

第十屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA10-319

作品名稱：現形吧！水母

-----放射狀水膜之性質探討

姓名：張凱歲

關鍵字：液膜、表面張力、黏滯力

壹、 研究動機

當我在洗小碟子時，發現水柱在撞擊小碟子後，便會向外散開形成一層水膜，並且持續擴張，直到水膜破裂形成一條一條的水絲向外射出，十分美麗。

為了簡化這個現象，我將略有弧度的小碟子改成圓形的平板，此時用穩定的水柱撞擊，發現形成的水膜呈圓形的輻射擴張，並在與圓心相同距離處同時破裂，因此我認為藉由將衝擊板改成圓形平板可以讓水膜也呈現輻射對稱的形狀，利於分析；並且藉由研究這個裝置產生的膜(不一定要是水)，我們就可以輕易地探討流速、厚度會改變的膜的性質，以及其破裂的原因。

此外，在實驗中意外發現奇特的多邊形水膜，這也促使了我對於此種水膜之性質作更深入的探討，並且用相關理論解釋其成因。



↑ 因為水膜及其下方之水絲看起來很像水母，所以我稱之為水母狀水膜，而其下方之水絲為水母的觸角



← 以甘油水溶液撞擊
衝擊板打成的奇特多邊形水膜

貳、 研究目的

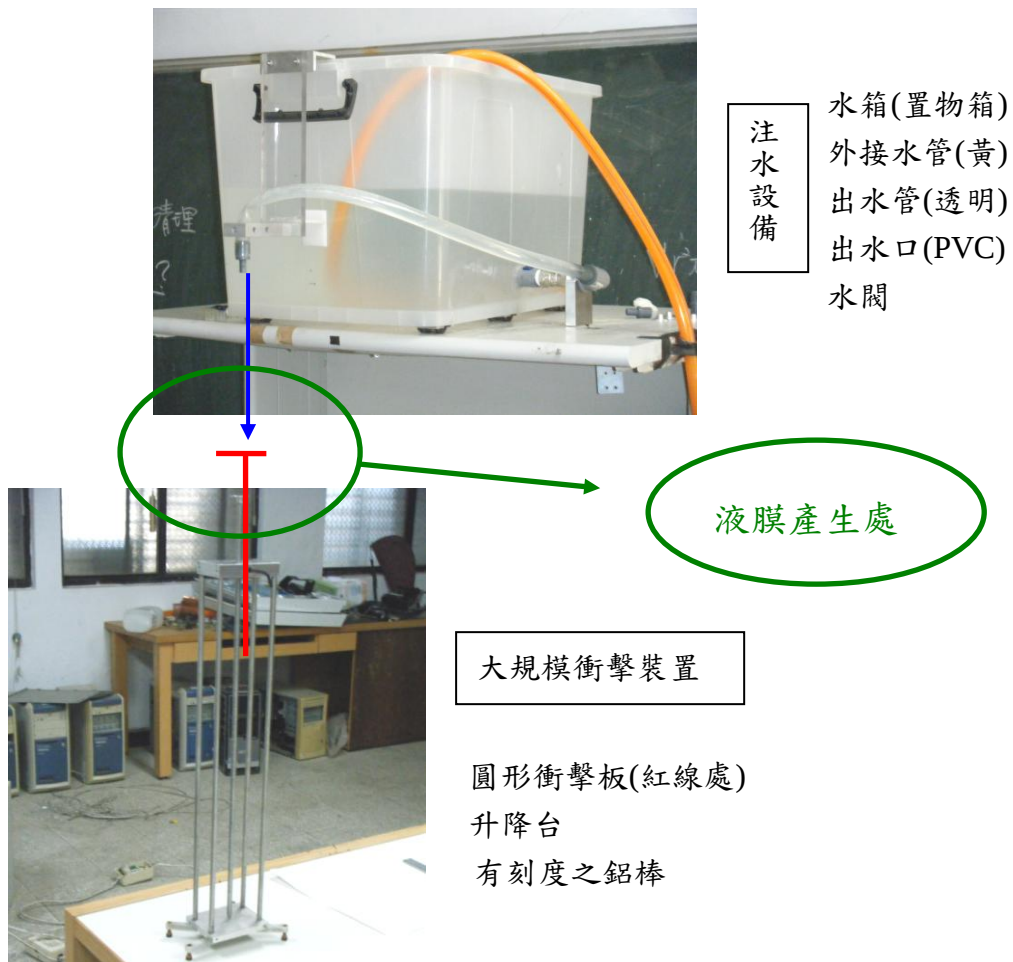
- 一、對水膜產生的過程做深入了解
- 二、改變不同變因，研究水膜的形狀及其性質
- 三、探討水膜破裂的原因
- 四、研究多邊形水膜的性質
- 五、探討多邊形水膜產生的原因

參、 研究過程與方法

一、研究設備及器材：

1. 注水設備
2. 大規模衝擊裝置
3. 測量設備 (測量流出初速)
4. 小規模衝擊裝置

裝置總圖：



出水口
(實驗中使用直徑 0.7、1.0、1.3 cm 規格)



水閥 (控制水流的開關)



衝擊板
(實驗中使用直徑 2.5、3.0、3.5 cm 規格)



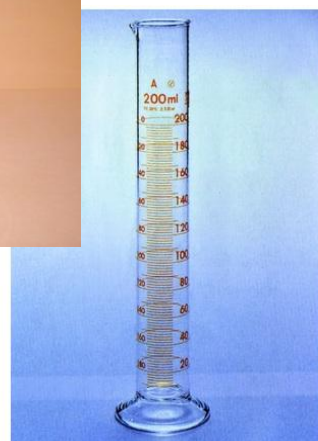
標有刻度之鋁棒



裝在鋁棒上的衝擊板



測量流量 (燒杯及量筒)

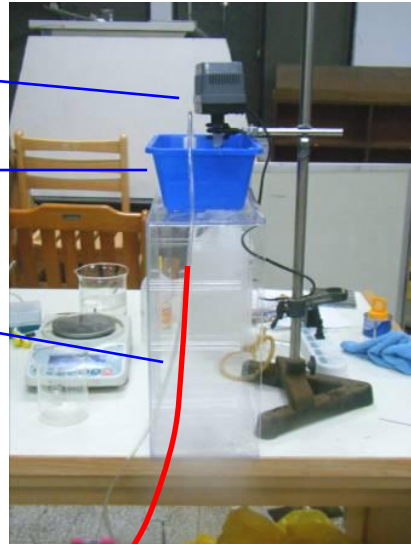


小規模衝擊裝置

離水式抽水馬達

2000 c.c. 窄深盆

二分透明水管



調整基座及小型衝擊板
(4 個紅色旋轉鈕可微調前後左右)



小型出水口
(僅做定性分析，只用一種規格)



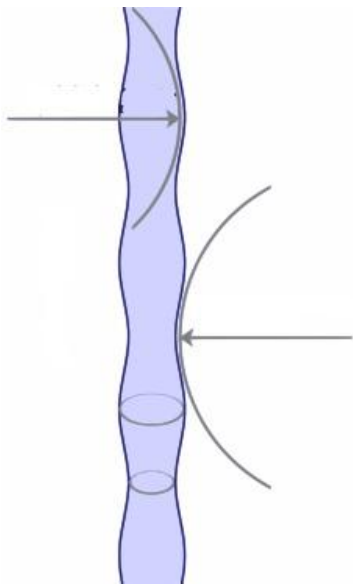
二、實驗

[實驗一]

- (一) 目的：觀察水膜的形成與形狀，提出假說，作為往後研究方向之依據。
- (二) 器材：大規模衝擊裝置
- (三) 結果：

將水膜的形成過程分成五個部分討論：

1. 撞擊前的效應



(圖一)



(圖二) (請注意水柱係從高處落下)

水柱在撞擊衝擊板前，因空氣的擾動與作用在水柱上壓力的不平均，水柱並不是完美的圓柱形，會產生粗細的差異，尤其在從高處落下時，此現象會更明顯。(稱為 Plateau-Raleigh Instability)

由 $V = vr^2\pi$ (其中 V 為流量、 v 為瞬時流速、 r 為水柱半徑)，我們可以得知，水柱之粗細會影響流量的大小，因此單位時間內撞擊衝擊板之流量並非固定，產生的水膜直徑自然也會呈現規律性的震盪。圖二中水膜的表面可見清楚環狀紋路，即是最好的證據。

此規律震盪隨著水膜的擴張，也更加劇烈，因此在之後的實驗，所測得之水膜最大直徑皆是取自震盪之中間點；但若水柱從過高處落下，震盪過大導致水膜不穩定，則此時之數據視為不準確，因此予以捨去。

(定義震盪過大的標準，是同一處的直徑變化量大於 2 cm)

2. 在衝擊盤上的運動

液體在衝擊盤上流動，受到摩擦力及液體層流間的相互阻力影響，流速漸減。到達衝擊盤邊緣時，液體之慣性力與表面張力互相拉扯，若慣性力大於表面張力，則液體得以向外擴張，形成水膜；但若表面張力大於慣性力，則液體流速降為零，再受後來流下之液體的推擠，以極小水平速度流出，因自身重量而落下。

經粗略實驗得知，流速大約在 5 cm/s 以下時，無法形成水膜。在之後的實驗中，因撞擊衝擊板時的流速介於 60 cm/s 至 250 cm/s 間，因此不需考慮無法形成水膜之情形。

此外，因流速頗大(阻力作用時間短)，我們可以忽略在衝擊板上的能量損失，在後來之推導中，將直接將其忽略不計。

3. 水膜的初射角度

經觀察後發現，當流速越大，水膜之初射方向與水平之夾角越小，如圖三、四。



(圖三，流速較大)



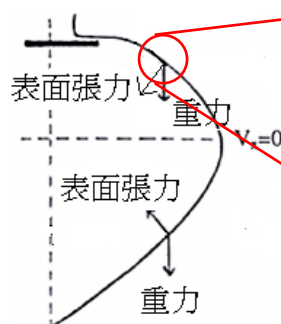
(圖四，流速較小)

推測初射角度應與流速有關，此外，應與衝擊板及水柱直徑也有關係。若衝擊板直徑越大，則減少之水平速率也應較多，初射角度越大；若水柱寬越大，水平速度減少應較小(因慣性大)，初射角度越小。下文會做實驗驗證直觀推測。

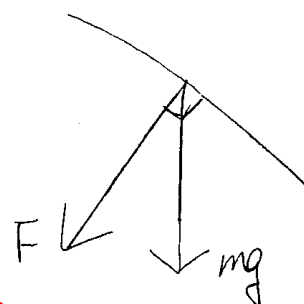
4. 水膜的形成

(1) 水膜由初射到破裂的過程，所受到的力可視為只有重力及表面張力：

(圖五)

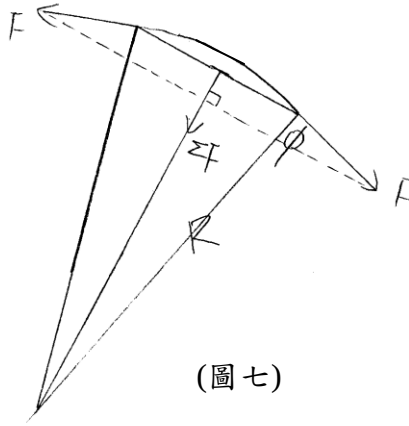


(圖六)



僅看水膜上之極小部份，表面張力 F 作用於膜之切線方向，如圖六。可視之為一圓的一部分(如圖七)，曲率半徑為 R ，表面張力與垂直水膜之方向夾角 ϕ ，因此兩邊緣表面張力合力可寫為

$$2F \cos \phi \quad (\text{方向指向曲率中心，即垂直於水膜之位移方向})$$



表面張力方向恆垂直於水膜之位移方向，因此表面張力不做功，全程只有重力做功，因此力學能守衡：

距衝擊板垂直距離為 L 之處，即有

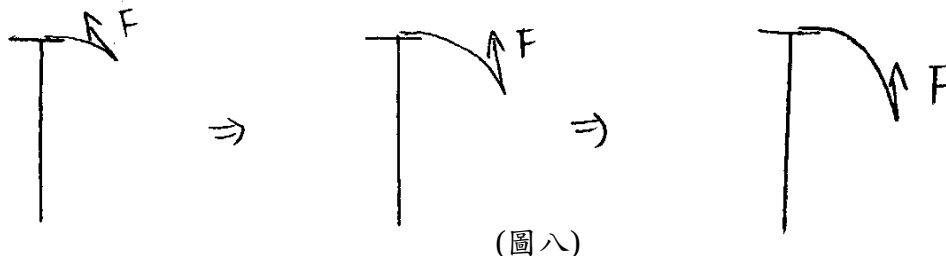
$$gL + \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{1}{2}v_L^2$$

(其中， v_2 為撞擊至衝擊板之流速、 v_L 為距衝擊板垂直距離為 L 之處的流速)

(2) 水膜之內縮現象也可由表面張力之方向作合理的解釋，如圖四、圖六。

(3) 但由表面張力之另一定義可知，水膜表面積增加，表面能也增加，因此表面張力勢必有做功，這又是什麼原因呢？

的確，表面張力有做功，但只在水膜尚未完成前，如圖八



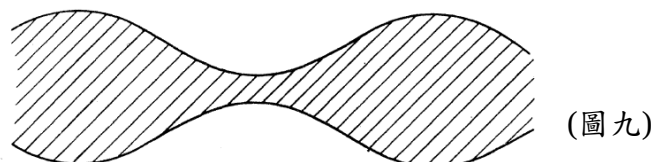
因表面張力方向與水膜流向相同，因此確實有做功，但在水膜形成並穩定後，表面張力就不再做功。實驗中所探討之水膜皆已待之穩定後才測量，因此以上(1)、(2)之討論仍然正確。

5. 水膜的破裂

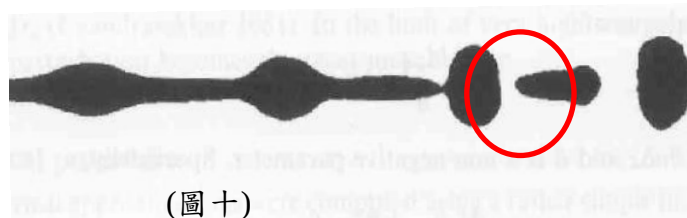
經由觀察，發現水膜可能在衝擊盤下方接合，稱之為水苞；若再接合前就破裂，則在邊緣會碎裂成一條條水絲，因此稱之為水母。

(1) 之所以會破裂，提出一待驗證的假說：

參考相關文獻^[1]得知在水膜上會產生一波動，而此波動產生之原因與 Plateau Raleigh Instability 相似，且此波動的形狀如下：



若水膜的厚度太薄，便有可能因為波動，而使水膜的上表面與下表面交會，造成水膜破裂。



因此，我推測水膜厚度與破裂的原因是十分相關的，但究竟在何厚度時會破裂，且破裂厚度會不會受其他因素影響，將於下文做探討研究。

(2) 水膜破裂後，因內聚力而收縮，隨切線方向射出水絲。

總結：

1. 因水膜之規律性震盪，必須測量震盪之中間點，且震盪過大時之數據應捨去。
2. 因流速很快，在衝擊板上之能量耗損可忽略不計，因此撞擊前至撞擊後能量

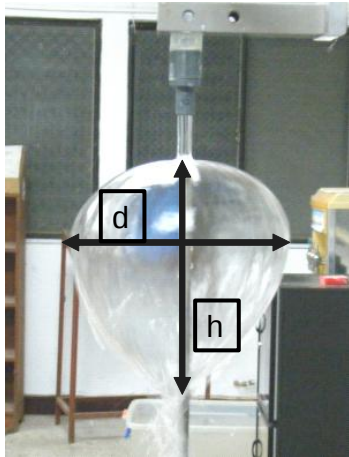
守恆，可得 $\frac{1}{2}v_1^2 + gH = \frac{1}{2}v_2^2$ (其中 v_1 、 v_2 分別為出水口之初速及衝擊速率， H 為出水口至衝擊板之寬度)。

3. 水膜初射角度應與衝擊速度、衝擊板直徑、出水口直徑有關，將做實驗分析探討。
4. 水膜只受表面張力和重力影響，且表面張力垂直於水膜面，因此不做功。水膜之運動符合力學能守恆，可得 $gL + \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{1}{2}v_L^2$ 。
5. 水膜之破裂原因乃跟其厚度有關，至於破裂厚度會不會受其他因素影響，將做實驗分析探討。

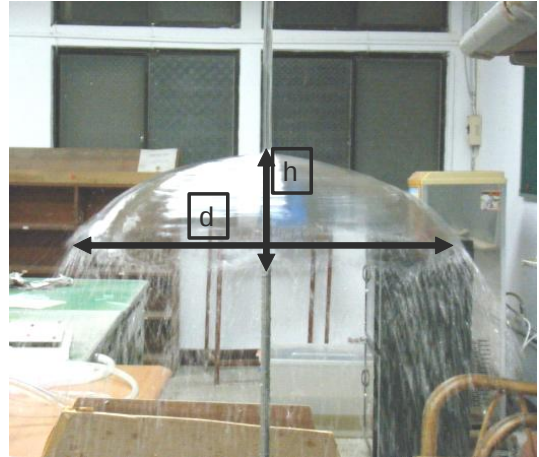
為以便之後分析，分類水膜形狀如下

隨著水流速率的增加，水膜之形狀可分為以下四種：

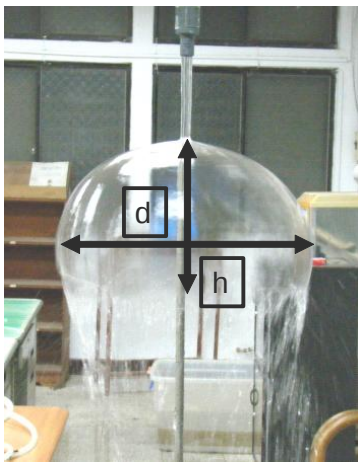
水苞 → 水母甲 → 水母乙 → 水母丙



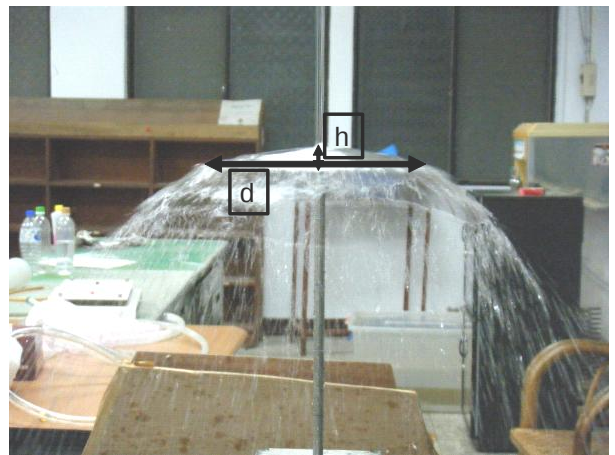
(圖 11-1 水苞)



(圖 11-3 水母乙)



(圖 11-2 水母甲)



(圖 11-4 水母丙)

水膜形狀定義：

水苞：可在下方形成接合點的水膜。(圖 11-1)

水母甲：最大直徑 d 處在破裂面之上的水膜。(圖 11-2)

水母乙：最大直徑 d 處即破裂面的水膜。(圖 11-3)

水母丙：最大直徑 d 漸漸內縮之水膜，此時水膜與水平面形成之夾角 θ 約為定值。(圖 11-4)

為了方便往後的實驗紀錄，以下是測量之物理量名詞及定義：

$D(\text{cm})$ ：衝擊板的直徑。

$V(\text{c.c./sec})$ ：水柱的流量。

$H(\text{cm})$ ：水柱出口至衝擊板之鉛直距離，稱作水降差。

$r(\text{cm})$ ：出水口之直徑，視為水柱的直徑。

$v_1(\text{cm/sec})$ ：水柱流出出水口的流速。

$v_2(\text{cm/sec})$ ：水柱撞擊衝擊板時的流速。

$v_3(\text{cm/sec})$ ：水膜破裂處的速率。

$d(\text{cm})$ ：水膜的最大直徑，稱為水膜寬。(見圖 11-1~11-4)

$h(\text{cm})$ ：水膜至接合點或至破裂點的鉛直距離，稱為水膜高。(見圖 11-1~11-4)

註：以下所有數據皆以 CGS 作處理及計算。

【實驗二】

(一) 目的：改變不同變因（衝擊速率、出水口直徑、衝擊板直徑），研究水膜的形狀及其性質，藉以驗證理論。

(二) 器材：大規模衝擊裝置

(三) 步驟：

1. 將水位差（儲水槽水面到出水口之距離）調至 15cm。
2. 待水流穩定後，量測 10 秒內流出水量，三組取平均，藉此推算出流出速率。
3. 選定衝擊板(A：2.5 cm、B：3.0 cm、C：3.5 cm)、出水口直徑(0.7、1.0、1.3 cm)，共九組，每組隨著水降差 H 的增加(每次兩公分)，逐一用游標尺測量並記錄水膜之最大寬度 d 及高度 h ，並紀錄形狀(水苞、水母甲乙丙)。
4. 將水位差改為 20cm。
5. 重複步驟(2)、(3)。
6. 紀錄多組數據後，為了分析需要，選擇性取適當數據來作圖，以驗證理論。
7. 將數據代入自行推導之公式，求出水膜破裂時厚度。

(四) 數據紀錄方式：

(以水位差 15、出水口 0.7 cm、A 盤為例，其餘請見附錄一)

出水流速 29.2cm/s

H	2	4	6	8	10	12	14
v_2	69.10	93.24	112.31	128.59	143.02	156.12	168.21
$\log v_2$	1.84	1.97	2.05	2.11	2.16	2.19	2.23
H	16	18	20	22	24	26	28
v_2	179.48	190.09	200.14	209.70	218.85	227.63	236.08
$\log v_2$	2.25	2.28	2.30	2.32	2.34	2.36	2.37

A 盤

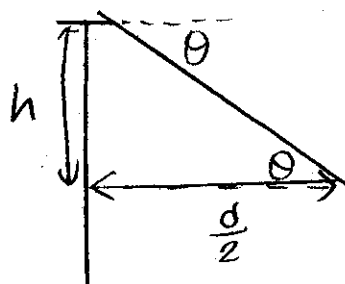
H	2	4	6	8	10	12	14
d	11.2	12.1	12.9	14	14.5	16.2	16.6
$\log d$	1.05	1.08	1.11	1.15	1.16	1.21	1.22
h	10.5	9.3	10	9.6	8.3	8.4	6.9
H	16	18	20	22	24	26	28
d	16.6	18.5	18.9	19.2	19.7	19.2	18.7
$\log d$	1.22	1.27	1.28	1.28	1.29	1.28	1.27
h	6.9	6	5.1	4.8	4.3	4	3.3

(五) 選擇數據

1. 出射角度分析

因出射角度判斷不易，我僅選擇水母丙做分析。根據定義，水母丙的水膜面與水平面夾角成一定值，因此，出射角度可視為水膜面與水平面之夾角，即 $\tan$

$$\theta = \frac{2h}{d}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{2h}{d} \quad (\text{如圖十二})$$



(圖十二)

2. 破裂厚度分析

由 $gL + \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{1}{2}v_L^2$ ，以及 $V = v_a a \times \text{厚度}$ (其中 v_a 為直徑為 a 處的速度)，
若 $v_a = v_3$ ，則我們可得：

$$\text{破裂時厚度} = \frac{V}{a\sqrt{2gL + v_2^2}}$$

若要使用此公式，則 $v_a = v_3$ ，只有在水母乙丙之情況才可分析，此時 $L = h$ 、 $a = d$ ，因此只取水母乙丙之數據做分析。

3. 水膜形狀分析

水膜最大直徑與高度隨衝擊板直徑 D 、出水口直徑 r 和衝擊時流速 v_2 變化的趨勢分析，以所有數據為母體分析。

(六)結果

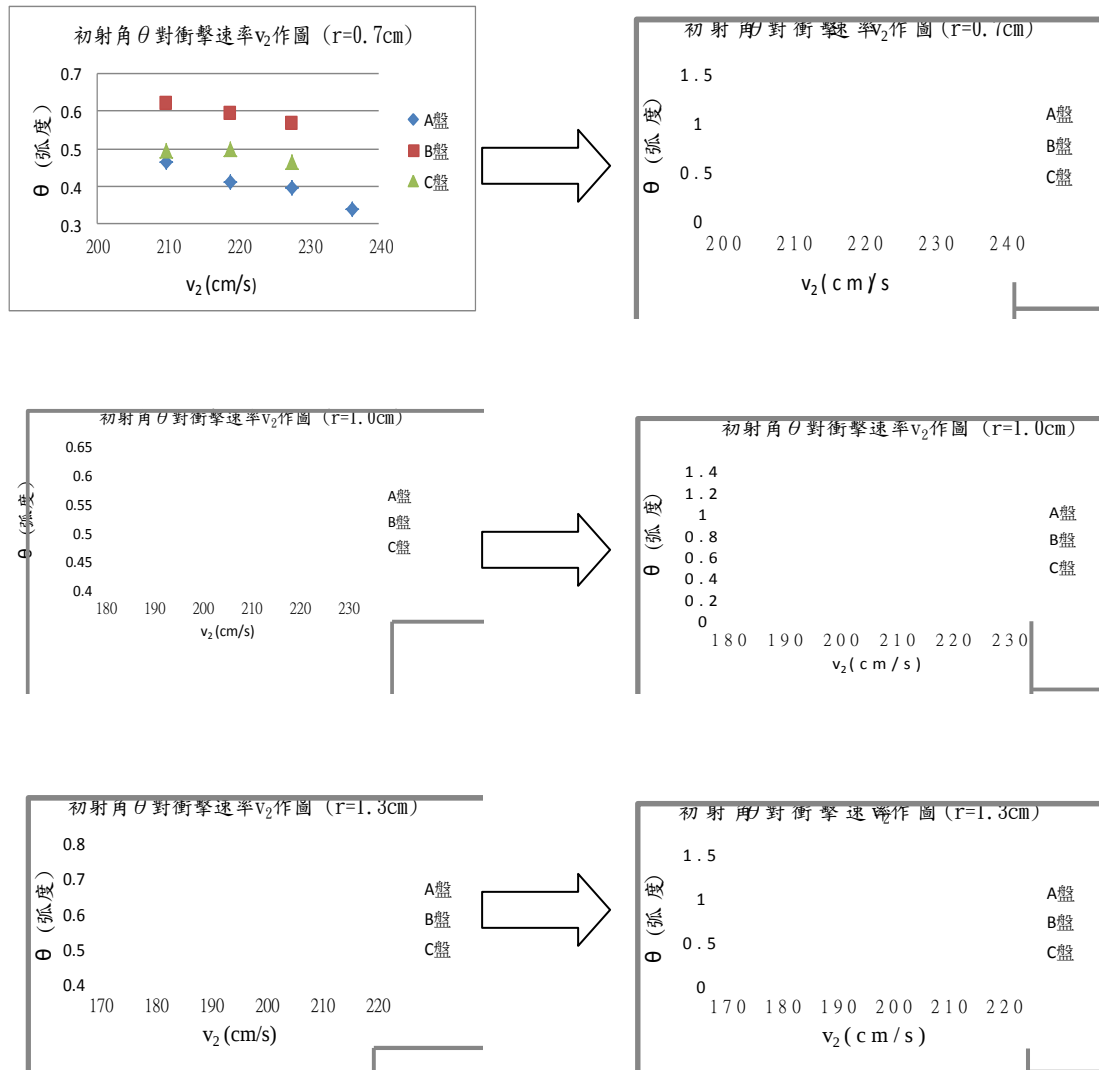
1. 出射角度分析

(1) 數據 (以水位差 15、A 盤、出水口直徑 0.7 cm 為例，其餘請見附錄二)

d	19.2	19.7	19.2	18.7
h	4.8	4.3	4.0	3.3
v_2	209.7	218.8	227.6	236.1
$\tan\theta$	0.50	0.44	0.42	0.35
θ	0.46	0.41	0.39	0.34
$\cos\theta$	0.89	0.92	0.92	0.94

(2) 分析

I. 取相同出水口直徑 r ，不同衝擊板直徑 D 作圖：

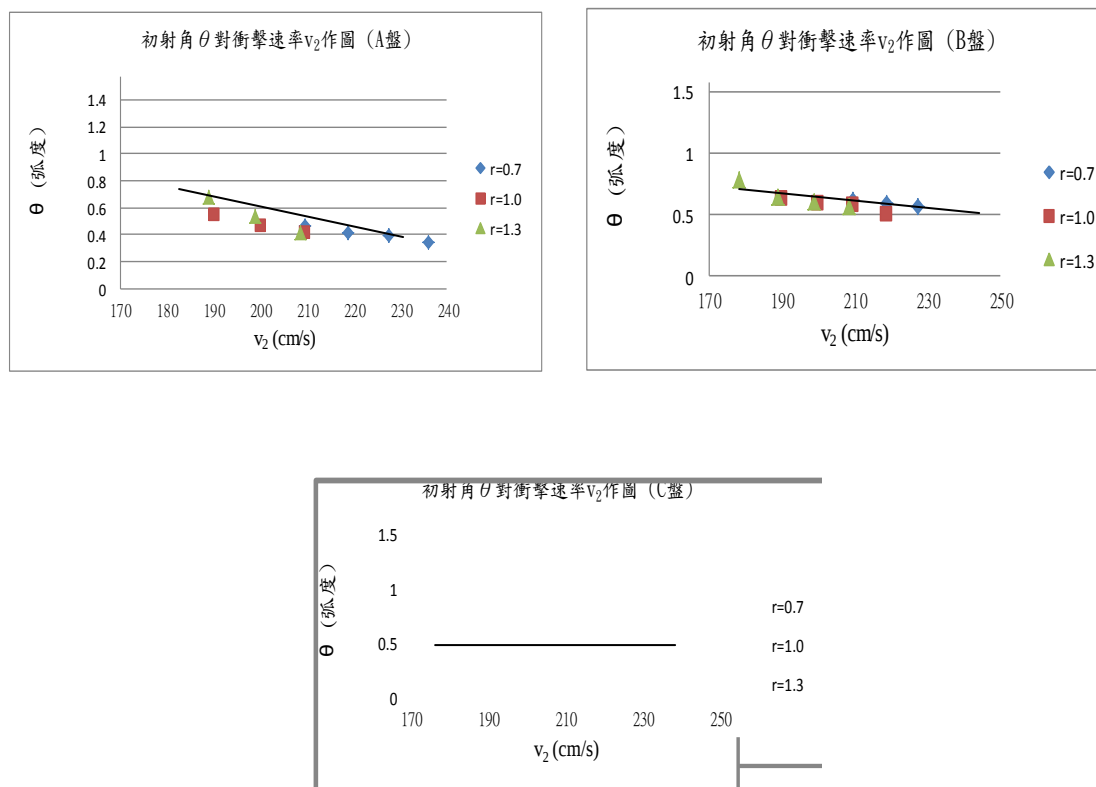


推論：

a. 由上圖左側知，初射角的角度為 B 盤 > A 盤 > C 盤，可見衝擊板直徑對角度可能並不是單純的正比關係；考慮到刻度過小的問題，將 y 軸刻度訂為 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 後，發現角度之差異極小，可包含在誤差內，因此，推論得衝擊板直徑對角度沒有影響。

b. 衝擊速率越大與初速角度為負相關。

II. 取相同衝擊板直徑，不同出水口直徑作圖：



推論：

- 不同出水口直徑的點卻可以連成一線，代表出水口直徑對初射角度並無影響。
- 再次證明了：衝擊速率越大，初速角度越小。

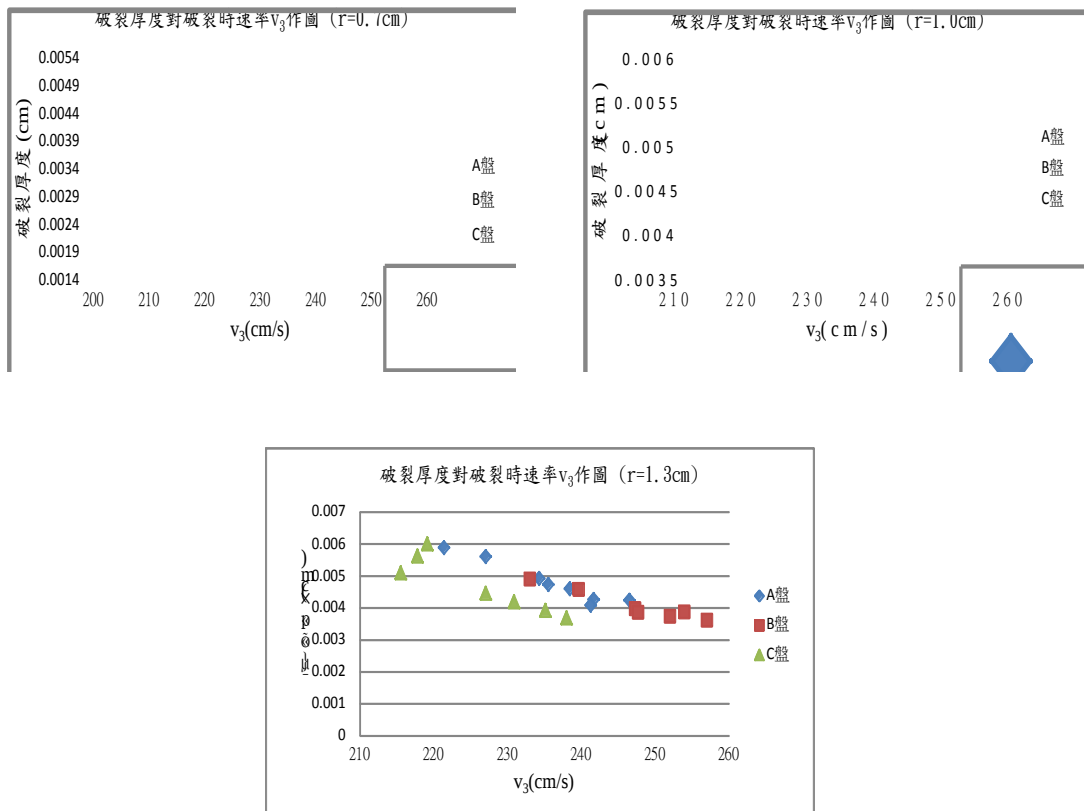
2. 水膜破裂厚度分析

(1) 數據 (以水位差 15、A 盤、出水口直徑 0.7 cm 為例)

d	18.5	18.9	19.2	19.7	19.2	18.7
h	6.0	5.1	4.8	4.3	4.0	3.3
v_3	218.8	223.7	231.0	237.3	244.2	249.4
厚度	0.0035	0.0034	0.0032	0.0031	0.0031	0.0031

(2) 分析

取相同出水口直徑 r ，不同衝擊板直徑 D 作圖：



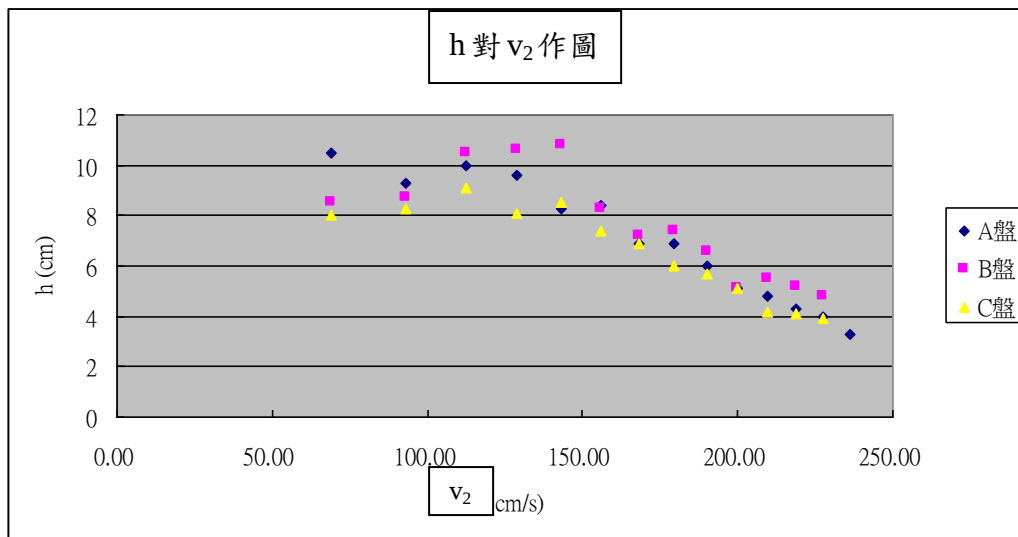
推論：

- 速率越大，破裂厚度越小。**與原想法不同，原認為速率越大，膜的不穩定性也增加，破裂厚度應較大。
- 衝擊板直徑對破裂厚度並無太大影響。**與原想法不同，原認為衝擊板越大，會使水膜的不穩定性增加，破裂厚度應較大。
- 出水口直徑越大，破裂厚度越大。**與原想法不同，原認為水柱若越粗，Plateau-Raleigh Instability 的影響越不顯著，水膜應會較穩定，因此破裂厚度應較小。

3. 水膜形狀分析

I. 對水膜高度 h 的變化趨勢分析

固定相同出水口直徑，改變衝擊板直徑，以水膜高度 h 對衝擊速率 v_2 做圖

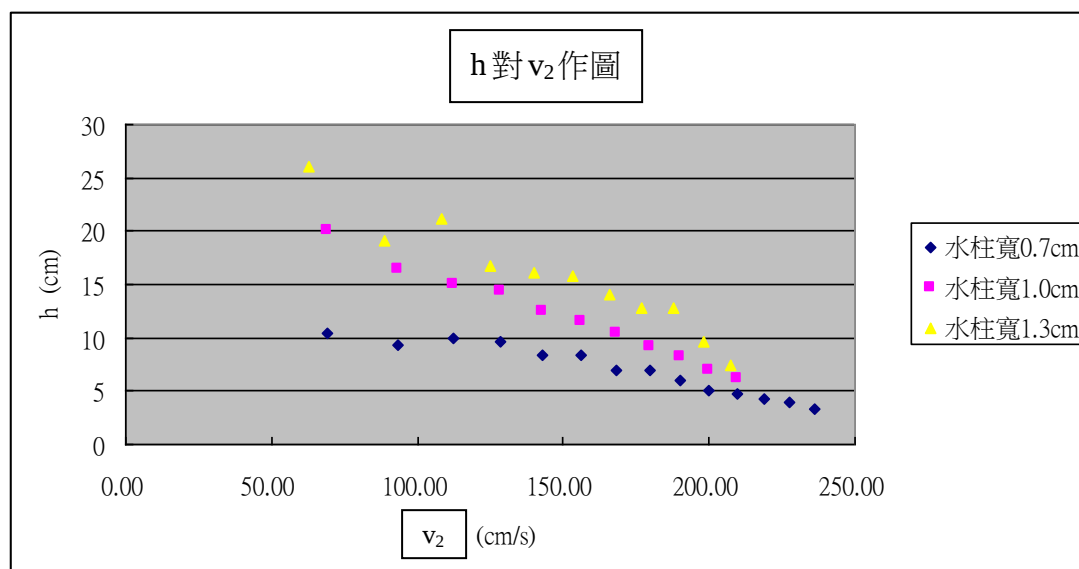


由此可知：

1. 水膜高度隨撞擊速率的增加，呈現漸少的趨勢。
2. 可以大致看出若衝擊盤越大則高度亦越小但不甚明顯。

(以上所得出之趨勢，為多組數據之共同現象，僅以之為代表)

固定相同衝擊板直徑，改變出水口直徑，以水膜高度 h 對衝擊速率 v_2 做圖



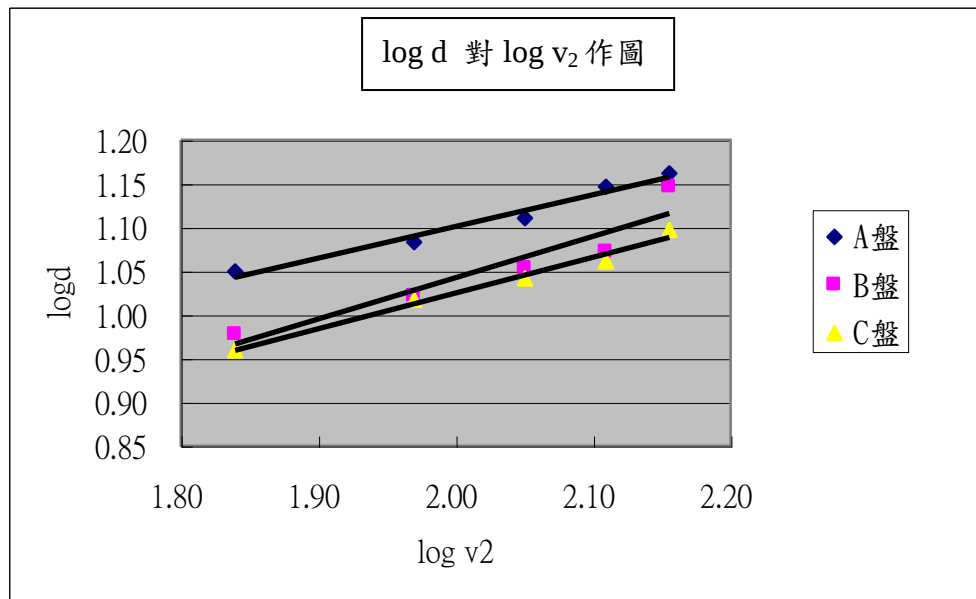
由此可知：

1. 水膜高度隨衝擊速率的增加，呈現漸少的趨勢。
2. 水柱寬越大者，產生之水膜高度亦越大。

(以上所得出之趨勢，為多組數據之共同現象，僅以之為代表)

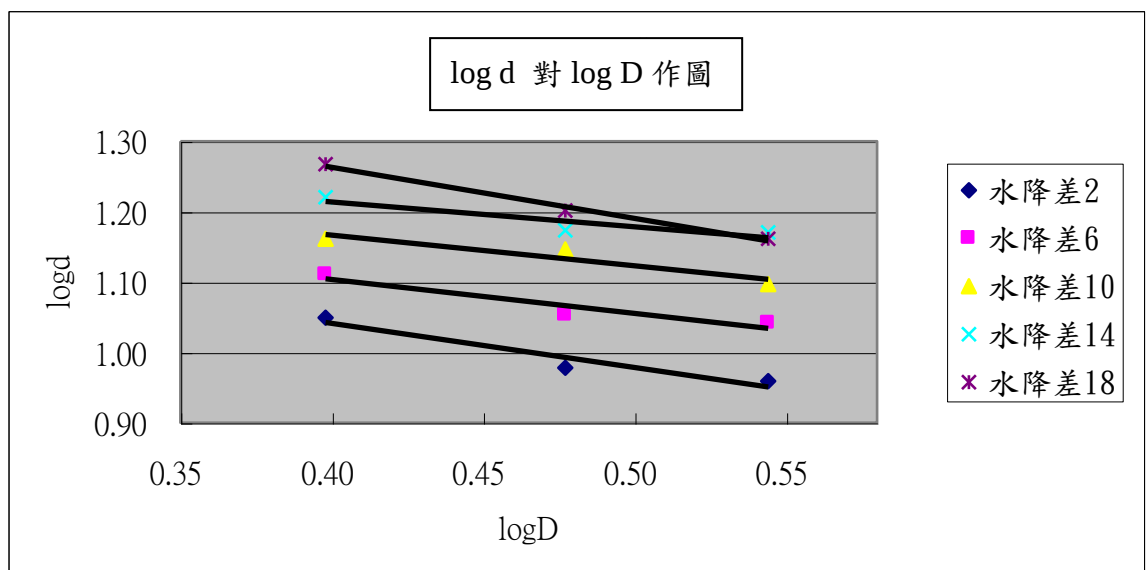
II.對水膜最大直徑 d 變化趨勢分析

(取 x, y 軸皆取 log，即可得其次方關係)



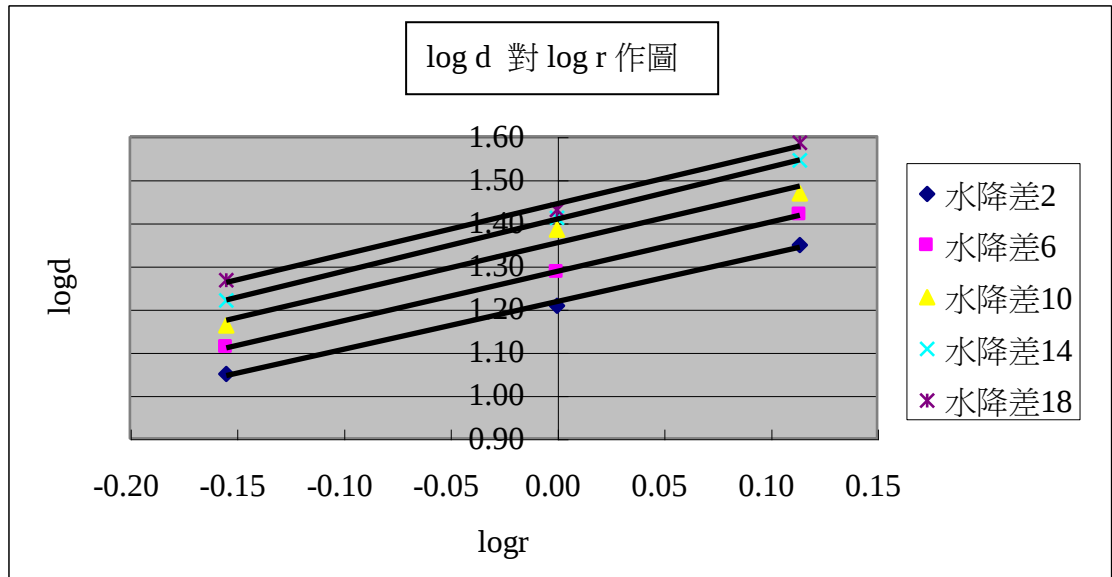
平均斜率 $\approx \frac{1}{2}$

因此，可推得 $d \propto v_2^{\frac{1}{2}}$



平均斜率 $\approx -\frac{1}{2}$

因此，可推得 $d \propto D^{-\frac{1}{2}}$



平均斜率 = 1.0585 ≈ 1

因此，可推得 $d \propto r$

根據 I. II. 圖表之推論：

1. 衝擊速率、衝擊板直徑與水膜之高度為負相關。
2. 出水管直徑與水膜之高度為正相關。

3. 水膜直徑 d 之次方分析：

設影響水膜最大直徑的變因有水柱寬 r 、衝擊板寬 D 、撞擊至衝擊板時之速度 v_2 ，因此可令 $d = kr^\alpha v_2^\beta D^\gamma$ 。其中 k 有因次，由液體之密度、當時之重力場、出水初速……決定。

由實驗數據所得的分析知： $\alpha=1$ ， $\beta=0.5$ ， $\gamma=-0.5$ 。

將實驗數據代入方程式可得：

$$d = 3rv_2^{\frac{1}{2}}D^{-\frac{1}{2}} \text{ (出水初速 20~30cm/s 時) } \quad \text{或}$$

$$d = 4rv_2^{\frac{1}{2}}D^{-\frac{1}{2}} \text{ (出水初速 30~45cm/s 時)}$$

[實驗三]

(一) 目的：改變黏滯係數，研究水膜的形狀及其性質

(二) 器材：小規模衝擊裝置。

(三) 原理：為了減少甘油之浪費並增加回收率，我們將實驗裝置改小，且同時為避免因裝置小而使誤差相對增大，我們從流體力學的雷諾數、韋伯數與接口效應來考量，讓實驗的液體流動較穩定：

1. 雷諾數(Reynolds Number)

$$Re = \frac{\rho v r}{\mu}$$

當 Re 小於 2000 時管中液體可以形成穩定層流，而若 >4000 則必然形成亂流。

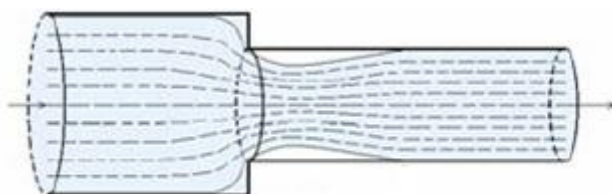
2. 韋伯數(Weber Number)

$$We = \frac{\rho v^2 r}{\sigma}$$

We 愈小代表表面張力愈重要，為需不需要考慮表面張力作用之標準。

3. 接口效應

在粗管與細管入口或出口接續時因管徑忽然變窄(或變寬)，流體的速度分佈必須進入管口一段距離才能逐漸穩定而形成層流。降低管徑就能有效降低此段非穩流的過度長度。

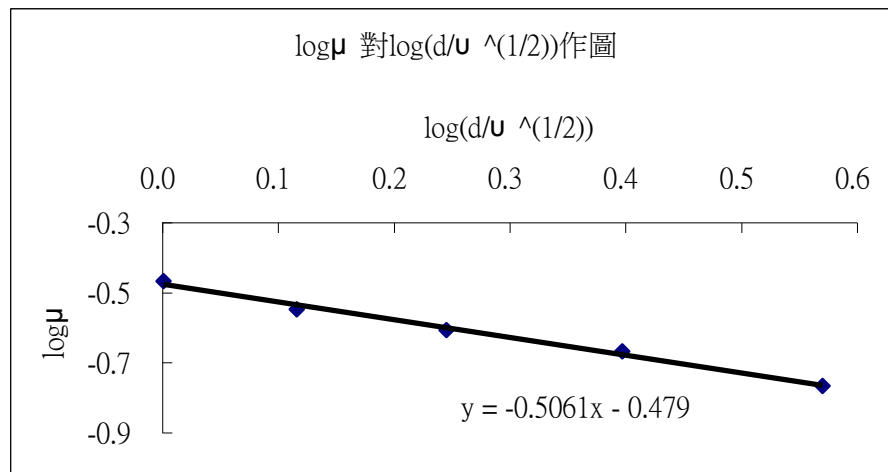


因此，為使液體流動較穩定，並放大表面張力作用(因為我認為表面張力是決定水膜形狀之重要關鍵)，要讓雷諾數、韋伯數降低，並讓接口效應減少，即是使出水管管徑縮小並變長，水落差降低，黏滯係數及表面張力增加；然而因為甘油水溶液若濃度高於 40%，則會太過濃稠，造成實驗上的困難，因此我們使用的甘油水溶液濃度接不大於 40%。

(四) 步驟：

1. 使用甘油水溶液 40% 撞擊小型衝擊板(直徑 0.4cm)。
2. 將出口精細調至能夠準確撞擊至衝擊板的中心，以避免誤差。
3. 待流量穩定後，量測 10 秒內流出液體量，三組取平均，藉此推算出流出速率。
4. 增加水降差以改變撞擊衝擊板時之速率，但將水降差控制在 5cm 以下。
5. 拍照量測其水膜寬及高。
6. 將水溶液稀釋，改為 30%、20%、10%、0%(純水)，並重複步驟 2、3、4。

(五) 結果：



$$\text{斜率} \approx -\frac{1}{2}$$

$$\text{因此，可推得 } d \propto \mu^{\frac{1}{2}}$$

(六) 推論：

根據實驗一之推論，再加上黏滯係數 μ 為變因，則水膜最大直徑 d 的大小：

$$d = 3rv^{\frac{1}{2}}D^{\frac{-1}{2}}\mu^{\frac{-1}{2}} \text{ (出水初速 } 20\sim 30\text{cm/s 時) 或}$$

$$d = 4rv^{\frac{1}{2}}D^{\frac{-1}{2}}\mu^{\frac{-1}{2}} \text{ (出水初速 } 30\sim 45\text{cm/s 時)。$$

(因實驗二中，水之黏滯係數視為 1，所以 k 值不需做修正。)

[實驗四]

(一) 目的：因在實驗時意外發現多邊形之水膜，進而探討其產生之原因。

(二) 器材：小規模衝擊裝置。

(三) 步驟：

- 1.利用甘油水溶液撞擊衝擊板。
- 2.改變水降差，找出產生多邊形水膜之條件。
- 3.改變甘油水溶液濃度來改變黏滯係數，觀察水膜之形狀。
- 4.同樣條件但用水做實驗，觀察水膜之形狀。
- 5.由觀察之結果推測出多邊形水膜之原理。

(四) 結果：

(因為甘油水溶液濃度並不會影響水膜之形狀，所以以下之結果只討論速率的變化)

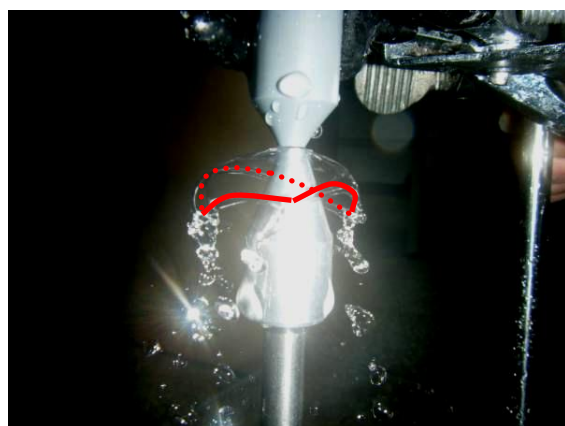
1.何時產生多邊形水膜

使用甘油水溶液及純水撞擊時，在水降差幾乎為 0 時，出現多邊形水膜，其形狀隨液體流速改變，但主要以六邊形為骨架。

2.多邊形水膜之形狀

(1)甘油

出水流速大於 50cm/s，小於 100cm/s：出現兩根觸鬚(液絲)的傘狀水膜

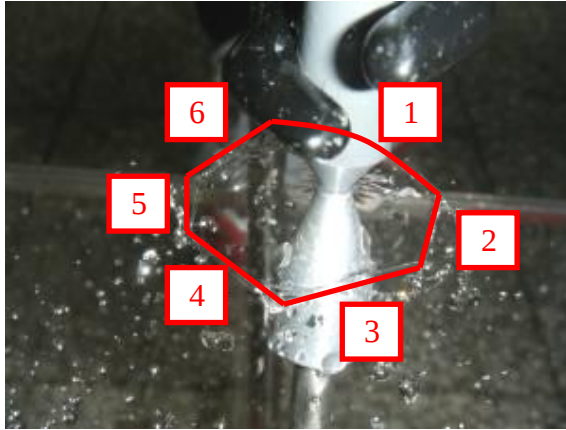


邊緣產生之液絲為垂直往下之水流，沒有水平初速。

出水流速大於 100cm/s，小於 150cm/s：產生多邊形水膜

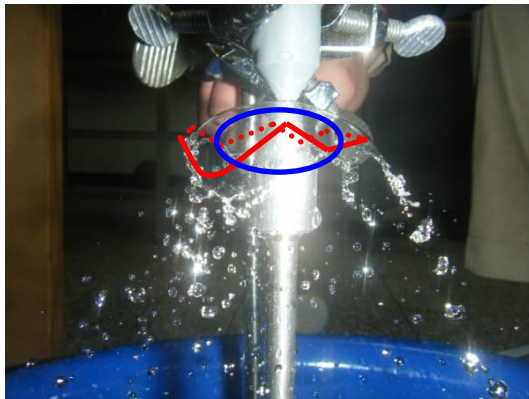
(水膜並不是指純水水膜)

a. 六邊形水膜 ($100 < \text{流速} < 120 \text{cm/s}$)



邊緣產生之液絲由凸起之頂點沿邊緣切線方向射出

b. 鋸齒狀水膜 ($120 < \text{流速} < 150 \text{cm/s}$)



其中，其鋸齒角與流速有反向關係，即流速越大，鋸齒角越小。
而邊緣產生之液絲由凸起之尖角沿邊緣切線方向射出。

c. 破裂水膜 (流速 $>150\text{cm/s}$)



邊緣極度不穩定，呈現不規則破裂，液絲由邊緣任意處產生，並沿邊緣切線方向射出。

(2) 純水

* 若改用水撞擊，則形狀不會有太大改變，因此直接整理於下表

整理與比較：

液體 種類	形狀		流速(cm/s)	水絲	備註
甘油 水溶液	傘狀水膜		$50 < v < 100$	兩條，無水平 初速	
	多邊 形水膜	六邊形 水膜	$100 < v < 120$	六條，由尖角 沿切線射出	流速越大，鋸齒角越小
		鋸齒狀 水膜	$120 < v < 150$	六~十條，由尖 角沿切線射出	流速越大，鋸齒角越小
	破裂水膜		$v > 150$	由邊緣任意處 不規則產生	邊緣如同水母甲乙丙
水	鋸齒狀水膜		$50 < v < 150$	六~十條，由尖 角沿切線射出	流速越大，鋸齒角越小
	破裂水膜		$v > 150$	由邊緣任意處不 規則產生	邊緣如同水母甲乙丙

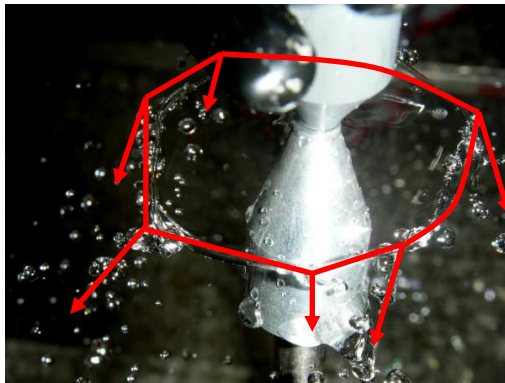
3.其他多邊形水膜性質

(1)觸鬚(液絲)產生位置

若水膜有較凸起處，則由此處流出

如：傘狀水膜、六邊形水膜、鋸齒狀水膜皆是如此

(若為純水，會有少部分水滴從邊緣脫離)



(2)邊緣厚

甘油水溶液



由圖可看出邊緣顯然較它處(內部膜處)厚

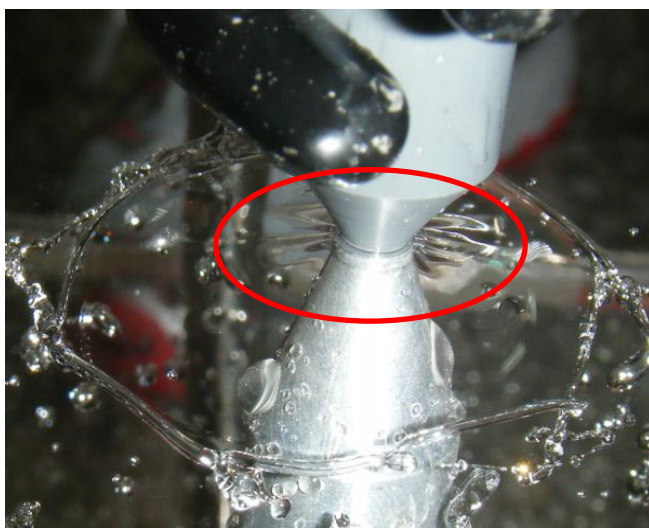
純水



邊緣厚但呈現非常不穩定的狀態，且會有少數水滴脫離邊緣而出

(3)波紋的產生

甘油水溶液或水衝擊至盤處有波紋：

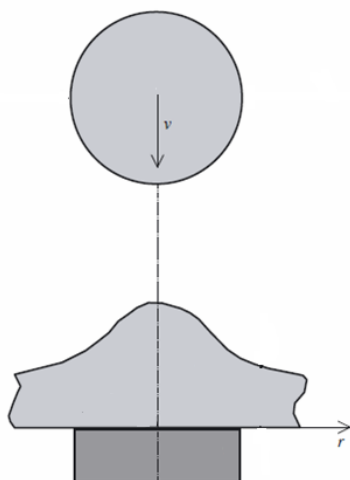
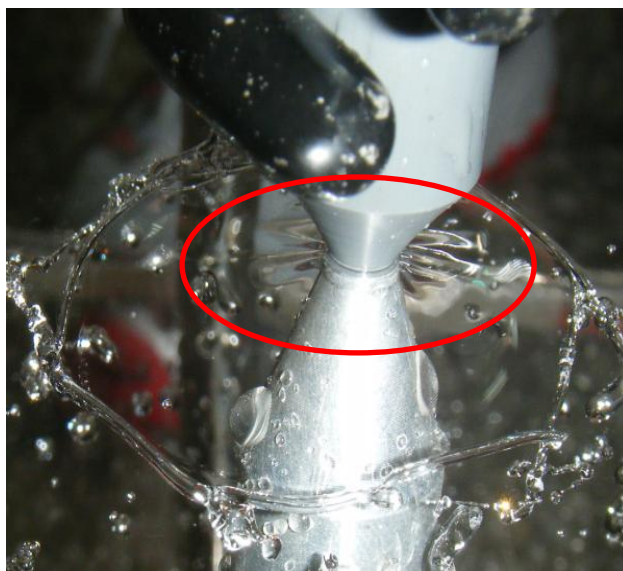


(五) 推論：

1. 水膜上之波動

● 心形波

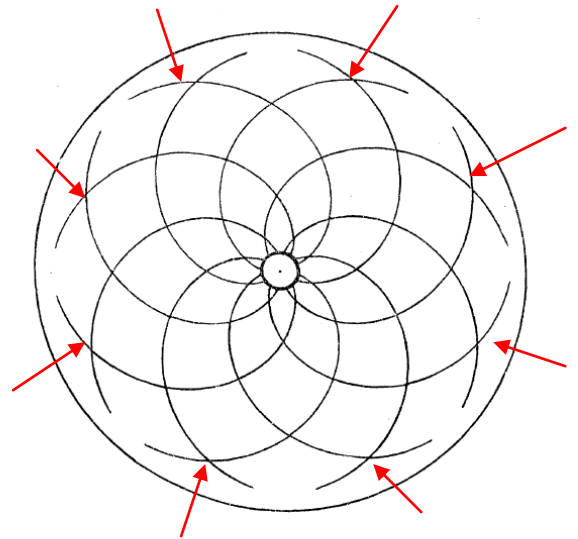
(1) 由實驗三所觀察到的液柱與衝擊板處產生之波紋，可推測：當管口夠靠近衝擊板時，便會產生一種波動，這是由於反彈之液柱向上撞擊下注之液柱，擠壓而產生；又因為擠壓的緣故，造成液體向四周散射出之液體量分配不均，進而使得某些地方的液體量較多，推測這是水膜邊緣產生多邊形的成因。



← 若將液柱看成連續之液滴，當前一滴液滴撞擊衝擊盤正反彈時，下一滴液滴已落下與之擠壓，產生液體向四周散射但水量又無平均分配之情形。

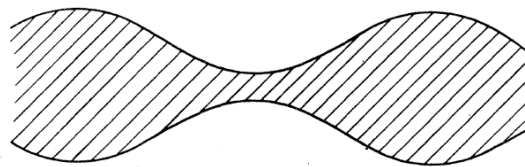
(2) 右圖是查詢文獻資料^[1]之圖形，稱為「心形波」，心形波可改變水流(液流)的方向，圖中可見八個心形波。

我們所觀察到的波紋應該就是心形波，水流(液流)方向受到心形波的傳播方向影響，因此心形波之交會處(紅色箭頭所指處)即會發生上文推測之散射出的液體量分配不均的情形，進而使水膜邊緣產生多邊形。



●反對稱波 (antisymmetrical wave)

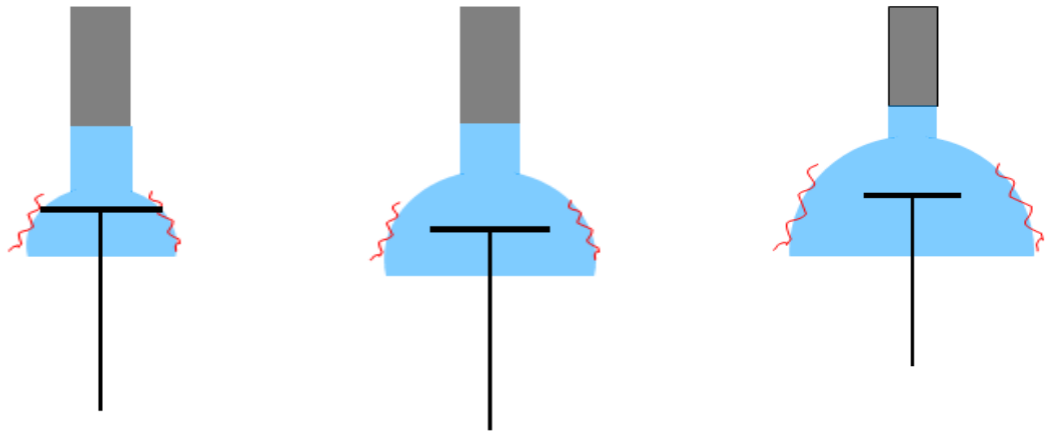
在水膜之邊緣因為表面張力之不穩定，造成一隨水膜向上傳遞之波動，查詢文獻後得知此波動稱為反對稱波。(已於實驗一之推論解釋了水膜破裂的原因)



▲反對稱波

其波速正比於 $\frac{1}{\sqrt{R}}$ ^[1]，R 為水膜厚度，而膜擴散的越大，厚度自然會漸減，亦即膜越大波速越快。

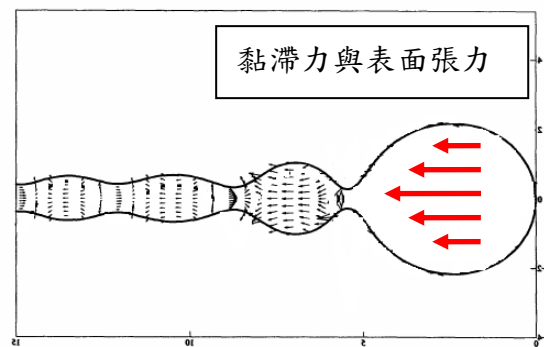
將水膜流速與波速的大小關係分成下列三類討論：



(上面三圖僅是示意圖，並不是真正的波形)

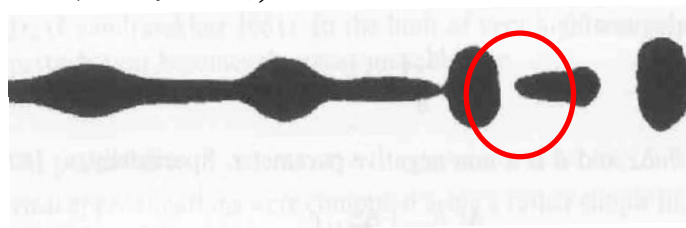
(1) 波速<流速	(2) 波速=流速 (停滯點)	(3) 波速>流速
水膜初期擴張階段，厚度尚厚，因此波速小於流速，波便會隨著液體介質向下流動，直至(2)之情況。	若水膜之厚度適當，使得波速恰等於流速，則此時波便會停留原處。	若水膜太大，使得波速大於流速，則波便會「逆流而上」，至水膜厚度可使波停留原處的位置(即(2)之情況)。

因此，無論何種情形，波都會逐漸傳至波速與流速相同之處(將其稱作停滯點)，因為波的重疊，造成在波速與流速相同之處的振幅大，厚度也因而大。同時因為厚度較大，表面張力與黏滯力作用也較大，使得水膜之向外速度大量降低。若水膜之水平速度不大，使得邊緣不至於因速率過大而破裂，則便會出現**厚邊緣**的現象。(如下圖)



▲ 水膜之截側面圖

然而，若上述之水膜水平速度太大，使得表面張力與黏滯力不足以將之靜止，則水膜會繼續擴張，但並非無限制擴張，因為膜上波動會造成膜的上下表面震盪，當水膜持續變薄，上下表面便會交會，造成膜的破裂。(與實驗一推論之水膜破裂的成因相同)



需要注意的是，即使水膜水平速度不大，能受黏滯力及表面張力的作用而停止，但仍不一定能產生厚邊緣之水膜，因為邊緣水膜就算停止了，還會受到後方水膜的推擠，而被向外推出停滯點外，繼而破裂。

經觀察後發現，出現厚邊緣之水膜必定也是多邊形水膜，這是十分合理的，因為多邊形水膜中，位於停滯點之液體可由多邊形之頂點排出 (請見多邊形水膜性質之(1) 觸鬚產生位置)，便不會受推擠而向外離開停滯點，而能維持厚邊緣之形狀。

厚邊緣產生之條件：

- a. 流速不可太大
- b. 須是多邊形水膜，也就是水降差幾乎為零時產生之水膜。

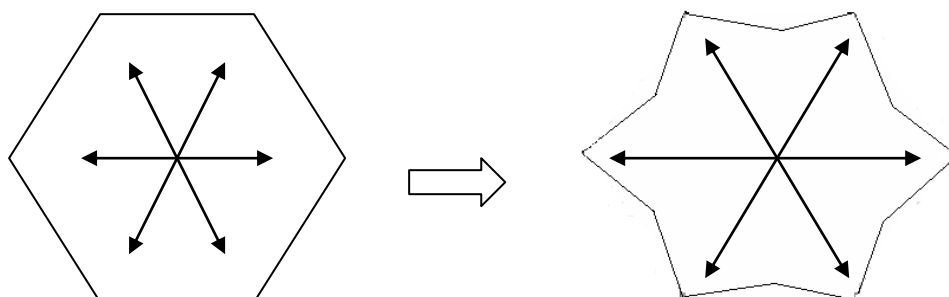
2. 多邊形水膜形狀的探討

●六邊形水膜

上述已解釋了六邊形水膜的成因。顯然的，八個心形波可造成八處之液體量較多，產生八條觸鬚(液絲)，而我們所觀察到的六邊形應該就是六個心形波所造成的。而流速慢時所產生的傘狀水膜便是由兩個心形波所造成。

●鋸齒形水膜

(1) 若流速偏快(但仍不至於造成水膜破裂)，則至邊緣處時仍有水平向外之速度，將原水膜之頂點變得更尖，多邊形轉變成鋸齒形。



然而，因為鋸齒形水膜的邊緣較不穩定，因此我們也觀察到七至十個鋸齒的水膜，但是仍是以六個齒為主架，多出的鋸齒不規則錯落在邊緣上。

(2) 若液體為純水，則表面張力與黏滯力較小，至邊緣處時必仍有水平向外之速度，因此水膜之形狀都為鋸齒形水膜。

●破裂水膜

若流速太快，無論甘油水溶液或水都會破裂，原因已詳述於上。

肆、 結論

一、對與水膜形成之過程已做了通則性的解釋。

二、對於水膜高度之分析：

撞擊速率與出水管直徑與水膜之高度為負相關，而與衝擊板直徑為正相關。

三、對於水膜最大直徑之分析，可由實驗推得經驗方程式：

$$d = 3rv_2^{\frac{1}{2}} D^{\frac{-1}{2}} \mu^{\frac{-1}{2}} \text{ (出水初速 } 20\sim 30\text{cm/s 時) 或}$$

$$d = 4rv_2^{\frac{1}{2}} D^{\frac{-1}{2}} \mu^{\frac{-1}{2}} \text{ (出水初速 } 30\sim 45\text{cm/s 時)}$$

四、對於水膜初射角之分析：

衝擊板和出水口直徑對初射角沒有影響，而衝擊速率與初射角為負相關

五、對於水膜破裂厚度之分析：

衝擊板直徑對破裂厚度的影響仍未知，而出水口直徑對破裂厚度為正相關，破裂時流速與破裂厚度為負相關。

六、水降差幾乎為零時能打出多邊形之液膜，已對其做定性分析，且獲得合理之解釋。

伍、 參考資料

一、G. Taylor. The Dynamics of Thin Sheets of Fluid. II. Waves on Fluid Sheets, *Proceeding of the Royal Society*, vol. 253, no. 1274, 296-312.

二、江郁嫻等人：**水蕙花**，中華民國第四十一屆中小學科學展覽會作品說明書。

三、蔡孟勳等人：**散射水膜的研究**，中華民國第三十八屆中小學科學展覽會作品說明書。

四、高中物理 第十章—流體的性質、第十三章—波動。

五、流體力學概論 陳慶芳 編著 ——徐氏基金會出版

六、Fundamentals of Physics Haliday · Resnick · Walker

陸、 附錄

附錄一 (所有物理量的單位皆是 CGS 制)

一、水位差 15cm

1.出水口 0.7cm，出水流速 29.2cm/s

H	2	4	6	8	10	12	14
v	69.10	93.24	112.31	128.59	143.02	156.12	168.21
logv	1.84	1.97	2.05	2.11	2.16	2.19	2.23
H	16	18	20	22	24	26	28
v	179.48	190.09	200.14	209.70	218.85	227.63	236.08
logv	2.25	2.28	2.30	2.32	2.34	2.36	2.37

(1)A 盤

H	2	4	6	8	10	12	14
d	11.2	12.1	12.9	14	14.5	16.2	16.6
logd	1.05	1.08	1.11	1.15	1.16	1.21	1.22
h	10.5	9.3	10	9.6	8.3	8.4	6.9
H	16	18	20	22	24	26	28
d	16.6	18.5	18.9	19.2	19.7	19.2	18.7
logd	1.22	1.27	1.28	1.28	1.29	1.28	1.27
h	6.9	6	5.1	4.8	4.3	4	3.3

(2)B 盤

H	2	4	6	8	10	12	14
d	9.5	10.5	11.3	11.8	14	14.6	14.9
logd	0.98	1.02	1.05	1.07	1.15	1.16	1.17
h	8.5	8.7	10.5	10.6	10.8	8.3	7.2
H	16	18	20	22	24	26	
d	15.2	15.9	15.7	15.4	15.4	15.1	
logd	1.18	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	
h	7.4	6.6	5.1	5.5	5.2	4.8	

(3)C 盤

H	2	4	6	8	10	12	14
d	9.1	10.4	11	11.5	12.5	13	14.8
logd	0.96	1.02	1.04	1.06	1.10	1.11	1.17
h	8	8.3	9.1	8.1	8.5	7.4	6.9
H	16	18	20	22	24	26	
d	14.5	14.5	15.4	15.5	15.1	15.6	
logd	1.16	1.16	1.19	1.19	1.18	1.19	
h	6	5.7	5.1	4.2	4.1	3.9	

2.出水口 1.0cm，出水流速 29.3cm/s

H	2	4	6	8	10	12
v	69.12	93.26	112.33	128.60	143.03	156.13
logv	4.24	4.54	4.72	4.86	4.96	5.05
H	14	16	18	20	22	24
v	168.22	179.49	190.10	200.14	209.71	218.86
logv	5.13	5.19	5.25	5.30	5.35	5.39

(1)A 盤

H	2	4	6	8	10	12
d	16.1	17.7	19.3	22.1	24.2	25.3
logd	1.21	1.25	1.29	1.34	1.38	1.40
h	20.1	16.5	15	14.3	12.5	11.5
H	14	16	18	20	22	
d	25.8	26.4	26.9	27.4	28.1	
logd	1.41	1.42	1.43	1.44	1.45	
h	10.5	9.1	8.2	6.9	6.2	

(2)B 盤

H	2	4	6	8	10	12
d	15.5	16	18.5	21	22	23.2
logd	1.19	1.20	1.27	1.32	1.34	1.37
h	18	16.3	17.2	17.8	15.6	13.6
H	14	16	18	20	22	24
d	25	26.6	28	29.2	29	28.4
logd	1.40	1.42	1.45	1.47	1.46	1.45
h	11.2	11.2	10.2	9.7	9.5	7.8

(3)C 盤

H	2	4	6	8	10	12
d	14.5	18	19.5	20.5	22	25
logd	1.16	1.26	1.29	1.31	1.34	1.40
h	18	15.3	16.5	14.9	13.8	12.1
H	14	16	18	20	22	
d	25	26.1	26.2	30	29	
logd	1.40	1.42	1.42	1.48	1.46	
h	9.4	8.5	8.4	8.2	6.5	

3.出水口 1.3cm，出水流速 19.8 cm/s

H	2	4	6	8	10	12
v	62.61	88.54	108.44	125.22	140.00	153.36
logv	1.80	1.95	2.04	2.10	2.15	2.19
H	14	16	18	20	22	
v	165.65	177.09	187.83	197.99	207.65	
logv	2.22	2.25	2.27	2.30	2.32	

(1)A 盤

H	2	4	6	8	10	12
d	19.5	19.1	21.1	25.7	26.3	29
logd	1.29	1.28	1.32	1.41	1.42	1.46
h	26.1	19.1	21.1	16.8	16.1	15.8
H	14	16	18	20	22	
d	30	30.5	32	32.5	34	
logd	1.48	1.48	1.51	1.51	1.53	
h	14.1	12.8	12.8	9.6	7.5	

(2)B 盤

H	2	4	6	8	10	12
d	1.3	1.2	1.1	1.3	1.4	1.3
logd	0.11	0.08	0.04	0.11	0.15	0.11
h	17.1	20.8	23.5	26.6	29.3	30.5
H	14	16	18	20	22	
d	1.3	1.2	1.2	1.3	1.4	
logd	0.11	0.08	0.08	0.11	0.15	
h	34.1	34	35	35.5	36	

(3)C 盤

H	2	4	6	8	10
d	1.4	1.3	1.36	1.3	1.2
logd	0.15	0.11	0.13	0.11	0.08
h	17.7	22.1	23.8	25.4	27.3
H	12	14	16	18	20
d	1.2	14.3	1.2	1.3	1.3
logd	0.08	1.16	0.08	0.11	0.11
h	30.4	33	34.5	36.2	38.1

二、水位差 20cm

1.出水口 0.7cm，出水流速 44.8 cm/s

H	2	4	6	8	10	12
v	77.00	99.24	117.34	133.00	147.00	159.78
logv	1.89	2.00	2.07	2.12	2.17	2.20
H	14	16	18	20	22	
v	171.61	182.67	193.10	203.00	212.44	
logv	2.23	2.26	2.29	2.31	2.33	

(1)A 盤

H	2	4	6	8	10	12
d	16.1	16.7	17.2	18.9	20.2	20.5
logd	1.21	1.22	1.24	1.28	1.31	1.31
h	12.8	10.7	11	9.9	8.9	7.7
H	14	16	18	20	22	
d	21.4	22	22.4	22.8	23.2	
logd	1.33	1.34	1.35	1.36	1.37	
h	7.2	8.1	7.3	7	5.8	

(2)B 盤

H	2	4	6	8	10
d	14.8	16.4	16.5	17.8	18.2
logd	1.17	1.21	1.22	1.25	1.26
h	10.9	10.6	10.4	8.8	8.3
H	12	14	16	18	20
d	19.1	21.2	20.6	21.3	22.1
logd	1.28	1.33	1.31	1.33	1.34
h	8.1	7	6.8	6.6	5.8

(3)C 盤

H	2	4	6	8	10	12
d	15.5	16.2	16.5	17.1	17.8	18.7
logd	1.19	1.21	1.22	1.23	1.25	1.27
h	9.5	7.9	9.7	8	8.4	7.4
H	14	16	18	20	22	
d	20.2	20.6	21	20.3	20.5	
logd	1.31	1.31	1.32	1.31	1.31	
h	6.7	6.2	6	5.5	5.1	

2.出水口 1.0cm，出水流速 36.3 cm/s

H	2	4	6	8	10
v	36.82	37.35	37.87	38.39	38.89
logv	1.57	1.57	1.58	1.58	1.59
H	12	14	16	18	20
v	39.40	39.89	40.38	40.86	41.34
logv	1.60	1.60	1.61	1.61	1.62

(1)A 盤

H	2	4	6	8	10
d	24.3	25.4	29.5	30.5	33.5
logd	1.39	1.40	1.47	1.48	1.53
h	21.7	17.2	16.7	15.8	13.3
H	12	14	16	18	20
d	34.5	36.5	38	39	40.5
logd	1.54	1.56	1.58	1.59	1.61
h	12	11.8	10.9	10.6	9

(2)B 盤

H	2	4	6	8	10	12
d	24	24.1	28.3	28.7	30.7	33
logd	1.38	1.38	1.45	1.46	1.49	1.52
h	20.8	18.4	16.7	16.1	14.3	12.7
H	14	16	18	20	22	
d	33.5	34.7	36.3	37	35	
logd	1.53	1.54	1.56	1.57	1.54	
h	9.9	10.8	11.4	10.5	9	

(2) C 盤

H	2	4	6	8	10
d	22.3	24.5	26.5	28.8	29.5
logd	1.35	1.39	1.42	1.46	1.47
h	21.1	15.3	11.6	11.7	13.7
H	12	14	16	18	20
d	30.4	33.5	34	35.3	34.6
logd	1.48	1.53	1.53	1.55	1.54
h	10.7	10.3	9.5	8.8	7.2

3.出水口 1.3cm，出水流速 31.5 cm/s

H	2	4	6	8	10
v	32.07	32.68	33.27	33.86	34.43
logv	1.51	1.51	1.52	1.53	1.54
H	12	14	16	18	20
v	34.99	35.55	36.10	36.64	37.17
logv	1.54	1.55	1.56	1.56	1.57

(1)A 盤

H	2	4	6	8	10
d	22.6	21	24.7	30.5	30
logd	1.44	1.29	1.30	1.30	1.12
h	27.6	19.6	19.9	19.9	13.3
H	12	14	16	18	20
d	32	33.5	36.5	34	30.5
logd	1.12	1.00	0.92	0.92	0.91
h	13.2	10	8.4	8.3	8.2

(2)B 盤

H	2	4	6	8	10
d	24.2	26.7	26.1	28.2	31.5
logd	1.38	1.43	1.42	1.45	1.50
h	24.2	21.2	18.5	14.3	14
H	12	14	16	18	20
d	32	35	35	33.5	36
logd	1.51	1.54	1.54	1.53	1.56
h	10.7	12.1	10.2	8.7	8.5

(3)C 盤

H	2	4	6	8	10
d	22.3	23.3	26.2	27.2	29.4
logd	1.35	1.37	1.42	1.43	1.47
h	26	18.9	13.6	13.7	10.36
H	12	14	16	18	20
d	35.5	35	37	38.5	44
logd	1.55	1.54	1.57	1.59	1.64
h	10.1	11.3	12.4	11.3	12.2

附錄二 (所有物理量的單位皆是 CGS 制)

水位差 15 cm

1. 出水口直徑 0.7 cm

A 盤

d	19.2	19.7	19.2	18.7
h	4.8	4.3	4	3.3
v_2	209.7	218.8	227.6	236.1
$\tan\theta$	0.50	0.44	0.42	0.35
θ	0.46	0.41	0.39	0.34
$\cos\theta$	0.89	0.92	0.92	0.94

B 盤

d	15.7	15.4	15.4	15.1
h	5.1	5.5	5.2	4.8
v_2	200.1	209.7	218.8	227.6
$\tan\theta$	0.65	0.71	0.68	0.64
θ	0.58	0.62	0.59	0.57
$\cos\theta$	0.84	0.81	0.83	0.84

C 盤

d	15.5	15.1	15.6
h	4.2	4.1	3.9
v_2	209.7	218.8	227.6
$\tan\theta$	0.54	0.54	0.50
θ	0.50	0.50	0.46
$\cos\theta$	0.88	0.88	0.89

2. 出水口直徑 1.0 cm

A 盤

d	26.9	27.4	28.1
h	8.2	6.9	6.2
v_2	190.1	200.1	209.7
$\tan\theta$	0.61	0.50	0.44
θ	0.55	0.47	0.42
$\cos\theta$	0.85	0.89	0.91

B 盤

d	28	29.2	29	28.4
h	10.2	9.7	9.5	7.8
v_2	190.1	200.1	209.7	218.9
$\tan\theta$	0.73	0.66	0.66	0.55
θ	0.63	0.59	0.58	0.50
$\cos\theta$	0.81	0.83	0.84	0.88

C 盤

d	26.2	30	29
h	8.4	8.2	6.5
v_2	190.1	200.1	209.7
$\tan\theta$	0.64	0.55	0.45
θ	0.57	0.50	0.42
$\cos\theta$	0.84	0.88	0.91

3. 出水口直徑 1.3 cm

A 盤

d	32	32.5	34
h	12.8	9.6	7.5
v_2	188.9	199.0	208.6
$\tan\theta$	0.80	0.59	0.44
θ	0.67	0.53	0.42
$\cos\theta$	0.78	0.86	0.91

B 盤

d	34	35	35.5	36
h	16.7	13.1	12.2	11.5
v_2	178.2	188.9	199.0	208.6
$\tan\theta$	0.98	0.75	0.69	0.64
θ	0.78	0.64	0.60	0.57
$\cos\theta$	0.71	0.80	0.82	0.84

C 盤

d	34.5	36.2	38.1
h	11	10	8.7
v_2	178.2	188.9	199.0
$\tan\theta$	0.64	0.55	0.46
θ	0.57	0.50	0.43
$\cos\theta$	0.84	0.88	0.91