

第十屆旺宏科學獎

創意說明書

參賽編號：SA10-581

作品名稱：沙中奇緣---

沙層中液體形成之碎形研究

姓 名：張 庭

關 鍵 詞：碎形、維度、邊緣

沙層中液體形成之碎形研究

摘 要

本研究將甘油和水以不同的重量百分比混和，配置出不同黏滯係數的液體(以下稱甘油水溶液)，並探討該液體滲入沙層中形成的圖案之碎形維度的變化及其與相關變因的交互關係。我發現，當一性質穩定的液體滲入一層由沙子構成的垂直薄片結構中(以下稱沙層)時，已被液體浸溼的沙子和未被液體浸溼的沙子之間的交界處(以下稱邊緣)為一條具碎形結構的鋸齒線，且此邊緣之碎形維度的變化會隨著時間增加而變小，最後趨向某個值(以下稱末維度)。隨著甘油水溶液的重量百分比增加，此末維度有非線性增加的趨勢，並且有上下震盪的情形。其中，此末維度震盪的週期有隨著甘油水溶液重量百分比的增加而降低的趨勢。此外，在沙子顆粒較小的結構中，同樣的液體所形成之末維度會變大，而震盪週期同樣呈現隨著甘油水溶液降低的趨勢。

壹、研究動機

我從小就喜歡喝優酪乳。有一次喝完瑞穗優酪乳後沒有馬上把杯子洗乾淨，過了不久，杯壁上竟然出現了樹枝狀的花紋(圖 1-1)，身邊的大人也沒辦法解釋這個現象，當時我年幼的心靈中便埋下了一個巨大的問號。

高一在尋找分組研究的題目時，童年的那杯優酪乳便又浮現在我腦海中。查過資料後，我發現這種樹枝狀的圖案叫作碎形(或稱殘形)，是一種在自然界中普遍存在的美麗圖案。於是，我便決定以液體行經破碎結構中所產生的碎形圖案作為我的研究題目。

原本我想將不同黏滯係數的液體摻入雜質後，以機器推動使其前進，並觀察其形成圖案之碎形維度。然而此方法有實際分析上之困難，於是我轉而採取另一種作法：讓不同黏滯係數之液體滲入一層薄薄的沙子中，並探討其形成邊緣圖案之碎形維度的變化。

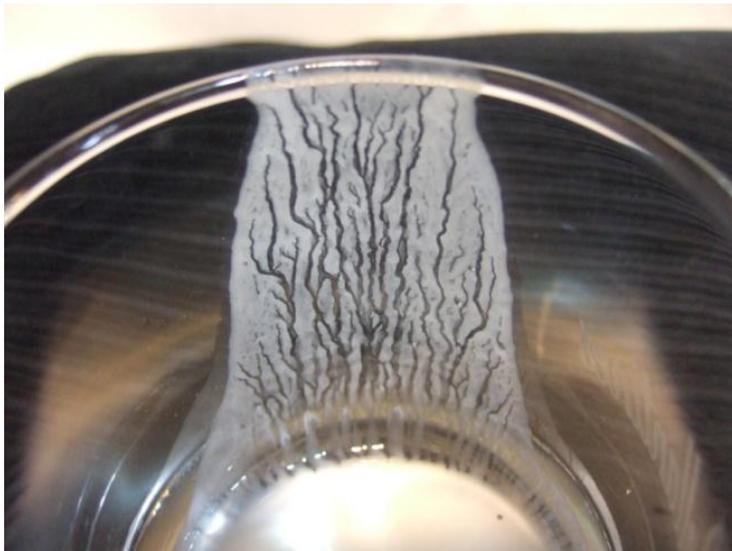


圖 1-1 優酪乳在玻璃杯壁上形成之碎形圖案

碎形是一種在自然界中普遍存在的圖形，其特徵有二：

一、自我相似性

將一個理想的碎形圖案做任意的切割後，切割出的子圖形經旋轉或翻轉後會和原未切割的母圖形相似，此即碎形的自我相似性。

二、非整數的維度

傳統歐式幾何中所定義的維度，是指在一空間中確立出一個點的位置所需要的座標值數量。例如一維線上只需一個座標值即可確立出一個點，二維面上則需要兩個座標值，以此類推。然而為了更精確的表達碎形結構的特徵，數學家利用自我相似性的概念定義出了一種新的維度看法。

假設我們將具有某個維度的圖形的邊作 a 等份的切割，並可利用切割後的邊上線段造出 b 個與原圖案相似的圖形，則我們定義此圖形的維度為 D ，其中

$$\log_a b = D$$

此碎形維度可表達一碎形結構之破碎程度，即當維度越大時，碎形圖案看起來會越破碎。

由人為產生的理想碎形具有高度的自我相似性，但現實中碎形的自我相似性則較低，不易以上述方程式計算出碎形維度，因此本研究中採用經換算後，碎形的量測尺度及其總長的關係所導出的碎形維度。

若量測一碎形邊緣的單位長度為 $\frac{1}{a}$ ，量測得的線段數是 b ，相乘得到的總長為 ℓ ，則根據前述定義可得到下列計算式：

$$b = a^D = \left(\frac{1}{a}\right)^{-D}$$

$$\ell = b \times \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^{1-D}$$

若令 $\frac{1}{a} = q$ ，則可得到：

$$\ell = q^{1-D}$$

由此式可知，只要求得碎形邊緣的總長和其量測尺度之關係，即可推得該邊緣之碎形維度。本研究中即採用此方法。

貳、研究目的

本研究希望探討：

- 一、液體在沙層中形成碎形的維度隨時間之變化
- 二、液體之黏滯係數與其形成維度的關係

參、設備及器材

一、實驗器材

- 1.直徑 0.7mm，密度 2.4gw/cm^3 的沙子(圖 3-1)
- 2.本研究特別訂製之盛沙器一個(圖 3-2、3-3)
- 3.液體容器一個(圖 3-4)
- 4.水和甘油(注一)
- 5.墨汁(注二)
- 6.定時攝影機一個
- 7.電子秤一個
- 8.檯燈一座
- 9.電腦分析軟體



圖 3-1 沙子

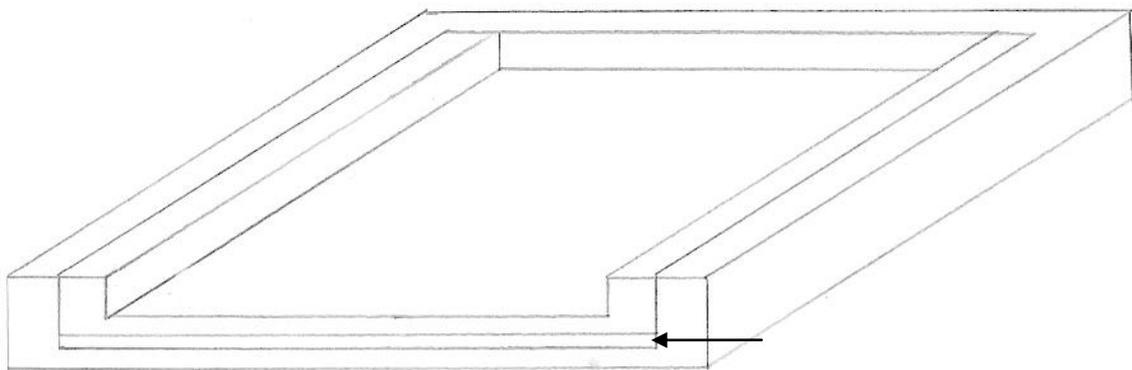


圖 3-2 盛沙器示意圖

盛沙器由兩片壓克力板構成，
沙子填入箭頭所指的縫隙中(寬 20cm，厚 2mm)。



圖 3-3 盛沙器實際照片



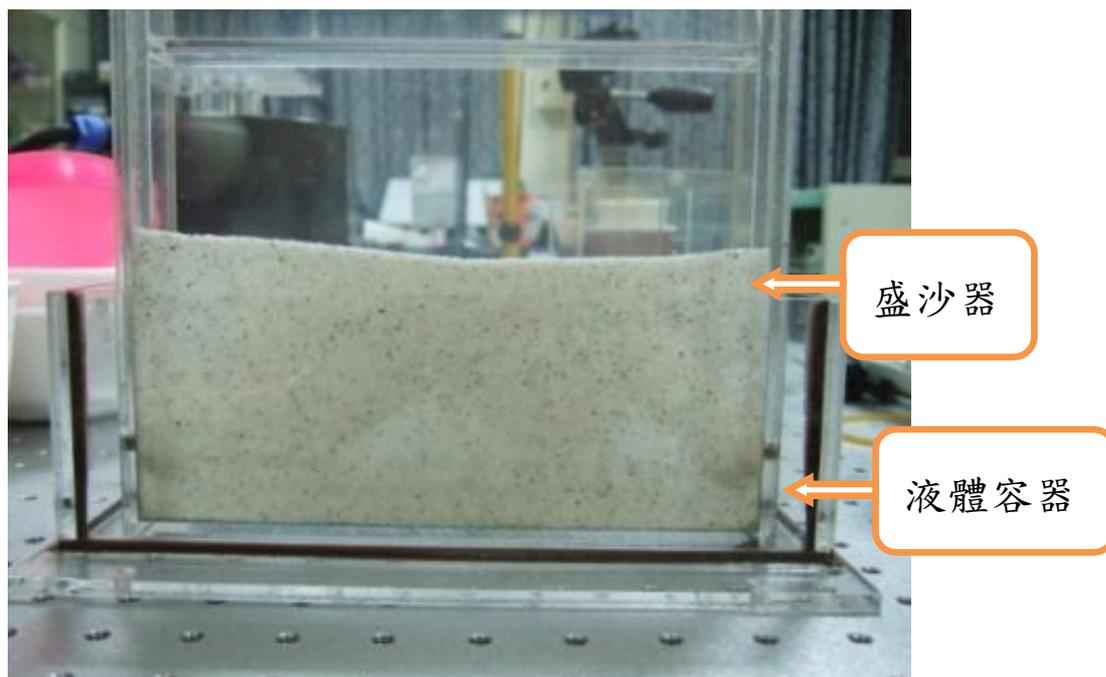
圖 3-4 液體容器

注一：本實驗採用水和甘油的混合液之原因有二：

1. 水和甘油無限互溶，即兩者可以任意比例混合成均勻溶液。
2. 水和甘油之黏滯係數相差大，兩者相混所得之黏滯係數範圍較廣。

注二：我在每次實驗時會在定量的甘油水溶液中(400gw)滴加十滴墨汁(約 0.1gw)，藉此增加乾沙子和濕沙子的顏色對比，以利電腦分析。

二、器材設置



將沙子倒入組裝後的盛沙器中，形成一層寬 20cm，高 10cm，厚 2mm 的沙層。將盛沙器放入液體容器並架設檯燈從攝影機的方向往盛沙器照明，將攝影機對焦，然後由液體容器後方到入配製好的甘油水溶液同時開始定時攝影。

肆、研究過程和方法



一、以定時攝影機拍照

將盛沙器組裝並裝入沙子後放進液體容器中。以電子秤調製特定重量百分比的甘油水溶液 400gw 並滴加墨汁(約 0.1g)以利分析。將攝影機朝盛沙器對焦後，把甘油水溶液由液體容器後方倒入，同時開始定時攝影(黑白照片，4416x2480，每 10 秒一張，拍攝 15 分鐘，共 90 張)。

二、取得邊緣圖案之座標

用 findedge 運算，以第 2 到第 90 張照片剪去第一張照片即可得到 89 份邊緣圖案之座標。(圖 4-1)

三、計算碎形維度

使用由中興大學物理系廖思善教授提供之程式計算圖形總長和量測尺度的關係，再經由 Grapher 作圖，可得到碎形維度。(圖 4-2~4-3)



圖 4-1 findedge 運算示意圖

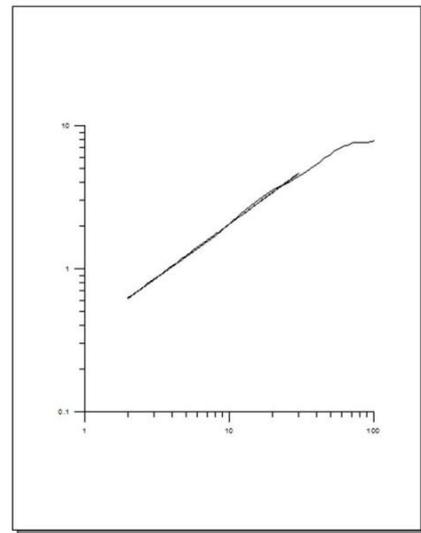


圖 4-2 以 Grapher 作圖
用 Grapher 得到最接近直線及其斜率

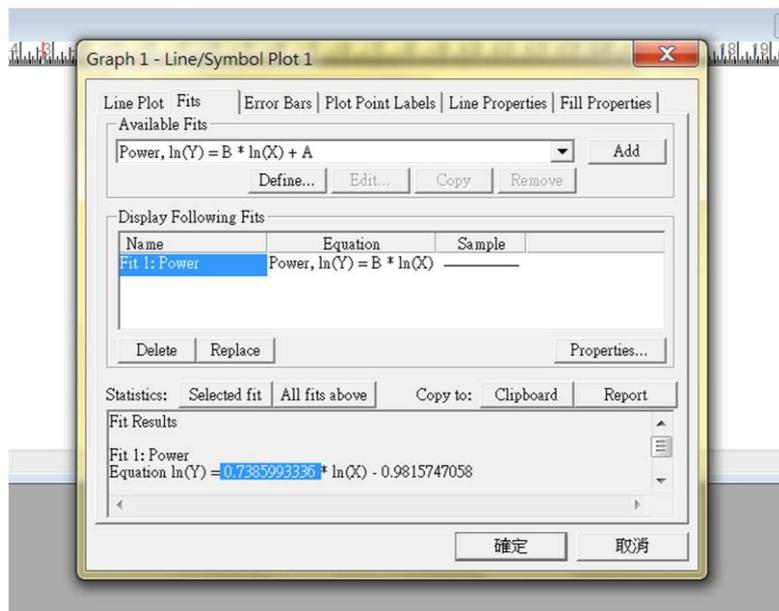


圖 4-3 以 Grapher 計算碎形維度

伍、研究結果

一、實驗前

我先用純水作試驗，發現其邊緣圖案之碎形維度會不斷上下波動並且接近某個值(圖 5-1)。我以"末維度"來指稱該值，並且在下述實驗中，以每一次攝影過程的最後一分鐘之平均維度作為該次實驗之末維度。

同時我提出了兩個假設：

- (一)液體的黏滯係數越大，末維度越小(即圖案越平滑)。
- (二)液體的黏滯係數與末維度呈絕對負相關。

應注意的是，圖 5-1~圖 5-3 中的每一條線僅表示單一次實驗的結果，而本實驗報告中所提及的數值為均 20 次實驗結果的平均。

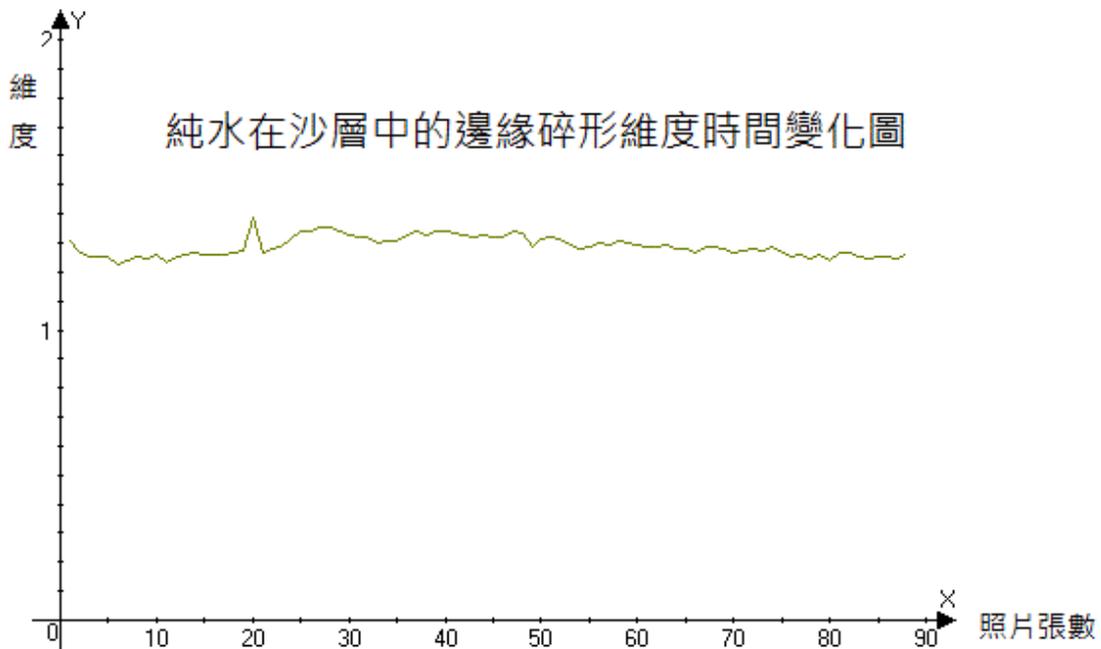


圖 5-1

由圖可見，隨著時間過去，
邊緣碎形維度的變動會漸小，而維度本身會趨近某個值。

二、初步實驗

(一)比較純水和純甘油的邊緣維度差異，得圖 5-2

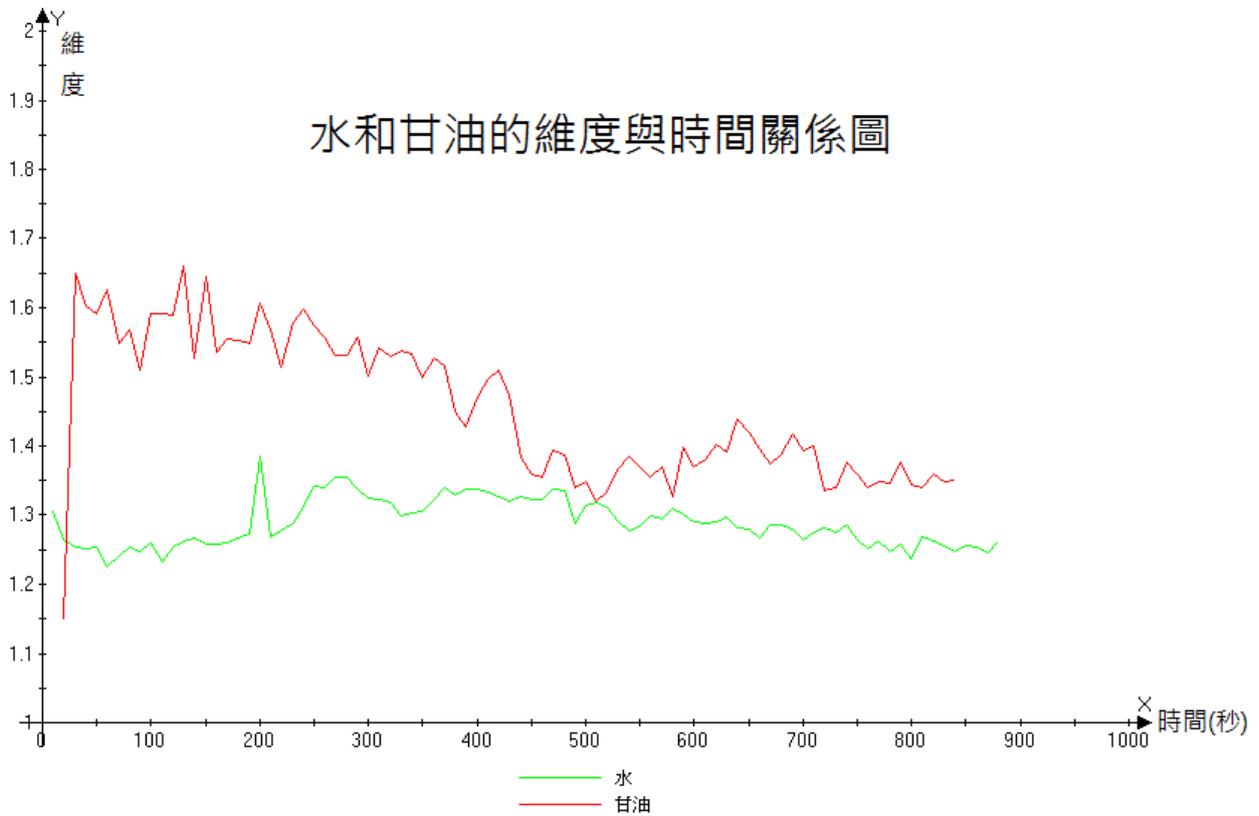


圖 5-2

圖 5-2 是將純甘油和純水跑出來的維度變化線各一條作比較。經多次的實驗結果計算，純水的末維度為 1.253，純甘油的末維度為 1.335。因此，假設(一)被推翻。

此外，既然甘油的末維度大於水，黏滯係數與末維度變不可能呈絕對負相關。因此，我將假設(二)修正，改為：

“液體的黏滯係數與碎形維度呈絕對正相關。”

(二)接著比較純水、純甘油、和 50%的甘油水溶液之維度差異，得圖 5-3

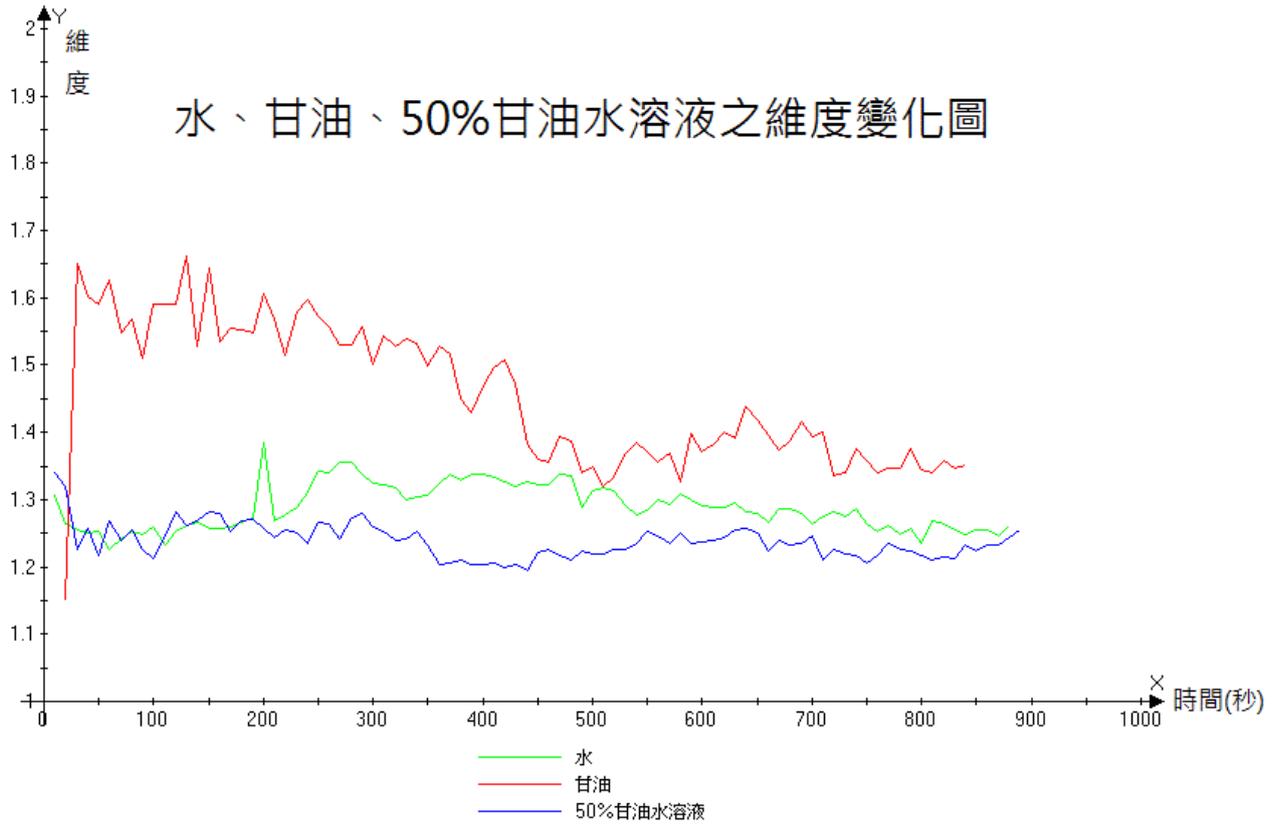


圖 5-3

若修正後的假設(二)是正確的，便表示重量百分比為 50%的甘油水溶液，其維度應介於純水和純甘油之間。然而由圖 5-2 可看出，50%的甘油水溶液，其維度比純水和純甘油都來的小。實際運算後，50%的甘油水溶液之末維度為 1.231。

因此，假說(二)亦被推翻。

至此我們可得知，液體的黏滯係數和其末維度既非絕對正相關亦非絕對負相關。

三、進一步分析

接著，我配置出不同重量百分比的甘油水溶液，在 20°C 下，分析其末維度，得圖 5-4。

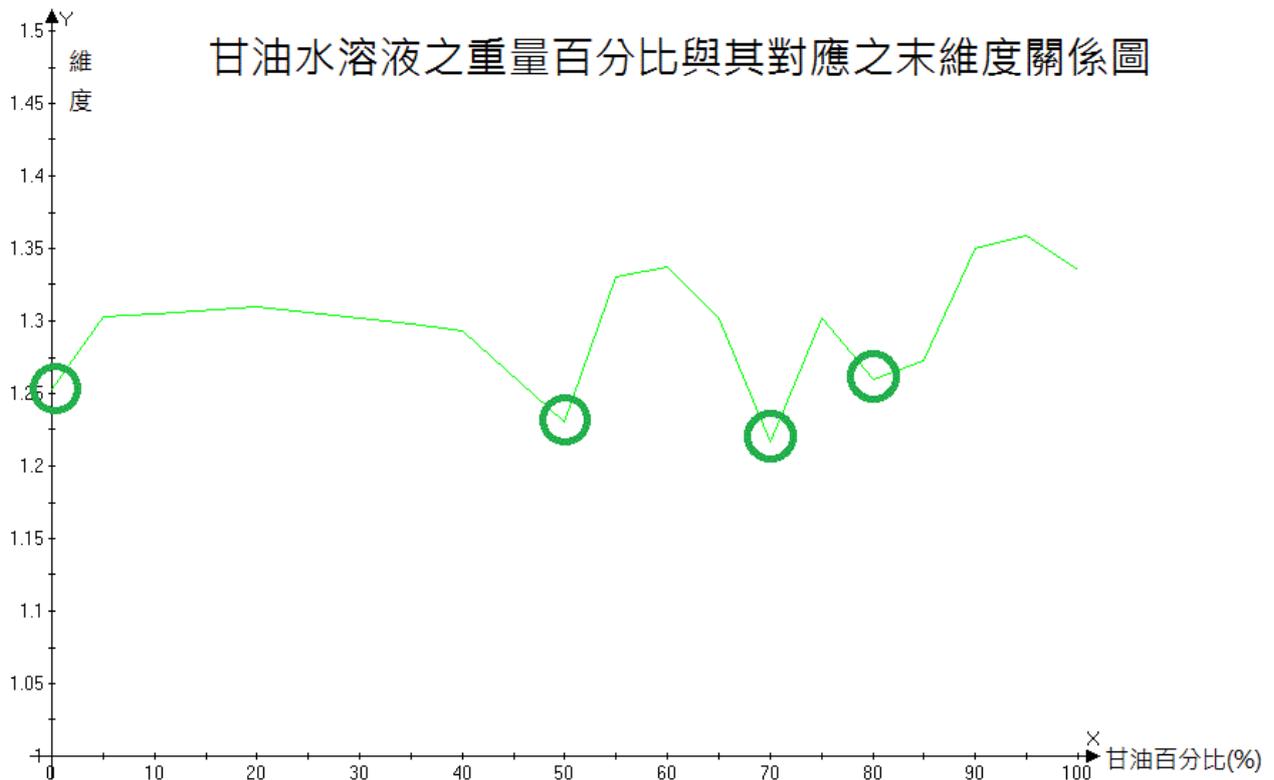


圖 5-4

由圖 5-4 可看出，隨著黏滯係數的增加，末維度呈現上升的趨勢。

在此我做出一些定義：

當一個點的左右兩點之維度皆大於它的維度時，此點稱為低峰點；

當一個點的左右兩點之維度皆小於它的維度時，此點稱為高峰點；

維度從一個低峰點變化到下一個低峰點的過程稱為一次震盪；

兩低峰點間的距離為該次震盪之週期。

(其中由於週期是由兩個百分比相減而來，因此週期的單位為%)

圖 5-4 中的低峰點包括 0%、50%、70%、80%。(在此為了分析，亦將 0% 視為一個低峰點) 這三次震盪週期分別為 50%、20%、10%。

由圖中可看出，隨著黏滯係數的增加，末維度會上下震盪，且其震盪之週期逐漸下降。

觀察攝氏 20 度之下，甘油水溶液的黏滯係數和其重量百分比的關係圖，可以發現甘油比例越高時，黏滯係數的差異也越大。(圖 5-5)

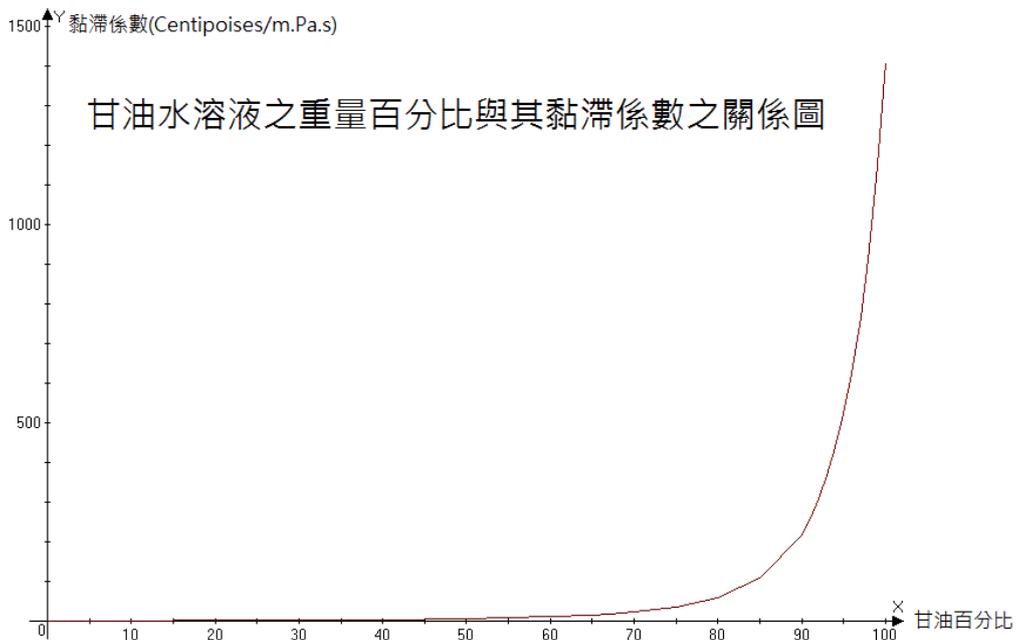


圖 5-5

由於黏滯係數和週期皆隨著甘油水溶液的重量百分比的上升而增加，我們可假設甘油水溶液之震盪週期和其高峰點所對應之黏滯係數有某種關聯。將此關聯作圖，得圖 5-6。

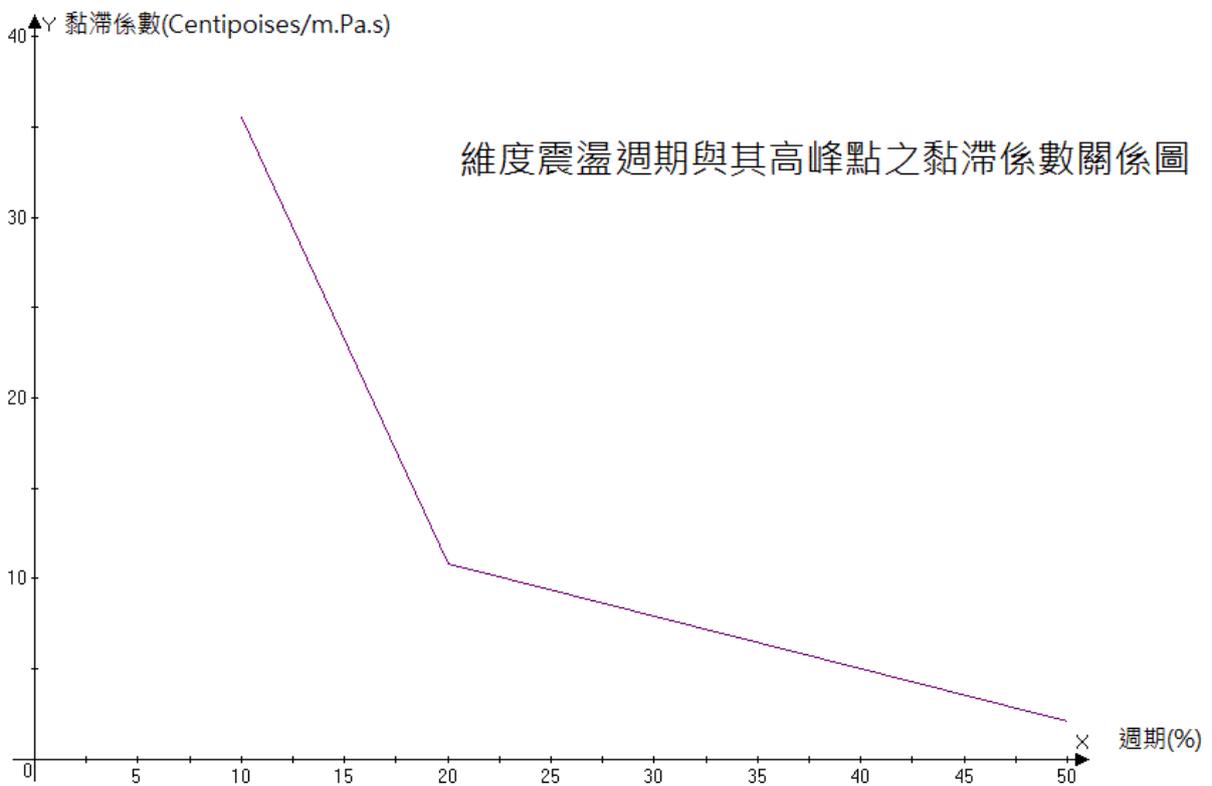


圖 5-6

我再把末維度上下震盪的高峰點連起來後，得到圖 5-7。

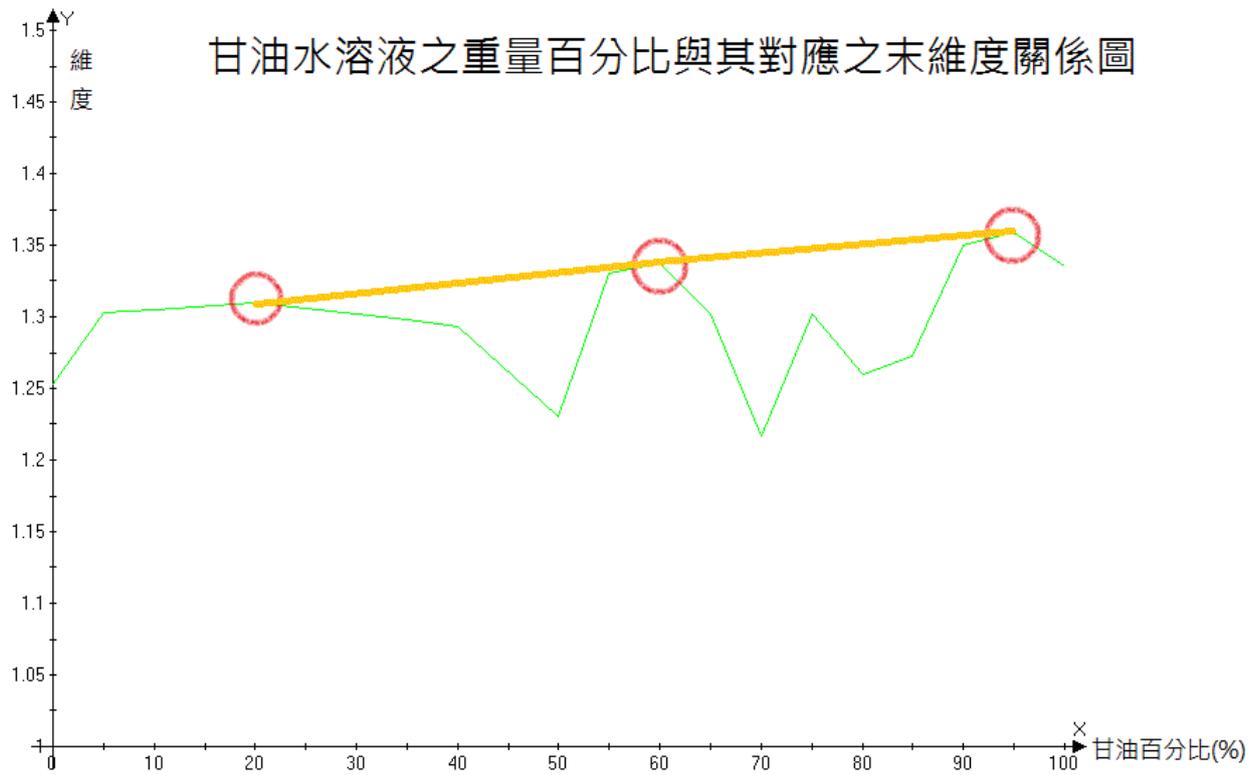


圖 5-7

由此圖可看出，各高峰點之連線非常接近一條不通過原點的直線。經計算，此折線的最接近直線之方程式為：

$$Y = 0.0006527598319X + 1.2975517165$$

四、改變沙層種類

上述所以情形都是在直徑 0.7mm 的沙層中產生，於是接著我探討了採用不同沙子所造成的結果。

圖 5-8 是純水分別在 0.5mm 和 0.7mm 的沙層中形成之維度比較。

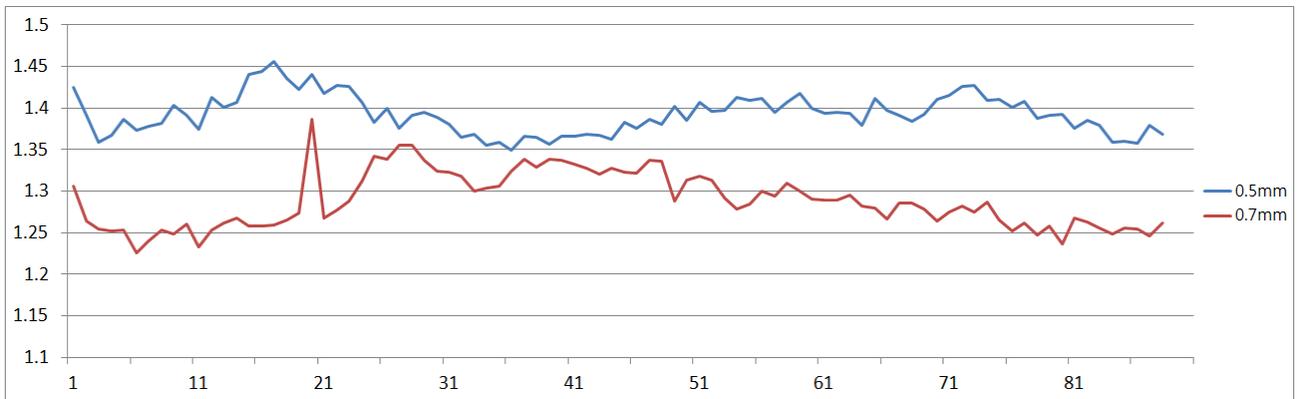
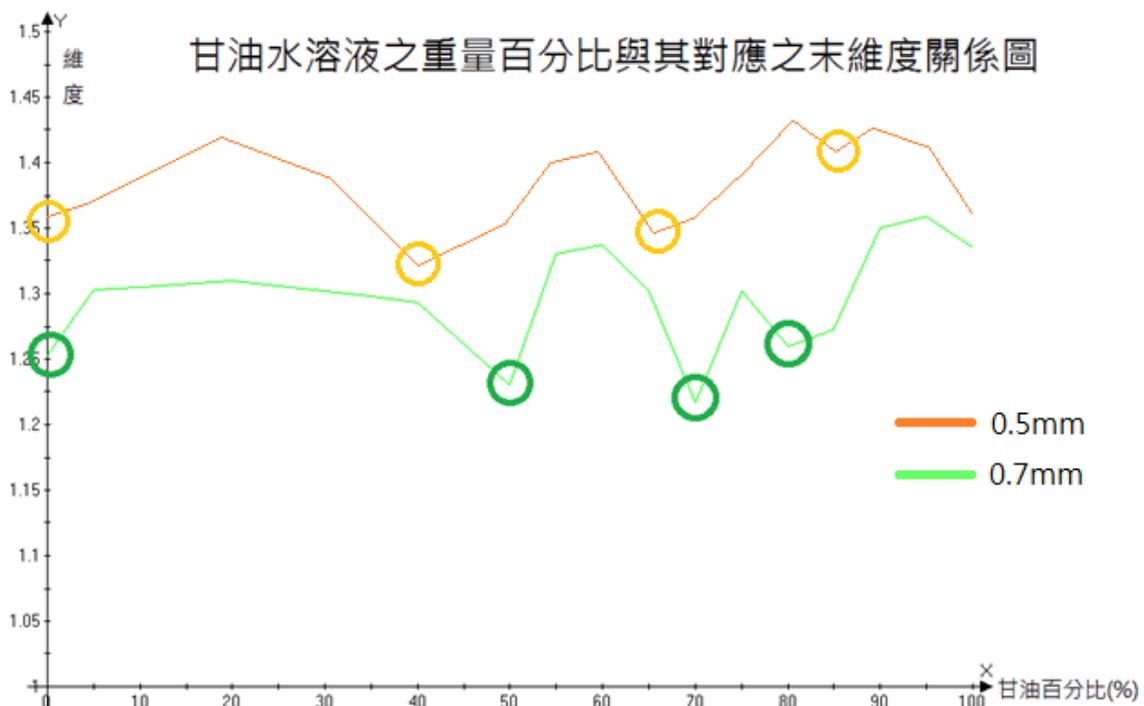


圖 5-8

由圖可看出，同樣的液體在顆粒較細的沙層中會形成較大之維度。重複二十次實驗後，我得到純水在顆粒大小 0.5mm 的沙層中之末維度為 1.352，大於在顆粒大小 0.7mm 的沙層中之末維度 1.253。

我接著將前述所有實驗中的沙子都改成 0.5mm 並重複實驗，得到圖 5-9。



從圖中可看出，在顆粒大小 0.5mm 的沙層中，隨著甘油水溶液的重量百分比之上升，其末維度依然呈上升的趨勢且有震盪情形；期震盪週期依次為 40%、25%、20%呈下降趨勢。

最後，我也求得新的高峰點連線之最接近直線方程式為：

$$Y = 0.0003215211297X + 1.3975728581$$

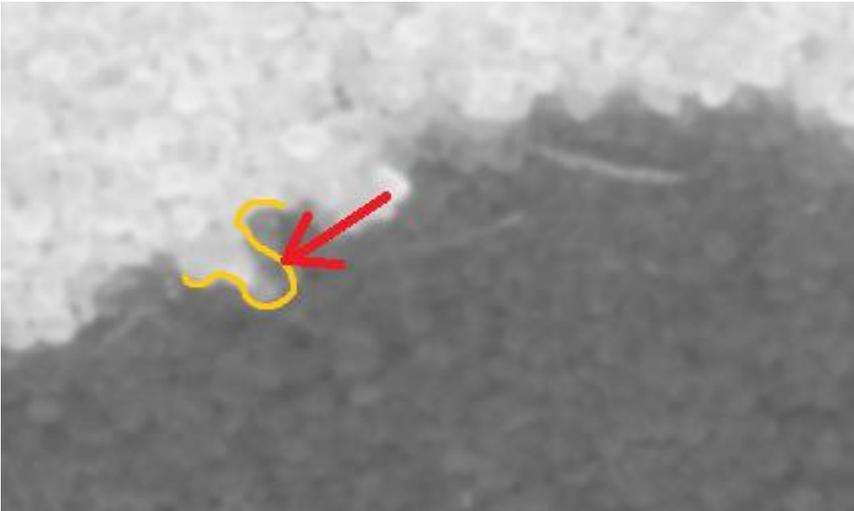
陸、討論

針對上述結果，可以討論下列問題：

一、隨著黏滯係數增加，其形成之邊緣碎形維度為何呈上升的趨勢？

實驗前我做了一個和結果相反的假設，其實只是直觀而錯誤的想法。當一股液體往上滲入沙層中時，最主要有三股力量在發揮作用：重力、由張力造成的向上力、以及阻止它往上的內阻力，其中內阻力的相對大小可用黏滯係數來表達。當我們把 20°C 的甘油和水拿來比較時，可以發現甘油同時具有較大的密度(甘油 1261，水 1000 kgw/m³)、較小的表面張力(甘油 63，水 71.97dyn/cm)、以及較大的黏滯係數(甘油 1410，水 1.005 centipoises/m×Pa×s)。因此為了對抗較大的向下合力，甘油的張力形成的向上力就相對的比較大。而由於 $F = \gamma \ell$ ，表示甘油的 ℓ 需較大，所形成的圖案也就比較破碎，碎形維度因而就比水來的大了。

值得注意的是，若以巨觀的角度來看，在固定容器下的 ℓ 是不變的(容器的寬度不變)。然而，若將液體在沙層中留下的邊緣圖案放大，我們會看到許多迴轉的結構(下圖箭頭所指處)。這些迴轉會造成 ℓ 的增加，而維度越大，可能存在的迴轉也就越多，也因此甘油會產生較大的碎形維度。



參考文獻後發現，有科學家分析了培養皿中大腸桿菌菌落形狀的碎形維度，發現當洋菜膠越濃稠時，菌落圖案的碎形維度就越大。此結果和本研究成果也是相符合的：當一物質在一結構中前進時，若行進過程越困難，則其行成圖案的碎行維度就越大。

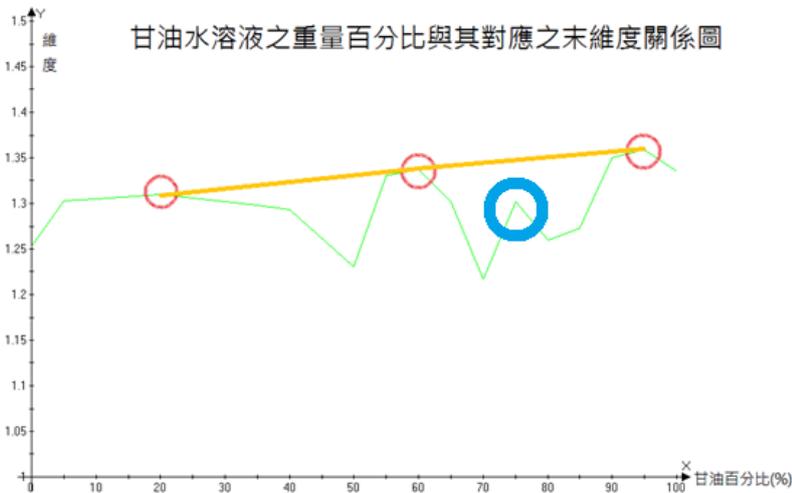
二、前述的趨勢為何不是線性而是呈現震盪的狀態？

邊緣圖案在形成過程中同時受了前述三個主要的力的影響，而隨著黏滯係數的增加，三種力的變化程度、趨勢都不盡相同，因此在交互作用下有可能就造成了這種震盪現象。詳細的證明則需要先建立起三個力對邊緣維度的影響關係。

三、圖 5-6 似乎太粗略？

由於在本研究所得到的數據中僅涵蓋了三個震盪週期，得到的圖表自然比較粗略。若想要更精確的描述黏滯係數與週期的關係，可能就得找出黏滯係數比水更小或比甘油更大的液體，同時該液體又必須能和水和甘油互溶，因此不是一件容易的事，但這不啻是一個可以努力的方向。

四、圖 5-7 中忽略了一個高峰點？(下圖中藍色圈圈處)



由於週期呈現漸短的趨勢，有極大的可能此折線在 70%-95% 之間曾經歷過多個高峰點，而此圖表無法呈現(因本實驗中甘油水溶液的重量百分比皆為 5 的倍數)。若要證實此事則必須將重量百分比做更細的切割，然每處理一個百分比的數據都需要耗費龐大的時間，因此在此僅將此較不明顯的高峰點省略。

五、沙子的顆粒大小如何影響邊緣碎形的維度？

沙粒越小，所形成的整體結構就越緻密，液體在其中前進就越困難，也因此會形成較大的維度，此與本研究中的實驗結果是一致的。

六、液體的黏滯係數和其碎形維度的關係為何？

可以看到，本研究中僅繪出甘油水溶液的重量百分比和其對應維度的關係。本研究沒有繪出黏滯係數和維度的關係的原因是，圖表中的黏滯係數值皆來自現成資料，而我能找到的資料中無法涵蓋繪圖所需的各甘油水溶液所對應之精確黏滯係數。我曾嘗試自行測量液體的黏滯係數，但在測量黏滯度低的液體時碰到了困難。

我採用的測量方法是，將一個圓柱體浸入待測液體中，並施以定力使圓柱體繞中心軸轉動，測量圓柱體達到的終端轉速即可得知周圍液體對它作的負功，進而得知此液體的黏滯係數。然而當液體的黏滯係數太小時(重量百分比小的甘油水溶液)，圓柱體的終端轉速會變得極大，進而使得分析極為困難，因此最後我僅引用現成的黏滯係數資料來繪圖。

七、這項研究中可能存在的實驗誤差來源為何？

當周圍的照明亮度不同時，分析邊緣座標的精確度就會不同。當光線較少時，分析所得的邊緣圖案會因對比下降的關係而變得較平滑，產生較小的碎形維度。避免此誤差的方法為固定每一次實驗所使用的光源位置和強度。

八、實驗照片的哪些性質會影響實驗結果？

實驗照片的解析度、對比和曝光率皆會影響測得的維度。解析度越大，照片能捕捉到的細微結構就越多，維度就會越大。相片對比越大時，軟體在分析邊緣座標時就會得到越多的細

微結構，維度就會越大。而曝光率增加時，許多較細微的結構反而會被忽略，因此維度會變的較小。要除去這些因素造成的誤差，只要在每一次攝影時將攝影機的各项數值設定好即可。

柒、結論與應用

一、結論

(一)一均勻液體由下往上滲入一層由沙子組成的結構時，其乾沙子與溼沙子之交界邊緣會形成碎形圖案，此碎形圖案之維度會上下震盪後逼近某個值，且不同黏滯係數的液體會對應到不同的值。

(二)無論沙粒大小為何，隨著液體的黏滯係數上升，其形成邊緣圖案之碎形維度會上下震盪，並且整體而言呈現上升的趨勢。此外，此碎形維度的震盪週期會隨著液體的黏滯係數上升而下降。

(三)顆粒越小的沙層中，相同液體所形成的邊緣碎形維度越大。

(四)

顆粒大小 0.5mm 的沙層中，維度震盪高峰點之連線方程式為：

$$Y = 0.0003215211297X + 1.3975728581$$

顆粒大小 0.7mm 的沙層中，維度震盪高峰點之連線方程式為：

$$Y = 0.0006527598319X + 1.2975517165$$

二、應用

(一)透過建立起不同液體在不同結構層中的邊緣碎形維度隨時間的演進，可用來預測海岸線的變遷等。

(二)維度震盪的現象可應用於建築材料的防滲漏工程。只要測出欲防滲漏之液體的黏滯係數，並找出該黏滯係數為何種建築材質的低峰點，即可找到在特定需求下最能抗滲漏的材質，作為建築工程之用。

捌、參考資料

[1]張志三(民85)。漫談碎形。台北市：牛頓出版有限公司。

[2]Viscosity of aqueous glycerin solutions. Michigan: The Dow Chemical Company. Retrieved February 9, 2011, from <http://www.dow.com/glycerine/resources/table18.htm>

[3] N.E. Dorsey (1940). Properties of Ordinary Water-Substance (p. 184). New York.