

第十屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA10-534

作品名稱：水波奇跡

姓名：陳聖翔

關鍵字：水波、等角螺線、旋臂放大比例常數

水波奇跡

壹、研究動機

無意中看到堂弟在裝水的臉盆中把玩著一個塑膠圓筒；忽然間，我發現到水面當中出現了很奇特的圖形，似乎為螺旋線。我們知道水波、光波與圓錐曲線有著密不可分的關係，可利用水波產生圓、橢圓、拋物線、雙曲線等圖形，這就是大家所熟知圓錐曲線的光學性質。想到之前物理老師曾提到過，水波亦能產生各種圓錐曲線，但螺旋線圖形倒是從來沒聽過。於是，我想應用什麼方法可以做出螺旋線，且能藉由改變環境因素，進而得出不同的螺旋線。

貳、研究目的

- 一、尋找螺旋線並驗證
- 二、探討頻率震盪器以不同點擊木板方式對螺旋圖形的影響
- 三、探討 L 型旋臂轉速對螺旋圖形的影響
- 四、探討水波波速對螺旋圖形的影響
- 五、探討 GSP 模擬中改變波長因子，對螺旋圖形的影響

參、研究原理

(一) 研究理論

一、水波槽：

當起波器在槽內造成上下起伏的水波時，於波峰上方入射光線會聚於白紙上形成亮帶；於波谷上方入射光線，則散開於白紙上造成暗帶。因此只要觀察白紙上亮帶、暗帶的移動、分布狀況，即可得知水波傳播的狀況。

二、重疊原理

若波動的振幅不大，重疊範圍內介質質點的振動位移等於個別兩波動所造成位移的向量和，此稱為波的重疊原理。

三、海更士原理：

海更士認為波動中一波前的任一點均可視為新的點波源，此等點波源將產生一球面子波，而構成一新波前，此新波前即為眾多子波構成的切面，稱為包跡；而此新波前又再次產生甚多子波而構成次一新波前。如此繼續不斷，即可形成波的傳播，即為海更士原理。海更士原理可解釋波的直進，反射、折射、干涉、繞射等現象

四、等角螺旋線方程式

等角螺旋線、對數螺旋線或生長螺旋線是在自然界常見的螺線，在極座標 (r, θ) 中，這個曲線可以寫為 $r = ae^{b\theta}$ 或 $\theta = \frac{1}{b} \ln \frac{r}{a}$ ， a 值(代表座標系的 Scale)、 b 值(旋臂放大比例常數)，如圖 1 所示。

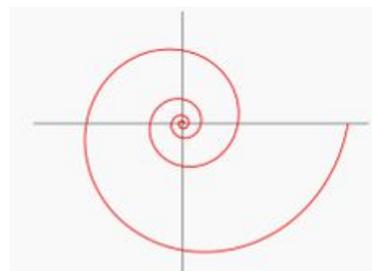


圖 1、等角螺旋

五、直角座標轉極座標

直角座標 $(x,y) \Rightarrow$ 極座標 (r,θ)

由圖 2 可知

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

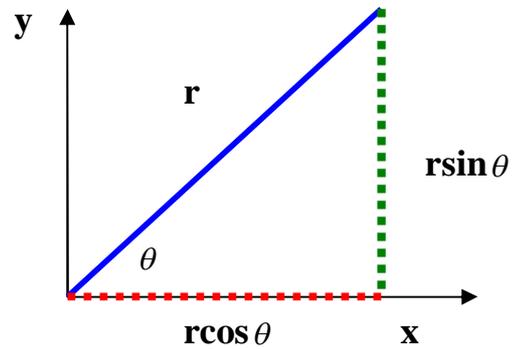


圖 2、直角座標轉極座標

六、exel 數據處理

B2(X 數值)、C2(Y 數值)、F3(r2/r1 數值)

(1) 求 θ 值函數指令： $=IF(B2<0,PI()+ATAN(C2/B2),IF(C2<0,2*PI()+ATAN(C2/B2),ATAN(C2/B2)))$

(2) 求 r 值函數指令： $=(B2^2+C2^2)^{0.5}$

(3) 求 b 值函數指令： $=LN(F3)/2/PI()$

(二) 理論推導

一、旋臂放大比例常數 (b 值)

圖 3 中的螺旋半徑 r_1 、 r_2 ，計算 b 值

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{ae^{b(\theta+2\pi)}}{ae^{b\theta}} = e^{2\pi b}$$

$$2\pi b = \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$b = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

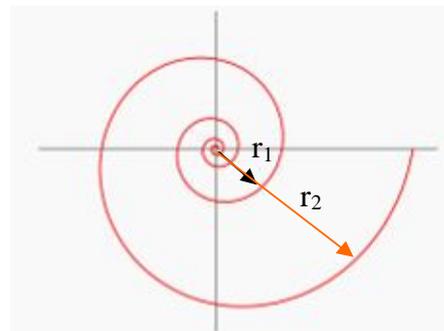


圖 3、等角螺旋

二、驗證等角螺旋圖形的推導

等角螺線方程式 $r = ae^{b\theta}$ ，將兩邊取 \log 值

$$\log r = \log a + \log e^{b\theta}$$

$$\log r = \log a + b\theta \log e$$

縱軸為 $\log r$ ，橫軸為 θ 做圖

若是 r, θ 呈 $r = ae^{b\theta}$ 關係，則 $\log r, \theta$ 座標圖會

呈現一斜直線，斜率為 $b \log e$ ，截距為 $\log a$ ，旋臂

放大比例常數 $b = \frac{\text{斜率}}{\log e}$

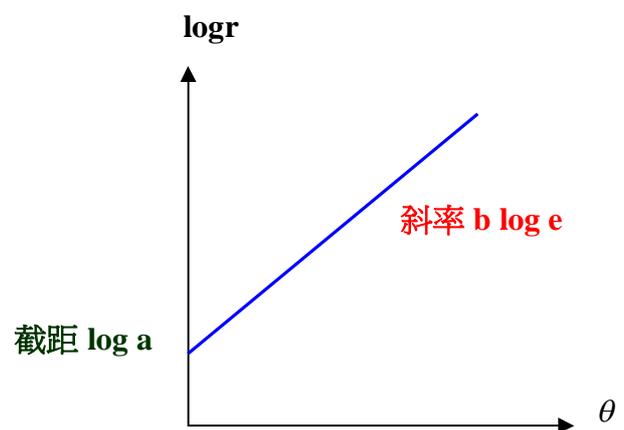


圖 4、 $\log r, \theta$ 關係圖

三、L 型旋臂轉速即為等角螺旋轉速

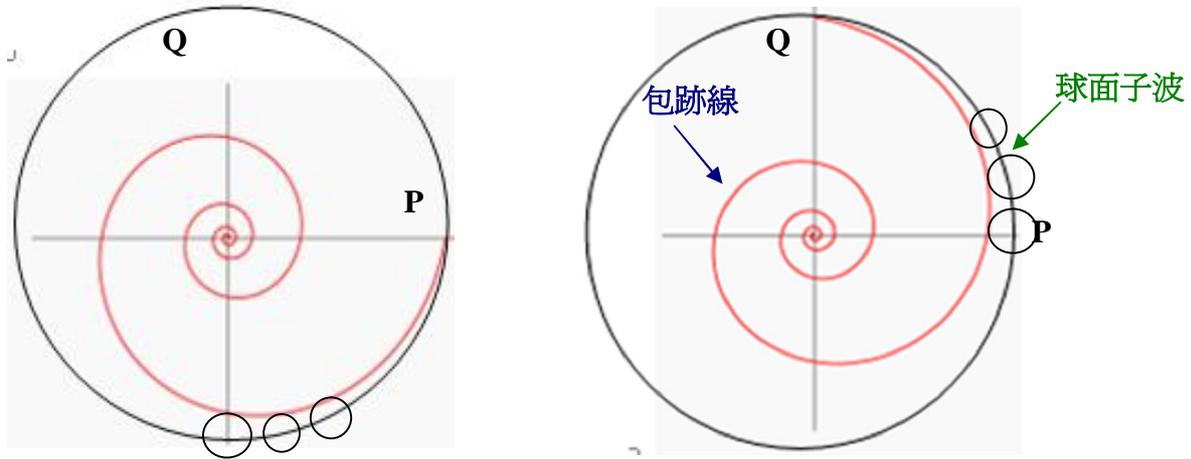


圖 5、L 型旋臂轉速、等角螺旋轉速比較圖

當木板受到旋轉體（L 型旋臂）振動，振源由 P 點震動至 Q 點，木板受到振動的位置逆時針旋轉 90 度，根據海更士原理，則螺紋圖形也將由 P 點逆時針旋轉 90 度至 Q 點，即木板、等角螺旋圖形轉速相同(如左圖至右圖)，木板受到旋轉體逆時針振動，螺旋圖形亦將等轉速逆時針轉動。

四、水波波速 V_w 與螺旋角速度 ω 的關係

$$V_w = f\lambda = \frac{\omega}{2\pi} \lambda$$

五、波長決定等角螺旋圖形 b 值

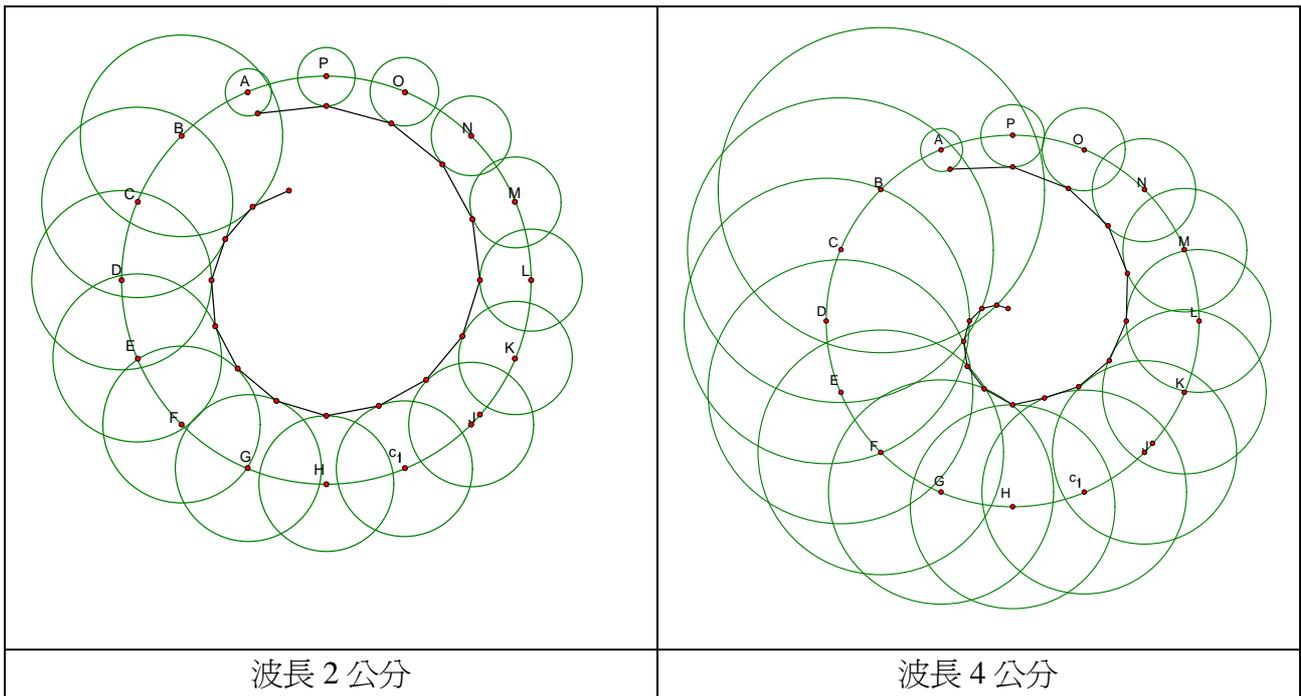


圖 5、以不同波長畫出螺旋線的比較圖

木板邊緣位置上每一次簡諧振動週期 T，即為木板 L 型旋臂被旋轉振動的週期 T，當旋轉一圈後，子波移動的距離即為一個波長，如圖 5 所示。圖中得知，改變波長 λ 值，螺旋圖形中旋臂放大比例常數 b 值將隨之改變，波長較長者，b 值較大。

肆、研究器材

- 一、水波投影裝置—1 台（島田科學儀器出品 PH-E-1001）
- 二、光源(LED 手電筒)—1 個
- 三、震盪產生器—1 台(MAX 1A)
- 四、訊號產生器—1 台(ADVENCE SCIENTIFIC WF-801-801)
- 五、相機—2 台(Olympus 730、SONY DSC-T2)
- 六、攝影機—1 台(sony DSR-SR300)
- 七、圓形空心木板—1 個（半徑 8cm）
- 八、馬達—2 個(12V100mA、12V40mA)
- 九、光電計時器——1 組



水波投影裝置



LED 手電筒



震盪產生器



訊號產生器



圓形空心木板



攝影機



12V 100mA 馬達



12V 40mA 馬達



光電計時器

圖 6、各項實驗器材

伍、研究輔助軟體

1. GSP 動態幾何繪圖板 (The Geometer's Sketchpad) 軟體介面，如圖 7。

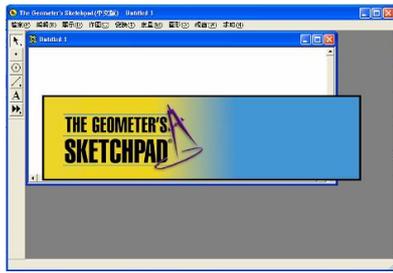


圖 7、GSP 軟體版面

2. 模擬水波的變化，如下圖 8、圖 9

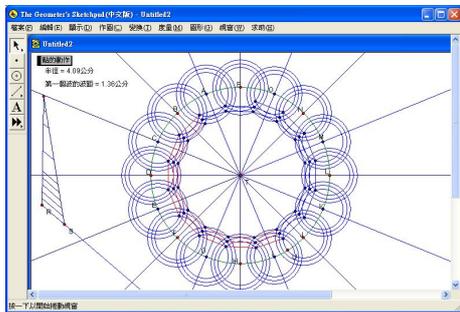


圖 8、模擬圓上連續發出波的模擬圖

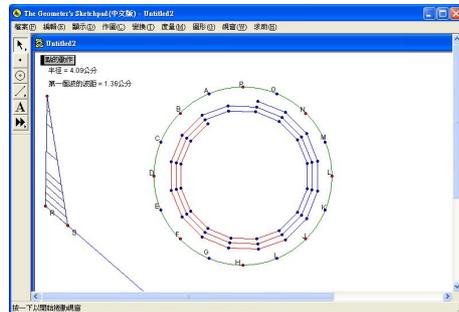
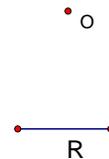


圖 9、輔助線隱藏之後的波紋

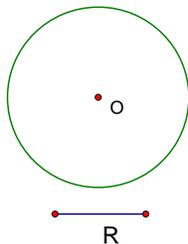
3. 作圖原理如圖 10：



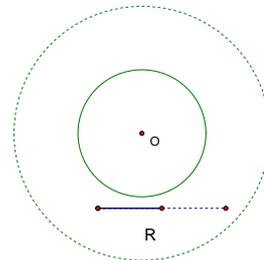
(1) 設一點圓心 O 即波源



(2) 做一線段當作半徑 R 即波距



(3) 以 O 為圓心 R 為半徑畫圓



(4) 將半徑 R 伸長或縮短以代表不同時間的波紋

圖 10、GSP 動態幾何繪圖軟體作圖原理

陸、器材使用步驟

1. 將水波槽裝水，並將水深調整為適當深度。
2. 測量水波槽四個角落的水深；若深度不等，可調整支架的高度，使水深一致。
3. 將木板或圓筒放置於水波槽中，分別利用馬達不同轉速及振盪器不同振動頻率，來產生波動圖形。

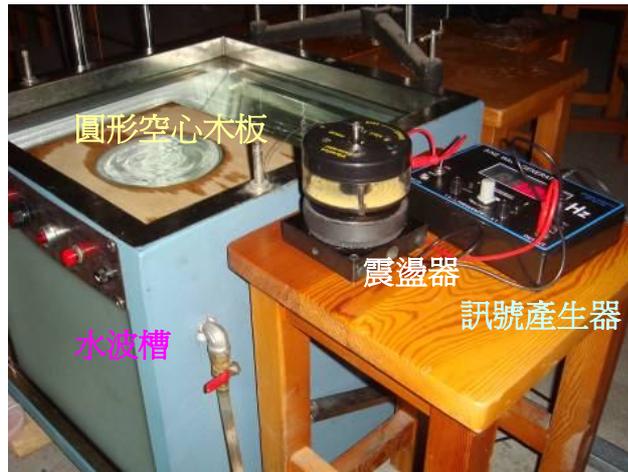


圖 11、裝置完成圖

柒、研究過程及方法

一、實驗 A

實驗目的：尋找螺線波紋圖形並驗證

實驗步驟：

1. 頻率振盪器以 1HZ 定點點擊圓形空心木板，產生之圖形，加以拍照攝影記錄下來
2. 利用影像剪輯軟體，擷取其清晰的圖像

實驗結果：

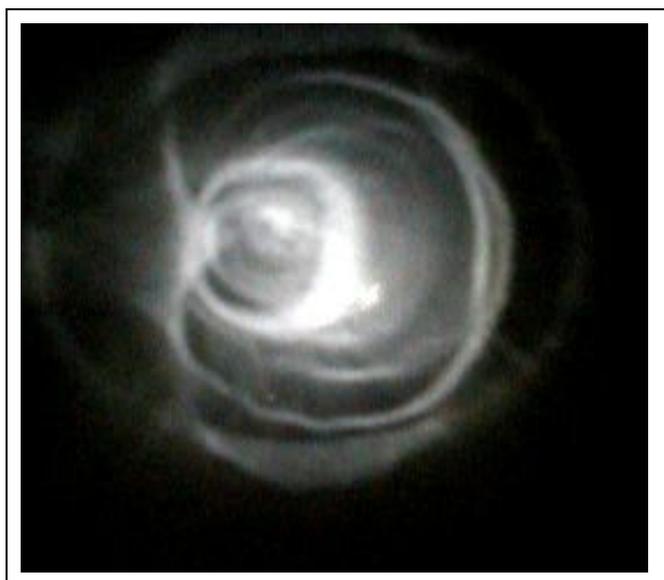


圖 12、點擊圓形空心木板波紋圖

實驗討論：

1. 在討論此圖時，用筆將圖 13 中 A 點一直畫進去，發現像等角螺旋線的圖形。於是再沿另一邊圖 14 中 B 點出發，發現也是極像等角螺旋線的圖形，且互相對稱，我們想確認此兩條線是否真為等角螺旋線且鏡射。
2. 沿等角螺旋線波紋路徑標點來分析，每點定出 X、Y 座標，上螺旋如圖 13，沿另一路徑標點，下螺旋如圖 14，將數據輸入 EXCEL 進行處理，轉成極座標 r 、 θ ，畫出 $\log r, \theta$ 座標圖得出趨勢線為一斜直線，上螺旋斜率為 0.1091， b 值 = $\frac{\text{斜率}}{\log e} = \frac{0.1091}{\log e} = 0.251212$ ，如圖 15、下螺旋斜率為 0.1063， b 值 = $\frac{\text{斜率}}{\log e} = \frac{0.1063}{\log e} = 0.244765$ ，如圖 16，符合理論推導，證實實驗圖形為等角螺旋線且鏡射。
3. 經分析之後，上下螺旋 b 值相近，表示旋臂隨指數放大比例相同，雙螺旋線圖形對稱於軸，我們得到了螺旋線而且是兩條對稱的等角螺旋線，我們稱它為鏡射螺旋，也稱它為桃子線。
4. 猜想會產生兩個鏡射等角螺旋線的原因是由於空心木板邊緣定點位置振動，帶動圓板內部邊緣部份，由兩側同時依序振動；圓板內部邊緣各點上下作簡諧運動且相距一個固定的相位

差，即可產生鏡射螺旋線。進一步地，使用 GSP 電腦幾何繪圖軟體(以下簡稱 GSP)來做模擬，如圖 17。

5.跑出的模擬圖形與預測的一致，最後圖 17 第 14-16 個圖，因波各自交會到圓心，造成波紋重疊，因而部分混沌現象，最後產生與桃子線方向相反之圖形，將實驗圖片與模擬第 16 圖疊合，發現兩者螺紋部分相當符合，如圖 18。所以，針對螺旋線的成因，我們下了一個假設：首先波源的排列必須是圓形，第二、波源的振動必須是 SHM 且相距一個固定的相位差，才有可能形成螺旋線。

6.其實桃子線是由於兩個等角螺旋線所交集而成的，恰好形成大桃子小桃子交錯而置，方向相反且相切。

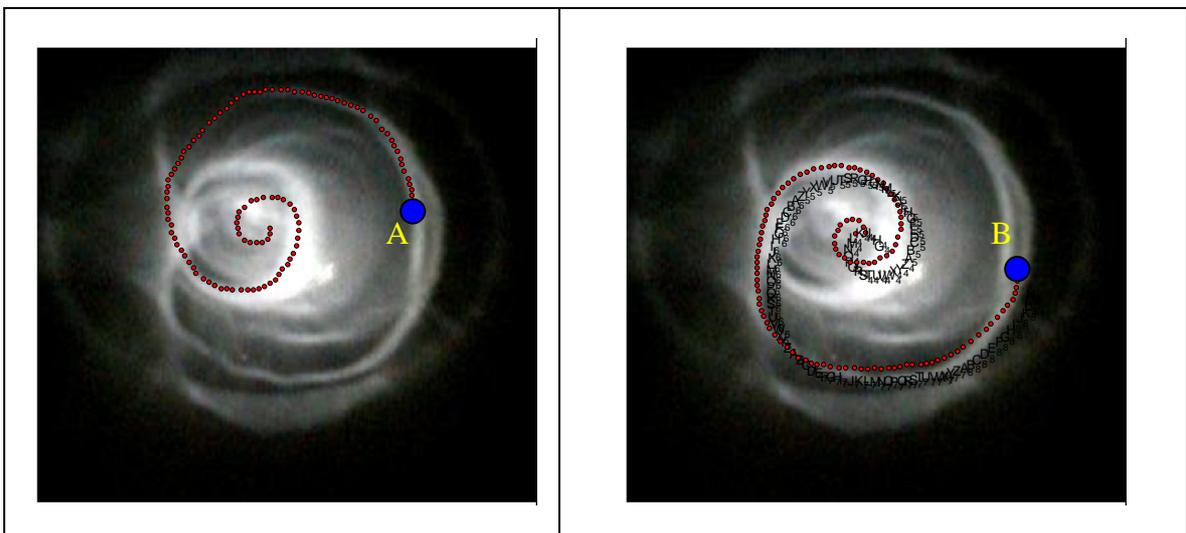


圖 13、上螺旋標點處理

圖 14、下螺旋標點處理

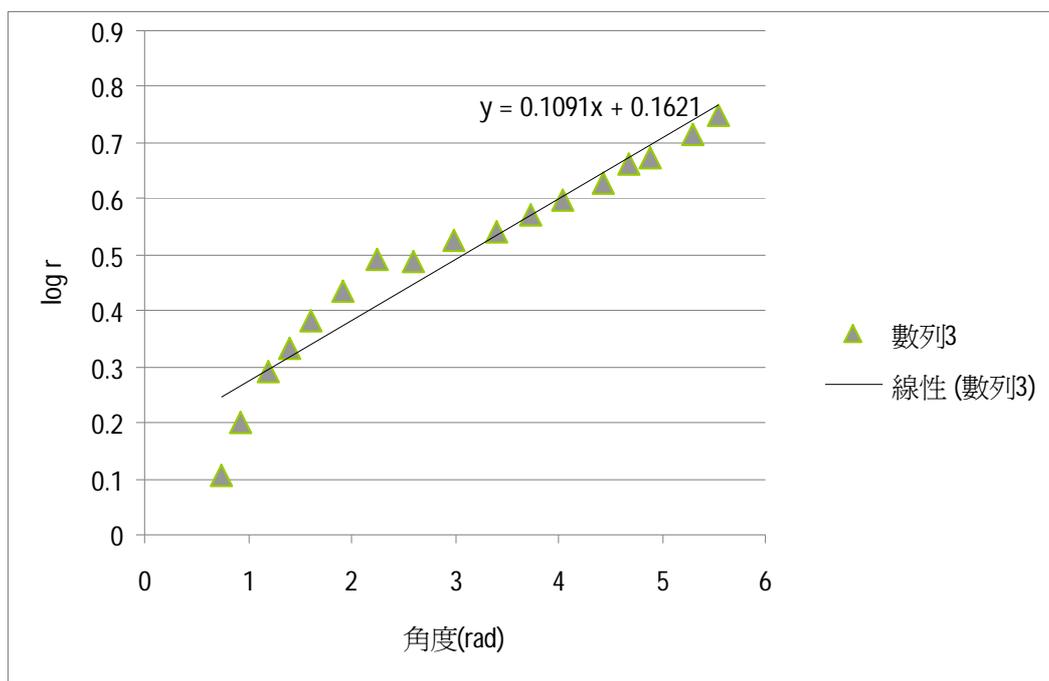


圖 15、上螺旋的 $\log r-\theta$ 的關係圖

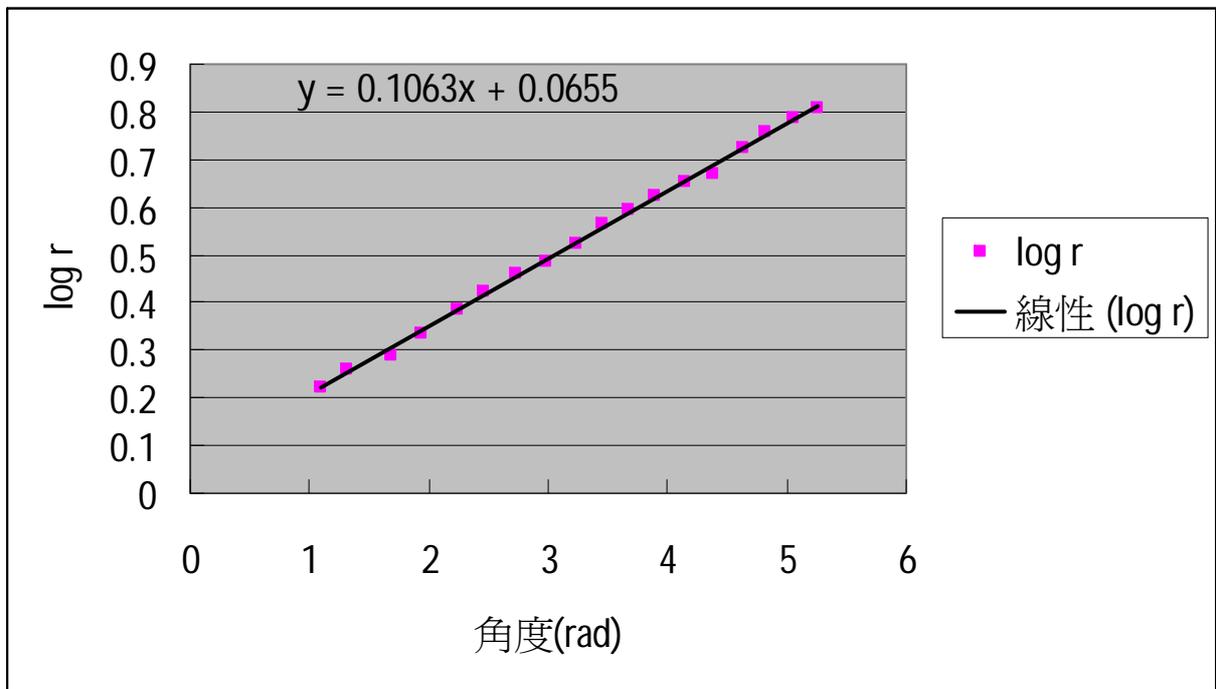
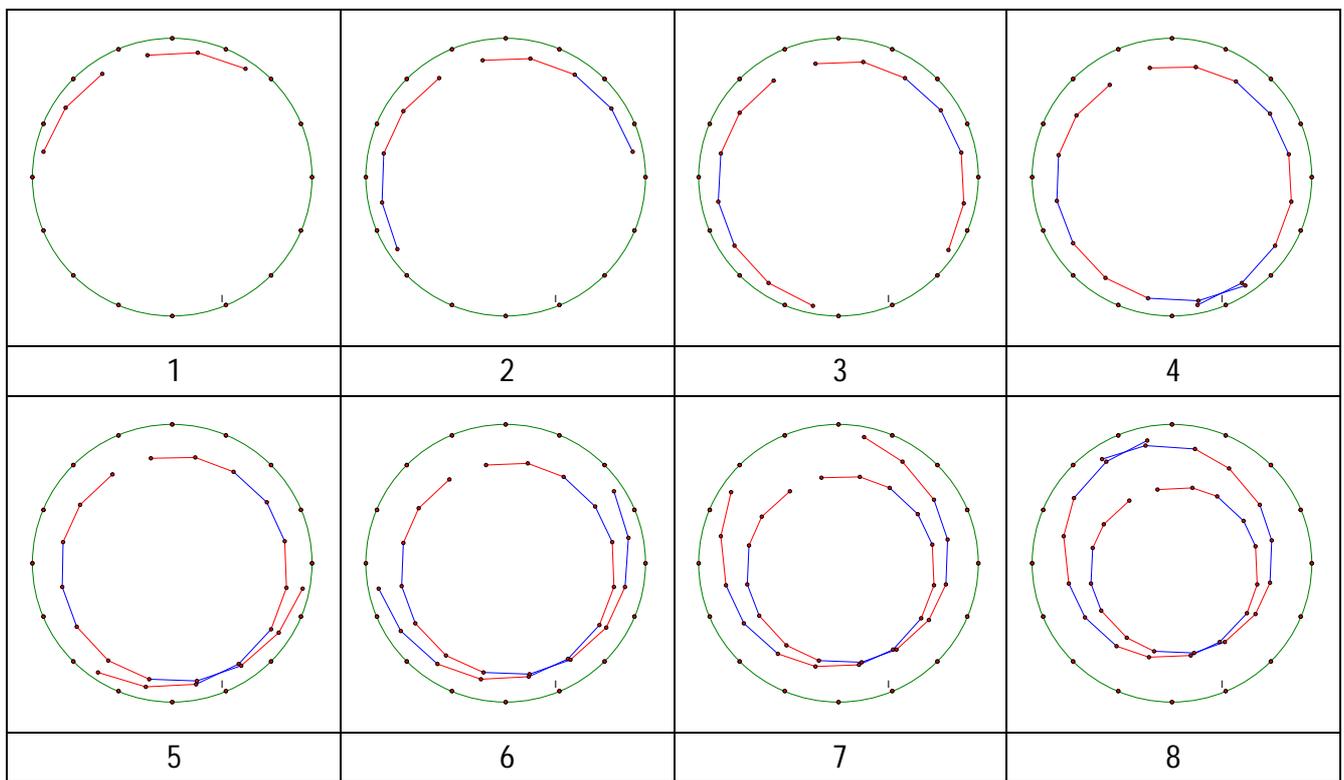


圖 16、下螺旋的 $\log r-\theta$ 的關係圖



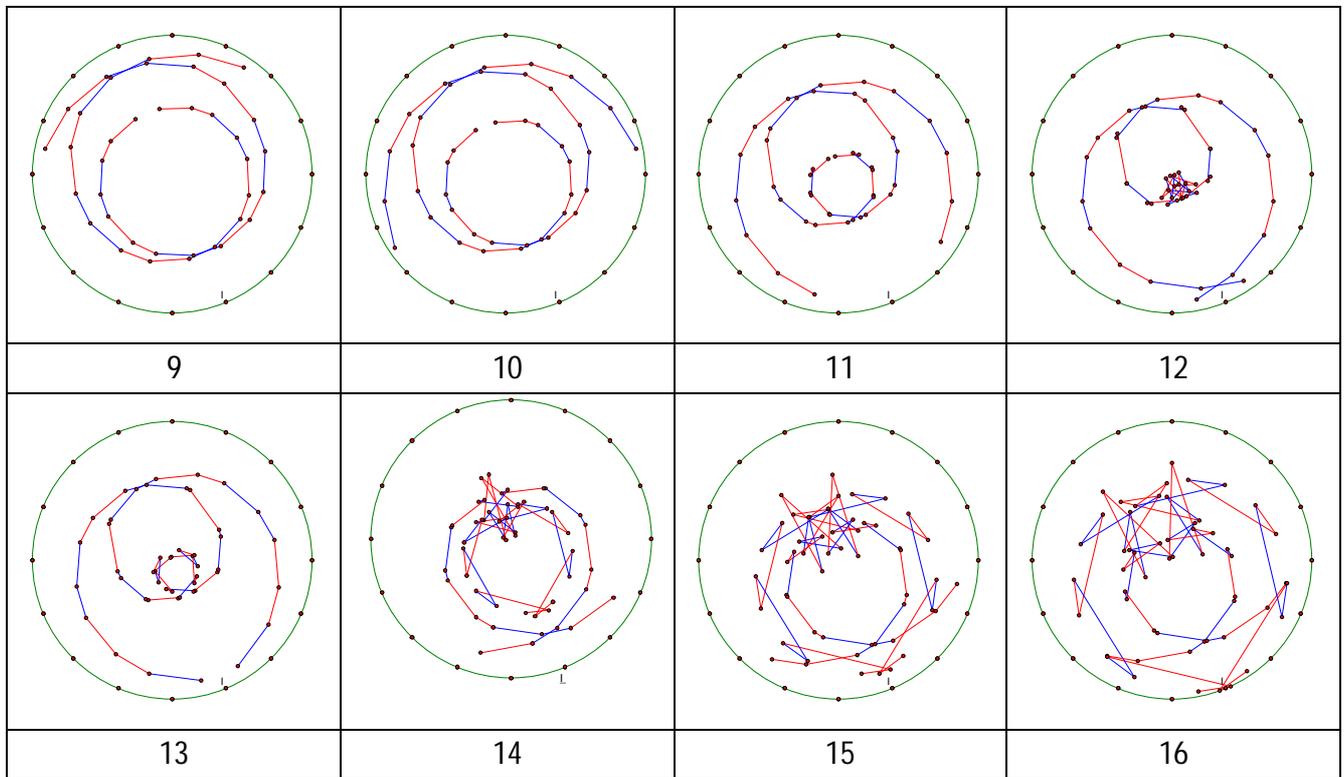


圖 17、GSP 模擬圖 2 螺線波紋圖形

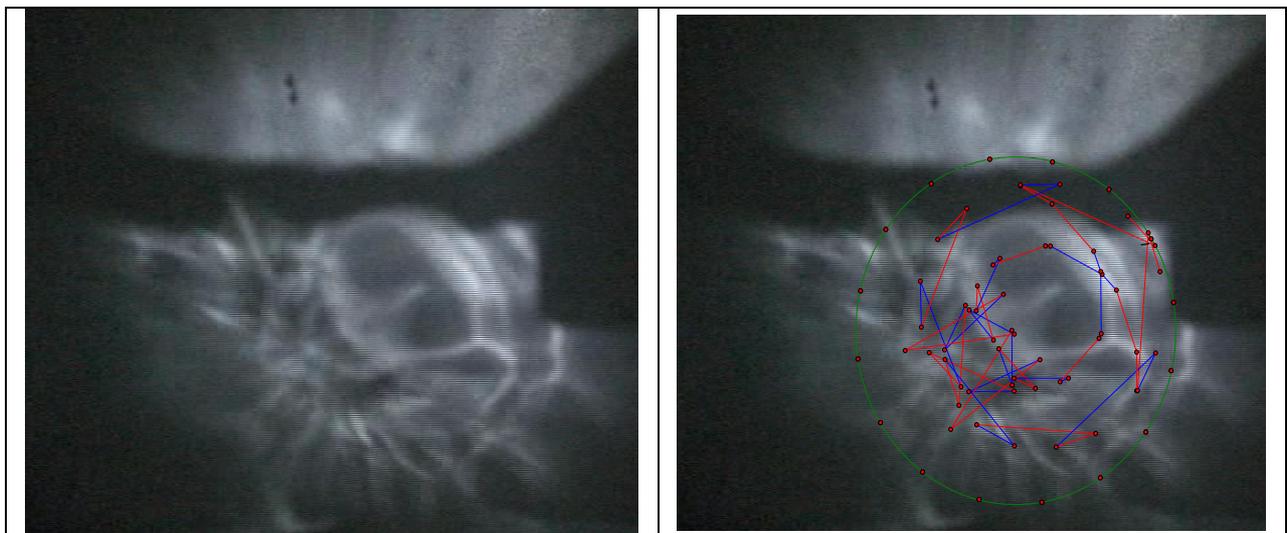


圖 18、gsp 模擬的第 16 個圖與實驗圖片的疊合（左圖：實驗圖形、右圖：疊合圖形）

二、實驗 B

實驗目的：探討頻率震盪器以不同點擊木板方式對螺旋圖形的影響

實驗步驟：

1. 將頻率震盪器定點點擊方式改為等速率圓周運動（轉速：0.4 Hz）滑動點擊方式，將產生之圖形加以拍照攝影記錄下來
2. 利用影像剪輯軟體，擷取其清晰的圖像

實驗結果：



圖 19、等速率圓周運動滑動點擊圓形空心木板波紋圖

實驗討論：

1. 在定點點擊方式下產生對稱雙等角螺旋線。之前提到，會產生兩個鏡射等角螺旋線的原因是由於空心木板邊緣某個位置振動，帶動圓板內部邊緣部份，由兩側同時依序振動；圓板內部邊緣各點上下作簡諧運動且相距一個固定的相位差，即可產生鏡射螺旋線。若改以單向振動，看看是否會產生單一螺旋線，爲了檢驗想法，試著利用震盪器以等速率圓周運動滑動點擊方式讓木板的邊緣依序振動，圓板內部邊緣各點上下作簡諧運動且相距一個固定的相位差。
2. 沿等角螺旋線波紋路徑標點來分析，每點定出 X、Y 座標，如圖 20，將數據輸入 EXCEL 進行處理，轉成極座標 r 、 θ ，畫出 $\log r, \theta$ 座標圖迴歸出的趨勢線爲一斜直線，該螺旋斜率爲 0.0794， b 值 = $\frac{\text{斜率}}{\log e} = \frac{0.0794}{\log e} = 0.182825$ ，如圖 21，實驗圖形趨勢爲單一等角螺旋線。
4. 等速率圓周運動滑動點擊方式造成圖形雜訊干擾較多，圖中呈現多條細紋，不易看出螺旋波紋，認爲原因來自 L 型旋臂上的彈珠觸擊木板時會接觸水面，產生雜訊誤差。
5. 現在利用 GSP 來模擬，形成單螺旋模擬過程圖形，如圖 22 所示，確實與由單向旋入實驗結果相符。進一步想得知改變 L 型旋臂轉速，如何影響螺旋圖形，將由下一個實驗討論。

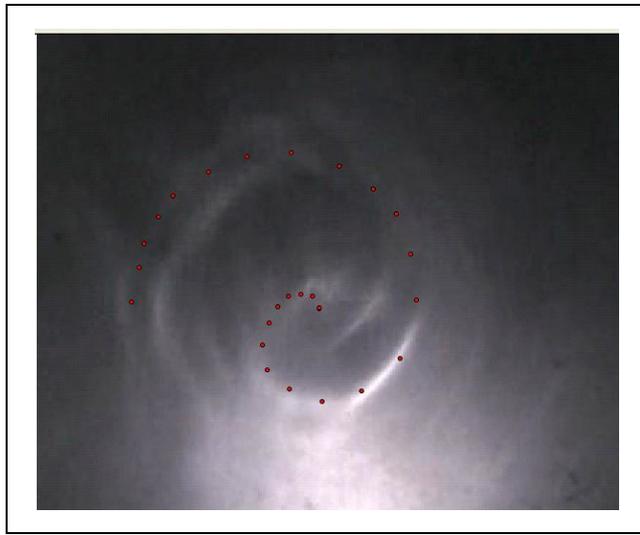


圖 20 等速率圓周運動滑動點擊木板圖形標點處理

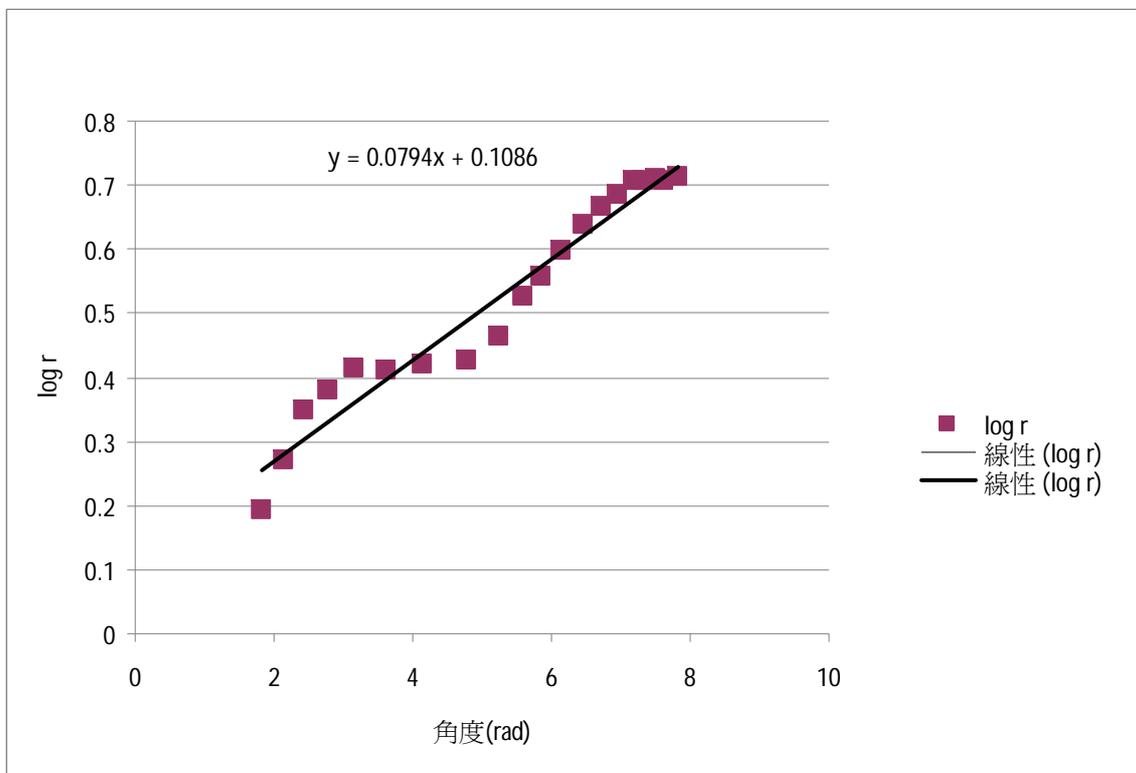
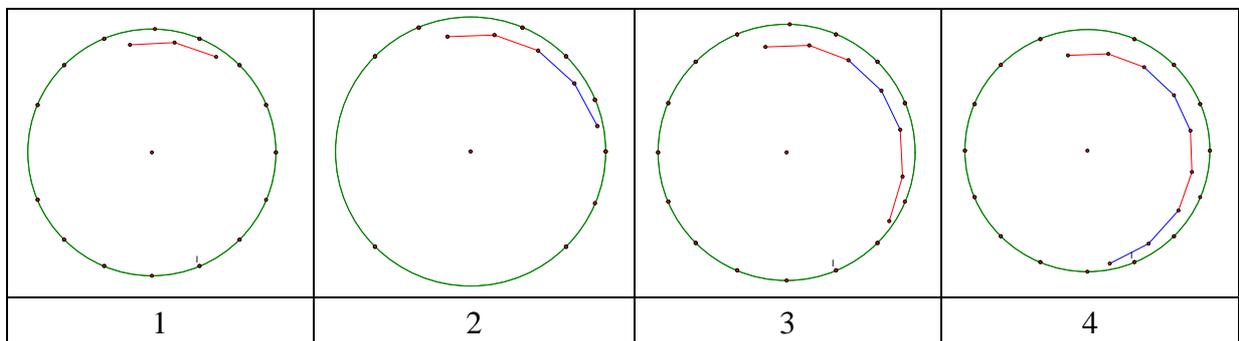


圖 21、單螺旋的 $\log r-\theta$ 的關係圖



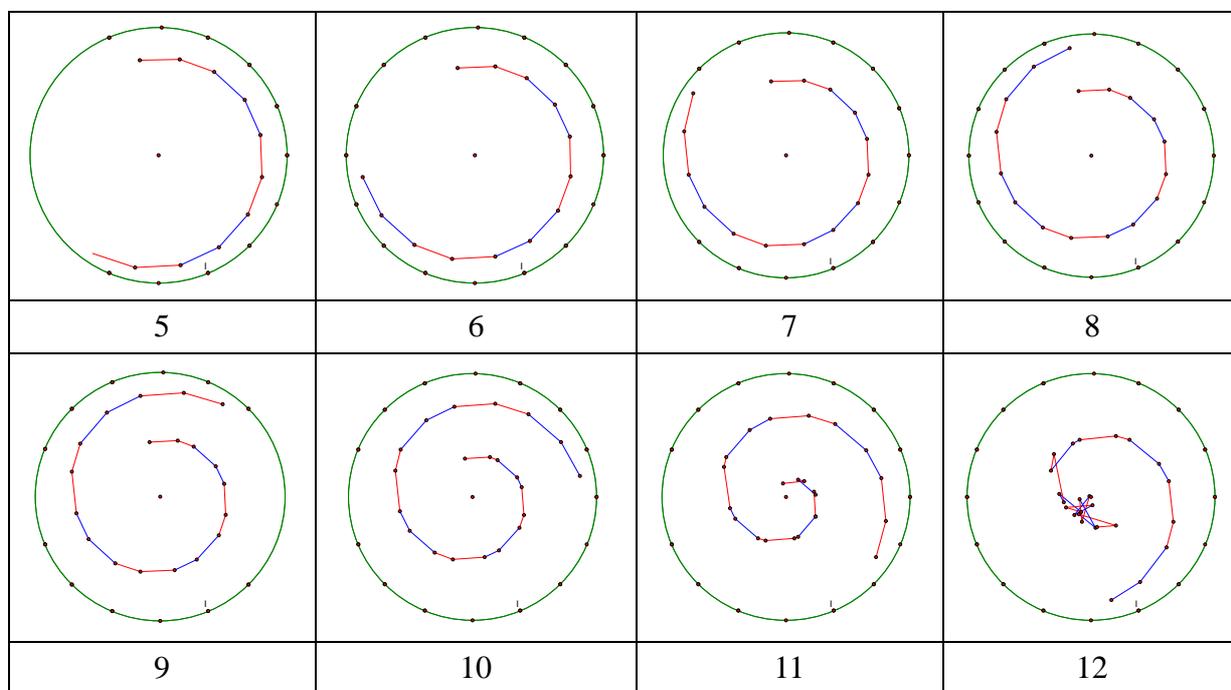


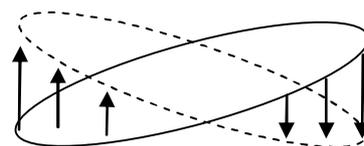
圖 22、GSP 模擬圖單螺旋波紋圖形

實驗 C

實驗目的：探討 L 型旋臂轉速對螺線圖形的影響

實驗步驟：

1. 利用震盪器使圓形空心木板內挖空邊緣簡諧振動，且改變木板轉速(相位差)，觀察螺線圖形，產生之圖形，加以拍照攝影記錄下來，電腦繪製模擬木板震動情形，如右圖所示。
2. 利用影像剪輯軟體，擷取其清晰的圖像



實驗結果：水深 2.5cm

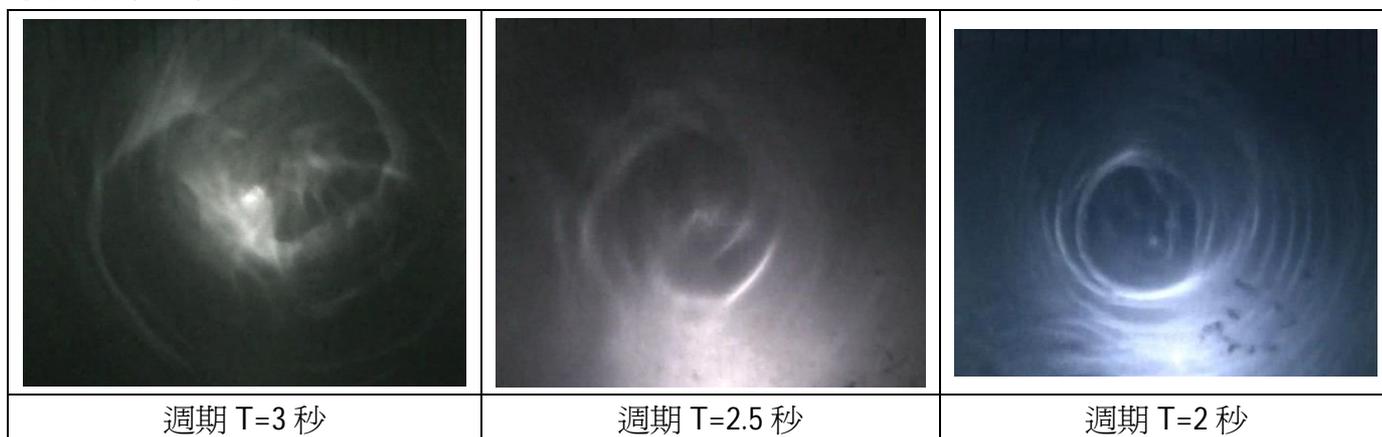


圖 23、改變木板轉速的螺旋圖

實驗討論：

1. 若轉速 ω 愈慢將得到愈大的 b 值， ω 愈大則 b 值愈小。控制木板的轉速，也是決定週期 T，

使週期 T 變短、相位差變小，每一點波源發出波的間隔變短，收縮會變慢。依據理論推導 4，介質環境不變，這裡水波波速 V_w 為定值，若 $V_w = f\lambda = \frac{\omega}{2\pi}\lambda$ ；由理論推導 5，以為操縱轉速 ω 則改變 λ ，而決定螺旋圖形的 b 值。

2. GSP 模擬圖形如圖所示，內縮的速度固定（代表水波波速），改變繞轉的速率（代表改變繞轉的頻率或週期），隨著繞轉頻率 $f(= \frac{\omega}{2\pi})$ 愈大， b 值愈小。

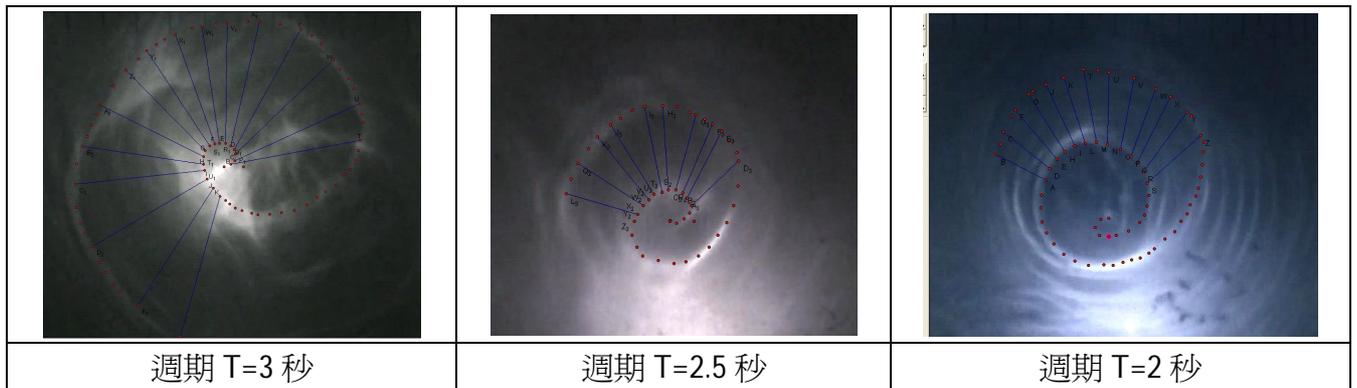
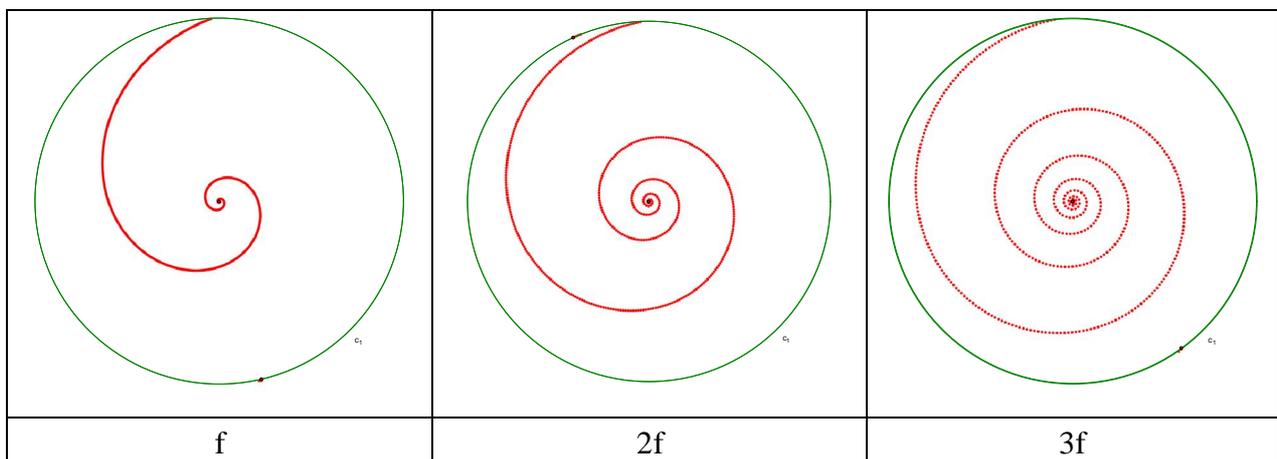


圖 24、改變木板轉速螺旋圖標點處理

平均轉速(Hz)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2.5}$	$\frac{1}{2}$
平均 b 值	0.1088	0.2020	0.2948

表 1、轉速與 b 值關係



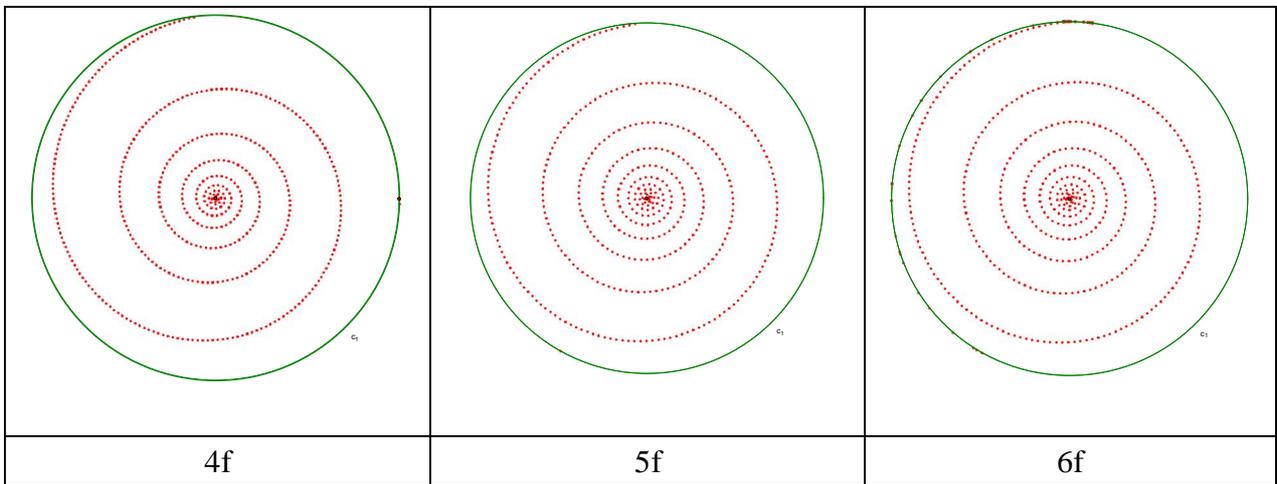


圖 25、GSP 模擬不同轉速的單螺旋波紋圖形

實驗 D

實驗目的：探討水波波速對螺線波紋圖形之影響

實驗步驟：

1. 將圓形空心木板放置於水波槽內，改變水深，使水波波速改變
2. 使用頻率振盪器(1Hz)點擊木板，將產生之圖形加以拍照攝影記錄下來
3. 利用影像剪輯軟體，擷取其清晰的圖像

實驗結果：

環境條件：水溫 18.3°C

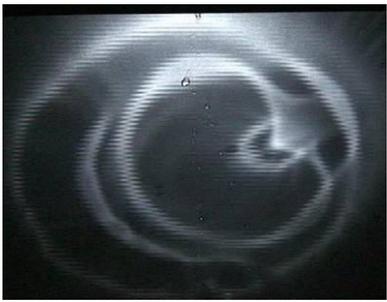
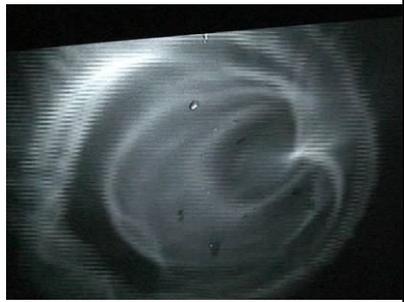
水深 (cm)	0.75 公分	1.5 公分	3 公分
圖形			

圖 26、改變水深產生的螺線圖

水深(cm)	0.75	1.5	3
平均波速 (cm/s)	27.1	24.3	21
平均 b 值	0.2585	0.2349	0.1453

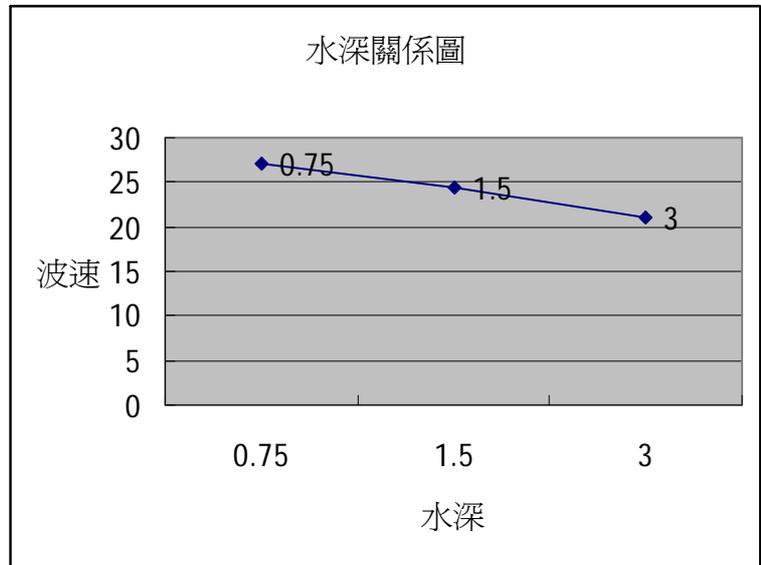


表 2、水深與波速關係

圖 27、水深與波速折線圖

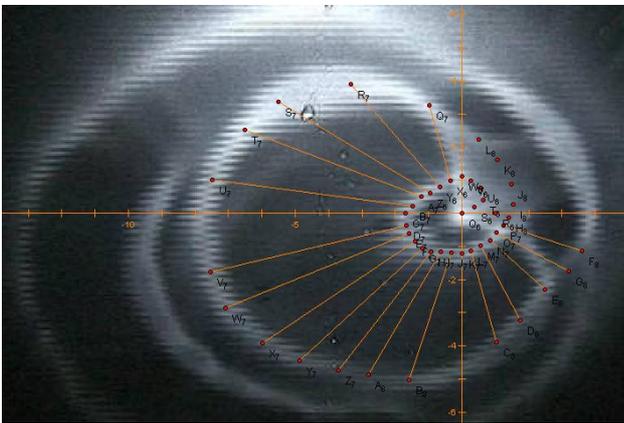


圖 28、0.75cm 水深螺旋圖形標點處理

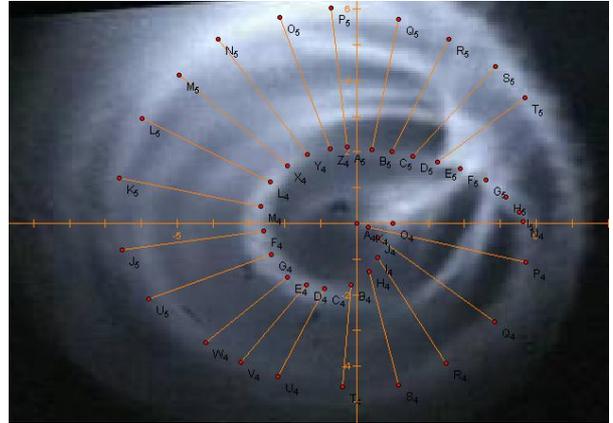


圖 29、1.5cm 水深螺旋圖形標點處理

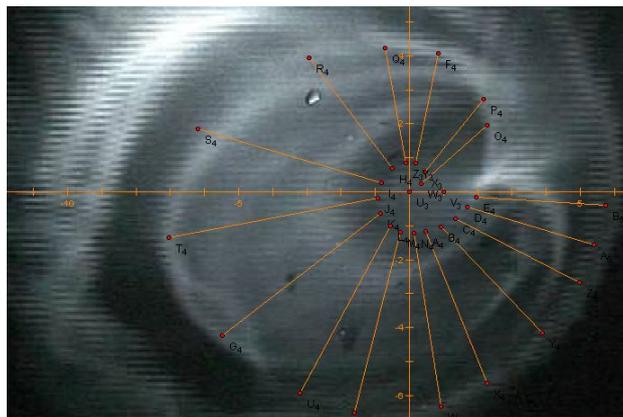


圖 30、3cm 水深螺旋圖形標點處理

實驗討論：

1. 水波波速較快，輻射收縮進去比較快速，旋臂放大常數 b 值較大，各 b 值計算，水波波速較慢，輻射收縮進去比較緩慢， b 值則較小；依據理論推導 4，L 型旋臂轉速不變，這裡 ω 為定值，若 $V_w = f\lambda = \frac{\omega}{2\pi}\lambda$ ；依據理論推導 5，以為操縱水波波速 V_w ，則改變 λ ，進而決定 b 值。

2.利用 GSP 模擬，固定繞轉的速率（代表改變繞轉的頻率或週期），改變向內收縮的速度，用來代表改變水波的波速，由波速 v 增加至 $9v$ ，如圖 31，所得到的圖形變化跟我們實驗圖形變化，實際上也是吻合的。

3. 流體力學書籍上寫著， v 與 \sqrt{h} 成正比，水深愈深，波速愈快。這裡情況卻不是如此，水深愈淺，反而愈快，查詢資料後，理由是當水深很淺很淺時，在產生一個擾動狀態時，容易在水面造成縱波，而縱波的傳遞速度較橫波為快。「縱波」屬粒子振動方向與波傳遞方向相同，故屬於粒子前後撞擊產生的擾動。而「橫波」屬粒子上下振盪時，帶動下個粒子上下振盪，不屬於撞擊產生，故波動速度較慢。當水深非常淺時，就如同參考報告中的內容而言，會受容器底部之反作用力的影響，而產生些微粒子前後撞擊的效果，故波速會較快。(註一)

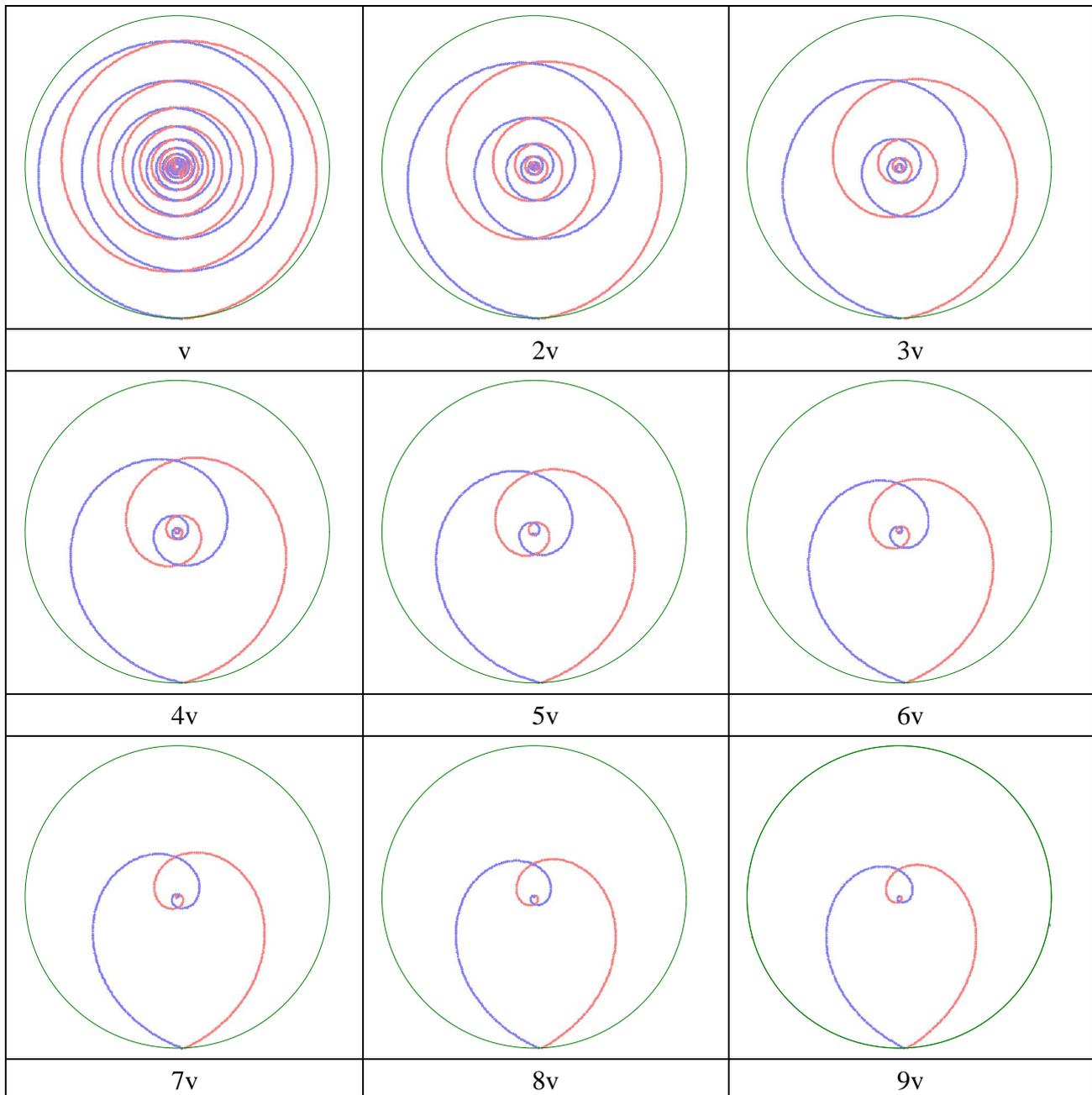


圖 31、GSP 模擬改變水波波速(波速由 v 至 $9v$)所產生的圖形

實驗 E

實驗目的：探討 GSP 模擬中改變波長因子，對螺旋圖形的影響

實驗步驟：

1. 利用 GSP 軟體模擬不同的波長產生的螺旋圖形
2. 根據模擬圖形，加以討論比較

實驗結果： $\lambda = 0.5\text{cm}$

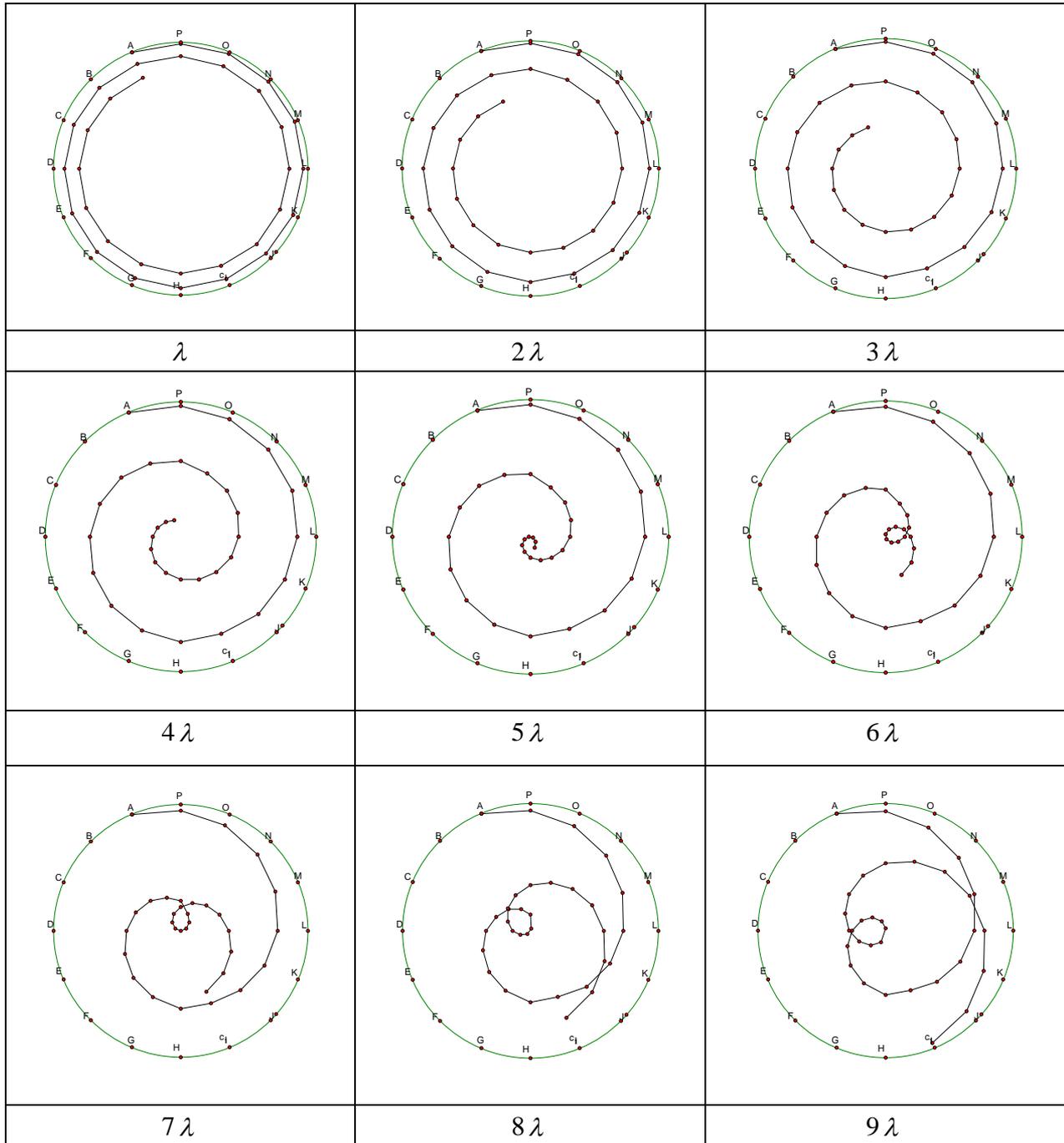


圖 32、GSP 模擬改變水波波長(波速由 λ 至 9λ)所產生的圖形

實驗討論：

- 1.單純用數學方法以不同波長去做圖，不考慮 L 型旋臂轉速及水波波速，發現依然可以產生螺旋圖形，設定的波長愈長，b 值愈大，收斂明顯。
- 2.依據理論推導四、五，認為不論水波波速、木板轉速多大，最後共同決定的波長才是影響螺旋圖形 b 值大小的關鍵。
- 3.由 GSP 模擬圖中發現一有趣現象，單一螺旋在中心交會後依然可以產生桃子線圖形，這部份值得進一步探討。

捌、結論

- 1.用振盪器點擊圓形空心木板，發現有雙等角螺線對稱交集在一起的圖形，我們稱鏡射等角螺線，形狀有如桃子也叫做桃子線。
- 2.我們認為產生螺旋需三個條件：首先波源的排列必須是圓形的，第二、波源的振動必須是 SHM，第三、波源振動相距一個固定的相位差，才能形成等角螺旋線。
- 3.定點點擊方式改為等速率圓周運動滑動點擊方式，螺旋圖形將由鏡射等角螺旋變為單一等角螺旋線。
- 4.固定水波波速，使 L 型旋臂轉速(振源間相位差大小)變大，週期 T 變短，則螺旋波紋收縮變慢，b 值變小；反之，螺旋波紋收縮變快，b 值變大。
- 5.固定木板轉速，使水波速增快，螺旋圖案收縮比較快速，水波速較慢，收縮則較緩慢。
- 6.認為不論水波波速、木板轉速多大，最後共同決定的波長才是影響螺旋圖形 b 值大小的關鍵。

玖、未來展望與應用

- 1.藉由日常生活螺旋圖形變化或縮時攝影去推估該物、該現象的轉速或波速(生長速度)，如螺殼的旋渦，水的旋渦，颱風的旋渦，以至野草出芽時的旋轉狀態。
- 2.可藉由水波的螺旋現象去模擬討論聲源做圓周運動所產生的音爆，探討音爆的前緣波形與音爆圖形的量化分析等。
- 3.在一些可激發的系統像是 BZ 反應還是神經細胞或是心臟細胞組織都有觀察到過螺旋波，會有一個個的螺旋的波從某些地方發出，這樣的螺旋波在複雜的系統的成因還在正在研究中；其實在蜜蜂的群體裡面也會出現這樣的螺旋波喔！蜜蜂會照著固定的方式做群體運動來造成螺旋波（如圖 32），像是人類的波浪舞一樣(註二)



圖 32、蜜蜂會照著固定的方式做群體運動來造成螺旋波

拾、參考資料

- 1.物理（下），林明瑞等編，民 95，台南市，南一書局
- 2.數學第三冊，李虎雄等著，民 94，台中市，龍騰書局
- 3.高中物理實驗總整理 2005，邱博文著，2005 年初版，費因曼文化
- 4.毛起來說 e，Eli Maor 原著，鄭惟厚編譯，2000 年初版，台北市，天下文化
- 5.物理(上)，David Halliday、Robert Resnick、Jearl Walker 原著，田麗文、王行達、莫定山編譯，2006 年，台北市，全華科技圖書股份有限公司
- 6.中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國中組物理科作品「波光粼粼」
7. GSP 幾何繪圖講義 http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/m12.htm
- 8.維基百科 自由的百科全書 螺線
<http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E8%9E%BA%E7%B7%9A&variant=zh-tw>

拾壹、附註

註一、中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國中組物理科作品「波光粼粼」

http://science.boe.tcc.edu.tw/up47/240_%AAi%A5%FA%E3`%E3`.pdf

註二、蜜蜂的波浪舞! Bees do the wave to scare away predators

<http://scimage-life.blogspot.com/2010/06/bees-do-wave-to-scare-away-predators.html>