第十一屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA11-004

作品名稱：兩平方差再現數（有意思數字－Amazing Numbers Game）

A Certain Type of Number Expressible as Self-similar Difference of Squares

姓　　名：黃筠軒

關 鍵 字：數論、二元二次不定方程、兩平方差再現數

兩平方差再現數（有意思數字－Amazing Numbers Game）

A Certain Type of Number Expressible as Self-similar Difference of Squares

中文摘要

關鍵字：數論、二元二次不定方程（Diophantine Equation）、兩平方差再現數

與純循環小數有關的兩平方差再現數是我們以逆向思維想到，並完整提出更多全新與開創性的研究概念與性質，發展前所未有的同步關聯與研究延伸。

首先，可表為兩個平方數差的一種有意思數字是指將其分成兩部分，前（左）、後（右）兩部分平方之差的絕對值仍會等於原來的數字串，稱此有意思數字為「兩平方差再現數」，意即兩平方差再現數的定義就是可以將其拆為前後兩段平方差的數字，而平方差之絕對值又等於原來的數字。給定「順序」及「逆序」之形式的範例：

$$\begin{cases} \underline{1016}\,\underline{\underline{127}} = \underline{1016}^2 - \underline{\underline{127}}^2 \\ \underline{016}\,\underline{\underline{128}} = \underline{\underline{128}}^2 - \underline{016}^2 \end{cases},$$

然後結合有序的特定有理數對

$$\left(\frac{1}{63},\frac{8}{63}\right) = \left(0.\overline{015873},\, 0.\overline{126984}\right)$$

研究它們與純循環小數和循環節長度的關聯性，探究與其自我相似的兩平方差再現數：

$$\begin{cases} \underline{1\overbrace{015873}^{A}\overbrace{015873}^{A}016}\,\underline{\underline{\overbrace{126984}^{B}\overbrace{126984}^{B}127}} = \underline{1\overbrace{015873}^{A}\overbrace{015873}^{A}016}^2 - \underline{\underline{\overbrace{126984}^{B}\overbrace{126984}^{B}127}}^2 \\ \underline{\overbrace{015873}^{A}\overbrace{015873}^{A}016}\,\underline{\underline{\overbrace{126984}^{B}\overbrace{126984}^{B}128}} = \underline{\underline{\overbrace{126984}^{B}\overbrace{126984}^{B}128}}^2 - \underline{\overbrace{015873}^{A}\overbrace{015873}^{A}016}^2 \end{cases}。$$

接著結合冪數生成原理，推廣與其自我相似之數式及相關的數列，其結果仍可由兩數字串順（逆）序毗鄰並列而得，例如：

$$\begin{cases} \underline{14}\,\underline{\underline{7}},\ \underline{1484}\,\underline{\underline{847}},\ \underline{148484}\,\underline{\underline{84847}},\ \underline{14848484}\,\underline{\underline{8484847}},\ \underline{1484848484}\,\underline{\underline{848484847}},\cdots \\ \underline{4}\,\underline{\underline{8}},\ \underline{484}\,\underline{\underline{848}},\ \underline{48484}\,\underline{\underline{84848}},\ \underline{4848484}\,\underline{\underline{8484848}},\ \underline{484848484}\,\underline{\underline{848484848}},\cdots \end{cases}。$$

且兩平方差再現數

$$\begin{cases} \underline{1\overbrace{016128}^{C}\overbrace{016128}^{C}016}\,\underline{\underline{\overbrace{128016}^{D}\overbrace{128016}^{D}127}} = \underline{1\overbrace{016128}^{C}\overbrace{016128}^{C}016}^2 - \underline{\underline{\overbrace{128016}^{D}\overbrace{128016}^{D}127}}^2 \\ \underline{\overbrace{016128}^{C}\overbrace{016128}^{C}016}\,\underline{\underline{128\overbrace{016128}^{C}\overbrace{016128}^{C}}} = \underline{\underline{\overbrace{128016}^{D}\overbrace{128016}^{D}128}}^2 - \underline{\overbrace{016128}^{C}\overbrace{016128}^{C}016}^2 \end{cases};$$

此外，亦與特定有理數

$$\frac{256}{15873} = 0.\overline{016128} = 0.\underline{016128016128016}\,\underline{\underline{128016128016128}}016128\cdots\cdots$$

化成純循環小數有著密切且巧妙的關聯性，這些極具對稱之美的整數分解式的確令人耳目一新！

A Certain Type of Number Expressible as Self-similar Difference of Squares

Abstract

Keywords: Number Theory, Diophantine Equation, Subtle Differences of Two Squares

The two examples that I have are

$$\begin{cases} \underline{1016}\,\underline{\underline{127}} = \underline{1016}^2 - \underline{\underline{127}}^2 \\ \underline{016}\,\underline{\underline{128}} = \underline{\underline{128}}^2 - \underline{016}^2 \end{cases}$$

and

$$\left\langle \begin{array}{l} \begin{cases} \overbrace{015873}^{A}\overbrace{015873}^{A} \quad \overbrace{126984}^{B}\overbrace{126984}^{B} \quad \overbrace{015873}^{A}\overbrace{015873}^{A} \quad \overbrace{126984}^{B}\overbrace{126984}^{B} \\ \underline{1015873015873016}\,\underline{\underline{126984126984127}} = \underline{1015873015873016}^2 - \underline{\underline{126984126984127}}^2 \\ \overbrace{015873}^{A}\overbrace{015873}^{A} \quad \overbrace{126984}^{B}\overbrace{126984}^{B} \quad \overbrace{126984}^{B}\overbrace{126984}^{B} \quad \overbrace{015873}^{A}\overbrace{015873}^{A} \\ \underline{015873015873016}\,\underline{\underline{126984126984128}} = \underline{\underline{126984126984128}}^2 - \underline{015873015873016}^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \overbrace{016128}^{C}\overbrace{016128}^{C} \quad \overbrace{128016}^{D}\overbrace{128016}^{D} \quad \overbrace{016128}^{C}\overbrace{016128}^{C} \quad \overbrace{128016}^{D}\overbrace{128016}^{D} \\ \underline{1016\overbrace{128016}^{D}\overbrace{128016}^{D}}\,\underline{\underline{\overbrace{128016}^{D}\overbrace{128016}^{D}127}} = \underline{1016128016128016}^2 - \underline{\underline{128016128016127}}^2 \\ \overbrace{016128}^{C}\overbrace{016128}^{C} \quad \overbrace{128016}^{D}\overbrace{128016}^{D} \quad \overbrace{128016}^{D}\overbrace{128016}^{D} \quad \overbrace{016128}^{C}\overbrace{016128}^{C} \\ \underline{\overbrace{016128}^{C}\overbrace{016128}^{C}\dot{0}\dot{1}\dot{6}}\,\underline{\underline{\overbrace{128016}^{C}\overbrace{128016}^{C}128}} = \underline{\underline{128016128016128}}^2 - \underline{016128016128016}^2 \end{cases} \end{array} \right. .$$

These were found by Giovanni Resta, and he was unspecific as to exactly where these identities were coming from, but they are associated with rational numbers of particular forms:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{63}, \dfrac{8}{63}\right) = \left(0.\overline{015873}, 0.\overline{126984}\right) \\ \dfrac{256}{15873} = 0.\overline{016128} = 0.\underline{016128016128016}\,\underline{\underline{128016128016128}}016128\cdots\cdots \end{cases} .$$

I hope this doesn't satisfy you!

We also can present some diverse methods for generating subtle differences of two squares. In retaliation we nominate

$$\begin{cases} \underline{14}\,\underline{7}, \underline{1484}\,\underline{847}, \underline{148484}\,\underline{84847}, \underline{14848484}\,\underline{8484847}, \underline{1484848484}\,\underline{848484847}, \cdots \\ \underline{\underline{4}}\,\underline{\underline{8}}, \underline{\underline{484}}\,\underline{\underline{848}}, \underline{\underline{48484}}\,\underline{\underline{84848}}, \underline{\underline{4848484}}\,\underline{\underline{8484848}}, \underline{\underline{484848484}}\,\underline{\underline{848484848}}, \cdots \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \underline{14}\,\underline{7}, \underline{134}\,\underline{67}, \underline{1346834}\,\underline{683467}, \underline{13468346834}\,\underline{6834683467}, \underline{134683468346834}\,\underline{68346834683467}, \cdots \\ \underline{\underline{4}}\,\underline{\underline{8}}, \underline{\underline{34}}\,\underline{\underline{68}}, \underline{\underline{346834}}\,\underline{\underline{683468}}, \underline{\underline{3468346834}}\,\underline{\underline{6834683468}}, \underline{\underline{34683468346834}}\,\underline{\underline{68346834683468}}, \cdots \end{cases}$$

of course the above pair of examples are mathematically far more marvelous interesting, thus we name them as the sequences of self-similar differences of two squares. The numbers 10 appearing here may be replaced by any other base.

兩平方差再現數（有意思數字－**Amazing Numbers Game**）

A Certain Type of Number Expressible as Self-similar Difference of Squares

壹、研究動機（http://www.puzzlet.co.uk/Puzzlets/Puzzlet_163.html）

與純循環小數有關的兩平方差再現數是我們以逆向思維想到，意識到此有意思數字系統裡美妙的特性與它們所激發出的數學模式與美妙的特性，不只欣賞數學的美感。發展前所未有的同步關聯與研究，延伸出更多全新與開創性的研究概念。期能提出許多精采的見解與發展，完整探究與兩平方差再現數相關的內容與性質【1】【6】。爰此，推廣可表為兩平方差再現數之數式及與其自我相似的數列與數式，結合 C++程式語言以進行編譯及執行搜尋（兩半平方、毗鄰並列、互補對稱）。

貳、研究目的

（一）探討與兩平方差再現數相關聯的等價簡化及分析與其有關的主要關鍵，並提出許多新的研究概念，期能發展出前所未有的同步關聯與延伸研究。

（二）可有無限多個具對稱性的整數分解式嗎？探討兩平方差再現數之生成原理，闡釋與其相關聯的演算法則，以 C++程式語言執行編譯及表列搜尋之結果。

（三）分析兩平方差再現數之計數結構，充分結合極具數學娛樂的研究性質，研究兩平方差再現數與特定有序的有理數對化成純循環小數的關聯性。

（四）論證推廣與性質相關的主要定理，結合與其有關的冪數生成原理，進而延伸及歸納與其自我相似的整數分解式。

（五）期能推廣研究相關的二次不定形式之表示法，探究其中所牽涉到的演算法，進而能擬定一些主要論述。

參、研究過程或方法

（一）楔子－從兩平方和再現數到兩平方差再現數之結果、差異之處與未來發展

由原創性的觀點進行逆向思維的思考，研究兩平方差再現數及與其相關的整數分解式【8】！Concatenating Squares（可表為兩個平方數和的一種特定形式的數）之數式裡的加號能否改變為減號？其結果是否仍然可由兩數字串毗鄰並列而得出呢？經研究後發現是可以的！發現兩平方差再現數的代表數是諸如此類有趣分解式的預言者，且更是推廣許多與其自我相似之有意思數式的開端。

（1）邂逅二〇〇三年台灣國際科展之作品說明書中所記載的 Concatenating Squares，更易於延伸解決此問題之創意【1】【8】。

（2）二〇〇四年旺宏科學獎之成果報告書－與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解，所得到的等式結果竟是由相同的兩段數字串毗鄰並列【2】。

（3）二〇〇六年香港黃志華先生看出逆向思維的重要性，發表了兩平方差再現數的實例，結果是一批未見過世面的美麗數式【3】！

（二）數列－研究形如 $\underline{14}\,\underline{7}=\underline{14}^2-\underline{7}^2 \rightleftharpoons \underline{\underline{4}}\,\underline{\underline{8}}=\underline{\underline{8}}^2-\underline{\underline{4}}^2$ 的再現數式及其發展史

（1）The difference of two squares（http://www.puzzlet.co.uk/Puzzlets/Puzzlet_163.html）

The difference of two squares b and a is b^2-a^2, where b and a are two 3-digit integers and a is less than b, is equal to the concatenation $a\&b$. Here's an example of how this works:

$513^2-216^2=216\&513$ (where $\&$ is a concatenation symbol),

and if we concatenate 216 with 513 we get 216513.

（2）Here are the first 29 of these numbers（OEIS A113797）:

48, 100, 147, 3468, 10000, 10101, 13467, 16128, 34188, 140400, 190476, 216513, 300625, 334668, 416768, 484848, 530901, 1000000, 1010100, 1016127, 1034187, 1140399, 1190475, 1216512, 1300624, 1334667, 1416767, 1484847, 1530900, ⋯.

（3）PUZZLET 163 及其迴響：以 C++程式語言編譯逆序搜尋及順序搜尋之程式碼。

（三）基本預備知識

（1）若 p 與 q 皆可表示為兩個整數的平方差（和），則乘積 $p\cdot q$ 必可表示為兩個整數的平方差（和），後者可依據與複數之乘法運算相關聯的一般法則而得出。事實上，

$$\begin{cases}(m^2-n^2)(u^2-v^2)=(mu\pm nv)^2-(nu\pm mv)^2\\(m^2+n^2)(u^2+v^2)=(mu\pm nv)^2+(nu\mp mv)^2\end{cases}$$

可以直接透過婆羅摩笈多恆等式：

$$(-\alpha m^2+n^2)(-\alpha u^2+v^2)=(\alpha mu\pm nv)^2-\alpha(nu\pm mv)^2$$

來加以論證，取 $\alpha=\pm1$，可直接加以證明其結果，意即兩等式之結果就是婆羅摩笈多恆等式的特例。

（2）可研究高斯整數，高斯整數是實數和虛數部分都是整數的複數。所有高斯整數組成了一個整域，記作 $Z[i]$，是個不可以轉成有序環的歐幾里德域。高斯整數就是集合

$$Z[i]=\{\,a+bi\,\big|\,a,b\in Z\,\}\text{，}$$

而 $Z[i]$ 的單位 $\{\pm1,\pm i\}$ 之範數均為 1。高斯整數的範數是非負整數，定義為

$$N(a+bi)=a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)\text{。}$$

且與其相關聯的乘法是

$$N(z\cdot w)=N(z)\cdot N(w)\text{，}$$

假若 z 與 w 分別為 $m+ni$ 與 $u+vi$，則可得

$$(m^2+n^2)(u^2+v^2)=(mu-nv)^2+(nu+mv)^2\text{。}$$

（3）費馬平方和定理：形如 $4k+1$ 的質數都能夠表示成兩個正整數的平方和。故 $10^{2n}+1$ 的每一個質因數都可以唯一表示成兩個正整數的平方和。

（4）費馬分解法：正整數中，僅 1 與 4 是無法寫成兩個正整數之平方的差。若 M 為大於 1 的正奇數，則 M 必定能表示為兩個正整數之平方的差，且 M 的不同表示法之數目應等於 M 的不超過 $\sqrt{M}$ 的正因數的個數。若 M 為正偶數時，則 M 必定可表為兩個正整數之平方的差，若且唯若 $M=4j$，且其中 j 必是大於 1 的正整數。當 $M\equiv2\pmod 4$ 時，則正整數 M 是不可能表示成兩個正整數之平方的差；意即

$$\{\,2,6,10,14,18,22,26,30,\cdots\}$$

是無法表為兩個正整數之平方的差。換句話說，並非任何的正整數 M 都能表為兩個正整數之平方的差！

（5）設 α 和 β 為非負的整數，既約真分數 $\dfrac{a}{b}$ 能化為有限小數的充分條件是 $b=2^\alpha5^\beta$，且若既約真分數 $\dfrac{a}{b}$ 能化為純循環小數，則有 $(b,10)=1$。

（6）若 a 與 b 皆為正整數，且滿足 $a<b$ 及 $(a,b)=1$，令 t 是一個最小的正整數，能使

$$10^t\equiv1\ (\operatorname{mod} b)$$

成立，則有理數 $\dfrac{a}{b}$ 必能化為循環節長度為 t 位的純循環小數 $0.\overline{a_1a_2\cdots a_t}$。採以符號

$$\operatorname{Len}\left(\frac{a}{b}\right)=t$$

表示有理數 $\dfrac{a}{b}$ 能化成循環節之數字串長度為 t 的純循環小數，此即為有理數表示成純循環小數之定理。

（四）網路資源及符號說明

◎ http://www.dur.ac.uk/steven.charlton/squaresumcat/
◎ http://www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_104.htm
◎ http://vixra.org/pdf/1003.0225v1.pdf
◎ http://blog.chinaunix.net/space.php?uid=20375883&do=blog&id=1957183
◎ http://blog.plover.com/math/excellent.html
◎ http://www.trans4mind.com/personal_development/mathematics/numberTheory/index.html
◎ http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat's_factorization_method
◎ http://encyclopedia.thefreedictionary.com/Brahmagupta+identity

$r=10^n$	兩平方差再現數（&：連結符號）	兩平方和再現數（&：連結符號）
集　合	$E_2(r)=\left\{\boxed{a}\&\boxed{b}\,\middle\|\, \left\|a^2-b^2\right\|=a\cdot r+b\right\}$	$E_1(r)=\left\{\boxed{a}\&\boxed{b}\,\middle\|\, a^2+b^2=a\cdot r+b\right\}$
元　素	$N_2\,,N_2'\in E_2(r)$	$N_1\in E_1(r)$
前（左）半部數字串	$\boxed{a}\,,\boxed{a'}$	$\boxed{a}$
後（右）半部數字串	$\boxed{b}\,,\boxed{b'}$	$\boxed{b}$
整數分解式	$SR-E_2(r)$	$SR-E_1(r)$

（五）與兩平方差再現數相關的整數分解式【3】

（1）討論$E_1(r)$與$E_2(r)$之等價簡化及表列生成存在的條件（$r=10^n$）

極具對稱之美的兩平方差（和）再現數之二元二次不定方程為

$$\boxed{a}\&\boxed{b}=\left|a^2\mp b^2\right|=a\cdot r+b\text{，}$$

其中“&”表連結符號，這些微妙的再現數及其數式的確是從未被完整提出過。依序可得出a的二次方程

$$\begin{cases}a^2-r\cdot a+(b^2-b)=0\\a^2-r\cdot a-(b^2+b)=0\end{cases},$$

且可有

$$a=\frac{r\pm\sqrt{h^2}}{2}\text{，}$$

其中$h^2=r^2\mp 4b^2+4b$，分別經整理得

$$\begin{cases}b^2-b-\dfrac{r^2-h^2}{4}=0\\[2ex]b^2+b+\dfrac{r^2-h^2}{4}=0\end{cases},$$

且有

$$\begin{cases}b=\dfrac{1\pm\sqrt{1-h^2+r^2}}{2}\\[2ex]b=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+h^2-r^2}}{2}\end{cases};$$

再令

$$\begin{cases}k^2=1-h^2+r^2\\k^2=1+h^2-r^2\end{cases},$$

可得

$$\begin{cases} r^2+1=h^2+k^2 \\ r^2-1=h^2-k^2 \end{cases},$$

經計算和檢驗，果然分別可找到一批順序的兩平方和（差）再現數。

再分析下面的二次不定方程：

$$\boxed{a'}\,\&\,\boxed{b'}=b'^2-a'^2=a'\cdot r+b'\ ;$$

得出 a' 的二次方程

$$a'^2+r\cdot a'-(b'^2-b')=0\ ,$$

可得

$$a'=\frac{-r\pm\sqrt{h^2}}{2}\ ,$$

其中 $h^2=r^2+4b'^2-4b'$，經整理得

$$b'^2-b'+\frac{r^2-h^2}{4}=0\ ,$$

且有

$$b'=\frac{1\pm\sqrt{1+h^2-r^2}}{2}\ ;$$

再令

$$k^2=1+h^2-r^2\ ,$$

可得

$$r^2-1=h^2-k^2\ ,$$

經計算和檢驗，果然又可找到另一批逆序的兩平方差再現數。

以上的討論可知：$E_1(r)$ 的關鍵是在於尋找 r^2+1 寫成兩正整數平方和之表示式，而 $E_2(r)$ 的關鍵卻是在於尋找 r^2-1 寫成兩正整數平方差之表示式，即 $r^2-1=h^2-k^2$，其中 h 為偶數，而 k 為奇數！

（2）由原創性的觀點進行逆向思維

兩平方和再現數及與其自我相似的有意思數字已預言了文中將會有許多類似如此有趣且精采的整數分解式，意即研究中已意識到是研究兩平方差再現數的開端。

Diophantine Equation（$r=10^n$）：$N_1\in E_1(r)$
$N_1\in E_1(r)\Leftrightarrow r^2+1=h^2+k^2=(2a-r)^2+(2b-1)^2$
$r^2+1=(m^2+n^2)(u^2+v^2)=(mv+nu)^2+(mu-nv)^2\,;mu-nv=1,mv+nu=r$ $(a,b)=\{(mv,mu);(nu,mu);(mv,-nv);(nu,-nv)\}$
$\left(\frac{1}{17},\frac{4}{17},\frac{16}{17}\right)=\left(0.\overline{0588235294117647}\,,0.\overline{2352941176470588}\,,0.\overline{9411764705882352}\right)$
$\begin{cases}\underline{0588}\,\underline{\underline{2353}}=\underline{0588}^2+\underline{\underline{2353}}^2\\ \underline{9412}\,\underline{\underline{2353}}=\underline{9412}^2+\underline{\underline{2353}}^2\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}\underbrace{0588235294117647}_{A}\,\underbrace{0588235294117647}_{A}\,\underbrace{05882353}\in E_1(10^{20})\\ =\underline{0588235294117647 0588}^2+\underline{\underline{2352941176470588 2353}}^2\\ \underbrace{9411764705882352}_{C}\,9412\,\underbrace{2352941176470588}_{B}\,2353\in E_1(10^{20})\\ =\underline{9411764705882352 9412}^2+\underline{\underline{2352941176470588 2353}}^2\end{cases}$

Diophantine Equation ($r=10^n$)： $N_2\,,N_2' \in E_2(r)$
Fermat's Factorization Method, Brahmagupta's Identity, Brahmagupta–Fibonacci's Identity
$N_2=a\cdot r+b=a^2-b^2 \Leftrightarrow r^2-1=h^2-k^2=(2a-r)^2-(2b+1)^2$
$r^2-1=p\cdot q=(m^2-n^2)(u^2-v^2)=(mu-nv)^2-(nu-mv)^2\,,m^2-n^2\le r^2-1$ $nu-mv=1\,,mu-nv=r\,,(m+n)(u-v)=r+1\,,m>n\ge 1\,,u>v\ge 1$
$(a,b)=\{(mu,mv);(-nv,mv);(mu,-nu);(-nv,-nu)\}$
$N_2\in E_2(r)\Rightarrow (a,b)=(mu\,,mv)$
$(a,b)=(a'+r\,,b'-1)\Leftrightarrow (a',b')=(a-r,b+1)\Rightarrow N_2-N_2'=r^2-1$
$r\le a<\dfrac{(\sqrt{5}+1)\cdot r}{2}\,,0\le b\le r-1\Leftrightarrow\begin{cases} r\le h<\sqrt{5}\cdot r\\ 1\le k\le 2\cdot r-1\end{cases}$
$N_2'=a'\cdot r+b'=b'^2-a'^2\Leftrightarrow r^2-1=h^2-k^2=(2a'+r)^2-(2b'-1)^2$
$r^2-1=p\cdot q=(m^2-n^2)(u^2-v^2)=(mu-nv)^2-(nu-mv)^2\,,m^2-n^2\le r^2-1$ $nu-mv=1\,,mu-nv=r\,,(m+n)(u-v)=r+1\,,m>n\ge 1\,,u>v\ge 1$
$(a',b')=\{(nv\,,nu);(-mu\,,nu);(nv\,,-mv);(-mu\,,-mv)\}$
$N_2'\in E_2(r)\Rightarrow (a',b')=(nv\,,nu)$
$(a',b')=(a-r,b+1)\Leftrightarrow (a,b)=(a'+r,b'-1)\Rightarrow N_2-N_2'=r^2-1$
$0\le a'<\dfrac{(\sqrt{5}-1)\cdot r}{2}\,,1\le b'\le r\Leftrightarrow\begin{cases} r\le h<\sqrt{5}\cdot r\\ 1\le k\le 2\cdot r-3\end{cases}$

●Sloane, N. J. A. Sequences A113797 and A162700 in "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences."

●當 $r=10^3$ 時：由 $(u,v)=(8,1)\Rightarrow(a,b)=\left(\dfrac{64\cdot 10^3+8}{63},\dfrac{8\cdot 10^3+1}{63}\right)$，可有

$$\begin{cases} 1016127=1016^2-127^2=\dfrac{(8\cdot 10^3+1)^2}{63}\in E_2(10^3)\\ 016128=128^2-016^2=\dfrac{(10^3+8)^2}{63}\in E_2(10^3)\end{cases}。$$

●當 $r=10^9$ 時：由 $(m,n)=(127,16)\Rightarrow(a,b)=\left(\dfrac{16129\cdot 10^9-2032}{15873},\dfrac{2032\cdot 10^9-16129}{15873}\right)$，可有

$$\begin{cases} 1016128016128016127=1016128016^2-128016127^2=\dfrac{16129(10^{18}-1)}{15873}\in E_2(10^9)\\ 016128016128016128=128016128^2-016128016^2=\dfrac{256(10^{18}-1)^2}{15873}\in E_2(10^9)\end{cases}。$$

●當 $r=10^9$ 時：由 $(u,v)=(25,12)\Rightarrow(a,b)=\left(\dfrac{625\cdot 10^9+300}{481},\dfrac{300\cdot 10^9+144}{481}\right)$，可有

$$\begin{cases} 1299376300623700624=1299376300^2-623700624^2=\dfrac{(25\cdot 10^9+12)^2}{481}\in E_2(10^9)\\ 299376300623700625=623700625^2-299376300^2=\dfrac{(12\cdot 10^9+25)^2}{481}\in E_2(10^9)\end{cases}。$$

● 當 $r=10^{36}$ 時：由 $(m,n)=(53,20)\Rightarrow(a,b)=\left(\dfrac{2809\cdot10^{36}-1060}{2409},\dfrac{1060\cdot10^{36}+2809}{2409}\right)$，可有

$$\begin{cases} 1\underline{16604400}\,\underline{16604400}\,\underline{16604400}\,\underline{16604400}\,1660\,\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,4399 \\ =1\underline{16604400}\,\underline{16604400}\,\underline{16604400}\,\underline{16604400}\,1660^2-\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,4399^2 \\ =\dfrac{2809(10^{72}-1)}{2409}\in E_2(10^{36}) \\ \underline{16604400}\,\underline{16604400}\,\underline{16604400}\,\underline{16604400}\,1660\,\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,4400 \\ =\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,\underline{\underline{44001660}}\,4400^2-\underline{16604400}\,\underline{16604400}\,\underline{16604400}\,\underline{16604400}\,1660^2 \\ =\dfrac{400(10^{72}-1)}{2409}\in E_2(10^{36}) \end{cases}。$$

● 當 $r=10^{36}$ 時：由 $(u,v)=(86,13)\Rightarrow(a,b)=\left(\dfrac{7396\cdot10^{36}+1118}{7227},\dfrac{1118\cdot10^{36}+169}{7227}\right)$，可有

$$\begin{cases} 1\underline{02338453}\,\underline{02338453}\,\underline{02338453}\,\underline{02338453}\,0234\,\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,1547 \\ =1\underline{02338453}\,\underline{02338453}\,\underline{02338453}\,\underline{02338453}\,0234^2-\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,1547^2 \\ =\dfrac{(86\cdot10^{36}+13)^2}{7227}\in E_2(10^{36}) \\ \underline{02338453}\,\underline{02338453}\,\underline{02338453}\,\underline{02338453}\,0234\,\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,1548 \\ =\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,\underline{\underline{15469766}}\,1548^2-\underline{02338453}\,\underline{02338453}\,\underline{02338453}\,\underline{02338453}\,0234^2 \\ =\dfrac{(13\cdot10^{36}+86)^2}{7227}\in E_2(10^{36}) \end{cases}。$$

（六）從兩平方和再現數到兩平方差再現數之結果、差異之處與未來發展

（1）探究【4】【5】的內容及瞭解與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解【2】，結果一樣都是由兩段數字串毗鄰並列。

（2）作質因數分解是為了能易於將 r^2-1 寫成兩組平方差之乘積，且所驗證的數式必須是由該兩數字串順（逆）序毗鄰並列而得。分析數式 $S\,\mathrm{R}-E_2(r)$ 與 r^2-1 的等價簡化，研究推廣兩平方差再現數 $E_2(r)$ 存在的條件及與其自我相似之數列與數式。

$E_2(r)$ 與 r^2-1 的等價簡化結果及其相關數值之表列（$r=10^n$） 兩平方差再現數之等價數值的分析結果（$n=8,9$）（附錄一）			
$r^2-1=h^2-k^2$		$(a,b)=(mu,mv)$	$(a',b')=(nv,nu)$
h	k	(p,q)	(m,n,u,v)
$10^2-1=3^2\cdot11$			
18	15	$(33,3)$	$(\boxed{\underline{\underline{7}}},\boxed{\underline{\underline{4}}},\underline{\underline{2}},\underline{1})$
$10^4-1=3^2\cdot11\cdot101$			
168	135	$(3333,3)$	$(\boxed{\underline{\underline{67}}},\boxed{\underline{\underline{34}}},\underline{\underline{2}},\underline{1})$
$10^6-1=3^3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37$			
1020	201	$(99,10101)$	$(\boxed{10},\boxed{1},101,10)$
1032	255	$(15873,63)$	$(127,16,8,1)$
1068	375	$(117,8547)$	$(11,2,94,17)$

1280	799	(2849,351)	(57,20,20,7)
1380	951	(21,47619)	(5,2,238,95)
1432	1025	(3367,297)	(64,27,19,8)
1600	1249	(2079,481)	(52,25,25,12)
1668	1335	(333333,3)	($\boxed{667}$,$\boxed{334}$,$\underline{2}$,$\underline{1}$)
1832	1535	(2457,407)	(59,32,24,13)
1968	1695	(33,30303)	($\underline{\underline{7}}$,$\underline{\underline{4}}$,212,121)
2060	1801	(5291,189)	(90,53,17,10)
$10^8-1=3^2\cdot 11\cdot 73\cdot 101\cdot 137$			
10468	3095	(13837,7227)	(119,18,86,13)
10532	3305	(13563,7373)	(118,19,87,14)
13320	8799	(2409,41511)	(53,20,220,83)
16668	13335	(33333333,3)	($\boxed{6667}$,$\boxed{3334}$,$\underline{2}$,$\underline{1}$)
21960	19551	(4521,22119)	(85,52,188,115)
$10^{10}-1=3^2\cdot 11\cdot 41\cdot 271\cdot 9091$			
102020	20201	(99,101010101)	($\boxed{10}$,$\boxed{1}$,10101,1010)
166668	133335	(3333333333,3)	($\boxed{66667}$,$\boxed{33334}$,$\underline{2}$,$\underline{1}$)
196968	169695	(33,303030303)	($\underline{\underline{7}}$,$\underline{\underline{4}}$,21212,12121)
199780	172951	(22172949,451)	(5765,3326,26,15)
$10^{12}-1=3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37\cdot 101\cdot 9901$			
1037032	274655	(7777,128584287)	(89,12,11444,1543)
1061068	354775	(69237693,144443)	(8447,1454,122,21)
1113468	489705	(6363,157158573)	(82,19,12887,2986)
1202840	668449	(52386191,19089)	(7596,2305,145,44)
1362180	924951	(42861429,23331)	(7115,2786,166,65)
1477160	1087199	(38227761,26159)	(6881,3020,180,79)
1487940	1101801	(3939,253871541)	(70,31,17771,7870)
1536468	1166505	(36267363,27573)	(6782,3119,187,86)
1548032	1181695	(3737,267594327)	(69,32,18464,8563)
1640332	1300265	(33336667,29997)	(6634,3267,199,98)
1666668	1333335	(333333333333,3)	($\boxed{666667}$,$\boxed{333334}$,$\underline{2}$,$\underline{1}$)
1693668	1366935	(3333,300030003)	($\underline{\underline{67}}$,$\underline{\underline{34}}$,20102,10201)
1800168	1496865	(29732703,33633)	(6452,3449,217,116)
1881500	1593751	(28207949,35451)	(6375,3526,226,125)

2004032	1736705	(2727,366703337)	(64,37,23469,13568)
2138932	1890775	(24326757,41107)	(6179,3722,254,153)
$10^{14}-1=3^2\cdot 11\cdot 239\cdot 4649\cdot 909091$			
10202020	2020201	(99,1010101010101)	$(\boxed{10},\boxed{1},1010101,101010)$
16666668	13333335	(33333333333333,3)	$(\boxed{6666667},\boxed{3333334},\underline{2},\underline{1})$
19696968	16969695	(33,3030303030303)	$(\underline{\underline{7}},\underline{\underline{4}},2121212,1212121)$
$10^{16}-1=3^2\cdot 11\cdot 17\cdot 73\cdot 101\cdot 137\cdot 5882353$			
⋮	⋮	⋮	⋮
$10^{18}-1=3^4\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 37\cdot 52579\cdot 333667$			
⋮	⋮	⋮	⋮
$10^{20}-1=3^2\cdot 11\cdot 41\cdot 101\cdot 271\cdot 3541\cdot 9091\cdot 27961$			
⋮	⋮	⋮	⋮

與差數有關且極具對稱之美的兩平方差再現數（$n=8,9$）（附錄二）					
$E_2(r)=\left\{\boxed{a}\,\&\,\boxed{b}\;\middle\|\;\left\|a^2-b^2\right\|=a\cdot r+b\right\},r=10^n\Rightarrow N_2-N_2'=r^2-1$					
$N_2=\boxed{a}\,\&\,\boxed{b}=a^2-b^2=a\cdot r+b\in E_2(r)$			$N_2'=\boxed{a'}\,\&\,\boxed{b'}=b'^2-a'^2=a'\cdot r+b'\in E_2(r)$		
$N_2\in E_2(r)$	a	b	b'	a'	$N_2'\in E_2(r)$
$10^2-1=3^2\cdot 11$					
147	14	7	8	4	48
$10^4-1=3^2\cdot 11\cdot 101$					
13467	134	67	68	34	3468
$10^6-1=3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$					
1010100	1010	100	101	010	010101
1016127	1016	127	128	016	016128
1034187	1034	187	188	034	034188
1140399	1140	399	400	140	140400
1190475	1190	475	476	190	190476
1216512	1216	512	513	216	216513
1300624	1300	624	625	300	300625
1334667	1334	667	668	334	334668
1416767	1416	767	768	416	416768
1484847	1484	847	848	484	484848
1530900	1530	900	901	530	530901
$10^8-1=3^2\cdot 11\cdot 73\cdot 101\cdot 137$					
102341547	10234	1547	1548	0234	02341548
102661652	10266	1652	1653	0266	02661653
116604399	11660	4399	4400	1660	16604400
133346667	13334	6667	6668	3334	33346668

159809775	15980	9775	9776	5980	59809776
$10^{10}-1=3^2\cdot 11\cdot 41\cdot 271\cdot 9091$					
10101010100	101010	10100	10101	01010	0101010101
13333466667	133334	66667	66668	33334	3333466668
14848484847	148484	84847	84848	48484	4848484848
14989086475	149890	86475	86476	49890	4989086476
$10^{12}-1=3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37\cdot 101\cdot 9901$					
1018516137327	1018516	137327	137328	018516	018516137328
1030534177387	1030534	177387	177388	030534	030534177388
1056734244852	1056734	244852	244853	056734	056734244853
1101420334224	1101420	334224	334225	101420	101420334225
1181090462475	1181090	462475	462476	181090	181090462476
1238580543599	1238580	543599	543600	238580	238580543600
1243970550900	1243970	550900	550901	243970	243970550901
1268234583252	1268234	583252	583253	268234	268234583253
1274016590847	1274016	590847	590848	274016	274016590848
1320166650132	1320166	650132	650133	320166	320166650133
1333334666667	1333334	666667	666668	333334	333334666668
1346834683467	1346834	683467	683468	346834	346834683468
1400084748432	1400084	748432	748433	400084	400084748433
1440750796875	1440750	796875	796876	440750	440750796876
1502016868352	1502016	868352	868353	502016	502016868353
1569466945387	1569466	945387	945388	569466	569466945388
$10^{14}-1=3^2\cdot 11\cdot 239\cdot 4649\cdot 909091$					
101010101010100	10101010	1010100	1010101	0101010	01010101010101
133333346666667	13333334	6666667	6666668	3333334	33333346666668
148484848484847	14848484	8484847	8484848	4848484	48484848484848
$10^{16}-1=3^2\cdot 11\cdot 17\cdot 73\cdot 101\cdot 137\cdot 5882353$					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$10^{18}-1=3^4\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 37\cdot 52579\cdot 333667$					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$10^{20}-1=3^2\cdot 11\cdot 41\cdot 101\cdot 271\cdot 3541\cdot 9091\cdot 27961$					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

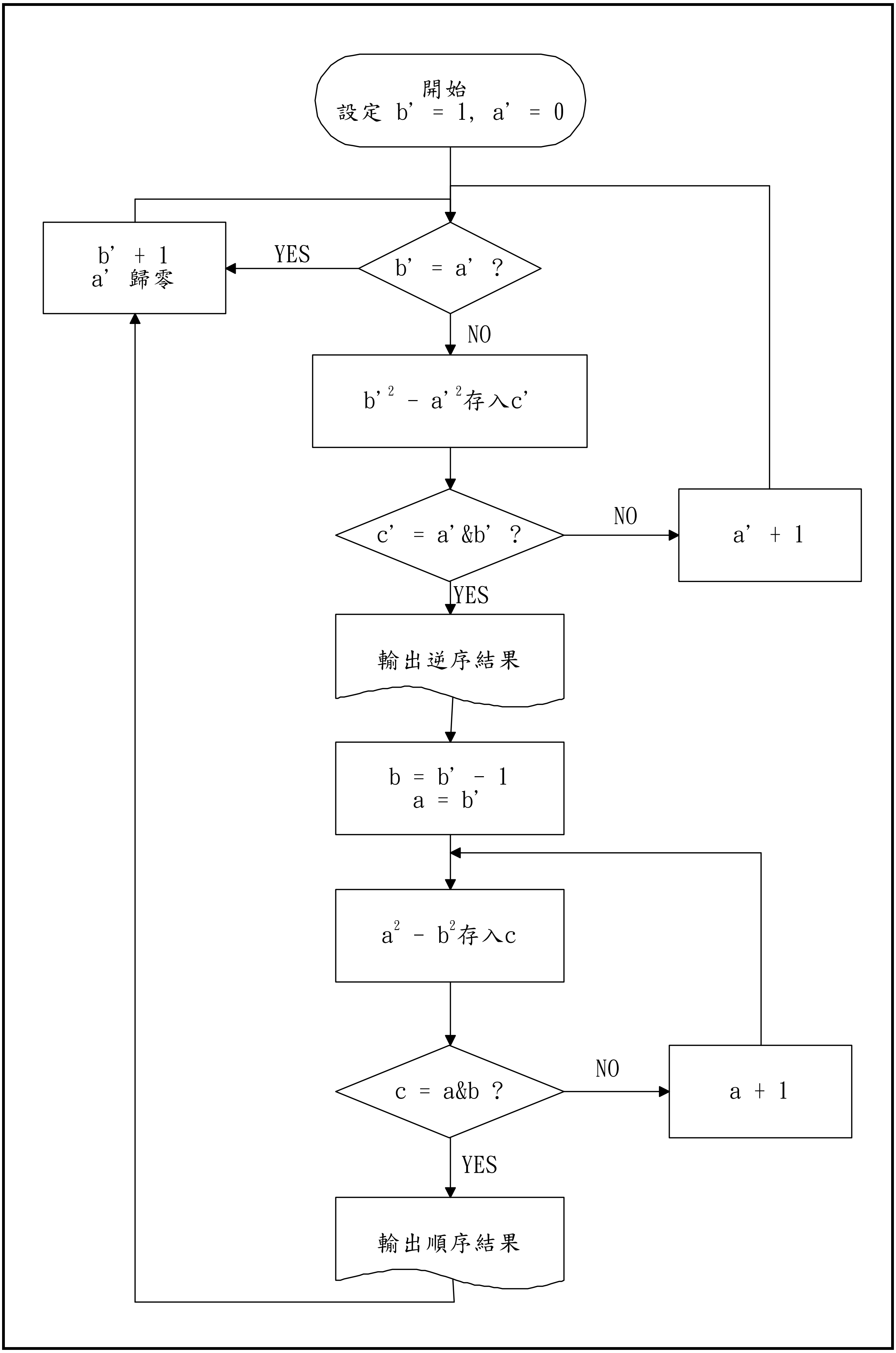
註：▲ $\begin{cases}\boxed{\underbrace{100\cdots00}_{n\text{個}0}}\ \&\ \boxed{\underbrace{00\cdots00}_{n\text{個}0}}=\underbrace{100\cdots0000\cdots00}_{2n\text{個}0}=10^{2n}=\boxed{\underbrace{100\cdots00}_{n\text{個}0}}^2-\boxed{\underbrace{00\cdots00}_{n\text{個}0}}^2\\ \boxed{\underbrace{00\cdots00}_{n\text{個}0}}\ \&\ \boxed{\underbrace{00\cdots001}_{n\text{個}0}}=\underbrace{00\cdots0000\cdots001}_{2n\text{個}0}=1=\boxed{\underbrace{00\cdots001}_{n\text{個}0}}^2-\boxed{\underbrace{00\cdots00}_{n\text{個}0}}^2\end{cases}$。

▲$1\in E_2(10^n)$與$10^{2n}\in E_2(10^n)$，在此1及10^{2n}皆不予採計。

▲以 C++程式語言進行編譯及執行搜尋兩平方差再現數。

▲輸出之結果是專為兩平方差再現數所設計的獨立程式，期能擬定更好的演算法則。

（七）以 C++程式語言編譯搜尋兩平方差再現數之流程圖（附錄三）



肆、研究結果

（一）$E_2(r)$ 的計數結構及規律：$\begin{cases} a^2-10^n\cdot a-(b^2+b)=0 \\ a'^2+10^n\cdot a'-(b'^2-b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,b)\leftrightarrow(a-10^n,b+1) \\ (a',b')\leftrightarrow(a'+10^n,b'-1) \end{cases}$

（1）依序可令

$$\begin{cases} r=10^{\{[\log b]+1\}} \\ r=10^{\{[\log b']+1\}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1=25\cdot 10^{2[\log b]}+b^2+b \\ \delta_2=25\cdot 10^{2[\log b']}+b'^2-b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5\cdot 10^{[\log b]}+\sqrt{\delta_1} \\ a'=-5\cdot 10^{[\log b']}+\sqrt{\delta_2} \end{cases},$$

其中[ ]表高斯符號。

（2）兩平方差再現數之特性：兩半平方、毗鄰並列、互補對稱！

假若 $N_2=a\cdot 10^n+b\in E_2(10^n)$，則有 $N_2'=(a-10^n)\cdot 10^n+(b+1)\in E_2(10^n)$，且滿足

$$N_2-N_2'=10^{2n}-1\text{。}$$

（a）a 與 a' 之差：在既定的答案 b 與 b' 存在，對應的 a 與 a' 值是成對的，且 a 與 a' 之差的絕對值等於 10^n，意即 a 與 a' 的關係為 $a-a'=10^n$。

（b）b 與 b' 之差：在既定的答案 a 與 a' 存在，對應的 b 與 b' 值是成對的，且 b 與 b' 之差的絕對值為1，意即 b 與 b' 的關係為 $b'-b=1$。

（c）N_2 與 N_2' 屬於集合 $E_2(10^n)$ 中，則兩平方差再現數之計數結構如下：

◆對應的 a 與 a' 值是偶數，且 a 與 a' 值的個位數之數字所形成的集合為 $\{0,4,6\}$。

◆對應的 b 與 b' 值可為偶數或奇數，當 b 與 b' 值為偶數時，則 b 與 b' 值的個位數之數字所形成的集合分別是 $\{0,2,4\}$ 與 $\{0,6,8\}$；當 b 與 b' 值為奇數時，則 b 與 b' 值的個位數之數字所形成的集合分別是 $\{5,7,9\}$ 與 $\{1,3,5\}$。

◆ N_2 與 N_2' 的個位數之數字所形成的集合分別是 $\{0,2,4,5,7,9\}$ 與 $\{0,1,3,5,6,8\}$。

（二）PUZZLET 163（The Difference of Two Squares）及其迴響：逆序搜尋及順序搜尋之程式碼

```
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include <fstream>
using namespace std;

fstream outFile("bpap.txt", ios::out | ios::trunc );

int main(){
	long long int bp=2;
	while(1){
		int x = bp%10;
		if(x!=2 && x!=4 && x!=7 && x!=9){
			int digit = ceil(log10(bp));
			long long int del = 25*(pow(10,2*(digit-1)))+bp*bp-bp;
			double D1 = sqrt(del);
			long long int D2 = sqrt(del);
			long long int ap = -(5*(pow(10,digit-1))) + D2;
			int y = ap%10;
			if(y==0||y==4||y==6){
				if(!(D1-D2>0)){
					cout<< "b'="<<bp<<" a'="<<ap<<endl;
					outFile<<bp<<" "<<ap<<endl;
				}
			}
		}
		bp++;
```

```
	}
	system("pause");
	return 0;
	}
```

```
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include <fstream>
using namespace std;

fstream outFile("ba.txt", ios::out | ios::trunc );

int main(){
	long long int b=1;
	while(1){
		int x =b%10;
		if(x!=1 && x!=3 && x!=6 && x!=8){
			int digit = ceil(log10(b));
			long long int del = 25*(pow(10,2*(digit-1)))+b*b+b;
			double D1 = sqrt(del);
			long long int D2 = sqrt(del);
			long long int a = (5*(pow(10,digit-1))) + D2;
			int y = a%10;
			if(y==0 || y==4 || y==6){
				if(!(D1-D2>0)){
					cout<< "a="<<a<<" b="<<b<<endl;
					outFile<<a<<" "<<b<<endl;
				}
			}
		}
		b++;
	}
	system("pause");
	return 0;
	}
```

（三）兩平方差再現數的自然密度為零

（1）兩平方差再現數之密度規律是由18位自然數以內的全部兩平方差再現數表實際統計而得出，長度在18位以內全部計有130個，從已知的兩平方差再現數之表列可知：兩平方差再現數可以奇數，也可以是偶數，且總是成對出現的！意即對於數對(b,b')，總是有數對(a,a')組成成對且具互補的兩平方差再現數$(a\cdot 10^k+b)$和$(a'\cdot 10^k+b')$。兩平方差再現數表是以程式語言進行編譯及搜尋而得出的，進而擬定更好的演算法則。

$\log(10^k)$	2	3	4	5	6	7	8	9
e	1	2	3	7	15	28	31	37
$\frac{\log(e)}{\log(10^k)}$	0.000	0.100	0.119	0.169	0.196	0.206	0.186	0.174

$\log(10^k)$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
e	40	47	60	77	79	83	86	103	130
$\frac{\log(e)}{\log(10^k)}$	0.160	0.152	0.148	0.145	0.130	0.128	0.121	0.118	0.117

（2）兩平方差再現數所形成的集合之元素在自然數中的分佈是十分稀少，它們在大數中的密度更小，因為它們的密度是按「指數」規律減少的。根據兩平方差再現數表，設小於10^k的兩平方差再現數之個數為e個，則有

$$\frac{\log(e)}{\log(10^k)}<0.207\text{ 。}$$

（四）以數論闡釋關於$S\,\mathrm{R}-E_2(10^n)$的兩半平方之差（http://blog.plover.com/math/excellent.html）

（1）進一步說明兩平方差再現數產生的方法（結合矩形數之特性的演算法）：

$$\begin{cases} b(b+1)\Leftrightarrow 4b(b+1)+1=4a(a-10^n)+1=4\mathrm{E}(a)+1 \\ b'(b'-1)\Leftrightarrow 4b'(b'-1)+1=4a'(a'+10^n)+1=4\mathrm{G}(a')+1 \end{cases}$$

是否為完全平方數；將每個A與A'試算值分別計算出$4\mathrm{E}(A)+1$與$4\mathrm{G}(A')+1$，推得

$$\begin{cases} B+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4\mathrm{E}(A)+1} \\ B'-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4\mathrm{G}(A')+1} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} B>\sqrt{\mathrm{E}(A)}-\dfrac{1}{2} \\ B'>\sqrt{\mathrm{G}(A')}+\dfrac{1}{2} \end{cases}\text{；}$$

設B與B'分別是$E(A)$與$G(A')$的平方根；四捨五入至最接近的正整數，可得

$$\begin{cases} \mathrm{E}(A)=B^2+B \\ \mathrm{G}(A')=B'^2-B' \end{cases}\text{。}$$

（2）指出這兩個運算式中a與a'的個位數字為何？確定$4\mathrm{E}(a)+1$與$4\mathrm{G}(a')+1$是否為完全平方數，依定義表列$E_2(10^n)$及$S\,\mathrm{R}-E_2(10^n)$，其中a與a'的個位數字是$\{0,4,6\}$，而b與b'的個位數字分別是$\{0,2,4,5,7,9\}$與$\{0,1,3,5,6,8\}$。$10^{2n}-1$與$S\,\mathrm{R}-E_2(10^n)$的關聯性：$10^{2n}-1$的質因數分解是為能易於將其寫成兩組平方差之乘積，所驗證的數式結果必須是由該兩數字串順（逆）序毗鄰並列而得。

（五）闡釋$10^{2n}-1$與$S\,\mathrm{R}-E_2(10^n)$的關聯性及集合$E_2(10^n)$的整數分解式有多少

有許多的n值會使得$10^{2n}-1$有形如$4k\pm1$的質因數，且將其表示成兩正因數之乘積的概念是很重要的【7】，但仍然無法令人信服有趣的整數分解式為無限多個之說法！根據$10^{2n}-1$的正因數個數，則搜尋計值的次數至多為其正因數個數的一半，主要目的就是要探討兩平方差再現數存在的條件，深入研究相關的性質，推廣許多有趣且重要的定理。

（1）因為$10^{2n}-1$可表成兩正因數之乘積，且知其所有質因數都是奇數的形式，故可將它們寫成兩組合乎所求條件之兩平方差的表示式：$10^{2n}-1=(m^2-n^2)(u^2-v^2)$。且有

$$10^{2n}-1=(mu\pm nv)^2-(nu\pm mv)^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a,b)\\(a',b')\end{cases}\mapsto(N_2,N_2')=\left(\frac{(10^{2n}+h\cdot10^n+k-1)}{2},\frac{(-10^{2n}+h\cdot10^n+k+1)}{2}\right)\text{，}$$

而所滿足的數對僅需再驗證其等式結果是否仍可由兩段數字串毗鄰並列而得！

（2）可令

$$F=\left\{(m,n,u,v)\;\middle|\;10^{2n}-1=(m^2-n^2)(u^2-v^2);nu-mv=1,mu-nv=10^n\text{。}\right\}\text{，}$$

其中$m>n\geq1$，滿足$u>v\geq1$，可檢驗每一組數字是否可等於其順（逆）序之兩部份數字串的平方差，即可推得合乎定義的整數分解式，若$E_2(10^n)$的元素共有$2|F|$個，則其整數分解式就可有$2|F|$個數式，故答案之對數完全是取決於演算$10^{2n}-1$為兩組平方差之乘積的方法數多寡！

伍、討論及其應用

（一）存在無限多個有趣的兩平方差再現數！

性質一：可表列與(m,n)或(u,v)相關的兩平方差再現數之數列。

n	(m,n)或(u,v)	$(a,b)=(mu,mv)$	$(a',b')=(nv,nu)$
$k+1$	$(u,v)=(2,1)$	$\dfrac{(2\cdot10^{k+1}+1)^2}{3}\in E_2(10^{k+1})$	$\dfrac{(10^{k+1}+2)^2}{3}\in E_2(10^{k+1})$
$2k+1$	$(m,n)=(7,4)$	$\dfrac{49(10^{4k+2}-1)}{33}\in E_2(10^{2k+1})$	$\dfrac{16(10^{4k+2}-1)}{33}\in E_2(10^{2k+1})$
$2k+1$	$(m,n)=(10,1)$	$\dfrac{100(10^{4k+2}-1)}{99}\in E_2(10^{2k+1})$	$\dfrac{(10^{4k+2}-1)}{99}\in E_2(10^{2k+1})$
$4k+2$	$(m,n)=(67,34)$	$\dfrac{4489(10^{8k+4}-1)}{3333}\in E_2(10^{4k+2})$	$\dfrac{1156(10^{8k+4}-1)}{3333}\in E_2(10^{4k+2})$
$6k+3$	$(u,v)=(8,1)$	$\dfrac{(8\cdot10^{6k+3}+1)^2}{63}\in E_2(10^{6k+3})$	$\dfrac{(10^{6k+3}+8)^2}{63}\in E_2(10^{6k+3})$
$6k+3$	$(m,n)=(127,16)$	$\dfrac{16129(10^{12k+6}-1)}{15873}\in E_2(10^{6k+3})$	$\dfrac{256(10^{12k+6}-1)}{15873}\in E_2(10^{6k+3})$

（二）存在無限多個極具對稱性之美的兩平方差再現數及其整數分解式！

性質二：與有序的特定有理數對相關聯的$E_2(10^n)$及$S\mathrm{R}-E_2(10^n)$。

（1）設$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，則與數對$(N_2,N_2')=(147,48)$相關的$S\mathrm{R}-E_2(10^{k+1})$數式為

$$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{(2\cdot10^{k+1}+1)^2}{3}=\left(\dfrac{4\cdot10^{k+1}+2}{3}\right)^2-\left(\dfrac{2\cdot10^{k+1}+1}{3}\right)^2\\[2ex]\dfrac{(10^{k+1}+2)^2}{3}=\left(\dfrac{2\cdot10^{k+1}+4}{3}\right)^2-\left(\dfrac{10^{k+1}+2}{3}\right)^2\end{cases}。$$

$$\begin{array}{ccc}147 & & 48\\13467 & & 3468\\1334667 & \Leftrightarrow & 334668\\133346667 & & 33346668\\\vdots & & \vdots\end{array}$$

（2）設$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，則與數對$(N_2,N_2')=(147,48)$相關的$S\mathrm{R}-E_2(10^{2k+1})$數式為

$$\left(\frac{16}{33},\frac{28}{33}\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{49(10^{4k+2}-1)}{33}=\left(\dfrac{49\cdot10^{2k+1}-28}{33}\right)^2-\left(\dfrac{28\cdot10^{2k+1}-49}{33}\right)^2\\[2ex]\dfrac{16(10^{4k+2}-1)}{33}=\left(\dfrac{28\cdot10^{2k+1}-16}{33}\right)^2-\left(\dfrac{16\cdot10^{2k+1}-28}{33}\right)^2\end{cases}。$$

$$\begin{array}{ccc}147 & & 48\\1484847 & & 484848\\14848484847 & \Leftrightarrow & 4848484848\\148484848484847 & & 48484848484848\\\vdots & & \vdots\end{array}$$

（3）設$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，則與數對$(N_2,N_2')=(100,01)$相關的$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{2k+1})$數式為

$$\left(\frac{1}{99},\frac{10}{99}\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{100(10^{4k+2}-1)}{99}=\left(\dfrac{100\cdot10^{2k+1}-10}{99}\right)^2-\left(\dfrac{10\cdot10^{2k+1}-100}{99}\right)^2\\[2ex]\dfrac{(10^{4k+2}-1)}{99}=\left(\dfrac{10\cdot10^{2k+1}-1}{99}\right)^2-\left(\dfrac{10^{2k+1}-10}{99}\right)^2\end{cases}。$$

$$\begin{array}{ccc}1010100 & & 010101\\ 10101010100 & \Leftrightarrow & 0101010101\\ 101010101010100 & & 01010101010101\\ \vdots & & \vdots\end{array}$$

（4）設$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，則與數對$(N_2,N_2')=(13467,3468)$相關的$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{4k+2})$數式為

$$\left(\frac{1156}{3333},\frac{2278}{3333}\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{4489(10^{8k+4}-1)}{3333}=\left(\dfrac{4489\cdot10^{4k+2}-2278}{3333}\right)^2-\left(\dfrac{2278\cdot10^{4k+2}-4489}{3333}\right)^2\\[2ex]\dfrac{1156(10^{8k+4}-1)}{3333}=\left(\dfrac{2278\cdot10^{4k+2}-1156}{3333}\right)^2-\left(\dfrac{1156\cdot10^{4k+2}-2278}{3333}\right)^2\end{cases}。$$

$$\begin{array}{ccc}13467 & & 3468\\ 1346834683467 & \Leftrightarrow & 346834683468\\ 13468346834683467 & & 34683468346834683468\\ \vdots & & \vdots\end{array}$$

（三）較為平凡的兩平方差再現數及與其自我相似的有意思數列！

性質三：$S\,\mathrm{R}-E_2(10^3)$與有理數$\dfrac{1}{63}$的關聯性－$\mathrm{Len}\left(\dfrac{1}{63}\right)=6$

反映出與特定有理數化成純循環小數的關聯性，有無限多個有趣的整數分解式！

設$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，從集合$E_2(10^3)$中的元素推廣(N_2,N_2')，則$(1016127,016128)$結合有序的有理數對$\left(\dfrac{1}{63},\dfrac{8}{63}\right)$，可推得與其相關的$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{6k+3})$數式為

$$\left(\frac{1}{63},\frac{8}{63}\right)=\left(0.\overline{015873},0.\overline{126984}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1016127=\dfrac{(8\cdot10^3+1)^2}{63}=1016^2-127^2\in E_2(10^3)\\[2ex]016128=\dfrac{(10^3+8)^2}{63}=128^2-016^2\in E_2(10^3)\end{cases}。$$

$$\Rightarrow\begin{cases}N_2=\dfrac{(8\cdot10^{6k+3}+1)^2}{63}=\left(\dfrac{64\cdot10^{6k+3}+8}{63}\right)^2-\left(\dfrac{8\cdot10^{6k+3}+1}{63}\right)^2\in E_2(10^{6k+3})\\[2ex]N_2'=\dfrac{(10^{6k+3}+8)^2}{63}=\left(\dfrac{8\cdot10^{6k+3}+64}{63}\right)^2-\left(\dfrac{10^{6k+3}+8}{63}\right)^2\in E_2(10^{6k+3})\end{cases}$$

$N_2\in E_2(r)$	a	b	b'	a'	$N_2'\in E_2(r)$
1016127	1016	127	128	016	016128
1015873016126984127	1015873016	126984127	126984128	015873016	015873016126984128
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

（四）可連結式的兩平方差再現數及與其自我相似的有意思數列！

性質四：$S\,\mathrm{R}-E_2(10^3)$ 與有理數 $\dfrac{256}{15873}$ 的關聯性－ $\mathrm{Len}\left(\dfrac{256}{15873}\right)=6$

反映出與特定有理數化成純循環小數的關聯性，有無限多個有趣的整數分解式！

設 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，從集合 $E_2(10^3)$ 中的元素推廣 (N_2,N_2')，則 $(\underline{1016}\underline{\underline{127}},\underline{016}\underline{\underline{128}})$ 結合有序的有理數對 $\left(\dfrac{256}{15873},\dfrac{2032}{15873}\right)$，可推得與其相關的 $S\,\mathrm{R}-E_2(10^{6k+3})$ 數式為

$$\left(\frac{256}{15873},\frac{2032}{15873}\right)=\left(0.\overline{016128},0.\overline{128016}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\underline{1016}\underline{\underline{127}}=\dfrac{16129(10^6-1)}{15873}=1016^2-127^2\in E_2(10^3)\\ \underline{016}\underline{\underline{128}}=\dfrac{256(10^{12k+6}-1)}{15873}=128^2-016^2\in E_2(10^3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}N_2=\dfrac{16129(10^{12k+6}-1)}{15873}=\left(\dfrac{16129\cdot10^{6k+3}-2032}{15873}\right)^2-\left(\dfrac{2032\cdot10^{6k+3}-16129}{15873}\right)^2\in E_2(10^{6k+3})\\ N_2'=\dfrac{256(10^{12k+6}-1)}{15873}=\left(\dfrac{2032\cdot10^{6k+3}-256}{15873}\right)^2-\left(\dfrac{256\cdot10^{6k+3}-2032}{15873}\right)^2\in E_2(10^{6k+3})\end{cases}$$

。

$N_2\in E_2(r)$	a	b	b'	a'	$N_2'\in E_2(r)$
1016127	1016	127	128	016	016128
1016128016128016127	1016128016	128016127	128016128	016128016	016128016128016128
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

（五）論證有意思的兩平方差再現數及與其自我相似的數列與特定有序的有理數對化成純循環小數有著密切的關聯性（I）。

與其自我相似的兩平方差再現數與特定有序的有理數對化成純循環小數之關聯性（I）		
(m,n,u,v)	$\left(\frac{v^2}{q},\frac{uv}{q}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{\boxed{A}}\\0.\overline{\boxed{B}}\end{pmatrix}$
$\left(\frac{2\cdot 10^{k+1}+1}{3},\frac{10^{k+1}+2}{3},\underline{2},\underline{1}\right)$	$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{3}\\0.\overline{6}\end{pmatrix}$
$(\underline{14}\underline{7},\underline{4}\underline{8})\to(\underline{134}\underline{67},\underline{34}\underline{68})\to(\underline{1334}\underline{667},\underline{334}\underline{668})\to(\underline{13334}\underline{6667},\underline{3334}\underline{6668})$		
$\left(\frac{8\cdot 10^{6k+3}+1}{63},\frac{10^{6k+3}+8}{63},\underline{8},\underline{1}\right)$	$\left(\frac{1}{63},\frac{8}{63}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{015873}\\0.\overline{126984}\end{pmatrix}$
$(\underline{1016}\underline{127},\underline{016}\underline{128})\to(\underline{1015873016}\underline{126984127},\underline{015873016}\underline{126984128})$		
$\left(\frac{17\cdot 10^{6k+3}+10}{189},\frac{10\cdot 10^{6k+3}+17}{189},\underline{17},\underline{10}\right)$	$\left(\frac{100}{189},\frac{170}{189}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{529100}\\0.\overline{899470}\end{pmatrix}$
$(\underline{1530}\underline{900},\underline{530}\underline{901})\to(\underline{1529100530}\underline{899470900},\underline{529100530}\underline{899470901})$		
$\left(\frac{19\cdot 10^{6k+3}+8}{297},\frac{8\cdot 10^{6k+3}+19}{297},\underline{19},\underline{8}\right)$	$\left(\frac{64}{297},\frac{152}{297}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{215488}\\0.\overline{511784}\end{pmatrix}$
$(\underline{1216}\underline{512},\underline{513}\underline{216})\to(\underline{1215488216}\underline{511784512},\underline{215488513}\underline{511784216})$		
$\left(\frac{20\cdot 10^{6k+3}+7}{351},\frac{7\cdot 10^{6k+3}+20}{351},\underline{20},\underline{7}\right)$	$\left(\frac{49}{351},\frac{140}{351}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{139601}\\0.\overline{398860}\end{pmatrix}$
$(\underline{1140}\underline{399},\underline{140}\underline{400})\to(\underline{1139601140}\underline{398860399},\underline{139601140}\underline{398860400})$		
$\left(\frac{24\cdot 10^{6k+3}+13}{407},\frac{13\cdot 10^{6k+3}+24}{407},\underline{24},\underline{13}\right)$	$\left(\frac{169}{407},\frac{312}{407}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{415233}\\0.\overline{766584}\end{pmatrix}$
$(\underline{1416}\underline{767},\underline{416}\underline{768})\to(\underline{1415233416}\underline{766584767},\underline{415233416}\underline{766584768})$		
$\left(\frac{25\cdot 10^{6k+3}+12}{481},\frac{12\cdot 10^{6k+3}+25}{481},\underline{25},\underline{12}\right)$	$\left(\frac{144}{481},\frac{300}{481}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{299376}\\0.\overline{623700}\end{pmatrix}$
$(\underline{1300}\underline{624},\underline{300}\underline{625})\to(\underline{1299376300}\underline{623700624},\underline{299376300}\underline{623700625})$		
$\left(\frac{86\cdot 10^{8k+4}+13}{7227},\frac{13\cdot 10^{8k+4}+86}{7227},\underline{86},\underline{13}\right)$	$\left(\frac{169}{7227},\frac{1118}{7227}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{02338453}\\0.\overline{15469766}\end{pmatrix}$
$(\underline{10234}\underline{1547},\underline{0234}\underline{1548})\to(\underline{1023384530234}\underline{154697661547},\underline{023384530234}\underline{154697661548})$		
$\left(\frac{87\cdot 10^{8k+4}+14}{7373},\frac{14\cdot 10^{8k+4}+87}{7373},\underline{87},\underline{14}\right)$	$\left(\frac{196}{7373},\frac{1218}{7373}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{02658348}\\0.\overline{16519734}\end{pmatrix}$
$(\underline{10266}\underline{1652},\underline{0266}\underline{1653})\to(\underline{1026583480266}\underline{165197341652},\underline{026583480266}\underline{165197341653})$		
$\left(\frac{220\cdot 10^{8k+4}+83}{41511},\frac{83\cdot 10^{8k+4}+220}{41511},\underline{220},\underline{83}\right)$	$\left(\frac{6889}{41511},\frac{18260}{41511}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{16595601}\\0.\overline{43988340}\end{pmatrix}$
$(\underline{11660}\underline{4399},\underline{1660}\underline{4400})\to(\underline{1165956011660}\underline{439883404399},\underline{165956011660}\underline{439883404400})$		

定理一：較為平凡的兩平方差再現數及與其自我相似的數列與有序的有理數對的關聯性。

設定與代表數（基本解）相關聯的數對(u,v)，且代表數滿足方程：

$$(nu)^2-(nv)^2=(nv)\cdot 10^t+(nu)=\boxed{(nv)}\&\boxed{(nu)}\ ,$$

其中$(m,n)=\left(\dfrac{u\cdot 10^t+v}{q},\dfrac{v\cdot 10^t+u}{q}\right)$為有序正整數序對。

（1）結合特定有序的有理數對

$$\left(\frac{v^2}{q},\frac{uv}{q}\right)=\left(0.\overline{\boxed{\mathrm{A}}},0.\overline{\boxed{\mathrm{B}}}\right)\ ,$$

其中$\mathrm{Len}\left(\dfrac{v^2}{q}\right)=\mathrm{Len}\left(\dfrac{uv}{q}\right)=2t$。設$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，則

$$\left\{\begin{aligned}
N_2' &=\left\{\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{B}}\cdots\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{B}}\boxed{(nu)}\right\}^2-\left\{\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{A}}\cdots\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{A}}\boxed{(nv)}\right\}^2\\
&=\left[\frac{(v\cdot 10^{(2k+1)t}+u)^2}{q}\right]\triangleq\boxed{\frac{v^2\cdot 10^{(2k+1)t}+uv}{q}}\&\boxed{\frac{uv\cdot 10^{(2k+1)t}+u^2}{q}}\\
&=\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{A}}\cdots\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{A}}\boxed{(nv)}\&\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{B}}\cdots\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{B}}\boxed{(nu)}\\
N_2 &=\left\{1\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{A}}\cdots\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{A}}\boxed{(nv)}\right\}^2-\left\{\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{B}}\cdots\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{B}}\boxed{(nu-1)}\right\}^2\\
&=\left[\frac{(u\cdot 10^{(2k+1)t}+v)^2}{q}\right]\triangleq\boxed{\frac{u^2\cdot 10^{(2k+1)t}+uv}{q}}\&\boxed{\frac{uv\cdot 10^{(2k+1)t}+v^2}{q}}\\
&=1\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{A}}\cdots\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{A}}\boxed{(nv)}\&\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{B}}\cdots\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{B}}\boxed{(nu-1)}
\end{aligned}\right.\ ,$$

故$N_2\in E_2(10^{(2k+1)t})$且$N_2'\in E_2(10^{(2k+1)t})$。

（2）承（1），根據$\left\{\begin{aligned}nv-1&=\dfrac{v^2\cdot 10^t+uv}{q}-1=\boxed{\mathrm{S}}\\ mv-1&=\dfrac{uv\cdot 10^t+v^2}{q}-1=\boxed{\mathrm{T}}\end{aligned}\right.\Rightarrow\left\{\begin{aligned}nv&=\boxed{\mathrm{S}+1}\\ mv&=\boxed{\mathrm{T}+1}\end{aligned}\right.$，可有

$$\left\{\begin{aligned}
0.\overline{\boxed{\mathrm{A}}}&=0.\overline{\boxed{\mathrm{S}}\&\boxed{10^t-(\mathrm{T}+1)}}=0.\overline{\boxed{(nv-1)}\&\boxed{(10^t-mv)}}\\
0.\overline{\boxed{\mathrm{B}}}&=0.\overline{\boxed{\mathrm{T}}\&\boxed{10^t-(\mathrm{S}+1)}}=0.\overline{\boxed{(mv-1)}\&\boxed{(10^t-nv)}}
\end{aligned}\right.\ ,$$

且$\boxed{\mathrm{S}}$及$\boxed{\mathrm{T}}$的長度皆為t位。

第一類$E_2(10^n)$：較為平凡的兩平方差再現數，依序分別取$\boxed{\mathrm{A}}$與$\boxed{\mathrm{B}}$為(N_2',N_2)之k段組合數字串，則(N_2',N_2)與特定有序的有理數對化成純循環小數的數字串有著某種的關聯性，其結果仍可由兩段數字串逆（順）序毗鄰並列而得，且有$N_2-N_2'=10^{(4k+2)t}-1$。（附錄四）

（六）論證有意思的兩平方差再現數及與其自我相似的數列與特定有序的有理數對化成純循環小數有著密切且巧妙的關聯性（II）。

與其自我相似的兩平方差再現數與特定有序的有理數對化成純循環小數之關聯性（II）		
(m,n,u,v)	$\left(\frac{n^2}{p},\frac{mn}{p}\right)$	$\left(\begin{matrix}0.\overline{C}\\0.\overline{D}\end{matrix}\right)$
$\left(7,4,\frac{7\cdot 10^{2k+1}-4}{33},\frac{4\cdot 10^{2k+1}-7}{33}\right)$	$\left(\frac{16}{33},\frac{28}{33}\right)$	$\left(\begin{matrix}0.\overline{48}\\0.\overline{84}\end{matrix}\right)$
$(147,48)\to(1484847,484848)\to(14848484847,4848484848)$		
$\left(10,1,\frac{10\cdot 10^{2k+1}-1}{99},\frac{10^{2k+1}-10}{99}\right)$	$\left(\frac{1}{99},\frac{10}{99}\right)$	$\left(\begin{matrix}0.\overline{01}\\0.\overline{10}\end{matrix}\right)$
$(100,01)\to(1010100,010101)\to(10101010100,0101010101)$		
$\left(127,16,\frac{127\cdot 10^{6k+3}-16}{15873},\frac{16\cdot 10^{6k+3}-127}{15873}\right)$	$\left(\frac{256}{15873},\frac{2032}{15873}\right)$	$\left(\begin{matrix}0.\overline{016128}\\0.\overline{128016}\end{matrix}\right)$
$(1016127,016128)\to(1016128016128016127,016128016128016128)$		
$\left(57,20,\frac{57\cdot 10^{6k+3}-20}{2849},\frac{20\cdot 10^{6k+3}-57}{2849}\right)$	$\left(\frac{400}{2849},\frac{1140}{2849}\right)$	$\left(\begin{matrix}0.\overline{140400}\\0.\overline{400140}\end{matrix}\right)$
$(1140399,140400)\to(1140400140400140399,140400140400140400)$		
$\left(5,2,\frac{5\cdot 10^{6k+3}-2}{21},\frac{2\cdot 10^{6k+3}-5}{21}\right)$	$\left(\frac{4}{21},\frac{10}{21}\right)$	$\left(\begin{matrix}0.\overline{190476}\\0.\overline{476190}\end{matrix}\right)$
$(1190475,190476)\to(1190476190476190475,190476190476190476)$		
$\left(11,2,\frac{11\cdot 10^{6k+3}-2}{117},\frac{2\cdot 10^{6k+3}-11}{117}\right)$	$\left(\frac{4}{117},\frac{22}{117}\right)$	$\left(\begin{matrix}0.\overline{034188}\\0.\overline{188034}\end{matrix}\right)$
$(1034187,034188)\to(1034188034188034187,034188034188034188)$		
$\left(53,20,\frac{53\cdot 10^{8k+4}-20}{2409},\frac{20\cdot 10^{8k+4}-53}{2409}\right)$	$\left(\frac{400}{2409},\frac{1060}{2409}\right)$	$\left(\begin{matrix}0.\overline{16604400}\\0.\overline{44001660}\end{matrix}\right)$
$(116604399,16604400)\to(1166044001660440016604399,166044001660440016604400)$		
$\left(85,52,\frac{85\cdot 10^{8k+4}-52}{4521},\frac{52\cdot 10^{8k+4}-85}{4521}\right)$	$\left(\frac{2704}{4521},\frac{4420}{4521}\right)$	$\left(\begin{matrix}0.\overline{59809776}\\0.\overline{97765980}\end{matrix}\right)$
$(159809775,59809776)\to(1598097765980977659809775,598097765980977659809776)$		
$\left(119,18,\frac{119\cdot 10^{8k+4}-18}{13837},\frac{18\cdot 10^{8k+4}-119}{13837}\right)$	$\left(\frac{324}{13837},\frac{2142}{13837}\right)$	$\left(\begin{matrix}0.\overline{02341548}\\0.\overline{15480234}\end{matrix}\right)$
$(102341547,02341548)\to(1023415480234154802341547,023415480234154802341548)$		
$\left(118,19,\frac{118\cdot 10^{8k+4}-19}{13563},\frac{19\cdot 10^{8k+4}-118}{13563}\right)$	$\left(\frac{361}{13563},\frac{2242}{13563}\right)$	$\left(\begin{matrix}0.\overline{02661653}\\0.\overline{16530266}\end{matrix}\right)$
$(102661652,02661653)\to(1026616530266165302669775,026616530266165302661653)$		

定理二：可連結式的兩平方差再現數及與其自我相似的數列與有序的有理數對的關聯性。

設定與代表數（基本解）相關聯的數對(m,n)，且代表數滿足方程：

$$\begin{cases}(mu)^2-(mv)^2=(mu)\cdot 10^t+(mv)=\boxed{(mu)}\&\boxed{(mv)}\\ (nu)^2-(nv)^2=(nv)\cdot 10^t+(nu)=\boxed{(nv)}\&\boxed{(nu)}\end{cases},$$

其中$(u,v)=\left(\dfrac{m\cdot 10^t-n}{p},\dfrac{n\cdot 10^t-m}{p}\right)$為有序正整數序對。

（1）結合特定有序的有理數對

$$\left(\frac{n^2}{p},\frac{mn}{p}\right)=\left(0.\overline{\boxed{\mathrm{C}}},0.\overline{\boxed{\mathrm{D}}}\right),$$

其中$\operatorname{Len}\left(\dfrac{n^2}{p}\right)=\operatorname{Len}\left(\dfrac{mn}{p}\right)=2t$。設$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，則

$$\begin{cases}N_2=\left\{1\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{C}}\cdots\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{C}}\boxed{(nv)}\right\}^2-\left\{\boxed{\mathrm{D}}\boxed{\mathrm{D}}\cdots\boxed{\mathrm{D}}\boxed{\mathrm{D}}\boxed{(mv)}\right\}^2\\ \quad=\left[\dfrac{m^2(10^{(4k+2)t}-1)}{p}\right]\triangleq\boxed{\dfrac{m^2\cdot 10^{(2k+1)t}-mn}{p}}\&\boxed{\dfrac{mn\cdot 10^{(2k+1)t}-m^2}{p}}\\ \quad=1\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{C}}\cdots\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{C}}\boxed{(nv)}\ \&\boxed{\mathrm{D}}\boxed{\mathrm{D}}\cdots\boxed{\mathrm{D}}\boxed{\mathrm{D}}\boxed{(mv)}\\ N_2'=\left\{\boxed{\mathrm{D}}\boxed{\mathrm{D}}\cdots\boxed{\mathrm{D}}\boxed{\mathrm{D}}\boxed{(nu)}\right\}^2-\left\{\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{C}}\cdots\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{C}}\boxed{(nv)}\right\}^2\\ \quad=\left[\dfrac{n^2(10^{(4k+2)t}-1)}{p}\right]\triangleq\boxed{\dfrac{n^2\cdot 10^{(2k+1)t}-mn}{p}}\&\boxed{\dfrac{mn\cdot 10^{(2k+1)t}-n^2}{p}}\\ \quad=\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{C}}\cdots\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{C}}\boxed{(nv)}\&\boxed{\mathrm{D}}\boxed{\mathrm{D}}\cdots\boxed{\mathrm{D}}\boxed{\mathrm{D}}\boxed{(nu)}\end{cases}。$$

故$N_2\in E_2(10^{(2k+1)t})$且$N_2'\in E_2(10^{(2k+1)t})$。

（2）承（1），根據$\begin{cases}nv=\dfrac{n^2\cdot 10^t-mn}{p}=\boxed{\mathrm{X}}\\ nu=\dfrac{mn\cdot 10^t-n^2}{p}=\boxed{\mathrm{Y}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0.\overline{\boxed{\mathrm{C}}}=0.\overline{\boxed{\mathrm{X}}\&\boxed{\mathrm{Y}}}=0.\overline{\boxed{(nv)}\&\boxed{(nu)}}\\ 0.\overline{\boxed{\mathrm{D}}}=0.\overline{\boxed{\mathrm{Y}}\&\boxed{\mathrm{X}}}=0.\overline{\boxed{(nu)}\&\boxed{(nv)}}\end{cases}$，

且$\boxed{\mathrm{X}}$及$\boxed{\mathrm{Y}}$的長度皆為t位。設$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，則有

$$\begin{cases}N_2'=\left\{\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\cdots\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\underset{\mathrm{Y}}{\boxed{(nu)}}\right\}^2-\left\{\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\cdots\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\underset{\mathrm{X}}{\boxed{(nv)}}\right\}^2\\ \quad=\underset{\mathrm{X}}{\boxed{(nv)}}\overbrace{\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\cdots\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}}^{2k\text{個}}\underset{\mathrm{Y}}{\boxed{(nu)}}\\ \quad=\overbrace{\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\cdots\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}}^{(2k+1)\text{個}}\\ N_2=\left\{1\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\cdots\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\underset{\mathrm{X}}{\boxed{(nv)}}\right\}^2-\left\{\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\cdots\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\underset{(\mathrm{Y}-1)}{\boxed{(mv)}}\right\}^2\\ \quad=\underset{10^{(2k+1)t}+\mathrm{X}}{\boxed{(mu)}}\overbrace{\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\cdots\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}\underset{\mathrm{Y\&X}}{\boxed{\mathrm{D}}}}^{2k\text{個}}\underset{(\mathrm{Y}-1)}{\boxed{(mv)}}\\ \quad=1\overbrace{\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\cdots\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}\underset{\mathrm{X\&Y}}{\boxed{\mathrm{C}}}}^{2k\text{個}}\underset{\mathrm{X}}{\boxed{(nv)}}\underset{(\mathrm{Y}-1)}{\boxed{(mv)}}\end{cases},$$

故$N_2\in E_2(10^{(2k+1)t})$且$N_2'\in E_2(10^{(2k+1)t})$。

第二類 $E_2(10^n)$：可連結式的兩平方差再現數，依序分別取 $\boxed{C}$ 與 $\boxed{D}$ 為 (N_2, N_2') 之 k 段組合數字串，則 (N_2, N_2') 與特定的有理數化成純循環小數的數字串有著可連結式的特性，其結果仍可由兩段數字串逆（順）序毗鄰並列而得，且有 $N_2 - N_2' = 10^{(4k+2)t} - 1$。（附錄四）

和同一特定有理數相關聯的兩平方差再現數及與其自我相似的數式（$r = 10^n$）	
$N_2' = \boxed{a}\,\&\,\boxed{b} = b'^2 - a'^2 = a' \cdot r + b'$	
$(N_2, N_2') \Leftrightarrow \dfrac{n^2}{p}$	(N_2', N_2)
(147, 48) $16/33 = 0.\overline{48}$	(484848, 1484847)
(13467, 3468) $1156/3333 = 0.\overline{3468}$	(346834683468, 1346834683467)
(1016127, 016128) $256/15873 = 0.\overline{016128}$	(016128016128016128, 1016128016128016127)
(1034187, 034188) $4/117 = 0.\overline{034188}$	(034188034188034188, 1034188034188034187)
(1140399, 140400) $400/2849 = 0.\overline{140400}$	(140400140400140400, 1140400140400140399)
(1190475, 190476) $4/21 = 0.\overline{190476}$	(190476190476190476, 1190476190476190475)
(1216512, 216513) $729/3367 = 0.\overline{216513}$	(216513216513216513, 1216513216513216512)
(1300624, 300625) $625/2079 = 0.\overline{300625}$	(300625300625300625, 1300625300625300624)
(1416767, 416768) $1024/2457 = 0.\overline{416768}$	(416768416768416768, 1416768416768416767)
(1484847, 484848) $16/33 = 0.\overline{484848}$	(484848484848484848, 1484848484848484847)
(1530900, 530901) $2809/5291 = 0.\overline{530901}$	(530901530901530901, 1530901530901530900)
(102341547, 02341548) $324/13837 = 0.\overline{02341548}$	(023415480234154802341548, 1023415480234154802341547)
(102661652, 02661653) $361/13563 = 0.\overline{02661653}$	(026616530266165302661653, 1026616530266165302669775)
⋮ ⋮	⋮ ⋮

定理一、定理二論證兩平方差再現數與特定有序的有理數對化成純循環小數有著密不可分的關聯性，分別取其循環節之數字串為其所對應的組合數字串，毗鄰並列的形式都是以成對的方式出現，揭示了與其自我相似的數列之兩半平方差的絕對值具有互補對稱性。更進一步，表列和同一特定有理數相關聯的兩平方差再現數之整數分解式！（附錄五）

（七）定理三：冪數生成原理等同於與特定有序的有理數對相關聯的定理一與定理二。

<table>
<tr><td colspan="2">冪數生成原理與差數相關的兩平方差再現數及與其自我相似的數式（$R=r^{(2k\pm1)}$）
延伸探討與特定有序的有理數對化成純循環小數有關的定理一及定理二（附錄六）</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boxed{a}\,\&\,\boxed{b}=\left|a^2-b^2\right|=a\cdot R+b\Rightarrow R^2-1=(r^{(2k\pm1)})^2-1=(m^2-n^2)(u^2-v^2)=p\cdot q$
$nu-mv=1,\ mu-nv=r^{(2k\pm1)}=R, m>n\geq1, u>v\geq0, k\in\mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(a,b)=(mu,mv)$ 為 $N_2=a\cdot r^{(2k\pm1)}+b=a^2-b^2$ 的正整數解 $\Rightarrow N_2\in E_2(r^{(2k\pm1)})$
$(a',b')=(nv,nu)$ 為 $N_2'=a'\cdot r^{(2k\pm1)}+b'=b'^2-a'^2$ 的正整數解 $\Rightarrow N_2'\in E_2(r^{(2k\pm1)})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(m,n,u,v)</td></tr>
<tr><td>$m^2-n^2\,\big|\,r^{(4k\pm2)}-1$
$\left(m,n,\dfrac{m\cdot r^{(2k\pm1)}-n}{p},\dfrac{n\cdot r^{(2k\pm1)}-m}{p}\right)$</td><td>$u^2-v^2\,\big|\,r^{(4k\pm2)}-1$
$\left(\dfrac{u\cdot r^{(2k\pm1)}+v}{q},\dfrac{v\cdot r^{(2k\pm1)}+u}{q},u,v\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(a,b)=(mu,mv)$</td></tr>
<tr><td>$\left(\dfrac{m^2\cdot r^{(2k\pm1)}-mn}{p},\dfrac{mn\cdot r^{(2k\pm1)}-m^2}{p}\right)$
$\left[\dfrac{m^2(R^2-1)}{p}\right]\in E_2(R)$</td><td>$\left(\dfrac{u^2\cdot r^{(2k\pm1)}+uv}{q},\dfrac{uv\cdot r^{(2k\pm1)}+v^2}{q}\right)$
$\left[\dfrac{(uR+v)^2}{q}\right]\in E_2(R)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(a',b')=(nv,nu)$</td></tr>
<tr><td>$\left(\dfrac{n^2\cdot r^{(2k\pm1)}-mn}{p},\dfrac{mn\cdot r^{(2k\pm1)}-n^2}{p}\right)$
$\left[\dfrac{n^2(R^2-1)}{p}\right]\in E_2(R)$</td><td>$\left(\dfrac{v^2\cdot r^{(2k\pm1)}+uv}{q},\dfrac{uv\cdot r^{(2k\pm1)}+u^2}{q}\right)$
$\left[\dfrac{(vR+u)^2}{q}\right]\in E_2(R)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(N_2-N_2'=r^{(4k\pm2)}-1=10^{2(2k\pm1)n}-1=R^2-1, R=r^{(2k\pm1)})$</td></tr>
</table>

（a）定理一與定理二之結論已說明了與特定有理數化成純循環小數的關聯性，其結果是相當於分別由 k 段循環節的數字串來順（逆）序連接而得。前（左）半部與後（右）半部的數字可依序接上 k 段循環節之組合數字串，推廣具互補對稱的兩平方差再現數及其整數分解式。設 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，則 N_2 與 N_2' 屬於 $E_2(r^{(2k\pm1)})$，因其結果與同一特定有理數化成純循環小數時之循環節的數字串有所關聯性，結合該循環節之數字串作為其所對應的組合數字串，可稱 $S\,\mathrm{R}-E_2(r)$ 與 $S\,\mathrm{R}-E_2(r^{(2k\pm1)})$ 是具有冪數生成之特性。

（b）方法之實現：冪數生成原理及與其自我相似的整數分解式

設 $k\in\mathbb{N}$，令 β 是形如 $2k\pm1$ 的奇數，根據冪數生成原理，可由

$$\begin{cases} r=10^n\Rightarrow R=r^{\beta}=r^{(2k\pm1)}=(10^n)^{(2k\pm1)} \\ S\,\mathrm{R}-E_2(10^n)\Rightarrow S\,\mathrm{R}-E_2(10^{\beta n}) \end{cases},$$

建構與同一特定有理數相關的數式。定理一及定理二之結論是很重要的，可推得關於整數分解式 $S\,\mathrm{R}-E_2(10^n)$ 的代表數 N_2 或 N_2'；爰此，當 $n=1$ 或 $v=1$ 時，兩平方差再現數恰與特定有理數化成純循環小數時之循環節的數字串有著密切的關聯性。

（c）吾人已詳實探討性質一、性質二、性質三與性質四。將與兩平方差再現數相關的特定有理數化成純循環小數，可藉由其循環節之數字串來提高 $S\,\mathrm{R}-E_2(10^n)$ 的組合位數，其結果取決於基本的原理，經數值計算及驗證，可推廣與其自我相似的美麗數式與有趣的數列。

陸、結論及未來研究方向

（一）以逆向思維研究與純循環小數相關聯的兩平方差再現數，
提出許多精采的見解及新的性質。

（二）兩平方差再現數與不定方程、數的整除性（數論）以及同餘式理論都有著密切的關聯性。

（三）由兩平方差再現數之生成原理，兩平方差再現數具有：兩半平方、毗鄰並列、互補對稱。

（四）論證了兩平方差再現數與有序的特定有理數對化成純循環小數有著巧妙且密切的關聯性。

（五）結合定理一、定理二及定理三，表列分類兩平方差再現數及與其自我相似的整數分解式。

（六）冪數生成原理可構作與兩平方差再現數自我相似的數式，
故定理三等同於與特定有序的有理數對相關聯的定理一與定理二。

（七）以 C++程式語言執行編譯搜尋，微機輸出結果是專為兩平方差再現數所設計的獨立程式。

（八）費馬分解法及婆羅摩笈多恆等式似乎具有幾何意義，期能說明採用這些研究方法的動機。

（九）將底數作變換或從十進位改為其他進位，研究它們與純循環小數和循環節長度的關聯性。

（十）研究相關的二次不定形式之表示法，探究所牽涉到的演算法，更期能擬定一些主要論述。

例如：$\left\{ \boxed{a} \,\&\, \boxed{b} \;\middle|\; a^2 \pm a\cdot b + b^2 = a\cdot 10^n + b \right\} \Rightarrow \begin{cases} 63 = 6^2 + 6\cdot 3 + 3^2, 13 = 1^2 + 1\cdot 3 + 3^2, \cdots \\ 48 = 4^2 - 4\cdot 8 + 8^2, 147 = 14^2 - 14\cdot 7 + 7^2, \cdots \end{cases}$。

柒、參考資料及其他

【1】紀佩文，陳彥鈞，可表為兩個平方數和的一種特定形式的數及其性質推廣研究，
二〇〇三臺灣國際科展數學科大會獎佳作，國立台灣科學教育館，2003 年 08 月。
http://science.ntsec.edu.tw/ezfiles/4/1004/attach/68/2003005.pdf

【2】洪宗良，與特殊型質數之倒數關聯的兩平方和的整數分解，
第三屆旺宏科學銀牌獎，財團法人旺宏教育基金會，2004 年 11 月。
http://www.mxeduc.org.tw/ScienceAward/3rd/doc/SA3-119.pdf

【3】黃志華，Kaprekar Numbers 與形形色色的再現數，
數學教育，香港數學教育學會出版，第 22 期，頁 59-74，2006 年 06 月。
http://www.hkame.org.hk/html/modules/tinyd2/content/Edumath/v22/11WongCW_Kaprekar.pdf

【4】Alf van der Poorten, The Hermite–Serret Algorithm and $12^2 + 33^2$,
Proc. Workshop on Cryptography and Computational Number Theory (CCNT'99),
(National University of Singapore, 22-26, November, 1999),
K.-Y. Lam, I. E. Shparlinski, H. Wang and C. Xing eds., Birkhauser 2001, 129-136.

【5】Alf van der Poorten, A Curious Cubic Identity and Self-similar Sums of Squares,
Mathematical Intelligencer, Vol29, No.2, 2007, 39-41.
http://web.science.mq.edu.au/~alf/SomeRecentPapers/174a.pdf

【6】B. Suryanarayana Rao, A Certain Type of Number Expressible as the Sum of Two Squares,
Mathematics Magazine, Vol. 57, No 4, Sep., 1984, pp. 236-237.
http://mathdl.maa.org/images/cms_upload/Rao29485.pdf

【7】John Brillhart, D. H. Lehmer, J.L. Selfridge, Bryant Tuckerman, S.S. Wagstaff,
"*Factorizations of* $b^n \pm 1, b = 2,3,5,6,7,10,11,12$ *up to high powers*." 3rd ed.,
Contemporary Mathematics, Vol. 22, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

捌、後語

解決問題之創意與研究方向之延伸係源自於【1】中所記載的 Concatenating Squares，經分析與兩平方差再現數相關聯的等價簡化，提出許多具開創性且新的研究概念，發展前所未有的同步關聯與研究，論述兩平方和再現數與兩平方差再現數的差異之處，透過分析與預測程式語言所執行之驚人的表列結果及所存在的有趣性質，探討極具對稱性之美的生成法則及許多漂亮的整數分解式。

論證兩平方差再現數與特定有理數化成純循環小數的關聯性及與其有關的冪數生成原理，歸納與其自我相似的整數分解式。分析及探討兩平方差再現數之計數原理（法則）及主要性質與定理，延伸它們的推廣與趣味性。

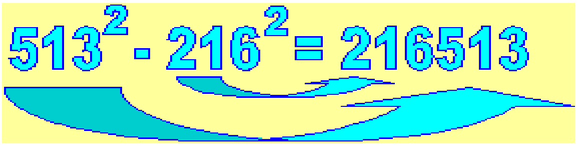
再次重申精采的見解，是以逆向思維發展前所未有的同步關聯與研究延伸，探討與純循環小數有關的兩平方差再現數之整數分解式，進而分析兩平方差再現數與特定有理數相關的性質、定理及冪數生成之特性。方法的實現：結合定理一與定理二的內容，即可表列分類兩平方差再現數與特定有理數相關的整數分解式。

未來發展：期能推廣應用到有關的二次不定形式之表示法，並更進一步的研究所牽涉到的相關演算法，諸如會涉及到有關連分數展開式及 2×2 階矩陣的對應關係（整數矩陣的分解），其中最重要的關鍵是在於決定停止演算法的規則。

Thank you for your attention！

兩平方差再現數（有意思數字－Amazing Numbers Game）

A Certain Type of Number Expressible as Self-similar Difference of Squares



http://www.puzzlet.co.uk/Puzzlets/Graphics/Puzzlet_163.gif

附錄–原始記錄資料

附錄一：表列及分析兩平方差再現數之等價數值
附錄二：巧妙且極具對稱之美的兩平方差再現數
附錄三：C++程式語言進行編譯及輸出搜尋結果
附錄四：與特定有理數對結合的兩平方差再現數
附錄五：與特定有理數相關聯的兩平方差再現數
附錄六：冪數生成原理分析與其自我相似的數式

附錄一：表列及分析兩平方差再現數之等價數值（$r=10^n$）（$n=8,9$）

$\boxed{a}\&\boxed{b}=\left|a^2-b^2\right|=a\cdot r+b$		$r^2-1=p\cdot q=(m^2-n^2)(u^2-v^2);nu-mv=1,mu-nv=r$	
$r^2-1=h^2-k^2$		$(a,b)=(mu,mv)$	$(a',b')=(nv,nu)$
h	k	(p,q)	(m,n,u,v)
$10^{16}-1=3^2\cdot 11\cdot 17\cdot 73\cdot 101\cdot 137\cdot 5882353$			
109625668	44919785	(187,53475935828877)	(14,3,7486631,1604278)
120915032	67973855	(153,65359477124183)	(13,4,8496732,2614379)
122816400	71301249	(17825311942959,561)	(4456328,1426025,25,8)
166666668	133333335	(3333333333333333,3)	(66666667,33333334,2,1)
$10^{18}-1=3^4\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 37\cdot 52579\cdot 333667$			
1020202020	202020201	(99,10101010101010101)	(10,1,101010101,10101010)
1031746032	253968255	(15873015873015873,63)	(126984127,15873016,8,1)
1032256032	256032255	(15873,63000063000063)	(127,16,8001008,1008001)
1044959940	303218199	(12157906894749,82251)	(3525793,522790,290,43)
1062378168	358674465	(1949317738791423,513)	(44834308,7797271,23,4)
1067626068	373932375	(117000117000117,8547)	(10998011,1989002,94,17)
1068376068	376068375	(117,8547008547008547)	(11,2,94017094,17094017)
1073653968	390810495	(1461537,684211210527)	(1231,232,842264,158737)
1110464532	482836905	(14368435421067,69597)	(3893846,890843,271,62)
1125498932	516476375	(10773,92824654228163)	(107,26,9932238,2413441)
1154260680	576470049	(1727271,578947947369)	(1364,365,789685,211316)
1155141068	578230825	(192982649123,5181813)	(456018,122351,2363,634)
1165932832	599499265	(11583,86333419666753)	(112,31,9669343,2676336)
1206991680	675891201	(23199,43105306263201)	(160,49,6896849,2112160)
1230440968	716927455	(1422475106685633,703)	(39829303,12802276,28,9)
1268342620	780187799	(228070403509,4384611)	(508597,174930,2230,767)
1279202280	797720799	(2849002849002849,351)	(56980057,19943020,20,7)
1280800280	800280799	(2849,351000351000351)	(57,20,20007020,7020007)
1292397660	818713449	(171,5847953216374269)	(14,5,81871345,29239766)
1337308968	887916255	(27417,36473720684247)	(179,68,6528796,2480213)
1379050380	949620951	(21000021000021,47619)	(4998005,1995002,238,95)
1380952380	952380951	(21,47619047619047619)	(5,2,238095238,95238095)
1430976432	1023569025	(3367003367003367,297)	(63973064,26936027,19,8)
1433026432	1026433025	(3367,297000297000297)	(64,27,19008019,8019008)
1451579400	1052180001	(22578969947391,44289)	(5260900,2257897,233,100)
1483903360	1096343551	(16929,59070234508831)	(145,64,8565184,3780495)
1543702332	1176017385	(2714283,368421421053)	(1858,859,684527,316474)
1598752600	1247401249	(2079002079002079,481)	(51975052,24948025,25,12)
1664003332	1330002665	(333333666667,2999997)	(666334,332667,1999,998)
1666666668	1333333335	(333333333333333333,3)	(666666667,333333334,2,1)
1669336668	1336669335	(333333,3000003000003)	(667,334,2001002,1002001)
1830466832	1533169535	(2457002457002457,407)	(58968059,31941032,24,13)
1833536832	1536833535	(2457,405065622447447)	(59,32,23972704,13024013)
1936395040	1658199551	(4921,203210729526519)	(85,48,17272912,9754115)

1966306968	1693033695	$(33000033000033, 30303)$	$(6996007, 3993004, 212, 121)$
1969696968	1696969695	$(33, 30303030303030303)$	$(7, 4, 212121212, 121212121)$
2058201060	1798941801	$(5291005291005291, 189)$	$(89947090, 52910053, 17, 10)$
2061803060	1803061801	$(5291, 189000189000189)$	$(90, 53, 17010017, 10017010)$
2145890832	1898643585	$(4052635631583, 246753)$	$(2524792, 1523791, 623, 376)$
$10^{20}-1=3^2\cdot 11\cdot 41\cdot 101\cdot 271\cdot 3541\cdot 9091\cdot 27961$			
⋮ ⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮

附錄二：巧妙且極具對稱之美的兩平方差再現數（$n=8,9$）

$E_2(r)=\left\{\boxed{a}\,\&\,\boxed{b}\;\middle|\;\left|a^2-b^2\right|=a\cdot r+b\right\},\ r=10^n\Rightarrow N_2-N_2'=r^2-1$					
$N_2=\boxed{a}\,\&\,\boxed{b}=a^2-b^2=a\cdot r+b\in E_2(r)$			$N_2'=\boxed{a'}\,\&\,\boxed{b'}=b'^2-a'^2=a'\cdot r+b'\in E_2(r)$		
$N_2\in E_2(r)$	a	b	b'	a'	$N_2'\in E_2(r)$
$10^{16}-1=3^2\cdot 11\cdot 17\cdot 73\cdot 101\cdot 137\cdot 5882353$					
10481283422459892	104812834	22459892	22459893	04812834	0481283422459893
11045751633986927	110457516	33986927	33986928	10457516	1045751633986928
11140820035650624	111408200	35650624	35650625	11408200	1140820035650625
13333333466666667	133333334	66666667	66666668	33333334	3333333466666668
$N_2\in E_2(r)$	a	b	b'	a'	$N_2'\in E_2(r)$
$10^{18}-1=3^4\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 37\cdot 52579\cdot 333667$					
1010101010101010100	1010101010	101010100	101010101	010101010	010101010101010101
1015873016126984127	1015873016	126984127	126984128	015873016	015873016126984128
1016128016128016127	1016128016	128016127	128016128	016128016	016128016128016128
1022479970151609099	1022479970	151609099	151609100	022479970	022479970151609100
1031189084179337232	1031189084	179337232	179337233	031189084	031189084179337233
1033813034186966187	1033813034	186966187	186966188	033813034	033813034186966188
1034188034188034187	1034188034	188034187	188034188	034188034	034188034188034188
1036826984195405247	1036826984	195405247	195405248	036826984	036826984195405248
1055232266241418452	1055232266	241418452	241418453	055232266	055232266241418453
1062749466258238187	1062749466	258238187	258238188	062749466	062749466258238188
1077130340288235024	1077130340	288235024	288235025	077130340	077130340288235025
1077570534289115412	1077570534	289115412	289115413	077570534	077570534289115413
1082966416299749632	1082966416	299749632	299749633	082966416	082966416299749633
1103495840337945600	1103495840	337945600	337945601	103495840	103495840337945601
1115220484358463727	1115220484	358463727	358463728	115220484	115220484358463728
1134171310390093899	1134171310	390093899	390093900	134171310	134171310390093900
1139601140398860399	1139601140	398860399	398860400	139601140	139601140398860400
1140400140400140399	1140400140	400140399	400140400	140400140	140400140400140400
1146198830409356724	1146198830	409356724	409356725	146198830	146198830409356725
1168654484443958127	1168654484	443958127	443958128	168654484	168654484443958128
1189525190474810475	1189525190	474810475	474810476	189525190	189525190474810476
1190476190476190475	1190476190	476190475	476190476	190476190	190476190476190476
1215488216511784512	1215488216	511784512	511784513	215488216	215488216511784513
1216513216513216512	1216513216	513216512	513216513	216513216	216513216513216513
1225789700526090000	1225789700	526090000	526090001	225789700	225789700526090001
1241951680548171775	1241951680	548171775	548171776	241951680	241951680548171776
1271851166588008692	1271851166	588008692	588008693	271851166	271851166588008693
1299376300623700624	1299376300	623700624	623700625	299376300	299376300623700625
1300625300625300624	1300625300	625300624	625300625	300625300	300625300625300625
1332001666665001332	1332001666	665001332	665001333	332001666	332001666665001333
1333333334666666667	1333333334	666666667	666666668	333333334	333333334666666668
1334668334668334667	1334668334	668334667	668334668	334668334	334668334668334668
1415233416766584767	1415233416	766584767	766584768	415233416	415233416766584768
1416768416768416767	1416768416	768416767	768416768	416768416	416768416768416768
1468197520829099775	1468197520	829099775	829099776	468197520	468197520829099776
1483153484846516847	1483153484	846516847	846516848	483153484	483153484846516848
1484848484848484847	1484848484	848484847	848484848	484848484	484848484848484848
1529100530899470900	1529100530	899470900	899470901	529100530	529100530899470901

1530901530901530900 **1572945416949321792**	**1530901530** **1572945416**	**901530900** **949321792**	**901530901** **949321793**	**530901530** **572945416**	**530901530901530901** **572945416949321793**
$N_2 \in E_2(r)$	a	b	b'	a'	$N'_2 \in E_2(r)$
$10^{20}-1=3^2\cdot 11\cdot 41\cdot 101\cdot 271\cdot 3541\cdot 9091\cdot 27961$					
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$
$N=\boxed{a}\&\boxed{b}=\left\|a^2-b^2\right\|=a\cdot r+b\Rightarrow N_2-N'_2=r^2-1$ 以 C++程式語言編譯搜尋兩平方差再現數：兩半平方、毗鄰並列、互補對稱					

附錄三：C++程式語言編譯兩平方差再現數產生的方法及輸出搜尋結果－程式碼（I）

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include <iomanip>
using namespace std;

void outputToFile(int[]);
void output(int[] );
void zero(int[], int);
void add(int[], int[], int[]);
void plusInt(int[], int);
void sub(int[], int[], int[]);
void multiply(int[], int[], int[]);
void runA(int[]);
void runB(int[]);
bool compare(int[], int[], int[]);
bool equal(int[], int[]);
void copy(int[], int[]);
const int MAX = 20;

fstream outFile("result.txt", ios::out | ios::trunc);

int main(){
	if(!outFile)
		cerr<< "File could not be opened" << endl;

	cout<< "平方差再現數資料處理中..."<<endl;
	int bp[MAX] = {0};
	runB(bp);
	system("pause");
	return 0;
}
void runA(int b[]){                              //順序主要程式碼
	int a[MAX] = {0};
	copy(b,a);
	plusInt(b,-1);
	if(a[0]%2 == 1)
		plusInt(a,1);
	while(1){
		int n = a[0];
		int i=MAX-1;
		for (; i>0; i--)
			if(a[i]!= 0)
				break;
		if(a[i]!=1){
			zero(a,MAX);
			a[i+1] = 1;
		}
		int c[MAX*2] = {0};
		int d[MAX*2] = {0};
		int e[MAX*2] = {0};
		multiply(a,a,d);
		multiply(b,b,e);
		sub(d,e,c);
```

```
		if(compare(b,a,c)){
			cout<< "found ";
			output(a);
			cout<< endl;
			outFile<<"順序  a= ";
			outputToFile(a);
			outFile<<" b= ";
			outputToFile(b);
			outFile<<" c= ";
			outputToFile(c);
			break;
		}
		plusInt(a,2);
	}
}
void runB(int bp[]){                              //逆序主要程式碼
	int ap[MAX] = {0};
	plusInt(bp,2);
	plusInt(ap,1);
	while(1){
		int n = bp[0];
		if(n!=2 && n!=4 && n!=7 && n!=9){
			while(!equal(bp,ap)){
				int m = ap[0];
				if(m==0 || m==4 ||m==6){
					int cp[MAX*2] = {0};
					int d[MAX*2] = {0};
					int e[MAX*2] = {0};
					multiply(bp,bp,d);
					multiply(ap,ap,e);
					sub(d,e,cp);
					if(compare(bp,ap,cp)){
						int e[MAX] = {0};
						copy(bp,e);
						runA(e);
						outFile<<"逆序  b'= ";
						outputToFile(bp);
						outFile<<" a'= ";
						outputToFile(ap);
						outFile<<" c'= ";
						outputToFile(cp);
						outFile<<endl;
						goto stop;
					}
				}
				plusInt(ap,1);
			}
		}
		stop:
		plusInt(bp,1);
		zero(ap,MAX);
	}
}
void outputToFile(int n[]){                              //大數輸出
	int i;
```

```
	for (i=MAX-1; i>0; i--)
		if(n[i]!= 0)
				break;
	for( ; i>=0; i--)
		outFile<< n[i];
}
void output(int n[]){				//大數輸出
	int i;
	for (i=MAX-1; i>0; i--)
		if(n[i]!= 0)
				break;
	for( ; i>=0; i--)
		cout<< n[i];
}
void add(int n[], int m[], int o[]){		//大數相加
	int i = 0,carry =0;
	for(i=0; i<MAX; i++){
		o[i] = n[i] + m[i] + carry;
		if(o[i]<10)
			carry = 0;
		else{
			o[i] -= 10;
			carry = 1;
		}
	}
	o[i]+=carry;
}
void sub(int n[], int m[], int o[]){		//大數相減
	int i, borrow = 0;
	for(i=0; i<MAX; i++){
		o[i] = n[i] - m[i] - borrow;
		if (o[i] >= 0)
			borrow = 0;
		else{
			o[i] += 10;
			borrow = 1;
		}
	}
}
void multiply(int p[], int q[], int r[]){	//大數相乘
	int i, tmp, j, carry=0;
	for(i=0; i<MAX; i++){
		carry = 0;
		for(j=0; j<MAX; j++){
			tmp = p[j] * q[i] + carry;
			r[i+j] = r[i+j] + (tmp % 10);
			carry = tmp / 10;
			if(r[i+j]>9){
				carry++;
				r[i+j]%=10;
			}
		}
	}
}
void plusInt(int n[], int x){			//大數加整數
```

```
	int i = 0;
	if(x>=0){
		n[i]+=x;
		while(n[i]>9){
			n[i]-=10;
			n[i+1]++;
			i++;
		}
	}
	else{
		n[i]+=x;
		while(n[i]<0){
			n[i]+=10;
			n[i+1]--;
			i++;
		}
	}
}
bool compare(int n[], int m[], int o[]){        //數字比對
	int countA = MAX;
	for(int i=MAX-1;i>=0;i--)
		if(n[i]!=0){
			countA = i+1;
			break;
		}
	int i=0, j=0;
	while(i<countA){
		if(o[i] != n[i])
			return false;
		i++;
	}
	while(i<(MAX*2) && j<MAX){
		if(o[i] != m[j])
			return false;
		i++;
		j++;
	}
	return true;
}
bool equal(int a[], int b[]){                   //判斷兩大數是否相等
	for(int i=0;i<MAX;i++){
		if(a[i]!=b[i])
			return false;
	}
	return true;
}
void copy(int m[], int n[]){
	for(int i=0;i<MAX;i++)
		n[i] = m[i];
}
void zero(int n[], int max){                    //大數歸零
	for(int i=0;i<max; i++)
		n[i] = 0;
}
```

程式碼 2：兩平方差再現數產生的方法（兩半平方、毗鄰並列、互補對稱）

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include <iomanip>
using namespace std;

void outputToFile(int[]);
void output(int[], int);
void zero(int[], int);
void add(int[], int[], int[]);
void plusInt(int[], int);
void sub(int[], int[], int[]);
void multiply(int[], int[], int[]);
void runA(int[], int[],int);
void runB(int[], int);
bool equal(int[], int[]);
void copy(int[], int[]);
const int MAX = 20;

fstream outFile("result.txt", ios::out | ios::trunc );

int main(){
	if(!outFile)
		cerr<< "File could not be opened" << endl;

	int puzz[MAX*2] = {0};
	plusInt(puzz,10);                    //設定 N' 初始值為 10（從二位數開始）
	int n = 2;                           //設定位數為 2
	runB(puzz,n);                        //執行逆序平方差再現數搜尋

	system("pause");
	return 0;
}
void runA(int b[], int a[],int n){           //順序輸出程式碼
		plusInt(b,-1);
		outFile<<"順序  a= ";
		outputToFile(a);
		outFile<<" b= ";
		outputToFile(b);
		outFile<<" N= ";
		outputToFile(a);
		outputToFile(b);
}
void runB(int puzz[], int n){                //逆序搜尋程式碼
	while(1){
		int k = n/2;
		puzz[k-1]=1;
		puzz[n-2]=1;
		while(puzz[n]==0){
			int x = puzz[0];
			if(x!=2 && x!=4 && x!=7 && x!=9)
```

```
            {
                output(puzz, MAX*2);
                cout<<endl;
                int bp[MAX] = {0};                //宣告 b' 為 0
                int ap[MAX] = {0};                //宣告 a' 為 0

                int i=0;
                while(i<k){                   //設定 b' 為 N' 後半部，a' 為前半部
                    bp[i] = puzz[i];
                    ap[i] = puzz[i+k];
                    i++;
                }

                if(ap[0]==0 || ap[0]==4 ||ap[0]==6){
                    int c[MAX*2]={0};
                    int d[MAX*2]={0};
                    int e[MAX*2]={0};
                    multiply(bp,bp,c);            //計算平方差
                    multiply(ap,ap,d);
                    sub(c,d,e);
                    if(equal(puzz,e))             //若平方差等於 N'
                    {
                        int f[MAX] = {0};
                        int g[MAX] = {0};
                        copy(bp,f);
                        copy(ap,g);
                        runA(f,g,k);              //輸出順序資料
                        cout<< "found ";
                        output(bp, MAX);
                        cout<<endl;
                        outFile<<"逆序  b'= ";   //輸出逆序資料
                        outputToFile(bp);
                        outFile<<" a'= ";
                        outputToFile(ap);
                        outFile<<" N'= ";
                        outputToFile(puzz);
                        outFile<<endl;
                    }
                }
                else
                {
                    int i = k;
                    puzz[i]++;
                    while(puzz[i]>9){
                        puzz[i+1]= puzz[i+1] + (puzz[i]/10);
                        puzz[i]%=10;
                        i++;
                    }
                }
            }
            plusInt(puzz,1);
        }
        n+=2;
    }
}
```

```
void outputToFile(int n[]){                                    //大數輸出至檔案
        int i;
        for (i=MAX-1; i>0; i--)
                if(n[i]!= 0)
                        break;
        for( ; i>=0; i--)
                outFile<< n[i];
}
void output(int n[], int max){                                  //大數輸出
        int i;
        for (i=max-1; i>0; i--)
                if(n[i]!= 0)
                                break;
        for( ; i>=0; i--)
                cout<< n[i];
}
void add(int n[], int m[], int o[]){                 //大數相加
        int i = 0,carry =0;
        for(i=0; i<MAX; i++){
                o[i] = n[i] + m[i] + carry;
                if(o[i]<10)
                        carry = 0;
                else{
                        o[i] -= 10;
                        carry = 1;
                }
        }
        o[i]+=carry;
}
void sub(int n[], int m[], int o[]){                 //大數相減
        int i, borrow = 0;
        for(i=0; i<MAX; i++){
                o[i] = n[i] - borrow - m[i] ;
                if (o[i] >= 0)
                        borrow = 0;
                else{
                        o[i] += 10;
                        borrow = 1;
                }
        }
}
void multiply(int p[], int q[], int r[]){       //大數相乘
        int i, tmp, j, carry=0;
        for(i=0; i<MAX; i++){
                carry = 0;
                for(j=0; j<MAX; j++){
                        tmp = p[j] * q[i] + carry;
                        r[i+j] = r[i+j] + (tmp % 10);
                        carry = tmp / 10;
                        if(r[i+j]>9){
                                carry++;
                                r[i+j]%=10;
                        }
                }
        }
```

```
}
void plusInt(int n[], int x){                    //大數加整數
	int i = 0;
	if(x>=0){
		n[i]+=x;
		while(n[i]>9){
			n[i+1]= n[i+1] + (n[i]/10);
			n[i]%=10;
			i++;
		}
	}
	else{
		n[i]+=x;
		while(n[i]<0){
			n[i]+=10;
			n[i+1]--;
			i++;
		}
	}
}

bool equal(int a[], int b[]){                    //判斷兩大數是否相等
	for(int i=0;i<MAX;i++){
		if(a[i]!=b[i])
			return false;
	}
	return true;
}
void copy(int m[], int n[]){                     //數字複製
	for(int i=0;i<MAX;i++)
		n[i] = m[i];
}
void zero(int n[], int max){                     //大數歸零
	for(int i=0;i<max; i++)
		n[i] = 0;
}
```

兩平方差再現數及與其自我相似的數列與有序的有理數對的關聯性（I）	
(m,n,u,v)	$\left(\frac{2\cdot10^{k+1}+1}{3},\frac{10^{k+1}+2}{3},\underline{2},\underline{1}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{k+1})$	$\frac{(2\cdot10^{k+1}+1)^2}{3}=\left(\frac{4\cdot10^{k+1}+2}{3}\right)^2-\left(\frac{2\cdot10^{k+1}+1}{3}\right)^2$ $\frac{(10^{k+1}+2)^2}{3}=\left(\frac{2\cdot10^{k+1}+4}{3}\right)^2-\left(\frac{10^{k+1}+2}{3}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\frac{8\cdot10^{6k+3}+1}{63},\frac{10^{6k+3}+8}{63},\underline{8},\underline{1}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{6k+3})$	$\frac{(8\cdot10^{6k+3}+1)^2}{63}=\left(\frac{64\cdot10^{6k+3}+8}{63}\right)^2-\left(\frac{8\cdot10^{6k+3}+1}{63}\right)^2$ $\frac{(10^{6k+3}+8)^2}{63}=\left(\frac{8\cdot10^{6k+3}+64}{63}\right)^2-\left(\frac{10^{6k+3}+8}{63}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\frac{17\cdot10^{6k+3}+10}{189},\frac{10\cdot10^{6k+3}+17}{189},\underline{17},\underline{10}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{6k+3})$	$\frac{(17\cdot10^{6k+3}+10)^2}{189}=\left(\frac{289\cdot10^{6k+3}+170}{189}\right)^2-\left(\frac{170\cdot10^{6k+3}+100}{189}\right)^2$ $\frac{(10\cdot10^{6k+3}+17)^2}{189}=\left(\frac{170\cdot10^{6k+3}+289}{189}\right)^2-\left(\frac{100\cdot10^{6k+3}+170}{189}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\frac{19\cdot10^{6k+3}+8}{297},\frac{8\cdot10^{6k+3}+19}{297},\underline{19},\underline{8}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{6k+3})$	$\frac{(19\cdot10^{6k+3}+8)^2}{297}=\left(\frac{361\cdot10^{6k+3}+162}{297}\right)^2-\left(\frac{162\cdot10^{6k+3}+64}{297}\right)^2$ $\frac{(8\cdot10^{6k+3}+19)^2}{297}=\left(\frac{162\cdot10^{6k+3}+361}{297}\right)^2-\left(\frac{64\cdot10^{6k+3}+162}{297}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\frac{20\cdot10^{6k+3}+7}{351},\frac{7\cdot10^{6k+3}+20}{351},\underline{20},\underline{7}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{6k+3})$	$\frac{(20\cdot10^{6k+3}+7)^2}{351}=\left(\frac{400\cdot10^{6k+3}+140}{351}\right)^2-\left(\frac{140\cdot10^{6k+3}+49}{351}\right)^2$ $\frac{(7\cdot10^{6k+3}+20)^2}{351}=\left(\frac{140\cdot10^{6k+3}+400}{351}\right)^2-\left(\frac{49\cdot10^{6k+3}+140}{351}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\frac{24\cdot10^{6k+3}+13}{407},\frac{13\cdot10^{6k+3}+24}{407},\underline{24},\underline{13}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{6k+3})$	$\frac{(24\cdot10^{6k+3}+13)^2}{407}=\left(\frac{576\cdot10^{6k+3}+312}{407}\right)^2-\left(\frac{312\cdot10^{6k+3}+169}{407}\right)^2$ $\frac{(13\cdot10^{6k+3}+24)^2}{407}=\left(\frac{312\cdot10^{6k+3}+576}{407}\right)^2-\left(\frac{169\cdot10^{6k+3}+312}{407}\right)^2$

(m,n,u,v)	$\left(\frac{25\cdot 10^{6k+3}+12}{481},\frac{12\cdot 10^{6k+3}+25}{481},25,12\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{6k+3})$	$\frac{(25\cdot 10^{6k+3}+12)^2}{481}=\left(\frac{625\cdot 10^{6k+3}+300}{481}\right)^2-\left(\frac{300\cdot 10^{6k+3}+144}{481}\right)^2$ $\frac{(12\cdot 10^{6k+3}+25)^2}{481}=\left(\frac{300\cdot 10^{6k+3}+625}{481}\right)^2-\left(\frac{144\cdot 10^{6k+3}+300}{481}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\frac{86\cdot 10^{8k+4}+13}{7227},\frac{13\cdot 10^{8k+4}+86}{7227},86,13\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{8k+4})$	$\frac{(86\cdot 10^{8k+4}+13)^2}{7227}=\left(\frac{7396\cdot 10^{8k+4}+1118}{7227}\right)^2-\left(\frac{1118\cdot 10^{8k+4}+169}{7227}\right)^2$ $\frac{(13\cdot 10^{8k+4}+86)^2}{7227}=\left(\frac{1118\cdot 10^{8k+4}+7396}{7227}\right)^2-\left(\frac{169\cdot 10^{8k+4}+1118}{7227}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\frac{87\cdot 10^{8k+4}+14}{7373},\frac{14\cdot 10^{8k+4}+87}{7373},87,14\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{8k+4})$	$\frac{(87\cdot 10^{8k+4}+14)^2}{7373}=\left(\frac{7569\cdot 10^{8k+4}+1218}{7373}\right)^2-\left(\frac{1218\cdot 10^{8k+4}+196}{7373}\right)^2$ $\frac{(14\cdot 10^{8k+4}+87)^2}{7373}=\left(\frac{1218\cdot 10^{8k+4}+7569}{7373}\right)^2-\left(\frac{196\cdot 10^{8k+4}+1218}{7373}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\frac{26\cdot 10^{10k+5}+15}{451},\frac{15\cdot 10^{10k+5}+26}{451},26,15\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{10k+5})$	$\frac{(26\cdot 10^{10k+5}+15)^2}{451}=\left(\frac{676\cdot 10^{10k+5}+390}{451}\right)^2-\left(\frac{390\cdot 10^{10k+5}+225}{451}\right)^2$ $\frac{(15\cdot 10^{10k+5}+26)^2}{451}=\left(\frac{390\cdot 10^{10k+5}+676}{451}\right)^2-\left(\frac{225\cdot 10^{10k+5}+390}{451}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\frac{122\cdot 10^{12k+6}+21}{14443},\frac{21\cdot 10^{12k+6}+122}{14443},122,21\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{12k+6})$	$\frac{(122\cdot 10^{12k+6}+21)^2}{14443}=\left(\frac{14884\cdot 10^{12k+6}+2562}{14443}\right)^2-\left(\frac{2562\cdot 10^{12k+6}+441}{14443}\right)^2$ $\frac{(21\cdot 10^{12k+6}+122)^2}{14443}=\left(\frac{2562\cdot 10^{12k+6}+14884}{14443}\right)^2-\left(\frac{441\cdot 10^{12k+6}+2562}{14443}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\frac{145\cdot 10^{12k+6}+44}{19089},\frac{44\cdot 10^{12k+6}+145}{19089},145,44\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{12k+6})$	$\frac{(145\cdot 10^{12k+6}+44)^2}{19089}=\left(\frac{21025\cdot 10^{12k+6}+6380}{19089}\right)^2-\left(\frac{6380\cdot 10^{12k+6}+1936}{19089}\right)^2$ $\frac{(144\cdot 10^{12k+6}+145)^2}{19089}=\left(\frac{6380\cdot 10^{12k+6}+21025}{19089}\right)^2-\left(\frac{1936\cdot 10^{12k+6}+6380}{19089}\right)^2$

(m,n,u,v)	$\left(\dfrac{166\cdot 10^{12k+6}+65}{23331},\dfrac{65\cdot 10^{12k+6}+166}{23331},\underline{166},\underline{65}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{12k+6})$	$\dfrac{(166\cdot 10^{12k+6}+65)^2}{23331}=\left(\dfrac{27556\cdot 10^{12k+6}+10790}{23331}\right)^2-\left(\dfrac{10790\cdot 10^{12k+6}+4225}{23331}\right)^2$ $\dfrac{(65\cdot 10^{12k+6}+166)^2}{23331}=\left(\dfrac{10790\cdot 10^{12k+6}+27556}{23331}\right)^2-\left(\dfrac{4225\cdot 10^{12k+6}+10790}{23331}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\dfrac{180\cdot 10^{12k+6}+79}{26159},\dfrac{79\cdot 10^{12k+6}+180}{26159},\underline{180},\underline{79}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{12k+6})$	$\dfrac{(180\cdot 10^{12k+6}+79)^2}{26159}=\left(\dfrac{32400\cdot 10^{12k+6}+14220}{26159}\right)^2-\left(\dfrac{14220\cdot 10^{12k+6}+6241}{26159}\right)^2$ $\dfrac{(79\cdot 10^{12k+6}+180)^2}{26159}=\left(\dfrac{14220\cdot 10^{12k+6}+32400}{26159}\right)^2-\left(\dfrac{6241\cdot 10^{12k+6}+14220}{26159}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\dfrac{187\cdot 10^{12k+6}+86}{27573},\dfrac{86\cdot 10^{12k+6}+187}{27573},\underline{187},\underline{86}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{12k+6})$	$\dfrac{(187\cdot 10^{12k+6}+86)^2}{27573}=\left(\dfrac{34969\cdot 10^{12k+6}+16082}{27573}\right)^2-\left(\dfrac{16082\cdot 10^{12k+6}+7396}{27573}\right)^2$ $\dfrac{(86\cdot 10^{12k+6}+187)^2}{27573}=\left(\dfrac{16082\cdot 10^{12k+6}+34969}{27573}\right)^2-\left(\dfrac{7396\cdot 10^{12k+6}+16082}{27573}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\dfrac{199\cdot 10^{12k+6}+98}{29997},\dfrac{98\cdot 10^{12k+6}+199}{29997},\underline{199},\underline{98}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{12k+6})$	$\dfrac{(199\cdot 10^{12k+6}+98)^2}{29997}=\left(\dfrac{39601\cdot 10^{12k+6}+19502}{29997}\right)^2-\left(\dfrac{19502\cdot 10^{12k+6}+9604}{29997}\right)^2$ $\dfrac{(98\cdot 10^{12k+6}+199)^2}{29997}=\left(\dfrac{19502\cdot 10^{12k+6}+39601}{29997}\right)^2-\left(\dfrac{9604\cdot 10^{12k+6}+19502}{29997}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\dfrac{217\cdot 10^{12k+6}+116}{33633},\dfrac{116\cdot 10^{12k+6}+217}{33633},\underline{217},\underline{116}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{12k+6})$	$\dfrac{(217\cdot 10^{12k+6}+116)^2}{33633}=\left(\dfrac{47089\cdot 10^{12k+6}+25172}{33633}\right)^2-\left(\dfrac{25172\cdot 10^{12k+6}+13456}{33633}\right)^2$ $\dfrac{(116\cdot 10^{12k+6}+217)^2}{33633}=\left(\dfrac{25172\cdot 10^{12k+6}+47089}{33633}\right)^2-\left(\dfrac{13456\cdot 10^{12k+6}+25172}{33633}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\dfrac{226\cdot 10^{12k+6}+125}{35451},\dfrac{125\cdot 10^{12k+6}+226}{35451},\underline{226},\underline{125}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{12k+6})$	$\dfrac{(226\cdot 10^{12k+6}+125)^2}{35451}=\left(\dfrac{51076\cdot 10^{12k+6}+28250}{35451}\right)^2-\left(\dfrac{28250\cdot 10^{12k+6}+15625}{35451}\right)^2$ $\dfrac{(125\cdot 10^{12k+6}+226)^2}{35451}=\left(\dfrac{28250\cdot 10^{12k+6}+51076}{35451}\right)^2-\left(\dfrac{15625\cdot 10^{12k+6}+28250}{35451}\right)^2$
$\vdots$	$\vdots$

與其自我相似的兩平方差再現數與特定有序的有理數對化成純循環小數之關聯性（I）		
(m,n,u,v)	$\left(\dfrac{v^2}{q},\dfrac{uv}{q}\right)$	$\left(\begin{array}{l}0.\overline{\boxed{A}}\\ 0.\overline{\boxed{B}}\end{array}\right)$
$\left(\dfrac{2\cdot 10^{k+1}+1}{3},\dfrac{10^{k+1}+2}{3},2,1\right)$	$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$	$\left(\begin{array}{l}0.\overline{3}\\ 0.\overline{6}\end{array}\right)$
$(147,48)\to(13467,3468)\to(1334667,334668)\to(133346667,33346668)$		
$\left(\dfrac{8\cdot 10^{6k+3}+1}{63},\dfrac{10^{6k+3}+8}{63},8,1\right)$	$\left(\dfrac{1}{63},\dfrac{8}{63}\right)$	$\left(\begin{array}{l}0.\overline{015873}\\ 0.\overline{126984}\end{array}\right)$
$(1016127,016128)\to(1015873016126984127,015873016126984128)$		
$\left(\dfrac{17\cdot 10^{6k+3}+10}{189},\dfrac{10\cdot 10^{6k+3}+17}{189},17,10\right)$	$\left(\dfrac{100}{189},\dfrac{170}{189}\right)$	$\left(\begin{array}{l}0.\overline{529100}\\ 0.\overline{899470}\end{array}\right)$
$(1530900,530901)\to(1529100530899470900,529100530899470901)$		
$\left(\dfrac{19\cdot 10^{6k+3}+8}{297},\dfrac{8\cdot 10^{6k+3}+19}{297},19,8\right)$	$\left(\dfrac{64}{297},\dfrac{152}{297}\right)$	$\left(\begin{array}{l}0.\overline{215488}\\ 0.\overline{511784}\end{array}\right)$
$(1216512,513216)\to(1215488216511784512,215488513511784216)$		
$\left(\dfrac{20\cdot 10^{6k+3}+7}{351},\dfrac{7\cdot 10^{6k+3}+20}{351},20,7\right)$	$\left(\dfrac{49}{351},\dfrac{140}{351}\right)$	$\left(\begin{array}{l}0.\overline{139601}\\ 0.\overline{398860}\end{array}\right)$
$(1140399,140400)\to(1139601140398860399,139601140398860400)$		
$\left(\dfrac{24\cdot 10^{6k+3}+13}{407},\dfrac{13\cdot 10^{6k+3}+24}{407},24,13\right)$	$\left(\dfrac{169}{407},\dfrac{312}{407}\right)$	$\left(\begin{array}{l}0.\overline{415233}\\ 0.\overline{766584}\end{array}\right)$
$(1416767,416768)\to(1415233416766584767,415233416766584768)$		
$\left(\dfrac{25\cdot 10^{6k+3}+12}{481},\dfrac{12\cdot 10^{6k+3}+25}{481},25,12\right)$	$\left(\dfrac{144}{481},\dfrac{300}{481}\right)$	$\left(\begin{array}{l}0.\overline{299376}\\ 0.\overline{623700}\end{array}\right)$
$(1300624,300625)\to(1299376300623700624,299376300623700625)$		
$\left(\dfrac{86\cdot 10^{8k+4}+13}{7227},\dfrac{13\cdot 10^{8k+4}+86}{7227},86,13\right)$	$\left(\dfrac{169}{7227},\dfrac{1118}{7227}\right)$	$\left(\begin{array}{l}0.\overline{02338453}\\ 0.\overline{15469766}\end{array}\right)$
$(102341547,02341548)\to(1023384530234154697661547,023384530234154697661548)$		
$\left(\dfrac{87\cdot 10^{8k+4}+14}{7373},\dfrac{14\cdot 10^{8k+4}+87}{7373},87,14\right)$	$\left(\dfrac{196}{7373},\dfrac{1218}{7373}\right)$	$\left(\begin{array}{l}0.\overline{02658348}\\ 0.\overline{16519734}\end{array}\right)$
$(102661652,02661653)\to(1026583480266165197341652,026583480266165197341653)$		
$\left(\dfrac{220\cdot 10^{8k+4}+83}{41511},\dfrac{83\cdot 10^{8k+4}+220}{41511},220,83\right)$	$\left(\dfrac{6889}{41511},\dfrac{18260}{41511}\right)$	$\left(\begin{array}{l}0.\overline{16595601}\\ 0.\overline{43988340}\end{array}\right)$
$(116604399,16604400)\to(1165956011660439883404399,165956011660439883404400)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		

兩平方差再現數及與其自我相似的數列與有序的有理數對的關聯性（II）	
(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{7}},\underline{\underline{4}},\dfrac{7\cdot 10^{2k+1}-4}{33},\dfrac{4\cdot 10^{2k+1}-7}{33}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{2k+1})$	$\dfrac{49(10^{4k+2}-1)}{33}=\left(\dfrac{49\cdot 10^{2k+1}-28}{33}\right)^2-\left(\dfrac{28\cdot 10^{2k+1}-49}{33}\right)^2$ $\dfrac{16(10^{4k+2}-1)}{33}=\left(\dfrac{28\cdot 10^{2k+1}-16}{33}\right)^2-\left(\dfrac{16\cdot 10^{2k+1}-28}{33}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{10}},\underline{\underline{1}},\dfrac{10\cdot 10^{2k+1}-1}{99},\dfrac{10^{2k+1}-10}{99}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{2k+1})$	$\dfrac{100(10^{4k+2}-1)}{99}=\left(\dfrac{100\cdot 10^{2k+1}-10}{99}\right)^2-\left(\dfrac{10\cdot 10^{2k+1}-100}{99}\right)^2$ $\dfrac{(10^{4k+2}-1)}{99}=\left(\dfrac{10\cdot 10^{2k+1}-1}{99}\right)^2-\left(\dfrac{10^{2k+1}-10}{99}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{5}},\underline{\underline{2}},\dfrac{5\cdot 10^{6k+3}-2}{21},\dfrac{2\cdot 10^{6k+3}-5}{21}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{6k+3})$	$\dfrac{25(10^{12k+6}-1)}{21}=\left(\dfrac{25\cdot 10^{6k+3}-10}{21}\right)^2-\left(\dfrac{10\cdot 10^{6k+3}-25}{21}\right)^2$ $\dfrac{4(10^{12k+6}-1)}{21}=\left(\dfrac{10\cdot 10^{6k+3}-4}{21}\right)^2-\left(\dfrac{4\cdot 10^{6k+3}-10}{21}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{11}},\underline{\underline{2}},\dfrac{11\cdot 10^{6k+3}-2}{117},\dfrac{2\cdot 10^{6k+3}-11}{117}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{6k+3})$	$\dfrac{121(10^{12k+6}-1)}{117}=\left(\dfrac{121\cdot 10^{6k+3}-22}{117}\right)^2-\left(\dfrac{22\cdot 10^{6k+3}-121}{117}\right)^2$ $\dfrac{4(10^{12k+6}-1)}{117}=\left(\dfrac{22\cdot 10^{6k+3}-4}{117}\right)^2-\left(\dfrac{4\cdot 10^{6k+3}-22}{117}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{53}},\underline{\underline{20}},\dfrac{53\cdot 10^{8k+4}-20}{2409},\dfrac{20\cdot 10^{8k+4}-53}{2409}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{8k+4})$	$\dfrac{2809(10^{16k+8}-1)}{2409}=\left(\dfrac{2809\cdot 10^{8k+4}-1060}{2409}\right)^2-\left(\dfrac{1060\cdot 10^{8k+4}-2809}{2409}\right)^2$ $\dfrac{400(10^{16k+8}-1)}{2409}=\left(\dfrac{1060\cdot 10^{8k+4}-400}{2409}\right)^2-\left(\dfrac{400\cdot 10^{8k+4}-1060}{2409}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{85}},\underline{\underline{52}},\dfrac{85\cdot 10^{8k+4}-52}{4521},\dfrac{52\cdot 10^{8k+4}-85}{4521}\right)$
$S\,\mathrm{R}-E_2(10^{8k+4})$	$\dfrac{7225(10^{16k+8}-1)}{4521}=\left(\dfrac{7225\cdot 10^{8k+4}-4420}{4521}\right)^2-\left(\dfrac{4420\cdot 10^{8k+4}-7225}{2409}\right)^2$ $\dfrac{2704(10^{16k+8}-1)}{4521}=\left(\dfrac{4420\cdot 10^{8k+4}-2704}{4521}\right)^2-\left(\dfrac{2704\cdot 10^{8k+4}-4420}{4521}\right)^2$

(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{64}},\underline{\underline{37}},\frac{64\cdot10^{12k+6}-37}{2727},\frac{37\cdot10^{12k+6}-64}{2727}\right)$
$SR-E_2(10^{12k+6})$	$\frac{4096(10^{24k+12}-1)}{2727}=\left(\frac{4096\cdot10^{12k+6}-2368}{2727}\right)^2-\left(\frac{2368\cdot10^{12k+6}-4096}{2727}\right)^2$ $\frac{1369(10^{24k+12}-1)}{2727}=\left(\frac{2368\cdot10^{12k+6}-1369}{2727}\right)^2-\left(\frac{1369\cdot10^{12k+6}-2368}{2727}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{67}},\underline{\underline{34}},\frac{67\cdot10^{12k+6}-34}{3333},\frac{34\cdot10^{12k+6}-67}{3333}\right)$
$SR-E_2(10^{12k+6})$	$\frac{4489(10^{24k+12}-1)}{3333}=\left(\frac{4489\cdot10^{12k+6}-2278}{3333}\right)^2-\left(\frac{2278\cdot10^{12k+6}-4489}{3333}\right)^2$ $\frac{1156(10^{24k+12}-1)}{3333}=\left(\frac{2278\cdot10^{12k+6}-1156}{3333}\right)^2-\left(\frac{1156\cdot10^{12k+6}-2278}{3333}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{69}},\underline{\underline{32}},\frac{69\cdot10^{12k+6}-32}{3737},\frac{32\cdot10^{12k+6}-69}{3737}\right)$
$SR-E_2(10^{12k+6})$	$\frac{4761(10^{24k+12}-1)}{3737}=\left(\frac{4761\cdot10^{12k+6}-2208}{3737}\right)^2-\left(\frac{2208\cdot10^{12k+6}-4761}{3737}\right)^2$ $\frac{1024(10^{24k+12}-1)}{3737}=\left(\frac{2208\cdot10^{12k+6}-1024}{3737}\right)^2-\left(\frac{1024\cdot10^{12k+6}-2208}{3737}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{70}},\underline{\underline{31}},\frac{70\cdot10^{12k+6}-31}{3939},\frac{31\cdot10^{12k+6}-70}{3939}\right)$
$SR-E_2(10^{12k+6})$	$\frac{4900(10^{24k+12}-1)}{3939}=\left(\frac{4900\cdot10^{12k+6}-2170}{3939}\right)^2-\left(\frac{2170\cdot10^{12k+6}-4900}{3939}\right)^2$ $\frac{961(10^{24k+12}-1)}{3939}=\left(\frac{2170\cdot10^{12k+6}-961}{3939}\right)^2-\left(\frac{961\cdot10^{12k+6}-2170}{3939}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{82}},\underline{\underline{19}},\frac{82\cdot10^{12k+6}-19}{6363},\frac{19\cdot10^{12k+6}-82}{6363}\right)$
$SR-E_2(10^{12k+6})$	$\frac{6724(10^{24k+12}-1)}{6363}=\left(\frac{6724\cdot10^{12k+6}-1558}{6363}\right)^2-\left(\frac{1558\cdot10^{12k+6}-6724}{6363}\right)^2$ $\frac{361(10^{24k+12}-1)}{6363}=\left(\frac{1558\cdot10^{12k+6}-361}{6363}\right)^2-\left(\frac{361\cdot10^{12k+6}-1558}{6363}\right)^2$
(m,n,u,v)	$\left(\underline{\underline{89}},\underline{\underline{12}},\frac{89\cdot10^{12k+6}-12}{7777},\frac{12\cdot10^{12k+6}-89}{7777}\right)$
$SR-E_2(10^{12k+6})$	$\frac{7921(10^{24k+12}-1)}{7777}=\left(\frac{7921\cdot10^{12k+6}-1068}{7777}\right)^2-\left(\frac{1068\cdot10^{12k+6}-7921}{7777}\right)^2$ $\frac{144(10^{24k+12}-1)}{7777}=\left(\frac{1068\cdot10^{12k+6}-144}{7777}\right)^2-\left(\frac{144\cdot10^{12k+6}-1068}{7777}\right)^2$
⋮	⋮

與其自我相似的兩平方差再現數與特定有序的有理數對化成純循環小數之關聯性（II）		
(m,n,u,v)	$\left(\dfrac{n^2}{p},\dfrac{mn}{p}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{\boxed{C}}\\0.\overline{\boxed{D}}\end{pmatrix}$
$\left(\underline{\underline{7}},\underline{\underline{4}},\dfrac{7\cdot10^{2k+1}-4}{33},\dfrac{4\cdot10^{2k+1}-7}{33}\right)$	$\left(\dfrac{16}{33},\dfrac{28}{33}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{48}\\0.\overline{84}\end{pmatrix}$
$(147,48)\to(1484847,484848)\to(14848484847,4848484848)$		
$\left(\underline{\underline{10}},\underline{\underline{1}},\dfrac{10\cdot10^{2k+1}-1}{99},\dfrac{10^{2k+1}-10}{99}\right)$	$\left(\dfrac{1}{99},\dfrac{10}{99}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{01}\\0.\overline{10}\end{pmatrix}$
$(100,01)\to(1010100,010101)\to(10101010100,0101010101)$		
$\left(\underline{\underline{127}},\underline{\underline{16}},\dfrac{127\cdot10^{6k+3}-16}{15873},\dfrac{16\cdot10^{6k+3}-127}{15873}\right)$	$\left(\dfrac{256}{15873},\dfrac{2032}{15873}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{016128}\\0.\overline{128016}\end{pmatrix}$
$(1016127,016128)\to(1016128016128016127,016128016128016128)$		
$\left(\underline{\underline{57}},\underline{\underline{20}},\dfrac{57\cdot10^{6k+3}-20}{2849},\dfrac{20\cdot10^{6k+3}-57}{2849}\right)$	$\left(\dfrac{400}{2849},\dfrac{1140}{2849}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{140400}\\0.\overline{400140}\end{pmatrix}$
$(1140399,140400)\to(1140400140400140399,140400140400140400)$		
$\left(\underline{\underline{5}},\underline{\underline{2}},\dfrac{5\cdot10^{6k+3}-2}{21},\dfrac{2\cdot10^{6k+3}-5}{21}\right)$	$\left(\dfrac{4}{21},\dfrac{10}{21}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{190476}\\0.\overline{476190}\end{pmatrix}$
$(1190475,190476)\to(1190476190476190475,190476190476190476)$		
$\left(\underline{\underline{11}},\underline{\underline{2}},\dfrac{11\cdot10^{6k+3}-2}{117},\dfrac{2\cdot10^{6k+3}-11}{117}\right)$	$\left(\dfrac{4}{117},\dfrac{22}{117}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{034188}\\0.\overline{188034}\end{pmatrix}$
$(1034187,034188)\to(1034188034188034187,034188034188034188)$		
$\left(\underline{\underline{53}},\underline{\underline{20}},\dfrac{53\cdot10^{8k+4}-20}{2409},\dfrac{20\cdot10^{8k+4}-53}{2409}\right)$	$\left(\dfrac{400}{2409},\dfrac{1060}{2409}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{16604400}\\0.\overline{44001660}\end{pmatrix}$
$(116604399,16604400)\to(1166044001660440016604399,166044001660440016604400)$		
$\left(\underline{\underline{85}},\underline{\underline{52}},\dfrac{85\cdot10^{8k+4}-52}{4521},\dfrac{52\cdot10^{8k+4}-85}{4521}\right)$	$\left(\dfrac{2704}{4521},\dfrac{4420}{4521}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{59809776}\\0.\overline{97765980}\end{pmatrix}$
$(159809775,59809776)\to(1598097765980977659809775,598097765980977659809776)$		
$\left(\underline{\underline{119}},\underline{\underline{18}},\dfrac{119\cdot10^{8k+4}-18}{13837},\dfrac{18\cdot10^{8k+4}-119}{13837}\right)$	$\left(\dfrac{324}{13837},\dfrac{2142}{13837}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{02341548}\\0.\overline{15480234}\end{pmatrix}$
$(102341547,02341548)\to(1023415480234154802341547,023415480234154802341548)$		
$\left(\underline{\underline{118}},\underline{\underline{19}},\dfrac{118\cdot10^{8k+4}-19}{13563},\dfrac{19\cdot10^{8k+4}-118}{13563}\right)$	$\left(\dfrac{361}{13563},\dfrac{2242}{13563}\right)$	$\begin{pmatrix}0.\overline{02661653}\\0.\overline{16530266}\end{pmatrix}$
$(102661652,02661653)\to(1026616530266165302669775,026616530266165302661653)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		

附錄五：與特定有理數相關聯的兩平方差再現數

和同一特定有理數相關聯的兩平方差再現數及與其自我相似的數式（$r=10^n$）	
$N'_2=\boxed{a}\,\&\,\boxed{b}=b'^2-a'^2=a'\cdot r+b'$	
$(N_2\,,N'_2)\Leftrightarrow\dfrac{n^2}{p}$	$(N'_2\,,N_2)$
$(147\,,48)$ $16/33=0.\overline{48}$	$(\underline{48}\,\underline{48}\,\underline{48}\,,1\underline{48}\,\underline{48}\,47)$
$(13467\,,3468)$ $1156/3333=0.\overline{3468}$	$(\underline{3468}\,\underline{3468}\,\underline{3468}\,,1\underline{3468}\,\underline{3468}\,3467)$
$(1016127\,,016128)$ $256/15873=0.\overline{016128}$	$(\underline{016128}\,\underline{016128}\,\underline{016128}\,,1\underline{016128}\,\underline{016128}\,016127)$
$(1034187\,,034188)$ $4/117=0.\overline{034188}$	$(\underline{034188}\,\underline{034188}\,\underline{034188}\,,1\underline{034188}\,\underline{034188}\,034187)$
$(1140399\,,140400)$ $400/2849=0.\overline{140400}$	$(\underline{140400}\,\underline{140400}\,\underline{140400}\,,1\underline{140400}\,\underline{140400}\,140399)$
$(1190475\,,190476)$ $4/21=0.\overline{190476}$	$(\underline{190476}\,\underline{190476}\,\underline{190476}\,,1\underline{190476}\,\underline{190476}\,190475)$
$(1216512\,,216513)$ $729/3367=0.\overline{216513}$	$(\underline{216513}\,\underline{216513}\,\underline{216513}\,,1\underline{216513}\,\underline{216513}\,216512)$
$(1300624\,,300625)$ $625/2079=0.\overline{300625}$	$(\underline{300625}\,\underline{300625}\,\underline{300625}\,,1\underline{300625}\,\underline{300625}\,300624)$
$(1416767\,,416768)$ $1024/2457=0.\overline{416768}$	$(\underline{416768}\,\underline{416768}\,\underline{416768}\,,1\underline{416768}\,\underline{416768}\,416767)$
$(1484847\,,484848)$ $16/33=0.\overline{484848}$	$(\underline{484848}\,\underline{484848}\,\underline{484848}\,,1\underline{484848}\,\underline{484848}\,484847)$
$(1530900\,,530901)$ $2809/5291=0.\overline{530901}$	$(\underline{530901}\,\underline{530901}\,\underline{530901}\,,1\underline{530901}\,\underline{530901}\,530900)$
$(102341547\,,02341548)$ $324/13837=0.\overline{02341548}$	$(\underline{02341548}\,\underline{02341548}\,\underline{02341548}\,,1\underline{02341548}\,\underline{02341548}\,02341547)$
$(102661652\,,02661653)$ $361/13563=0.\overline{02661653}$	$(\underline{02661653}\,\underline{02661653}\,\underline{02661653}\,,1\underline{02661653}\,\underline{02661653}\,02669775)$
⋮ ⋮	⋮ ⋮

<table>
<tr><td>$r=10^{n}$</td><td>$E_2(r)$的冪數生成原理及與其自我相似的整數分解式 $\Leftrightarrow \left(\dfrac{n^2}{p},\dfrac{mn}{p}\right)$</td></tr>
<tr><td>(m,n,u,v)</td><td>$\left(53,20,\dfrac{53\cdot 10^{8k+4}-20}{2409},\dfrac{20\cdot 10^{8k+4}-53}{2409}\right)\Rightarrow\left(\dfrac{400}{2409},\dfrac{1060}{2409}\right)$</td></tr>
<tr><td>(N_2,N_2')</td><td>$\dfrac{2809(10^{16k+8}-1)}{2409}=\left(\dfrac{2809\cdot 10^{8k+4}-1060}{2409}\right)^2-\left(\dfrac{1060\cdot 10^{8k+4}-2809}{2409}\right)^2$
$\dfrac{400(10^{16k+8}-1)}{2409}=\left(\dfrac{1060\cdot 10^{8k+4}-400}{2409}\right)^2-\left(\dfrac{400\cdot 10^{8k+4}-1060}{2409}\right)^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">11660 4399
1166044001660 4400166044399
1166044001660440016601660 4400166044001660440016604399
⋮</td></tr>
<tr><td>(m,n,u,v)</td><td>$\left(85,52,\dfrac{85\cdot 10^{8k+4}-52}{4521},\dfrac{52\cdot 10^{8k+4}-85}{4521}\right)\Rightarrow\left(\dfrac{2704}{4521},\dfrac{4420}{4521}\right)$</td></tr>
<tr><td>(N_2,N_2')</td><td>$\dfrac{7225(10^{16k+8}-1)}{4521}=\left(\dfrac{7225\cdot 10^{8k+4}-4420}{4521}\right)^2-\left(\dfrac{4420\cdot 10^{8k+4}-7225}{4521}\right)^2$
$\dfrac{2704(10^{16k+8}-1)}{4521}=\left(\dfrac{4420\cdot 10^{8k+4}-2704}{4521}\right)^2-\left(\dfrac{2704\cdot 10^{8k+4}-4420}{4521}\right)^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">15980 9775
1598097765980 9776598099775
1598097765980977659809776598 0 9776598097765980977659809775
⋮</td></tr>
<tr><td>(m,n,u,v)</td><td>$\left(119,18,\dfrac{119\cdot 10^{8k+4}-18}{13837},\dfrac{18\cdot 10^{8k+4}-119}{13837}\right)\Rightarrow\left(\dfrac{324}{13837},\dfrac{2142}{13837}\right)$</td></tr>
<tr><td>(N_2,N_2')</td><td>$\dfrac{14161(10^{16k+8}-1)}{13837}=\left(\dfrac{14161\cdot 10^{8k+4}-2142}{13837}\right)^2-\left(\dfrac{2142\cdot 10^{8k+4}-14161}{13837}\right)^2$
$\dfrac{324(10^{16k+8}-1)}{13837}=\left(\dfrac{2142\cdot 10^{8k+4}-324}{13837}\right)^2-\left(\dfrac{324\cdot 10^{8k+4}-2142}{13837}\right)^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">10234 1547
1023415480234 1548023411547
1023415480234154802341548 0234 1548023415480234154802341547
⋮</td></tr>
<tr><td>(m,n,u,v)</td><td>$\left(118,19,\dfrac{118\cdot 10^{8k+4}-19}{13563},\dfrac{19\cdot 10^{8k+4}-118}{13563}\right)\Rightarrow\left(\dfrac{361}{13563},\dfrac{2242}{13563}\right)$</td></tr>
<tr><td>(N_2,N_2')</td><td>$\dfrac{13924(10^{16k+8}-1)}{13563}=\left(\dfrac{13924\cdot 10^{8k+4}-2242}{13563}\right)^2-\left(\dfrac{2242\cdot 10^{8k+4}-13924}{13563}\right)^2$
$\dfrac{361(10^{16k+8}-1)}{13563}=\left(\dfrac{2242\cdot 10^{8k+4}-361}{13563}\right)^2-\left(\dfrac{361\cdot 10^{8k+4}-2242}{13563}\right)^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">10266 1652
1026616530266 1653026611652
10266165302661653 0266 16530266165302661652
⋮</td></tr>
</table>

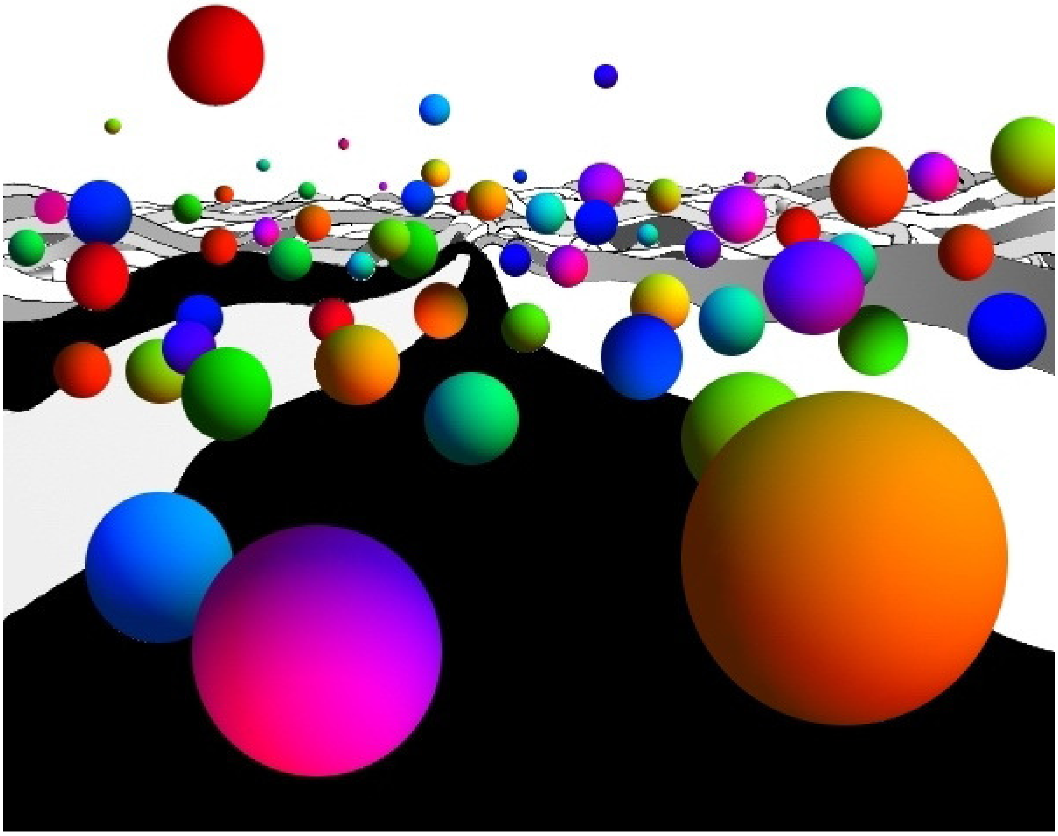
(m,n,u,v)	$\left(5765,3326,\dfrac{5765\cdot 10^{10k+5}-3326}{22172949},\dfrac{3326\cdot 10^{10k+5}-5765}{22172949}\right)\Rightarrow\left(\dfrac{11062276}{22172949},\dfrac{19174390}{22172949}\right)$
(N_2,N_2')	$\dfrac{33235225(10^{20k+10}-1)}{22172949}=\left(\dfrac{33235225\cdot 10^{10k+5}-19174390}{22172949}\right)^2-\left(\dfrac{19174390\cdot 10^{10k+5}-33235225}{22172949}\right)^2$ $\dfrac{11062276(10^{20k+10}-1)}{22172949}=\left(\dfrac{19174390\cdot 10^{10k+5}-11062276}{22172949}\right)^2-\left(\dfrac{11062276\cdot 10^{10k+5}-19174390}{22172949}\right)^2$
	149890　86475 **1498908647649890　864764989086475** **14989086476498908647649890　8647649890864764989086475** ⋮

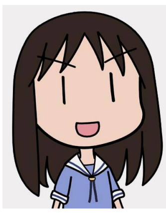
$r=10^n$	$E_2(r)$的冪數生成原理及與其自我相似的整數分解式$\Leftrightarrow\left(\dfrac{v^2}{q},\dfrac{uv}{q}\right)$
(m,n,u,v)	$\left(\dfrac{86\cdot 10^{8k+4}+13}{7227},\dfrac{13\cdot 10^{8k+4}+86}{7227},86,13\right)\Rightarrow\left(\dfrac{169}{7227},\dfrac{1118}{7227}\right)$
(N_2,N_2')	$\dfrac{(86\cdot 10^{8k+4}+13)^2}{7227}=\left(\dfrac{7396\cdot 10^{8k+4}+1118}{7227}\right)^2-\left(\dfrac{1118\cdot 10^{8k+4}+169}{7227}\right)^2$ $\dfrac{(13\cdot 10^{8k+4}+86)^2}{7227}=\left(\dfrac{1118\cdot 10^{8k+4}+7396}{7227}\right)^2-\left(\dfrac{169\cdot 10^{8k+4}+1118}{7227}\right)^2$
	10234　1547 **1023415480234　154802341547** **102341548023415480234　15480234154802341547** ⋮
(m,n,u,v)	$\left(\dfrac{87\cdot 10^{8k+4}+14}{7373},\dfrac{14\cdot 10^{8k+4}+87}{7373},87,14\right)\Rightarrow\left(\dfrac{196}{7373},\dfrac{1218}{7373}\right)$
(N_2,N_2')	$\dfrac{(87\cdot 10^{8k+4}+14)^2}{7373}=\left(\dfrac{7569\cdot 10^{8k+4}+1218}{7373}\right)^2-\left(\dfrac{1218\cdot 10^{8k+4}+196}{7373}\right)^2$ $\dfrac{(14\cdot 10^{8k+4}+87)^2}{7373}=\left(\dfrac{1218\cdot 10^{8k+4}+7569}{7373}\right)^2-\left(\dfrac{196\cdot 10^{8k+4}+1218}{7373}\right)^2$
	10266　1652 **1026616530266　165302661652** **102661653026616530266　16530266165302661652** ⋮
(m,n,u,v)	$\left(\dfrac{220\cdot 10^{8k+4}+83}{41511},\dfrac{83\cdot 10^{8k+4}+220}{41511},220,83\right)\Rightarrow\left(\dfrac{6889}{41511},\dfrac{18260}{41511}\right)$
(N_2,N_2')	$\dfrac{(220\cdot 10^{8k+4}+83)^2}{41511}=\left(\dfrac{48400\cdot 10^{8k+4}+18260}{41511}\right)^2-\left(\dfrac{18260\cdot 10^{8k+4}+6889}{41511}\right)^2$ $\dfrac{(83\cdot 10^{8k+4}+220)^2}{41511}=\left(\dfrac{18260\cdot 10^{8k+4}+48400}{41511}\right)^2-\left(\dfrac{6889\cdot 10^{8k+4}+18260}{41511}\right)^2$
	11660　4399 **1166044001660　440016604399** **116604400166044001660　44001660440016604399** ⋮

(m,n,u,v)	$\left(\frac{188\cdot 10^{8k+4}+115}{22119},\frac{115\cdot 10^{8k+4}+188}{22119},188,115\right)\Rightarrow\left(\frac{13225}{22119},\frac{21620}{22119}\right)$
(N_2,N_2')	$\frac{(188\cdot 10^{8k+4}+115)^2}{22119}=\left(\frac{35344\cdot 10^{8k+4}+21620}{22119}\right)^2-\left(\frac{21620\cdot 10^{8k+4}+13225}{22119}\right)^2$ $\frac{(115\cdot 10^{8k+4}+188)^2}{22119}=\left(\frac{21620\cdot 10^{8k+4}+35344}{22119}\right)^2-\left(\frac{13225\cdot 10^{8k+4}+21620}{22119}\right)^2$
15980 **9775** **1$\underline{598097765}$5980** **$\underline{977659809}$9775** **1$\underline{598097765980977}$65980** **$\underline{97765980977659809}$775** ⋮	
(m,n,u,v)	$\left(\frac{26\cdot 10^{10k+5}+15}{451},\frac{15\cdot 10^{10k+5}+26}{451},26,15\right)\Rightarrow\left(\frac{225}{451},\frac{390}{451}\right)$
(N_2,N_2')	$\frac{(26\cdot 10^{10k+5}+15)^2}{451}=\left(\frac{676\cdot 10^{10k+5}+390}{451}\right)^2-\left(\frac{390\cdot 10^{10k+5}+225}{451}\right)^2$ $\frac{(15\cdot 10^{10k+5}+26)^2}{451}=\left(\frac{390\cdot 10^{10k+5}+676}{451}\right)^2-\left(\frac{225\cdot 10^{10k+5}+390}{451}\right)^2$
149890 **86475** **1$\underline{4989086476}$49890** **$\underline{8647649890}$86475** **1$\underline{49890864764989086476}$49890** **$\underline{86476498908647649890}$86475** ⋮	

兩平方差再現數（有意思數字 Amazing Numbers Game）

A Certain Type of Number Expressible as Self-similar Difference of Squares





Thank you for your attention！

SA11-004 黃筠軒