370$




呈現 2 組交錯成星形

---

### (三)點的共橢圓與順序問題

在例一中，我們可以看出不論 $k$ 值為何，所得之點似乎在同一個橢圓上；然而 $k=2$ 或 3 時無法依序連接出平行十一邊形，但是如果打破既有的順序，將 11 個點先全部作出來之後，再依照鄰近的點連接便仍能得到平行十一邊形，且看以下**定理**。

**定理二**　設 $z_n=p\beta^n+q\overline{\beta}^{\,n}+s$, $\forall n\in\boldsymbol{N}$，$1\le n\le m$，其中 $\beta=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}$, $0<k<\frac{m}{3}$ 且 $k\in\boldsymbol{N}$，

則 (1) $\forall n\in\boldsymbol{N}$，$1\le n\le m$，$z_n$ 必落在以 $s$ 為中心的橢圓或圓上；

(2) $k=1$ 時，$z_1$、$z_2$、……、$z_m$ 依序連接起來形成平行 $m$ 邊形；

(3) $k\neq 1$ 時，$z_1$、$z_2$、……、$z_m$ 依序連接起來無法成為平行 $m$ 邊形。

**證明**　令 $R=|p|$、$S=|q|$、$\theta_p=Arg(p)$、$\theta_q=Arg(q)$、$\theta=\frac{\theta_p+\theta_q}{2}$、$\theta_n=\frac{\theta_p-\theta_q}{2}+\frac{2nk\pi}{m}$

$\because p=R(\cos\theta_p+i\sin\theta_p)$、$q=S(\cos\theta_q+i\sin\theta_q)$

$$\begin{aligned}\therefore z_n-s=p\beta^n+q\overline{\beta}^{\,n}&=R[\cos(\theta_p+\tfrac{2nk\pi}{m})+i\sin(\theta_p+\tfrac{2nk\pi}{m})]+S[\cos(\theta_q-\tfrac{2nk\pi}{m})+i\sin(\theta_q-\tfrac{2nk\pi}{m})]\\&=R[\cos(\theta+\theta_n)+i\sin(\theta+\theta_n)]+S[\cos(\theta-\theta_n)+i\sin(\theta-\theta_n)]\\&=[R\cos(\theta+\theta_n)+S\cos(\theta-\theta_n)]+i[R\sin(\theta+\theta_n)+S\sin(\theta-\theta_n)]\\&=[(R+S)\cos\theta_n+i(R-S)\sin\theta_n](\cos\theta+i\sin\theta)\end{aligned}$$

令 $v_n=(R+S)\cos\theta_n+i(R-S)\sin\theta_n$

(1) $\forall n\in\boldsymbol{N}$，$1\le n\le m$，複數 $v_n$ 必落在橢圓 $\begin{cases}x=(R+S)\cos\theta\\y=(R-S)\sin\theta\end{cases}$, $0\le\theta<2\pi$ 上

又 $z_n-s$ 為 $v_n$ 旋轉 $\theta$ 角而得，所以 $z_n$ 必落在以 $s$ 為中心的橢圓上。

(2) $k=1$ 時，$v_1$、$v_2$、……、$v_m$ 依序在橢圓 $\begin{cases}x=(R+S)\cos\theta\\y=(R-S)\sin\theta\end{cases}$, $0\le\theta<2\pi$ 上 $\theta$ 旋轉 $\frac{2\pi}{m}$ 角而得

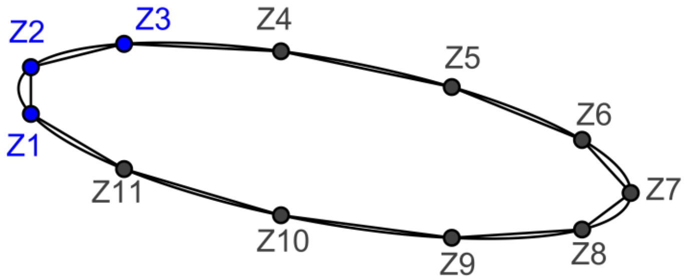
所以 $z_1$、$z_2$、……、$z_m$ 依序連接起來形成平行 $m$ 邊形；

(3) $k\neq 1$ 時，$v_1$、$v_2$、……、$v_m$ 依序在橢圓 $\begin{cases} x=(R+S)\cos\theta \\ y=(R-S)\sin\theta \end{cases}$, $0\leq\theta<2\pi$ 上 $\theta$ 旋轉 $\dfrac{2k\pi}{m}$ 角而得

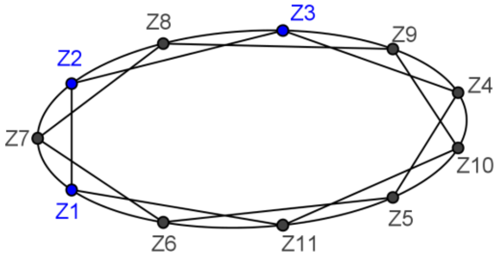
所以當 $\dfrac{m}{k}+1\leq u<\dfrac{m}{k}+2$ (即 $2\pi\leq\dfrac{2(u-1)k\pi}{m}<2\pi+\dfrac{2k\pi}{m}$ 恰轉超過一圈) 時，$v_u$ 便回到 $v_1$ 與 $v_2$ 之間，$z_1$、$z_2$、……、$z_m$ 依序連接起來無法成爲平行 $m$ 邊形。

例二　以下呈現例一的各點共橢圓的圖形

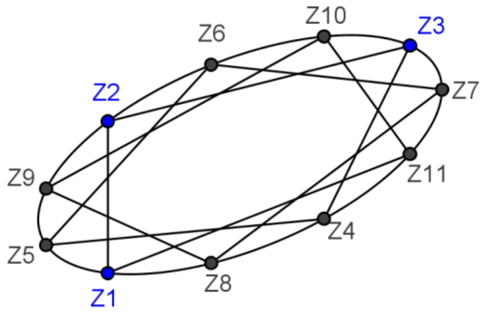
① $k=1$




② $k=2$



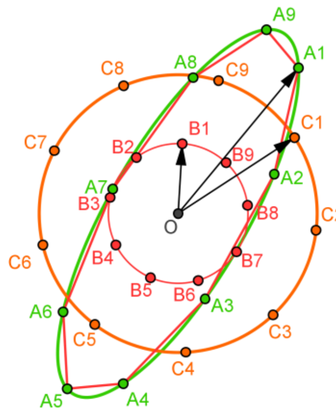

③ $k=3$




(四)線性組合 $p\beta^n+q\overline{\beta}^{\,n}$ 的圖形

由**定理二、三**中可以證得平行 $m$ 邊形頂點 $p\beta^n+q\overline{\beta}^{\,n}+s$ 內接於橢圓，從下圖中作大略說明。圖中的 $s=0$，$p$ 和 $q$ 分別爲一定値且分別以 $\beta=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$、$\overline{\beta}=\cos\dfrac{2\pi}{9}-i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ 旋轉，$B_1=p\beta$、$B_2=p\beta^2$、……、$C_2=q\overline{\beta}$、$C_2=q\overline{\beta}^{\,2}$、……，各旋轉結果相加爲 $A_1$、$A_2$、……，爲平行九邊形各頂點之座標。兩圓代表 $p$ 和 $q$ 以 $0\leq\theta<2\pi$ 的旋轉結果，分別相加結果即爲

橢圓並形成平行九邊形。




## 二、邊與其對應對角線長度比例不爲定值的平行多邊形

現在我們來考慮比例不爲定值的平行多邊形，不論從複數數列的遞迴或是從向量的方式去思考，皆無法解決問題。然而比例固定的平行多邊形頂點共橢圓，給了我們一個很好的啓發：應該先考慮圓的內接平行多邊形的邊與其對應對角線長度比例，再去推論一般情況。

### (一)圓的內接平行多邊形

圓的內接平行多邊形的邊與其對應對角線長度比值如下。

**定理三**　圓心爲 $O$ 點的圓內接平行 $m$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_m$，設 $\angle A_1A_2O=\alpha$ ( $\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{m}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ )

(1)若 $m$ 爲偶數，則邊與其對應對角線長度比值爲 $\dfrac{1-\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}{1+\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}$ 及 $\dfrac{\cot\alpha}{\sin\frac{4\pi}{m}-\cos\frac{4\pi}{m}\cot\alpha}$ 順序輪替；

(2)若 $m$ 爲奇數，則圓內接平行 $m$ 邊形必爲圓內接正 $m$ 邊形，其邊與其對應對角線長度比值爲 $\dfrac{1}{2\cos\frac{2\pi}{m}+1}$。

**證明**　考慮圓的兩平行弦性質：若 $\overline{AB}//\overline{CD}$，則 $\overparen{AC}=\overparen{BD}$

令 $s_n=\overparen{A_nA_{n+1}}$, $n=1, 2, \cdots, m-1$、$s_m=\overparen{A_mA_1}$　$\because \overline{A_1A_4}//\overline{A_2A_3}$　$\therefore \overparen{A_1A_2}=\overparen{A_3A_4}\Rightarrow s_1=s_3$

又$\because \overline{A_2A_5}//\overline{A_3A_4}$　$\therefore \overparen{A_2A_3}=\overparen{A_4A_5}\Rightarrow s_2=s_4$

同理可推得：$\begin{cases} s_1=s_3=s_5=\cdots\cdots \\ s_2=s_4=s_6=\cdots\cdots \end{cases}$，意即：$s_n$ 之值奇數值皆相同、偶數值皆相同

(1) 若 $m$ 爲偶數，則$\begin{cases} s_1=s_3=s_5=\cdots\cdots=s_{m\text{-}1} \\ s_2=s_4=s_6=\cdots\cdots=s_m \end{cases} \Rightarrow \angle A_1OA_3=\dfrac{4\pi}{m}$

$\because \angle A_1A_2O=\alpha \quad \therefore \angle A_1OA_2=\pi-2\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle A_2OA_3=\dfrac{4\pi}{m}-(\pi-2\alpha) \\ \angle A_1OA_4=\dfrac{4\pi}{m}+(\pi-2\alpha) \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_1A_4}}=\frac{\sin\dfrac{\frac{4\pi}{m}-(\pi-2\alpha)}{2}}{\sin\dfrac{\frac{4\pi}{m}+(\pi-2\alpha)}{2}}=-\frac{\cos(\frac{2\pi}{m}+\alpha)}{\cos(\frac{2\pi}{m}-\alpha)}=\frac{1-\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}{1+\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle A_3OA_4=\pi-2\alpha \\ \angle A_2OA_5=\dfrac{8\pi}{m}-(\pi-2\alpha) \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{A_2A_5}}=\frac{\sin\dfrac{\pi-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\frac{8\pi}{m}-(\pi-2\alpha)}{2}}=-\frac{\cos\alpha}{\cos(\frac{4\pi}{m}+\alpha)}=\frac{\cot\alpha}{\sin\frac{4\pi}{m}-\cos\frac{4\pi}{m}\cot\alpha}$$

(2) 若 $m$ 爲奇數，則 $s_1=s_3=s_5=\cdots\cdots=s_m$，但 $\overline{A_1A_2}\,//\,\overline{A_mA_3} \Rightarrow \overset{\frown}{A_mA_1}=\overset{\frown}{A_2A_3} \Rightarrow s_m=s_2$

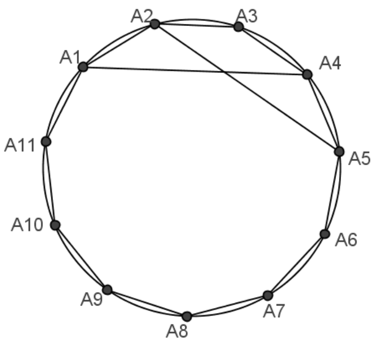
又 $s_2=s_4=s_6=\cdots\cdots=s_{m\text{-}1} \quad \therefore s_1=s_2=s_3=s_4=\cdots\cdots=s_m \quad \therefore A_1A_2A_3\cdots A_m$ 爲圓內接正 $m$ 邊形

$\angle A_1OA_2=\pi-2\alpha=\dfrac{2\pi}{m}\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{m}$ 代入(1)式中

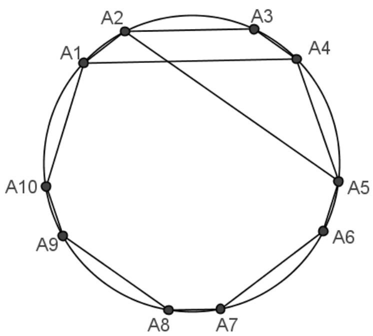
$$\text{得}\ \frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_2A_3}}=-\frac{\cos(\frac{2\pi}{m}-\alpha)}{\cos(\frac{2\pi}{m}+\alpha)}=-\frac{\cos(\frac{2\pi}{m}-\alpha)}{\cos(\frac{2\pi}{m}+\alpha)}=\frac{\sin\frac{3\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}}=\frac{3\sin\frac{\pi}{m}-4\sin^3\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}}=3-4\sin^2\frac{\pi}{m}$$

$$=3-4\times\frac{1-\cos\frac{2\pi}{m}}{2}=2\cos\frac{2\pi}{m}+1=\frac{\overline{A_2A_5}}{\overline{A_3A_4}}$$

圖例




平行 11 邊形



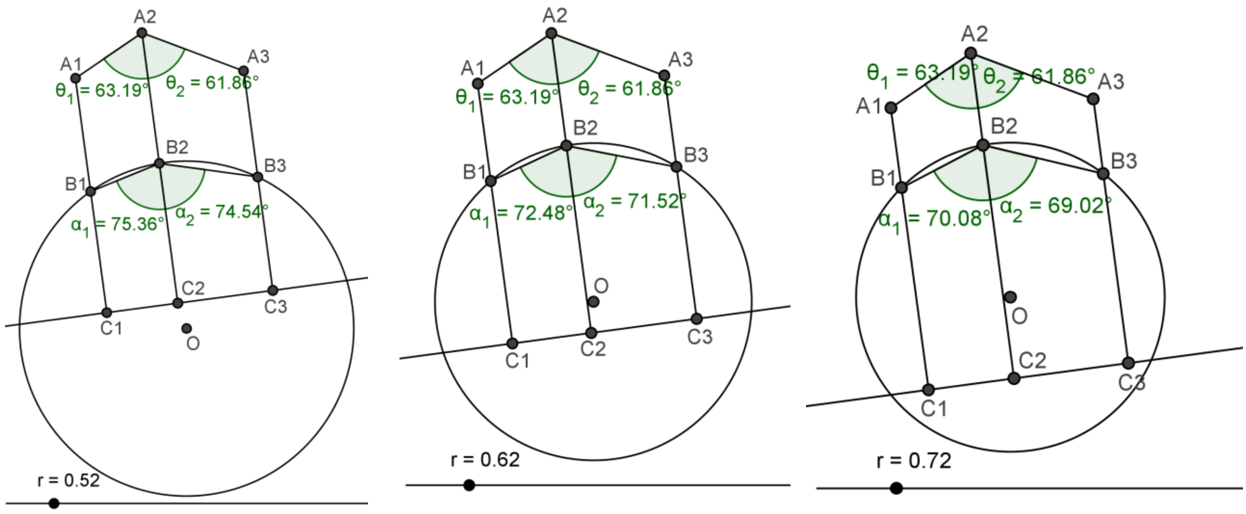

平行 10 邊形

(二)給定三點對軸的伸縮　我們大膽猜測平行多邊形頂點皆共橢圓，並將之作一對一變換成頂點共圓之後，利用這些點必須符合**定理三**的結論，再變換回原平行多邊形。

將圓伸縮或推移成橢圓不是一件難事，但是要將任意給定的三點作變換成特定的共圓狀態卻不是一件容易的事，我們選擇對直線作伸縮來完成此項變換。

---

例三　若任意給不共線相異三點 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 欲作一平行十邊形，先將 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 三點對直線 $L$ 伸縮 $r$ 倍變換成 $B_1$、$B_2$、$B_3$ 共圓，設圓心為 $O$，必須滿足 $\angle B_1OB_3=\dfrac{4\pi}{10}$，也就是 $\angle B_1B_2B_3=144°$，若固定直線 $L$ 調整 $r$ 值得以下圖形

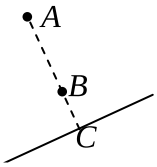



$r=0.52$、$0.72$ 時，$\angle B_1B_2B_3\neq 144°$ 不能作一圓內接平行十邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_9B_{10}$，$r\fallingdotseq 0.62$ 時，$\angle B_1B_2B_3=144°$ 方能作一圓內接平行十邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_9B_{10}$，再變換回平行多邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$。

---

定義幾何變換 $P_L^r$：$A$ 點對直線 $L$ 作投影點 $C$，若 $\overrightarrow{BC}=r\overrightarrow{AC}$，則定義變換 $P_L^r(A)=B$。

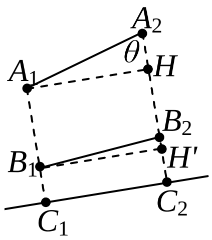
比如：$r=\dfrac{1}{3}$ 時，




下面**定理四**先證得：兩點 $A_1$、$A_2$ 對直線 $L$ 伸縮 $r$ 倍變換成 $B_1$、$B_2$，角度與長度對兩者之間的關係式，再推得**定理五**：幾何變換 $P_L^r$ 保持不變的性質。

**定理四**　設平面坐標系上兩點 $A_1$、$A_2$，$L$ 為不過 $A_1$、$A_2$ 的一直線，$L$ 亦不垂直 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$。若 $A_1$、$A_2$ 分別對直線 $L$ 作投影點得 $C_1$、$C_2$，且 $P_L^r(A_1)=B_1$、$P_L^r(A_2)=B_2$，其中 $r$ 為一正實數。設 $\angle A_1A_2C_2=\theta$、$\angle B_1B_2C_2=\alpha$，試證：(1) $\cot\alpha=r\cot\theta$；(2) $\overline{B_1B_2}^{\,2}=(1-r^2)\,\overline{C_1C_2}^{\,2}+r^2\,\overline{A_1A_2}^{\,2}$；(3)若 $L'/\!/L$ 且 $L'$ 亦不過 $A_1$、$A_2$，則性質(1)、(2)不變。

**證明**




過 $A_1$、$B_1$ 分別對 $\overline{A_2C_2}$ 作投影點 $H$、$H'$，且設 $d=\overline{C_1C_2}$、$d_{A1}=\overline{A_1C_1}$、$d_{A2}=\overline{A_2C_2}$

(1)在△$A_1A_2H$ 中　∵ $\overline{A_1H}=d$、$\overline{A_2H}=d_{A2}-d_{A1}$　∴$\cot\theta=\dfrac{d_{A2}-d_{A1}}{d}$

在△$B_1B_2H'$中　∵ $\overline{B_1H'}=d$、$\overline{B_2H'}=rd_{A2}-rd_{A1}$　∴$\cot\alpha=\dfrac{rd_{A2}-rd_{A1}}{d}=r\cot\theta$

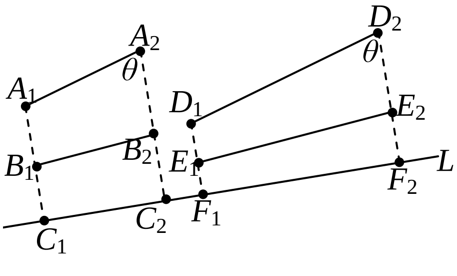
(2) $\overline{B_1B_2}^{\,2}=d^2\csc^2\alpha=d^2(1+\cot^2\alpha)=d^2(1+r^2\cot^2\theta)=d^2[(1-r^2)+(r^2+r^2\cot^2\theta)]$

$=d^2(1-r^2)+d^2r^2\csc^2\theta=(1-r^2)\overline{C_1C_2}^{\,2}+r^2\overline{A_1A_2}^{\,2}$

(3)若 $L'//L$ 且 $L'$亦不過 $A_1$、$A_2$，顯然∠$A_1A_2C_2$、$\overline{C_1C_2}$ 不變，則性質(1)、(2)亦不變。

**定理五**　試證幾何變換 $P_L^r$，(1)保平行；(2)保平行線段比例；(3)一對一變換且反函數為 $P_L^{\frac{1}{r}}$。

**證明**　設平面坐標系上兩點 $A_1$、$A_2$、$D_1$、$D_2$，且 $\overrightarrow{A_1A_2}=u\overrightarrow{D_1D_2}$，另設 $L$ 為不過 $A_1$、$A_2$、$D_1$、$D_2$ 的一直線，$L$ 亦不垂直 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$。若 $A_1$、$A_2$、$D_1$、$D_2$ 對 $L$ 的投影分別為 $C_1$、$C_2$、$F_1$、$F_2$ 且令 $P_L^r(A_1)=B_1$、$P_L^r(A_2)=B_2$、$P_L^r(D_1)=E_1$、$P_L^r(D_2)=E_2$。




(1)∵ $\overline{A_1A_2}$ // $\overline{D_1D_2}$　∴∠$A_1A_2C_2$＝∠$D_1D_2F_2=\theta$

由**定理四** $\cot\angle B_1B_2C_2=r\cot\theta=\cot\angle E_1E_2F_2\Rightarrow\angle B_1B_2C_2=\angle E_1E_2F_2$　∴ $\overline{B_1B_2}$ // $\overline{E_1E_2}$ 。

(2)∵ $\overline{A_1A_2}=u\,\overline{D_1D_2}$　∴ $\overline{C_1C_2}=\overline{A_1A_2}\sin\theta=u\,\overline{D_1D_2}\sin\theta=u\,\overline{F_1F_2}$

由**定理四** $\overline{B_1B_2}^{\,2}=(1-r^2)\overline{C_1C_2}^{\,2}+r^2\overline{A_1A_2}^{\,2}=(1-r^2)u^2\overline{F_1F_2}^{\,2}+r^2u^2\overline{D_1D_2}^{\,2}$

$=u^2[(1-r^2)\overline{F_1F_2}^{\,2}+r^2\overline{D_1D_2}^{\,2}]=u^2\overline{E_1E_2}^{\,2}\Rightarrow\overline{B_1B_2}=u\,\overline{E_1E_2}$

(3)若 $P_L^r(A)=P_L^r(D)$，令為點 $Q$，且對 $L$ 的投影點 $H$，則 $\overrightarrow{AH}=r\overrightarrow{QH}=\overrightarrow{DH}$，所以 $A=D$，

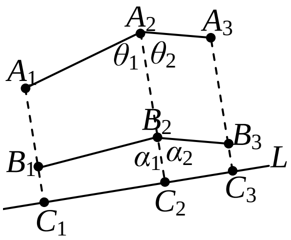
顯然 $P_L^r$ 的反函數為 $P_L^{\frac{1}{r}}$。

得到了**定理五**中幾何變換 $P_L^r$ 保平行、保平行線段比例及一對一變換的性質，接下來只要保證找得到一直線 $L$ 及一正實數 $r$，使得 $P_L^r$ 變換成的 $B_1$、$B_2$、$B_3$ 共圓的圓心為 $O$ 時，$\angle B_1OB_3=\dfrac{4\pi}{m}$，此時必能利用**定理三**的結果作出 $B_1B_2B_3\cdots B_m$ 圓內接平行 $m$ 邊形。

再進一步的，對於任意 $0<\angle B_1OB_2<\dfrac{4\pi}{m}$ 且 $\angle B_1OB_3=\dfrac{4\pi}{m}$，我們希望找到一直線 $L$ 及一正實數 $r$ 來完成這樣的變換，如此一來，任何比值的圓內接平行 $m$ 邊形都有其對應的變換 $P_L^r$。

**定理六**　任意給定三點 $A_1$、$A_2$、$A_3$，試證：若 $0<\varphi<\dfrac{4\pi}{m}(m\geq 4,\ m\in\mathbf{N})$，則存在一直線 $L$ 及一正實數 $r$ 使得 $\begin{cases}B_1=P_L^r(A_1)\\B_2=P_L^r(A_2)\\B_3=P_L^r(A_3)\end{cases}$ 共圓的圓心為 $O$ 時，滿足 ① $\angle B_1OB_3=\dfrac{4\pi}{m}$；② $\angle B_1OB_2=\varphi$。

**證明**




給定一直線 $L$，設正實數 $r$ 使得 $\begin{cases}B_1=P_L^r(A_1)\\B_2=P_L^r(A_2)\\B_3=P_L^r(A_3)\end{cases}$，

設 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 對 $L$ 投影點分別為 $C_1$、$C_2$、$C_3$，且設 $\begin{cases}\angle A_1A_2C_2=\theta_1、\angle A_3A_2C_2=\theta_2、\angle A_1A_2A_3=\theta\\\angle B_1B_2C_2=\alpha_1、\angle B_3B_2C_2=\alpha_2\end{cases}$。

① 設 $\theta_1$ 為定值，欲使 $\angle B_1OB_3=\dfrac{4\pi}{m}$，即 $\angle B_1B_2B_3=\pi-\dfrac{2\pi}{m}$

由**定理四** $\begin{cases}\cot\alpha_1=r\cot\theta_1\\\cot\alpha_2=r\cot\theta_2\end{cases}$，再由**定理三**：$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{m}<\alpha_1<\dfrac{\pi}{2}\\\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{m}<\alpha_2<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan\dfrac{2\pi}{m}>\cot\alpha_1>0\\\tan\dfrac{2\pi}{m}>\cot\alpha_1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cot\theta_1>0\\\cot\theta_2>0\end{cases}$

$$\cot\angle B_1B_2B_3=\cot(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{\cot\alpha_1\cot\alpha_2-1}{\cot\alpha_1+\cot\alpha_2}=\frac{r\cot\theta_1 r\cot\theta_2-1}{r\cot\theta_1+r\cot\theta_2}=\frac{r\cot\theta_1 r\cot\theta_2-1}{r\cot\theta_1+r\cot\theta_2}$$

$\Rightarrow -\cot\dfrac{2\pi}{m}=\dfrac{r^2\cot\theta_1\cot\theta_2-1}{r\cot\theta_1+r\cot\theta_2}$ 得 $r$ 的方程式 $(\cot\theta_1\cot\theta_2)r^2+\cot\dfrac{2\pi}{m}(\cot\theta_1+\cot\theta_2)r-1=0\cdots\cdots(*)$

則判別式 $D=\cot^2\dfrac{2\pi}{m}(\cot\theta_1+\cot\theta_2)^2+4(\cot\theta_1\cot\theta_2)>0$ 且方程式兩根之積為 $\dfrac{-1}{\cot\theta_1\cot\theta_2}<0$

，所以必恰有一正根 $r$。

② 由**定理四**：若 $r>0$ 且 $L'//L$，則 $P_L^r=P_{L'}^r$。所以直線 $L$ 只需考慮與 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 旋轉關係，可由 $\theta_1$ 控制。

對於 $0<\angle B_1OB_2<\frac{4\pi}{m}$，即對於 $\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{m}<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$，我們想要找到直線 $L$ 及正實數 $r$，也就是找到 $\theta_1$、$r$ 來完成這樣的變換。$\theta_1$ 滿足 $0<\theta_1<min\{\frac{\pi}{2}, \theta\}$且 $\cot\alpha_1=r\cot\theta_1$，其中 $r$ 值滿足(∗)式。

(∗)式×$\cot\theta_1$ 得 $\cot\theta_2(r\cot\theta_1)^2+\cot\frac{2\pi}{m}(\cot\theta_1+\cot\theta_2)(r\cot\theta_1)-\cot\theta_1=0$

$$\Rightarrow\cot\theta_2(\cot\alpha_1)^2+\cot\frac{2\pi}{m}(\cot\theta_1+\cot\theta_2)(\cot\alpha_1)-\cot\theta_1=0$$

設 $a=\cot\theta$、$b=\cot\alpha_1$、$c=\cot\frac{2\pi}{m}$、$x=\cot\theta_1$，則 $\cot\theta_2=\cot(\theta-\theta_1)=\frac{\cot\theta_1\cot\theta+1}{\cot\theta_1-\cot\theta}=\frac{ax+1}{x-a}$

上式可寫成 $\frac{ax+1}{x-a}\cdot b^2+cb(x+\frac{ax+1}{x-a})-x=0\Rightarrow\frac{1}{x-a}[(bc-1)x^2+a(b^2+1)x+b^2+bc]=0$

令 $g(x)=(bc-1)x^2+a(b^2+1)x+b^2+bc$、$f(x)=\frac{g(x)}{x-a}$

考慮 $y=g(x)$的圖形

$\because\ \frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{m}<\alpha_1<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\frac{2\pi}{m}>\cot\alpha_1>0\Rightarrow\tan\frac{2\pi}{m}\cdot\cot\frac{2\pi}{m}>bc>0\Rightarrow1>bc\Rightarrow bc-1<0$

$\therefore\ y=g(x)$為開口向下的拋物線

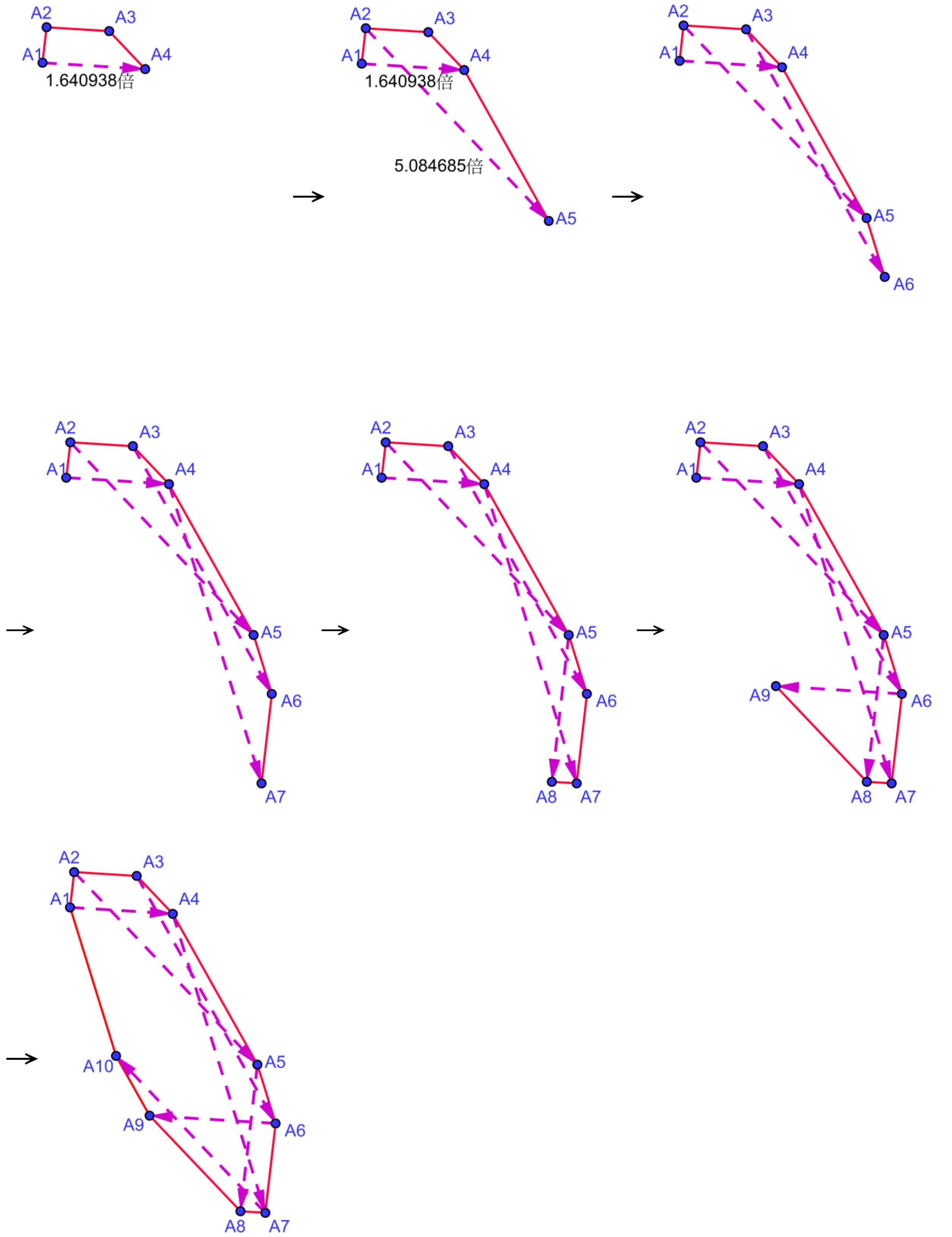
又 $g(0)=(bc-1)\times0^2+a(b^2+1)\times0+b^2+bc=b^2+bc>0$

$g(a)=(bc-1)a^2+a(b^2+1)a+b^2+bc=bca^2+a^2b^2+b^2+bc>0$

所以方程式 $g(x)=0$ 在大於 $max\{0, a\}$時恰有一根，其根令為 $x_0$，則 $f(x_0)=0$，即滿足(∗)式且 $x_0>max\{0, a\}\Rightarrow\cot\theta_1>max\{0, \cot\theta\}\Rightarrow0<\theta_1<min\{\frac{\pi}{2}, \theta\}$亦合乎範圍。

## (三)任意給定不共線相異三點作平行 $m$ 邊形

任意給定不共線相異三點 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 作平行十邊形，可給定 $\alpha=80°$( $\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{m}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 的 $\alpha$ 值皆可 )$\Rightarrow\frac{1+\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}{1-\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}=1.640938$ 及 $\frac{\sin\frac{4\pi}{m}-\cos\frac{4\pi}{m}\cot\alpha}{\cot\alpha}=5.084685$ 為比例分別作平行的對角線。




## 三、任意給定不相鄰且不共線三點，作出等比例和不等比例的平行多邊形建構流程

前面的等比例和不等比例的平行多邊形的畫法，都是建立在給定順序三點 $z_1$、$z_2$、$z_3$ 時，利用比例畫出來。現在我們建立起一個系統，只要給定邊數 $m$、不共線三點的值和序數，便

可依下面方法做出平行 $m$ 邊形。

已知 $z_1=a$、$z_u=b$、$z_v=c$，欲做平行 $m$ 邊形，則：

(一)爲等比例平行多邊形，則已知 $z_n=p\beta^n+q\overline{\beta}^n+s$ 滿足 $\begin{cases} p\beta+q\overline{\beta}+s=a \\ p\beta^u+q\overline{\beta}^u+s=b \\ p\beta^v+q\overline{\beta}^v+s=c \end{cases}$

且 $\beta=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$

利用克拉瑪公式得到：

$$\triangle=\begin{vmatrix} \beta & \overline{\beta} & 1 \\ \beta^u & \overline{\beta}^u & 1 \\ \beta^v & \overline{\beta}^v & 1 \end{vmatrix}、\triangle_p=\begin{vmatrix} a & \overline{\beta} & 1 \\ b & \overline{\beta}^u & 1 \\ c & \overline{\beta}^v & 1 \end{vmatrix}、\triangle_q=\begin{vmatrix} \beta & a & 1 \\ \beta^u & b & 1 \\ \beta^v & c & 1 \end{vmatrix}、\triangle_s=\begin{vmatrix} \beta & \overline{\beta} & a \\ \beta^u & \overline{\beta}^u & b \\ \beta^v & \overline{\beta}^v & c \end{vmatrix},$$

得 $p=\dfrac{\begin{vmatrix} a & \overline{\beta} & 1 \\ b & \overline{\beta}^u & 1 \\ c & \overline{\beta}^v & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta & \overline{\beta} & 1 \\ \beta^u & \overline{\beta}^u & 1 \\ \beta^v & \overline{\beta}^v & 1 \end{vmatrix}}$、$q=\dfrac{\begin{vmatrix} \beta & a & 1 \\ \beta^u & b & 1 \\ \beta^v & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta & \overline{\beta} & 1 \\ \beta^u & \overline{\beta}^u & 1 \\ \beta^v & \overline{\beta}^v & 1 \end{vmatrix}}$、$s=\dfrac{\begin{vmatrix} \beta & a & 1 \\ \beta^u & b & 1 \\ \beta^v & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta & \overline{\beta} & 1 \\ \beta^u & \overline{\beta}^u & 1 \\ \beta^v & \overline{\beta}^v & 1 \end{vmatrix}}$。再把 $n=1, 2, 3, \cdots m$

代入 $z_n=p\beta^n+q\overline{\beta}^n+s$ 即可畫出平行 $m$ 邊形。

(二)若爲不等比例平行多邊形且 $m=2r$，則可寫出一般式 $z_n=p\beta^{k_n}\alpha^{t_n}+q\overline{\beta}^{k_n}\overline{\alpha}^{t_n}+s$，其中

$\beta=\cos\frac{2\pi}{r}+i\sin\frac{2\pi}{r}$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ 且 $0<\theta<\frac{2\pi}{r}$，$k_n=[\frac{n}{2}]$，$t_n=\dfrac{1^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}$。

可得 $\begin{cases} p\beta^{k_1}\alpha^{t_1}+q\overline{\beta}^{k_1}\overline{\alpha}^{t_1}+s=a \\ p\beta^{k_u}\alpha^{t_u}+q\overline{\beta}^{k_u}\overline{\alpha}^{t_u}+s=b \\ p\beta^{k_v}\alpha^{t_v}+q\overline{\beta}^{k_v}\overline{\alpha}^{t_v}+s=c \end{cases}$

利用克拉瑪公式得到：$\triangle=\begin{vmatrix} \beta^{k_1}\alpha^{t_1} & \overline{\beta}^{k_1}\overline{\alpha}^{t_1} & 1 \\ \beta^{ku}\alpha^{t_u} & \overline{\beta}^{k_u}\overline{\alpha}^{t_u} & 1 \\ \beta^{k_v}\alpha^{t_v} & \overline{\beta}^{k_v}\overline{\alpha}^{t_v} & 1 \end{vmatrix}$、

$$\triangle_p=\begin{vmatrix} a & \overline{\beta}^{k_1}\overline{\alpha}^{t_1} & 1 \\ b & \overline{\beta}^{k_u}\overline{\alpha}^{t_u} & 1 \\ c & \overline{\beta}^{k_v}\overline{\alpha}^{t_v} & 1 \end{vmatrix}、\triangle_q=\begin{vmatrix} \beta^{k_1}\alpha^{t_1} & a & 1 \\ \beta^{k_u}\alpha^{t_u} & b & 1 \\ \beta^{k_v}\alpha^{t_v} & c & 1 \end{vmatrix}、\triangle_s=\begin{vmatrix} \beta^{k_1}\alpha^{t_1} & \overline{\beta}^{k_1}\overline{\alpha}^{t_1} & a \\ \beta^{k_u}\alpha^{t_u} & \overline{\beta}^{k_u}\overline{\alpha}^{t_u} & b \\ \beta^{k_v}\alpha^{t_v} & \overline{\beta}^{k_v}\overline{\alpha}^{t_v} & c \end{vmatrix},$$

$$得\ p=\frac{\begin{vmatrix} a & \overline{\beta}^{k_1}\overline{\alpha}^{t_1} & 1 \\ b & \overline{\beta}^{k_u}\overline{\alpha}^{t_u} & 1 \\ c & \overline{\beta}^{k_v}\overline{\alpha}^{t_v} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta^{k_1}\alpha^{t_1} & \overline{\beta}^{k_1}\overline{\alpha}^{t_1} & 1 \\ \beta^{ku}\alpha^{t_u} & \overline{\beta}^{k_u}\overline{\alpha}^{t_u} & 1 \\ \beta^{k_v}\alpha^{t_v} & \overline{\beta}^{k_v}\overline{\alpha}^{t_v} & 1 \end{vmatrix}}、q=\frac{\begin{vmatrix} \beta^{k_1}\alpha^{t_1} & a & 1 \\ \beta^{k_u}\alpha^{t_u} & b & 1 \\ \beta^{k_v}\alpha^{t_v} & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta^{k_1}\alpha^{t_1} & \overline{\beta}^{k_1}\overline{\alpha}^{t_1} & 1 \\ \beta^{ku}\alpha^{t_u} & \overline{\beta}^{k_u}\overline{\alpha}^{t_u} & 1 \\ \beta^{k_v}\alpha^{t_v} & \overline{\beta}^{k_v}\overline{\alpha}^{t_v} & 1 \end{vmatrix}}、s=\frac{\begin{vmatrix} \beta^{k_1}\alpha^{t_1} & \overline{\beta}^{k_1}\overline{\alpha}^{t_1} & a \\ \beta^{k_u}\alpha^{t_u} & \overline{\beta}^{k_u}\overline{\alpha}^{t_u} & b \\ \beta^{k_v}\alpha^{t_v} & \overline{\beta}^{k_v}\overline{\alpha}^{t_v} & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta^{k_1}\alpha^{t_1} & \overline{\beta}^{k_1}\overline{\alpha}^{t_1} & 1 \\ \beta^{ku}\alpha^{t_u} & \overline{\beta}^{k_u}\overline{\alpha}^{t_u} & 1 \\ \beta^{k_v}\alpha^{t_v} & \overline{\beta}^{k_v}\overline{\alpha}^{t_v} & 1 \end{vmatrix}}。$$

再把 $n=1, 2, 3, \cdots m$ 代入 $z_n=p\beta^{k_n}\alpha^{t_n}+q\overline{\beta}^{k_n}\overline{\alpha}^{t_n}+s$ 即可畫出平行 $m$ 邊形。

上式中(1)利用定理一所求出的 $z_n=p\beta^n+q\overline{\beta}^n+s$ 橢圓內接一般式便可求出各點，(2)則是定理一中一般式 $z_n$ 的延伸，其中 $\theta$ 就是前面不等比例平行多邊形的 $\alpha$。

已知邊數 $m$,不共線三點之值和序數 $1$、$u$、$v$

等比例平行多邊形：

三點代入一般式

$$z_n = p\beta^n + q\bar{\beta}^n + s$$

求 $p$、$q$、$s$

n=1, 2, 3, …$m$ 代回一般式依序連接即爲所求

不等比例平行多邊形:

三點代入一般式

$$z_n = p\beta^{kn}\alpha^{tn} + q\bar{\beta}^{kn}\bar{\alpha}^{tn} + s$$

求 $p$、$q$、$s$

n=1, 2, 3, …$m$ 代回一般式依序連接即爲所求

## 四、橢圓內接面積最大的 $m$ 邊形必為邊與其對應對角線長度比值固定的平行 $m$ 邊形

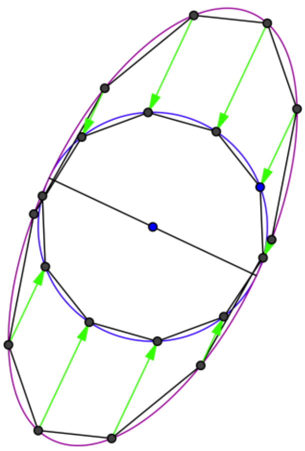
既然平行多邊形必內接於一橢圓或圓內，不免令人聯想到：橢圓內接面積最大的 $m$ 邊形是否為平行 $m$ 邊形？我們利用幾何變換 $P_L^r$ 簡單地解決了這個問題。

**定理七**　試證橢圓內接面積最大的 $m$ 邊形必為邊與其對應對角線長度比值固定的平行 $m$ 邊形。

**證明**　設橢圓內接面積最大的 $m$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_m$，

取短軸所在直線為 $L$、$r=\dfrac{b}{a}$ ( $a$ 為橢圓長軸半長、$b$ 為橢圓短軸半長)，則 $P_L^r$ 將橢圓變換成圓，$m$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_m$ 亦變換成圓內接 $m$ 邊形 $B_1B_2\cdots B_m$，由於圓內接面積最大的 $m$ 邊形必為正 $m$ 邊形，所以 $B_1B_2\cdots B_m$ 必為正 $m$ 邊形，利用幾何變換 $P_L^{\frac{1}{r}}$ 將正 $m$ 邊形 $B_1B_2\cdots B_m$ 變換回 $A_1A_2\cdots A_m$，則 $A_1A_2\cdots A_m$ 必為邊與其對應對角線長度比值固定的平行 $m$ 邊形。

例四　橢圓內接面積最大的 10 邊形 $A_1A_2\cdots A_{10}$，取短軸所在直線為 $L$、$r=\dfrac{b}{a}$，( $a$ 為橢圓長軸半長、$b$ 為橢圓短軸半長)，則 $P_L^r$ 將 $A_1A_2\cdots A_{10}$ 變換成圓內接正 10 邊形 $B_1B_2\cdots B_{10}$ 方為圓內接面積最大的 10 邊形，幾何變換 $P_L^{\frac{1}{r}}$ 將正 10 邊形 $B_1B_2\cdots B_{10}$ 變換回 $A_1A_2\cdots A_{10}$，則 $A_1A_2\cdots A_{10}$ 必為邊與其對應對角線長度比值固定的平行 10 邊形。



# 伍、結論

## 一、邊與其對應對角線長度比例爲定值的平行多邊形

### (一)定義

1.邊的對應對角線　多邊形的邊相鄰的兩頂點所連成的對角線。

2.平行多邊形的意義　每一邊與其對應對角線皆平行的多邊形。

### (二)邊與其對應對角線長度比值

由於比值固定，我們把各頂點化爲高斯平面上的複數，依順序定爲 $z_1$、$z_2$、$z_3$、…、$z_m$，可得三階齊次遞迴 $z_{n+3}-z_n=t(z_{n+2}-z_{n+1}), \forall n\in \boldsymbol{N}$，進而求出此固定比值倒數 $t=2\cos\frac{2k\pi}{m}+1$，$0<k<\frac{m}{3}$ 且 $k\in \boldsymbol{N}$。

### (三)點的共橢圓與順序問題

對上述固定比值倒數 $t=2\cos\frac{2k\pi}{m}+1$

1.$\forall n\in \boldsymbol{N}$，$1\leq n\leq m$，$z_n$ 必落在以 $s$ 爲中心的橢圓或圓上；

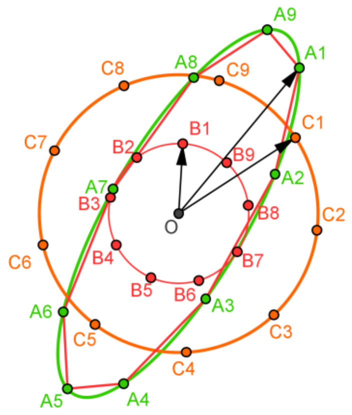
2.$k=1$ 時，$z_1$、$z_2$、……、$z_m$ 依序連接起來形成平行 $m$ 邊形；

3.$k\neq 1$ 時，$z_1$、$z_2$、……、$z_m$ 依序連接起來無法成爲平行 $m$ 邊形而是形成星形。

### (四)線性組合 $p\beta^n+q\overline{\beta}^{\,n}$ 的圖形

舉例來說：$p$ 和 $q$ 分別爲一定值且分別以 $\beta=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$、$\overline{\beta}=\cos\frac{2\pi}{9}-i\sin\frac{2\pi}{9}$ 旋轉，$B_1=p\beta$、$B_2=p\beta^2$、……、$C_2=q\overline{\beta}$、$C_2=q\overline{\beta}^{\,2}$、……，各旋轉結果相加爲 $A_1$、$A_2$、……，爲平行九邊形各頂點之座標。兩圓代表 $p$ 和 $q$ 以 $0\leq\theta<2\pi$ 的旋轉結果，分別相加結果即爲

橢圓並形成平行九邊形。




## 二、邊與其對應對角線長度比例不爲定值的平行多邊形

比例不爲定值的平行多邊形，應該先考慮圓的內接平行多邊形的邊與其對應對角線長度比例，再去推論一般情況。

### (一)圓的內接平行多邊形

圓心爲 $O$ 點的圓內接平行 $m$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_m$，設$\angle A_1A_2O=\alpha$ ( $\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{m}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ )，其邊與其對應對角線長度比值如下：

1.若 $m$ 爲偶數，則邊與其對應對角線長度比值爲$\dfrac{1-\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}{1+\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}$ 及$\dfrac{\cot\alpha}{\sin\frac{4\pi}{m}-\cos\frac{4\pi}{m}\cot\alpha}$順序輪替；

2.若 $m$ 爲奇數，則圓內接平行 $m$ 邊形必爲圓內接正 $m$ 邊形，其邊與其對應對角線長度比值爲 $\dfrac{1}{2\cos\frac{2\pi}{m}+1}$。

### (二)給定三點對軸的伸縮

1.$A$ 點對直線 $L$ 作投影點 $C$，若 $\overrightarrow{BC}=r\overrightarrow{AC}$，則定義變換 $P_L^r(A)=B$，則幾何變換 $P_L^r$，①保平行；②保平行線段比例；③一對一變換且反函數爲 $P_L^{\frac{1}{r}}$。

2.接下來對任意不共線相異三點 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 且任意角度 $\varphi$ 滿足 $0<\varphi<\frac{4\pi}{m}$，必存在一直線 $L$ 及一正實數 $r$ 使得 $P_L^r$ 變換成的 $B_1$、$B_2$、$B_3$ 共圓的圓心爲 $O$ 時，$\angle B_1OB_3=\frac{4\pi}{m}$、$\angle B_1OB_2=\varphi$，如此一來，任何比值的圓內接平行 $m$ 邊形都有其對應的變換 $P_L^r$。

(三)任意給定不共線相異三點作平行 $m$ 邊形

任意給定不共線相異三點 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 作平行十邊形，可給定 $\alpha$ 值滿足 $\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{m}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 利用

$\dfrac{1+\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}{1-\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}$ 及 $\dfrac{\sin\frac{4\pi}{m}-\cos\frac{4\pi}{m}\cot\alpha}{\cot\alpha}$ 爲比例分別作平行的對角線。

三、任意給定不共線三點作出等比例和不等比例的平行多邊形建構流程

已知 $z_1=a$、$z_u=b$、$z_v=c$，欲做平行 m 邊形，則:

(1)若爲等比例平行多邊形:

將三點代入 $z_n=p\beta^n+q\overline{\beta}^n+s$，得到 p.g.s 再將 n=1.2.3….m 帶入即爲所求。

(2)若爲不等比例平行多邊形:

當 m=2r，時可寫出一般式 $z_n=p\beta^{k_n}\alpha^{t_n}+q\overline{\beta}^{k_n}\overline{\alpha}^{t_n}+s$，其中 $\beta=\cos\frac{2\pi}{r}+i\sin\frac{2\pi}{r}$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$

且 $0<\theta<\frac{2\pi}{r}$，$k_n=[\frac{n}{2}]$，$t_n=\dfrac{1^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}$。

四、橢圓內接面積最大的 $m$ 邊形必爲邊與其對應對角線長度比值固定的平行 $m$ 邊形

利用幾何變換 $P_L^r$ 簡單地證明：橢圓內接面積最大的 $m$ 邊形必爲邊與其對應對角線長度比值固定的平行 $m$ 邊形。

# 陸、討論與應用

我們已經發現了等比例和不等比例的平行多邊形，並利用幾何變換證明平行 $m$ 邊形只有此兩種情形，對於給定任意序數的不共線三點，都能畫出平行多邊形。過程中得證橢圓內接面積最大的 $m$ 邊形必爲邊與其對應對角線長度比值固定的平行 $m$ 邊形，相信對於橢圓相關的應用有極大幫助；再者，軸對稱變換 $P_L^r$ 雖然不是一個困難的幾何變換，但是它的保平行、保平行線段比例的性質也應有廣泛的應用價值。希望能朝向立體空間發展如柏拉圖和阿基米得多面體，研究中出現的星化圖形和克卜勒-龐索多面體的關係也有待觀察，或對於平行多面體的性質定義;平行或邊角錐體積相等相關的研究。

# 柒、參考資料


**高中數學康熙版第二冊第三章第六節複數的極式**

**高中數學康熙版第四冊第二章遞迴數列**

陳勇至、吳學晃、吳鴻基、洪宇德。平行五邊形。**國立臺灣科學教育館第二十四屆全國中小學科學展覽高中組數學科第二名**。

鄭元博。滿足 $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=\overrightarrow{0}$ 之 $M$ 點是否為重心之探索。**國立臺灣科學教育館 2003 年臺灣國際科展高中組數學科**。