第十一屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA11-034

作品名稱：Folded Cube-Connected Cycles Graphs

姓名：戴華

關鍵字：Folded Cube-Connected Cycles Graphs、Cube-Connected Cycles Graphs、Lengths

目錄

摘　要

圖論中有一種圖稱Hypercube(超立方體)Q_n，由於它具有許多可硬應用在網絡上的優異性質如遞迴性結構、規則性、有系統性的、連結度小、低複雜性等等，因此延伸出了許多種圖，其中一種圖為Folded Hypercube FQ_n，一種在Hypercube中任一對相距最遠的兩點之間加上一條邊的圖。然後，再把Folded Hypercube中的每一點換成一個cycle並且該cycle再和原來跟該點相連的各邊分別相交而形成點，這樣便得到了Folded Cube-Connected Cycles $FCCC_n$。在本報告中，當n為奇數的時候，我們以「遞迴法」、「捷徑法」、「path連接法」找到了在$FCCC_n$中大部分長度的cycle，它的過程可以分成兩大部分，第二部分承接著第一部分的”遞迴王道原則”繼續用大量的遞迴並接上第二部分獨特的遞迴path法與連接法完成。雖然我們並未達到預期的目的完成所有的cycle，但快達陣了，未來將把剩下所剩無幾的cycle找出來。由於我們找到了大部分且連續長度的cycle，將使FCCC這個網絡的運作靈活度大幅提升而這表示在此網絡系統中我們可以靈活的依工作需求分配資源數量來進行團體工作並完成任務。

壹、研究動機

在這資訊爆炸的時代，資料的傳輸情況漸趨複雜，有個好的網絡系統顯的非常重要，因此我便對和這息息相關的圖論部份產生了興趣。又因為 cycle 的性質如「長度」等可以表示一個網絡迴圈中的情況而且 Folded Cube-Connected Cycles Graphs 在圖論中為非常重要的一種圖，所以我便著手進行了找尋 Folded Cube-Connected Cycles Graphs 內所有長度的 cycle。

貳、研究目的

我們希望在 Folded Cube-Connected Cycles Graphs($FCCC_n$)內找到所有長度的迴圈(cycle)。

參、 研究設備及器材

GSP 軟體、GRAPH 圖形模擬器

肆、研究方法與過程

一.名詞與符號的介紹

由於檔案空間大小的限制所以這邊只好割愛把基本介紹放到網路上面以茲參考(在書面資料上請見 P.2~P.5)，這是網址

http://db.tt/KKXHrYje

”遞迴法”、”捷徑法”尋找長度為 $(n+1)2^n$ **到** $(n+1)2^n*(\frac{1}{2})^2 = (n+1)2^{n-2}$ **的cycle**

我們分成：**二. 建立引理** 及 **三. 利用引理來尋找各長度的 cycle** 這兩階段來進行研究。

二.建立引理

(一)介紹遞迴圖

我們利用底下所提的九種遞迴方法生成 $FCCC_n$ 中一些具有特殊結構的 cycle，這些 cycle 依結構分別為 FA、FA'、FB、FC、FF 這五種「工具圖」。

至於九種遞迴方法如下(其中 j 為不小於 9 的正奇數，k 為非負偶數)：

"$FA_{j-2}\to FA_j$"、"$FA'_{j-2}\to FA'_j$"、"$FB_{j-2}\to FB_j$"、"$FC_{j-2,k}\to FC_{j,k}$"、"$FC_{j-2,k-2}\to FC_{j,k}$"、"$FF_{j-2,0}\to FF_{j,0}$"、 "$FF_{j-2,2}\to FF_{j,2}$"、"$FF_{j-2,k}\to FF_{j,k}$"、"$FF_{j-2,k-2}\to FF_{j,k}$"

英文字母右下角的第一個參數(假設是 n)是指它為 $FCCC_n$ 的一個生成子圖。

例如: $FC_{7,2}$ 的 7 是指它為 $FCCC_7$ 的一個生成子圖。

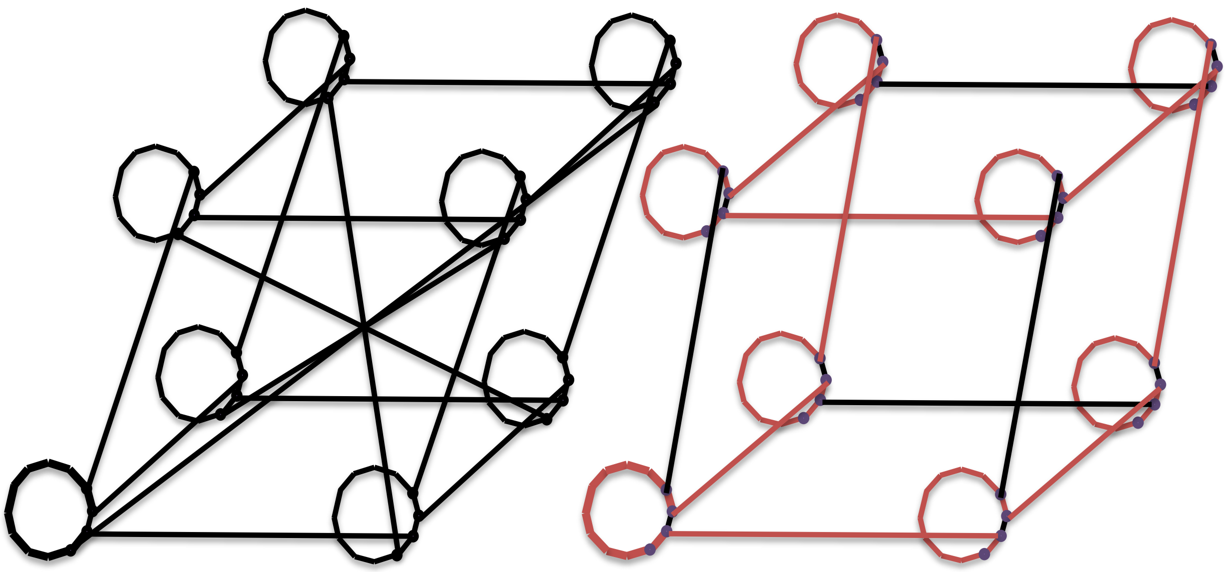
至於 $FC_{n,k}$ 的第二個參數 k 是指它未經過 $FCCC_n$ 的 k 個點，而 $FF_{n,k}$ 的的頂點數為 $FCCC_n$ 的頂點數$(n+1)*2^n$ 的一半再少了 k 個點，詳情請見下文。

例如: $FC_{9,2}$ 的 9 是指它為 $FCCC_9$ 的一個生成子圖、2 是指它未經過 2 個點。

在知道了各參數的意義之後在這邊有一點重要的提醒:對於 $FC_{j,k}$ 和 $FF_{j,k}$，它們的樣子並非唯一(由於遞迴過程不唯一，請見下文)，重點在於其參數的意義。

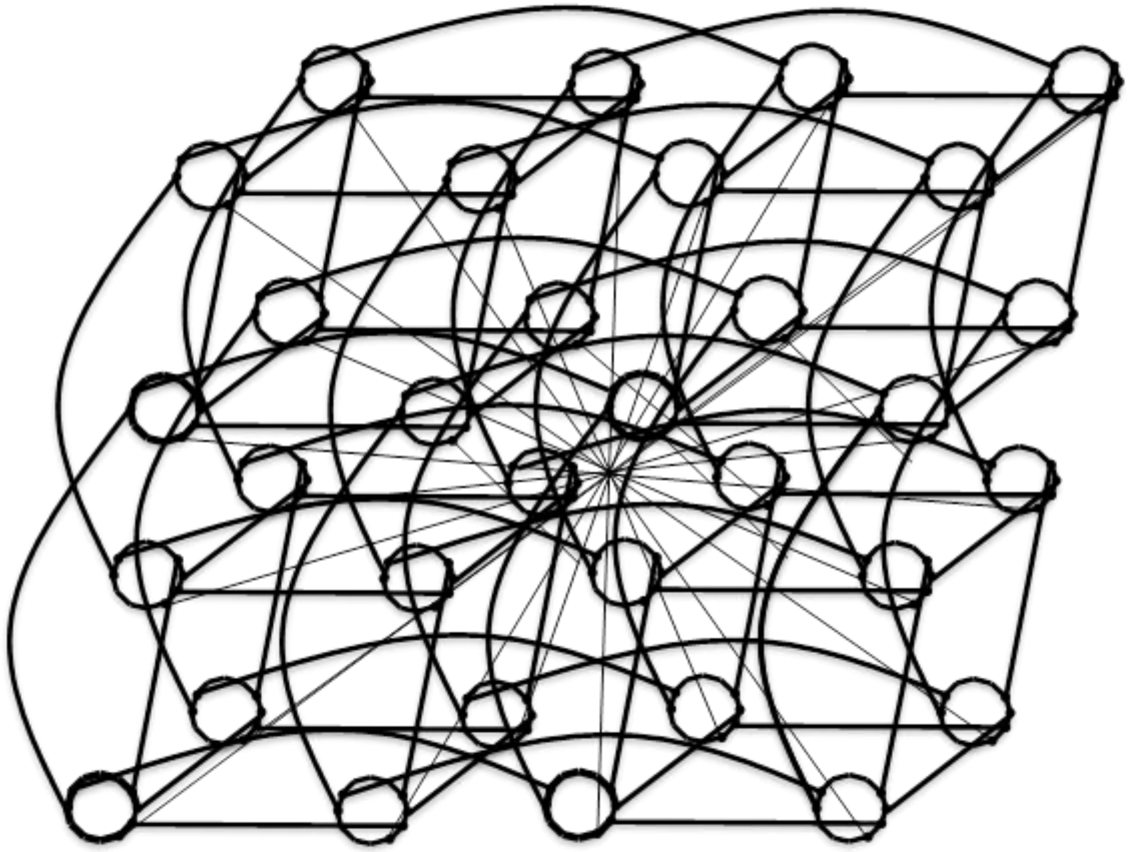
<u>第一種:$FA_{j-2}\to FA_j$(引理一)</u>

首先我們要定義 FA_3

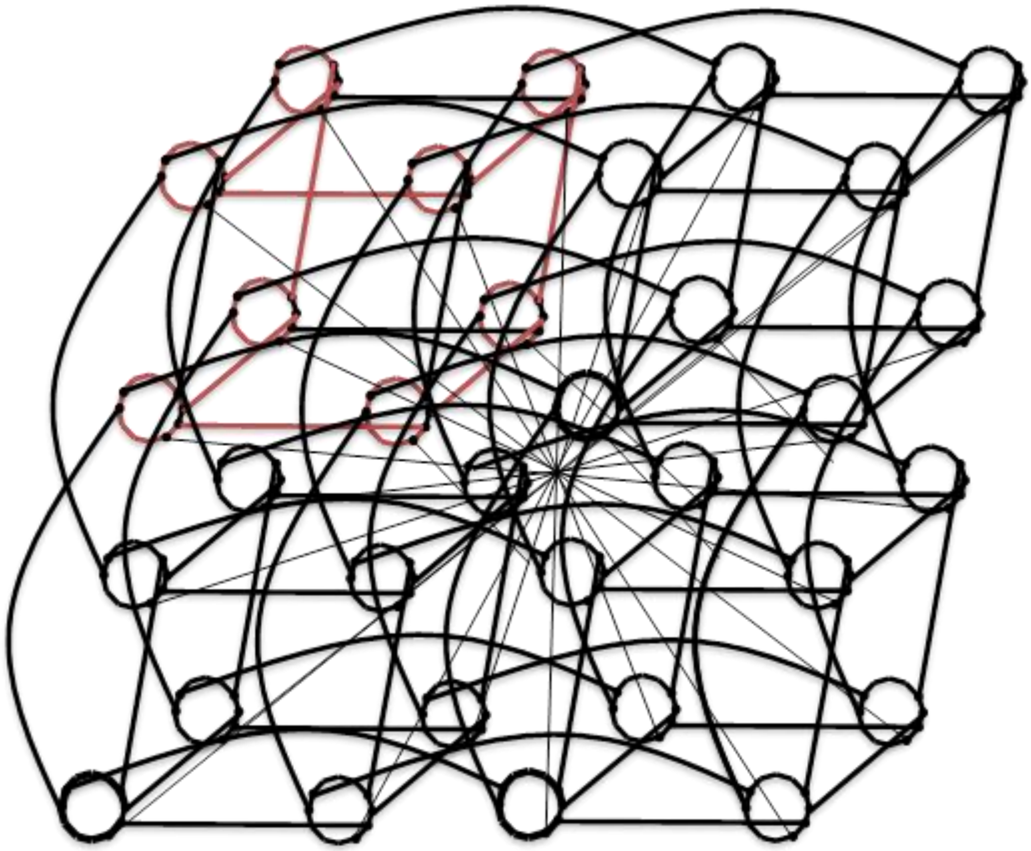


左圖是 $FCCC_3$，我們定義右圖中的紅色路線為 FA_3。

接下來我們要介紹 FA_n 的遞迴方式。既然現在已經知道 FA_3 的樣子，那我們下一個便想要知道 FA_5 的樣子。

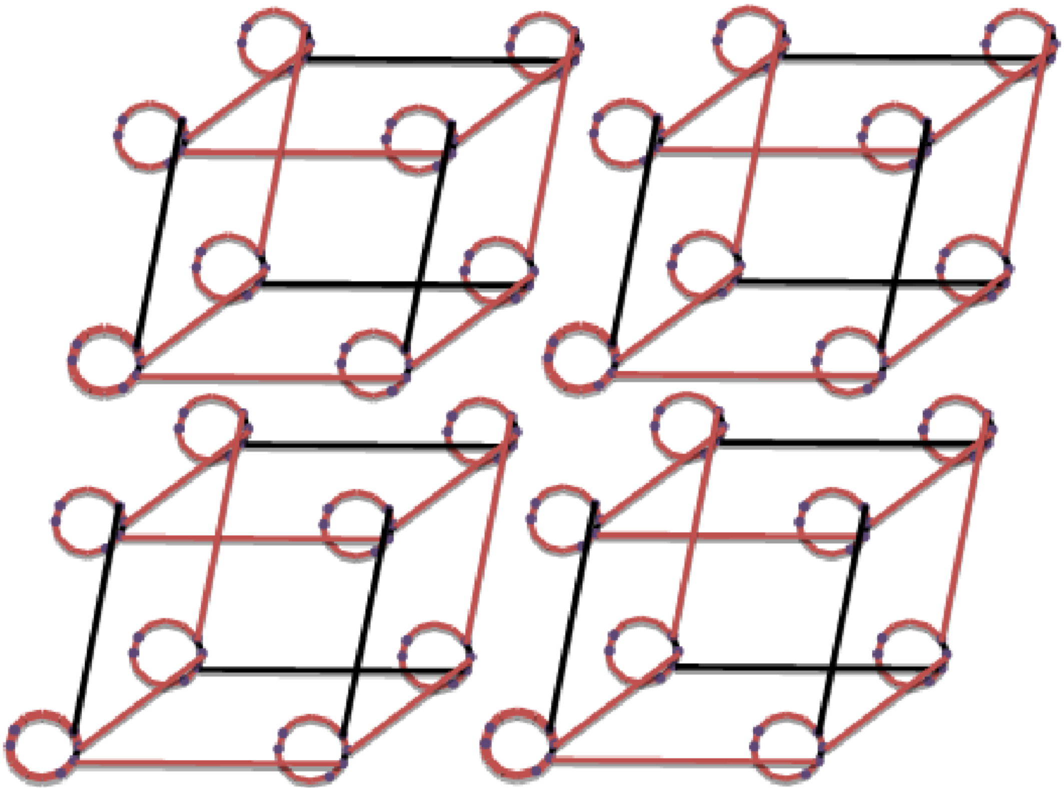


圖(一)FCCC$_5$



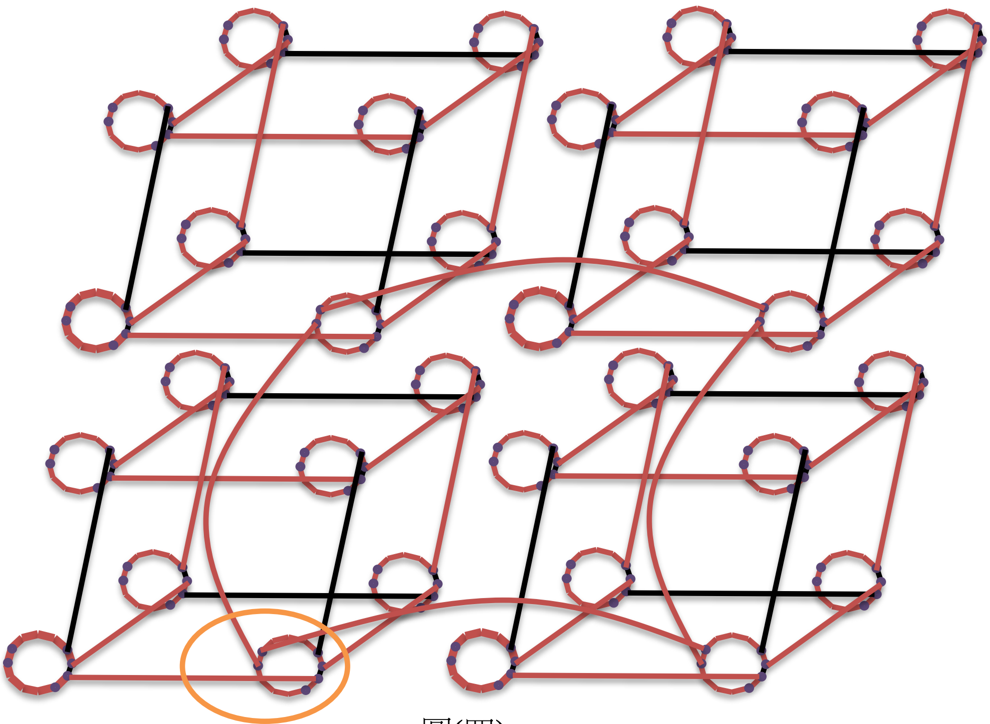
圖(二)

圖(一)是 $FCCC_5$，我們在其左上方放入 FA_3，如圖(二)，但是因為它是在 $FCCC_5$ 的環境中因此它的每一個紅環會多通過兩個點，我們定義它為FA_3^{10}，而右上方和左下方和右下方則分別是FA_3^{11} 、$FA_3^{00}FA_3^{01}$，再將它們放入後可得圖(三)



圖(三)

最後再如圖(四)把那四塊連結起來就完成了。



圖(四)

由於接下來的八種遞迴方法介紹若用上述的”真實圖呈現方式”，會過於複雜，因此我們接下來的說明將以”半真實圖半文字說明呈現方式”來輔助說明，又因為這九種遞迴方法的過程相似，所以之後的情況只要以上面介紹的方法來做即可，而其關鍵的差異我將在後面詳細說明。

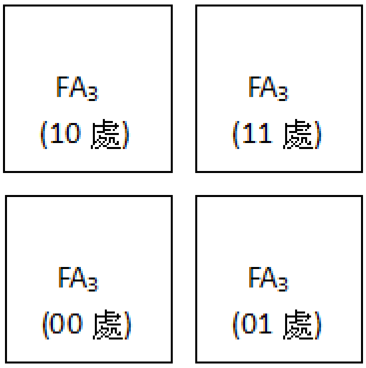
現在我們要先介紹何謂”半真實圖半文字說明呈現方式”。

茲舉**第一種:FA_{i-2}→FA_i**為例說明:

Step1:

在 $FCCC_5$ 的 00 處、10 處、11 處、01 處放入 FA_3 如圖(五)所示。

(此時尺寸不合)



圖(五)

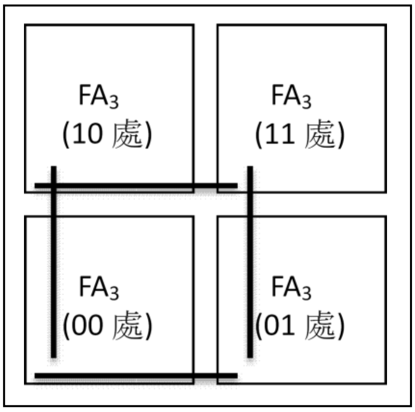
Step2:

由於 FA_3 的每一個紅環只有四個點而 $FCCC_5$ 的每一個環卻有六個點，因此此時尺寸不合，但是因為 FA_3 的每一個紅環都可以經過「在 $FCCC_5$ 環境下每一個環多的那兩點」，所以這時候我們加兩點來確保該置入的 FA_3 可以經過它所嵌入區塊的所有點，例如圖(三)。其中我們令加兩點之後的那四塊分別為

FA_3^{10} 、FA_3^{11} 、$FA_3^{00}FA_3^{01}$ 。

Step3:

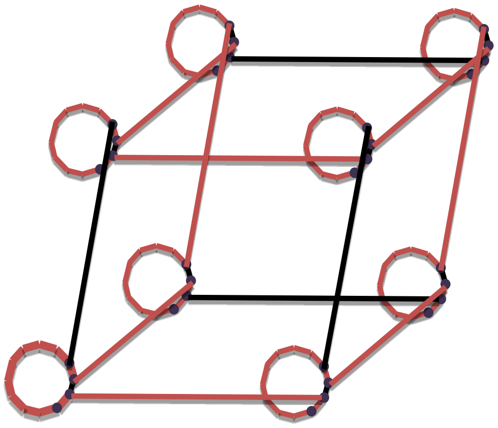
依照圖(四)的連結方法把FA_3^{10} 、FA_3^{11} 、$FA_3^{00}FA_3^{01}$連結起來，那四塊各剪破一個環並互相連結，那個剪破處是關鍵。而我們把圖(四)以圖(六)來簡示。



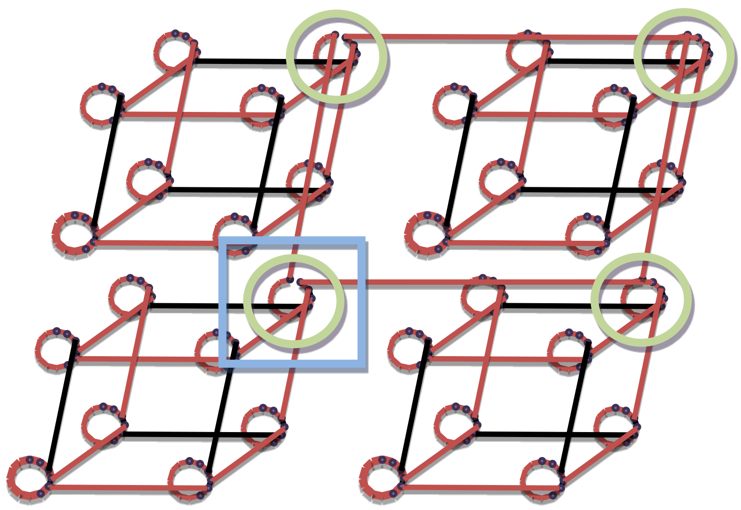
圖(六)

(粗黑線為四小塊之連結線)
這就是所謂的”半真實圖半文字說明呈現方式”
另外，再從 FA_5 繼續遞迴下去時其”剪破處”恆為我們在圖(四)中特別以橘色橢圓框框特別框起來的環。
接下來我們將以”半真實圖半文字說明呈現方式”來介紹第二種至第八種遞迴方法。
我們稱這邊的遞迴情況為引理一

第二種:$FA'_{j-2} \rightarrow FA'_j$(引理二)
首先我們要定義 FA'_3,圖(七)即為 FA'_3



圖(七) FA'_3
你也許會很好奇為什麼它和 FA_3 長的一模一樣,但它們在 FA'_5 以後就不一樣咯。
圖(八)是 FA'_5(請將其剪斷處與連接處與 FA_5 做比較)



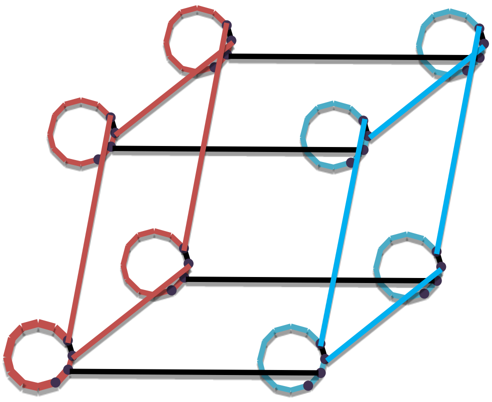
圖(八) FA'_5
接下來是遞迴方式
它的方法和第一種的三個 step 大致相同，唯一不同且有趣的地方在於 step3 的連結方法稍有不同，比較圖(七) FA'_3 和圖(八)是 FA'_5 後你可以注意到它們”塊塊相連處”不太一樣吧!

在 FA’之後的遞迴的"塊塊相連處”(如圖八的綠框框處)位置恆為最左下角的小立方塊的右上後方點(如圖八的藍方框框處)，而那正是關鍵所在。

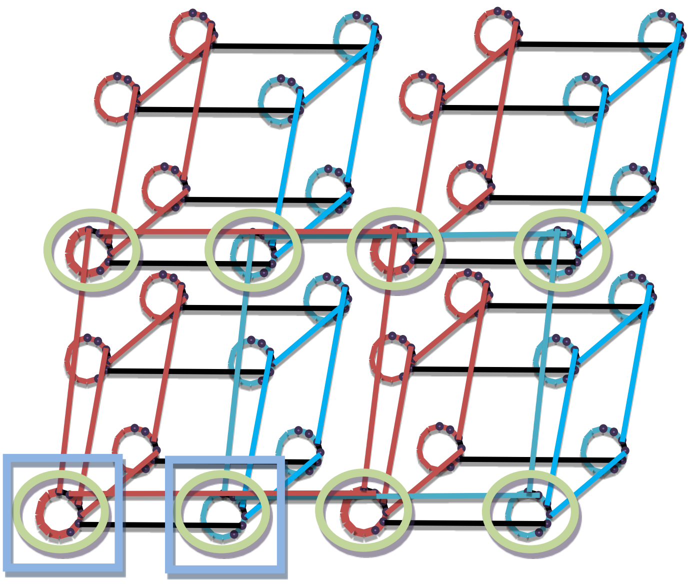
<u>我們稱這邊的遞迴情況為引理二</u>

<u>第三種:$FB_{i-2}\rightarrow FB_i$(引理三)</u>

首先我們要定義 FB_3,圖(九)即為 FB_3



圖(九) FB_3



圖(十) FB_5

接下來是遞迴方式

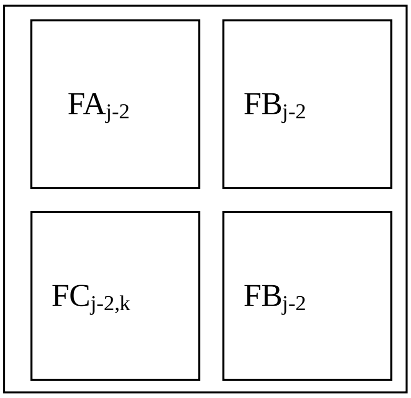
它的方法也和第一種的三個 step 大致相同，不同的地方在於 step3 的連結方法，注意它的"塊塊相連處”(上圖綠框框處)。

在 FB 之後的遞迴的"塊塊相連處”(如圖八的綠框框處)位置恆為最左下角的小立方塊的左下前方點和右下前方點(如圖十的藍方框框處)，而那正是關鍵所在。

<u>我們稱這邊的遞迴情況為引理三</u>

第四種: $FC_{j-2,k} \rightarrow FC_{j,k}$(引理四)

接下來的 FC 除了 step3 的連結方法不同外還有 Step1 放入的東西有所不同。
關於放入的東西有何不同我們以簡圖(十一)表示



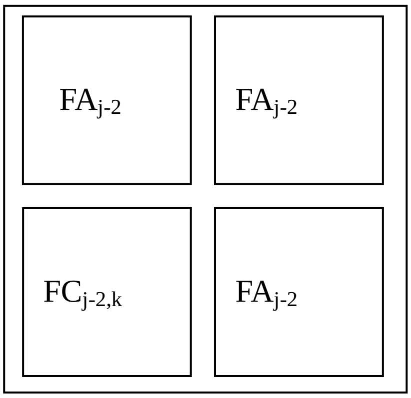
圖(十一)

至於 step3 的連結方法則和第二種的一模一樣。

我們稱這邊的遞迴情況為引理四

第五種: $FC_{j-2,k-2} \rightarrow FC_{j,k}$(引理五)

因為這個第五種和上面的第四種情況相似，所以我只解紹它在 step2 和 step3 的
關於放入的東西有何不同我們以簡圖(十二)表示



圖(十二)

至於 step3 的連結方法則和第一種的一模一樣

我們稱這邊的遞迴情況為引理五

由於空間大小的限制我們將把**第六種、第七種、第八種和第九種**放到網路空間上以供點閱，會這樣做是真的迫於無奈，只好選擇一些部份如是處理，被放上去的資料亦非常重要(在書面資料中請參考 P.13~P.18)。這是網址:http://db.tt/PCgUbAQW

第六種: $FF_{j-2,0} \rightarrow FF_{j,0}$(引理六)

第七種: $FF_{j-2,2} \rightarrow FF_{j,2}$(引理七)

第八種: $FF_{j-2,k} \to FF_{j,k}$(引理八)

這個第八種的過程依然和前面相似，差別亦只在於 Step1 放入的東西和 step3 的連結方法。

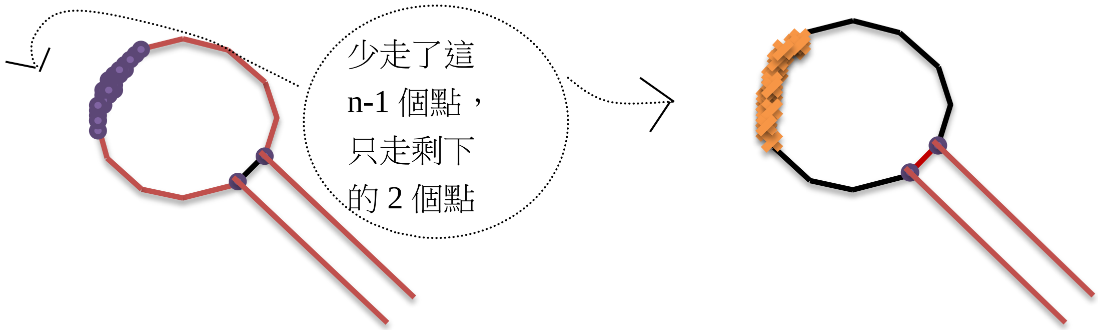
第九種: $FF_{j-2,k-2} \to FF_{j,k}$(引理九)

第九種的情況和第八種的情況相似，我們將介紹其 step1 和 step3 的不同。

(二)使用捷徑法縮小在單位 cycle 上走過的長度

由定義可知當 $FQ_n \to FCCC_n$ 時每個點所爆出的 cycle 上含有(n+1)個點。

捷徑法：



如上圖所示，在通過單位 cycle 時，我們縮小為只走過 n+1 個點中的 2 點。因此，每縮小一個「由 FQ_n 的一點所爆出的單位 cycle」，可使原來 cycle 的長度減少了 (n+1)-2=n-1。

引理十: 每縮小一個「由 FQ_n 的一點所爆出的單位 cycle」可使原來 cycle 的長度減少了 n+1-2=n-1。

(三) $FCCC_n$ 所含有 cycle「可能」的長度

因為 $FCCC_n$ 在 n 為奇數的時候是二分圖，點的數目要為偶數才有可能形成 cycle，所以 $FCCC_n$ 所含有 cycle「可能」的長度為

$(n+1)2^n, (n+1)2^n-2, (n+1)2^n-4, \ldots, (n+1)2^n-2k, \ldots, 4, 2$。

引理十一: $FCCC_n$ 所含有 cycle「可能」的長度為 $(n+1)2^n, (n+1)2^n-2, (n+1)2^n-4, \ldots, (n+1)2^n-2k, \ldots, 4, 2$。

註:關於為何 $FCCC_n$ 在 n 為奇數的時候是二分圖，這已經可以被證明，但因為其證明不是本篇重點並且其證明過程篇幅過於龐大因此在這邊從略。

為何當一個圖為二分圖時點的數目要為偶數才有可能形成 cycle，請見[1]。

(四)循環組數

由引理十得知「若今已找出長度為 s 的 cycle 並且有 t_0 個可縮小的單位 cycle，則我們找到的 cycle 長度為 s,s-(n-1), s-2(n-1), s-3(n-1),……,s-t_0(n-1)」，我們稱 s,s-(n-1), s-2(n-1), s-3(n-1),……,s-t_0(n-1)等數為「s 循環組數」

，此時如果我們只有找到 s 的長度則還會缺漏掉 s-2,s-2-(n-1), s-2-2(n-1), s-2-3(n-1),……,s-2-t_1(n-1)的「s-2 循環組數」、s-4,s-4-(n-1),s-4-2(n-1),s-4-3(n-1),……,s-4-t_2(n-1)的「s-4 循環組數」、s-6,s-6-(n-1),s-6-2(n-1),s-6-3(n-1),……,s-6-t_3(n-1)的「s-6 循環組數」、……
s-k,s-k-(n-1),s-k-2(n-1),s-k-3(n-1),……,s-k-$t_{k/2}$(n-1)的「s-k 循環組數」(說明:因為若 k=n-1，則在 s 循環組數中即找到了，因此 k 不需要到 n-1，k 到(n-1)-2=n-3 即可，又因為 $FCCC_n$ 在 n 為奇數的時候是二分圖，所以有 s-0,s-2,s-4,...,s-(n-3)共(n-1)/2 組循環組數首項)，因此我們一開始將從各循環組數的首項 s,s-2,s-4,s-6,s-8,..., s-k 找起，再用捷徑法向下找，如此一來就不會有缺漏的情況發生。

引理十二:各循環組數的首項 s,s-2,s-4,s-6,s-8,...,s-k,...s-(n-3)本身已為一遞迴數列，而其中的每一個數 s-k 可再擴充出一個遞迴數列 s-k,s-k-(n+1), s-k-2(n+1)……。

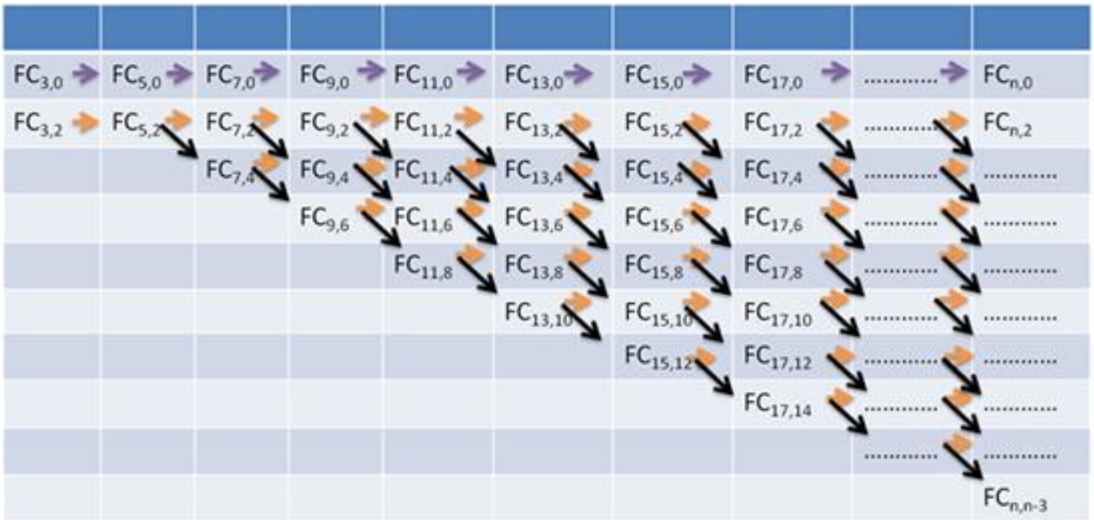
三. 找尋長度為 $(n+1)2^n$ 到 $(n+1)2^n*(\frac{1}{2})^2 = (n+1)2^{n-2}$ 的 cycle

重要聲明與提醒:前面所提到的 $FC_{a,b}$ 與 $FF_{a,b}$ 形式者的壞 b 點為有順序的壞 0^n 處之 0,n,n-1,...n-b+2 的 b 個點，但是以下所提到的 $FC_{a,b}$ 與 $FF_{a,b}$ 的壞 b 點則為無順序的壞 0^n 處 b 個點，實際情況視各圖的遞迴生成而定

(一)找尋長度為 $(n+1)2^n$ 到 $(n+1)2^n*(\frac{1}{2})= (n+1)2^{n-1}$ 的 cycle

a.由引理十二知道，尋找各循環組數的首項 s,s-2,s-4,s-6,s-8,...,s-k(k=(n-3))很關鍵，而我們現在要找長度為 $(n+1)2^n$ 到 $(n+1)2^n*(\frac{1}{2})= (n+1)2^{n-1}$ 的 cycle，所以我們在這先尋找 $s=(n+1)2^n$ 時的各循環首項。

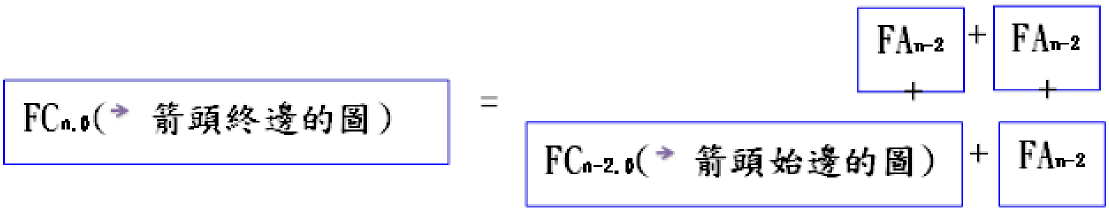
b.根據以上諸引理，我們可得一套建構各循環組數的首項 $FC_{n,k}$ 的程序，如下面的圖表所示。



其中，當 n 固定時，我們只需要看 k 等於 0,2,4,…,到(n-1)-2=n-3。例如，n=17 時，只需要看 k =0,2,4,…,17-3=14，如圖表之第八行所示。

由於 $FC_{n,0}=FA_n$，所以由引理一可得知上面這個圖表的 代表如下所示的操作方式(請參考用(圖一)生成(圖二)之方式)：

圖示：



由引理四的 $FC_{n-2,k} \rightarrow FC_{n,k}$ 可知圖表的 代表如下所示的操作方式(請參考用(圖七)生成(圖八)之方式)：

圖示：

$$FC_{n,k}(\rightarrow \text{箭頭終邊的圖}) = \begin{array}{ccc} & FA_{n-2} & + \; FB_{n-2} \\ & + & + \\ FC_{n-2,k}(\rightarrow \text{箭頭始邊的圖}) & + & FB_{n-2} \end{array}$$

由引理五的 $FC_{n-2,k-2} \rightarrow FC_{n,k}$ 可知圖表的 ↘ 代表如下所示的操作方式(請參考用(圖九)生成(圖十)之方式)：

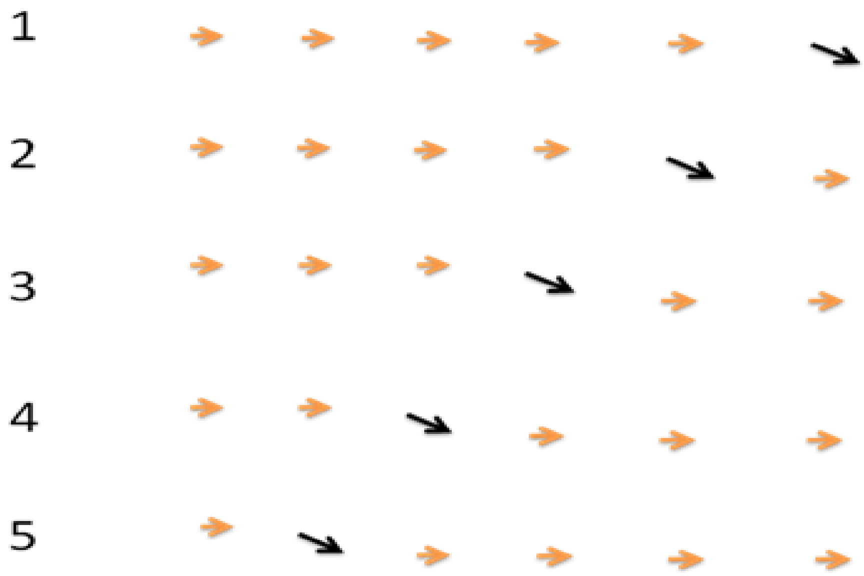
圖示：

$$FC_{n,k}(\searrow \text{箭頭終邊的圖}) = \begin{array}{ccc} & FA_{n-2} & + \; FA_{n-2} \\ & + & + \\ FC_{n-2,k-2}(\searrow \text{箭頭始邊的圖}) & + & FA_{n-2} \end{array}$$

c.由圖表不難看出對於 $FC_{n,k}(n>5,k>2)$, $FC_{n,k}$ 則存在大於一種的形成方法，再者，有其中一種方法可以提供最多數量的「可走捷徑之 cycle」，該方法為將所有 ↘ 放到最後做。

說明：因為對於 $FC_{a,b} \rightarrow FC_{c,d}$， ↘ 將使 $FC_{c,d}$ 的 11,01 處為 FA_a，而 → 將使 $FC_{c,d}$ 的 11,01 處為 FB_a。而且∀a≥3, FA_a 所能提供的 cycle 數比 FB_a 多，所以將所有 ↘ 放到最後做將可以提供最多數量的「可走捷徑之 cycle」。

例. $FC_{15,4}$



因為對於 $FC_{13,2(\text{或}4)} \rightarrow FC_{15,4}$，將  使 $FC_{15,4}$ 的 11,01 處為 FA_{13}，  將使 $FC_{15,4}$ 的 11,01 處為 FB_{13}，而且 FA_{13} 所能提供的 cycle 數比 FB_{13} 多，所以將所有  放到最後做將可以提供最多數量的「可走捷徑之 cycle」，所以在方法 1~5 中以 1 的方法可以提供最多數量的「可走捷徑之 cycle」。

$\boxed{d}$. 長度為 s,s-2,s-4,s-6,s-8,…,s-k(k=(n-3), s=(n+1)2^n)的 cycle 的尋找

從一開始的 $FC_{3,0}$ 或 $FC_{3,2}$，到底需要幾次遞迴操作才能生成 $FC_{a,b}$(其中，a 是不小於 3 的奇數，而 b 是不大於 a-3 的非負偶數)呢？顯然我們只要在原來的圖表裡數數看共有幾個箭頭即可。再進一步觀察，若 $FC_{j,k} \rightarrow FC_{p,q}$，則我們可將此→視為介於 j,p 之間的那一個偶數，於是，

要生成 $FC_{a,b}$ 所需要的遞迴次數=箭頭數目

=1(原表 $FC_{3,k} \rightarrow FC_{5,k(+2)}$的數字 4)+1(原表 $FC_{5,m} \rightarrow FC_{7,m(+2)}$的數字 6)+1(原表

$FC_{7,m} \rightarrow FC_{9,n(+2)}$的數字 8)+……+1(原表 $FC_{a-2,b(-2)} \rightarrow FC_{a,b}$ 的數字 a-1)

=[(a-1)-2]/2。

例. $FC_{15,4}$

[(a-1)-2]/2=[(15-1)-2]/2=6...符合。

e.尋找各循環首項的方法

s=L($FC_{n,0}$)：

([(n-1)-2]/2=(n-3)/2 個→)

s-2= L($FC_{n,2}$)：

([(n-1)-2]/2=(n-3)/2 個→)

s-4= L($FC_{n,4}$)：

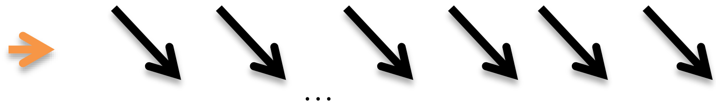
([(n-1)-2-2]/2=(n-5)/2 個→ ，1 個 ↘)

s-6=L($FC_{n,6}$)：

([(n-1)-2-2-2]/2=(n-5)/2 個→ ，2 個 ↘)

………

s-(n-3) =L($FC_{n,n-3}$)：



(1 個→ ，[(a-1)-2-2]/2=(n-5)/2 個↘)

比較： $FC_{n,2}$ 與 $FC_{n,4}$ (注意 s-2=L($FC_{n,2}$) 與 s-4= L($FC_{n,4}$))

重要說明:以下的 $a_1,a_2,a_3,\ldots a_n$ 為每一個紅環的地址，只會出現 0 或 1，首先分成前 n-3 個字和後 3 個字，前 n-3 個字倆倆一組，左邊的數字前面是 1 表示上，0 表示下，右邊的數字前面是 1 表示右，0 表示左;而後 3 個數字第一個數字為 1 表示上，0 表示下，第二個數字為 1 表示後，0 表示前，第三個數字為 1 表示右，0 表示左。這些有點複雜但卻對我們解決問題與說明有幫助。

$FC_{n,2}$ 的遞迴形成和 $FC_{n,4}$ 的遞迴形成過程

差在最後一步的 $11a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}(a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}\in\{0,1\})$處、

$01a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}(a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}\in\{0,1\})$處，及 $10(00)^{(n-2)/2}$、$11(00)^{(n-2)/2}$、

$00(00)^{(n-2)/2}$ 與 $01(00)^{(n-2)/2}$ 處。

其中，因為 $FC_{n,2}$ 的 $11a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}(a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}\in\{0,1\})$處與
$01a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}(a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}\in\{0,1\})$處皆為 FB_{n-2}，

而 $FC_{n,4}$ 的 $11a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}(a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}\in\{0,1\})$處與
$01a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}(a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}\in\{0,1\})$處皆為 FA_{n-2}，

並且每個 FA_{n-2} 能提供的「可走捷徑之 cycle」比 FB_{n-2} 多，

因此 $FC_{n,4}$ 可以提供的「可走捷徑之 cycle」在

$11a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}(a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}\in\{0,1\})$處、

$01a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}(a_1,a_2,a_3,\ldots a_{n-2}\in\{0,1\})$處與 $10(00)^{n-2}$ 處比 $FC_{n,2}$ 多了 2(兩個 FB_{n-2} 和兩個 FA_{n-2} 之替換)* 2^{n-5} (每個 FA_{n-2} 比 FB_{n-2} 可以多提供 $2^{n-2-3}=2^{n-5}$「可走捷徑之 cycle」)+ 1(在 $10(00)^{(n-5)/2}000$ 處 FB_{n-2} 比 FA_{n-2} 多壞一個)。

同理，$FC_{n,6}$ 比 $FC_{n,4}$ 多了 2(兩個 FB_{n-4} 和兩個 FA_{n-4} 之替換)* 2^{n-7} (每個 FA_{n-4} 比 FB_{n-4} 可以多提供 $2^{n-4-3}=2^{n-7}$「可走捷徑之 cycle」)+ 1(在 $00(10)^1(00)^{(n-7)/2}000$ 處 $FC_{n,4}$ 比 $FC_{n,6}$ 多壞一個)，

$FC_{n,8}$ 比 $FC_{n,6}$ 多了 $2*2^{n-9}+1$ 個「可走捷徑之 cycle」，

$FC_{n,10}$ 比 $FC_{n,8}$ 多了 $2*2^{n-11}+1$ 個「可走捷徑之 cycle，

………，

$FC_{n,n-3}$ 比 $FC_{n,n-5}$ 多了 $2*2^{n-(n-2)}+1=2*2^2+1$ 個「可走捷徑之 cycle」。

f.找到的「可走捷徑之 cycle 數量」

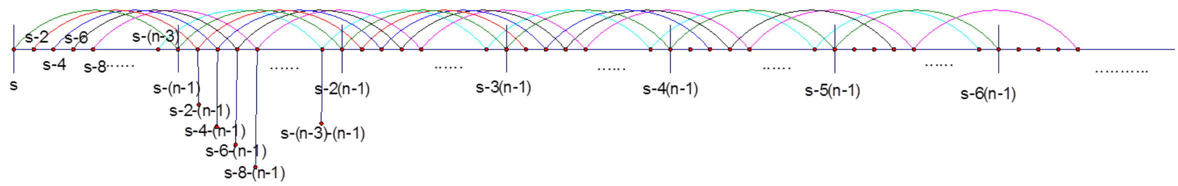
循環首項	「可走捷徑之 cycle 數量」
s= $L(FC_{n,0})$	2^n-2^{n-3}
s-2= $L(FC_{n,2})$	$2^n-\{2^{n-3}+1+[(2*2^0+1)+(2*2^2+1)+(2*2^4+1)+(2*2^6+1)+(2*2^8+1)+\ldots\ldots+(2*2^{n-7}+1)+(2*2^{n-5}+1)]\}$
s-4= $L(FC_{n,4})$	$2^n-\{2^{n-3}+1+[(2*2^0+1)+(2*2^2+1)+(2*2^4+1)+(2*2^6+1)+(2*2^8+1)+\ldots\ldots+(2*2^{n-7}+1)]\}$
……	……
s-(n-5)= $L(FC_{n,n-5})$	$2^n-\{2^{n-3}+1+[(2*2^0+1)+(2*2^2+1)]\}$
s-(n-3)= $L(FC_{n,n-3})$	$2^n-\{2^{n-3}+1+[(2*2^0+1)]\}$

因為各循環組數所提供的「cycle 數量」不同，其中以 s-2= L($FC_{n,2}$)為最少；而且，請注意各循環組數絕對不會重複(這可由底下之圖示看出)。因此，

各循環組數所提供的「cycle 數量」之總和

$\geq$(s-2)* [(n-1)/2]。

所以，只要我們能證明(s-2)* [(n-1)/2] $\leq$ $(n+1)*2^n-(n+1)*2^{n-1}$，那麼就可以確定，對於任何一個偶數 L , $(n+1)*2^n \leq L \leq (n+1)*2^{n-1}$(即 L 為後二分之一的長度)，都至少找到一個長度為 L 的 cycle 了。



補充說明:其中的 s,s-(n-1),s-2(n-2),s-3(n-3)...已經是一個遞迴數列了，而該遞迴數列中的每一個數又可以藉由走小路的方法再各自得到一套屬於自己的遞迴數列如上圖中各個顏色即為各套遞迴數列。

接著，由上面的表格知道每個遞迴數列所含數字的數目，在其當中發現到 s-2 遞迴數列系列的數字數目最少，所以我們在以下才拿它來乘以 s,s-(n-1),…的數目以證明。**如果**，我們只是把表格中所有數相加則會有漏洞產生如上圖中後面的情況，這樣就大錯特錯咯!~~這邊正是本篇報告的精華之一。

$\{2^n-\{2^{n-3}+1+[(2*2^0+1)+(2*2^2+1)+(2*2^4+1)+(2*2^6+1)+(2*2^8+1)+\dots$

$\dots+(2*2^{n-7}+1)+(2*2^{n-5}+1)]\}\}*(\frac{n-1}{2})=\{2^n-[\frac{5}{3}(2^{n-3})+\frac{3n-7}{6}]\}*(\frac{n-1}{2})=\{\frac{19}{3}2^{n-3}-$

$\frac{3n-7}{6}\}*(\frac{n-1}{2})=\{\frac{19}{6}*(n-1)*2^{n-3}-\frac{(3n-7)*(n-1)}{12}\}$

又因為它的數量需要大於二分之一倍的全部長度數量並且二分之一倍的全部長度數量為$(n+1)2^{n-1}$(補充：由-(6) $FCCC_n$ 所含有 cycle「可能」的長度-可知

$)*\frac{1}{2}=(n+1)2^{n-2}$，所以我們拿$\{\frac{19}{6}*(n-1)*2^{n-3}-\frac{(3n-7)*(n-1)}{12}\}$去減

$(n+1)2^{n-2}$看是否大於零，若大於零則我們找到了$(n+1)2^{n}$到$(n+1)2^{n}*(\frac{1}{2})$所有可能長度的 cycle 了。

$$\{\frac{19}{6}*(n-1)*2^{n-3}-\frac{(3n-7)*(n-1)}{12}\}-(n+1)2^{n-2}=\frac{19}{12}[(7n-31)*\ 2^{n-2}-(3n-7)(n-1)]$$

(二)找尋長度為$(n+1)2^{n-1}$到$(n+1)2^{n}*(\frac{1}{2})^{2}=(n+1)2^{n-2}$的 cycle

他的大致過程和上面的(一)非常相似，由於版面的限制因此這邊只好省略，為此我特別把它放到網路上面以資參考(在書面資料內亦以超連結方式呈現，不過書面資料上的那個網址是舊的，這邊才是新的)，這是網址

http://db.tt/YISfUTU3

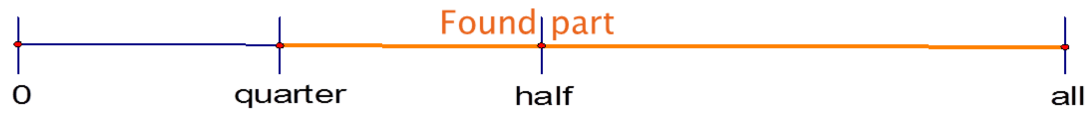
由數學歸納法可證明出在 n≥5 的時候，

$$\{\frac{19}{6}*(n-1)*2^{n-3}-\frac{(3n-7)*(n-1)}{12}\}-(n+1)2^{n-2}=\frac{19}{12}[(7n-31)*\ 2^{n-2}-(3n-7)(n-1)]\geq 0$$

由數學歸納法可證明出在 n≥5 的時候，$\{\frac{10}{3}*(n-1)*2^{n-4}-\frac{(3n-13)*(n-1)}{12}\}-(n+1)2^{n-3}=\frac{1}{12}[(n-4)*\ 2^{n}-(3n-13)(n-1)]\geq 0$。

因此 n≥5 時我們已經找到了所有長度在$(n+1)2^{n-1}$到$(n+1)2^{n-2}$之間的 cycle(也就是說解決了前$\frac{1}{4}$到前$\frac{1}{2}$的數量了)。

<u>現在</u>，我們在 ***<u>n≥5</u>*** 時找到了所有長度在 $(n+1)2^{n}$到$(n+1)2^{n}*(\frac{1}{2})^{2}$之間的 cycle(有就是說解決了後$\frac{1}{4}$的數量了)。

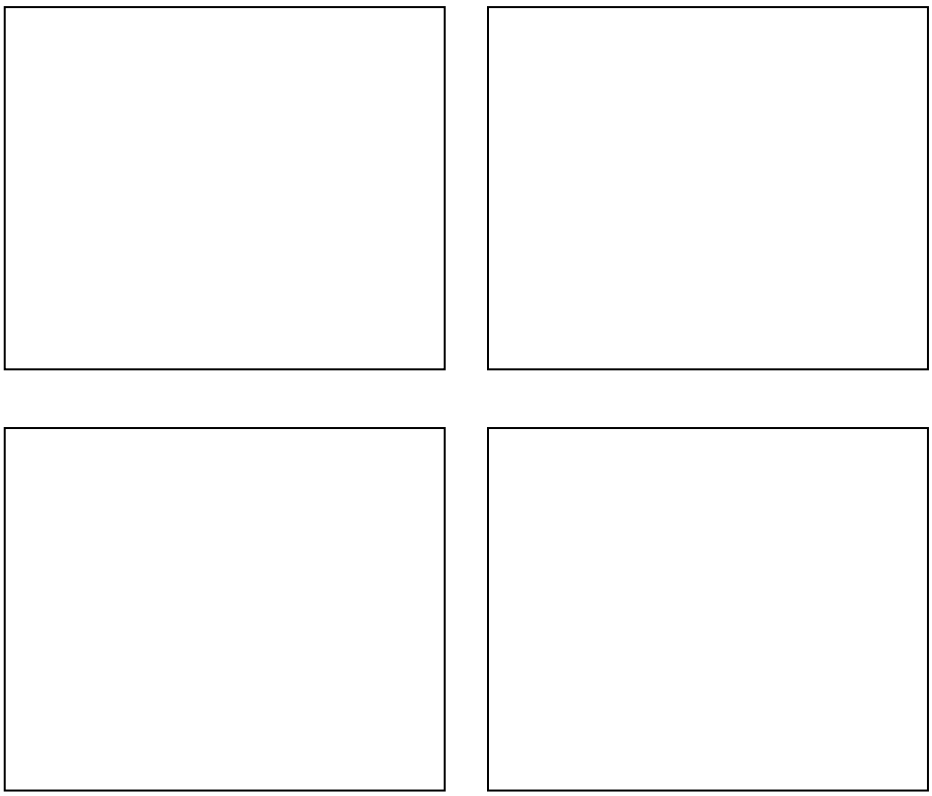


接著，我要在 $n \geq 7$ 時找到長度為 $(n+1)2^n*(\frac{1}{2})^2$ 到 6n-2 的 cycle 了

四. 在 $n \geq 7$ 時找到長度為 $(n+1)2^n*(\frac{1}{2})^2$ 到 6n-26 的 cycle

你可能會很好奇為何我們不繼續使用之前的方法做完全部，但是很遺憾的是，我們用盡了上面所有的遞迴生成圖並且所有能走的小路都走了，結果，還是只能做到 $(n+1)2^n*(\frac{1}{2})^2$ 而已，為此，我苦思了許久，終於想出了下面將提到的**改良遞迴生成圖法**，再配合**新研發出的** path **法**和**走小路法**，就可以找到更多長度的 cycle 了。

由於本篇討論 n 為奇數時的情況，因此其樣貌皆為如下的「四小塊合成一大塊」



令其中的　左上　左下　右上　右下分別為

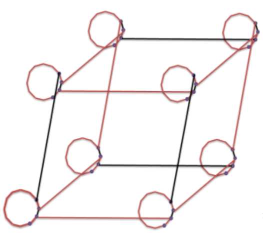
10　,00　,11　,01

現在我要分　**第一部份:00**　和　**第二部份:10,11,01**　來探討他的path長度，這兩部分均可得到一系列的長度,把兩個系列的path交錯連接起來後成為cycle，連接後 cucle 的長度為兩 path 長度相加，並藉由兩 path 的長度和來涵蓋住長度範圍為**$(n+1)2^n*(\frac{1}{2})^2$到 n+39** 所有可能的 cycle。

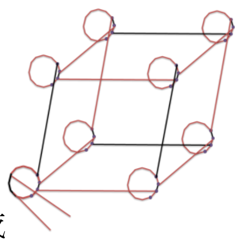
(一) 第一部份:00

對於 ***n*≥*7 且 n 為奇數***，FCCC$_n$的 00 處必可放入 FA$_3$、FA$_5$、…FA$_{n-2}$。

FA 本是一個 cycle，但因為他亦可藉由斷邊和其他地方連結如下



變成

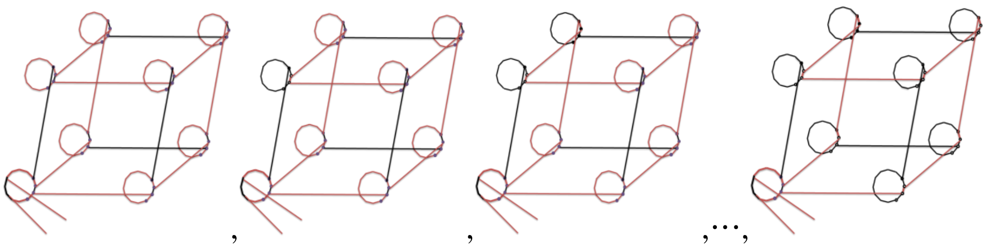


，所以在　**四. 在 *n*≥*7* 時找到長度為 $(n+1)2^n*(\frac{1}{2})^2$到 n+39 的 cycle**　的討論中為了方便而把 FA 的 cycle 定義換為 path 定義，並且這樣的置換不會改變長度。

(1)首先看 FA_3

橘色區域的 path 長度可為

$2^3*(n+1)$, $2^3*(n+1)-(n-1)$, $2^3*(n+1)-2(n-1)$,…, $2^3*(n+1)-(2^3-1)(n-1)$如



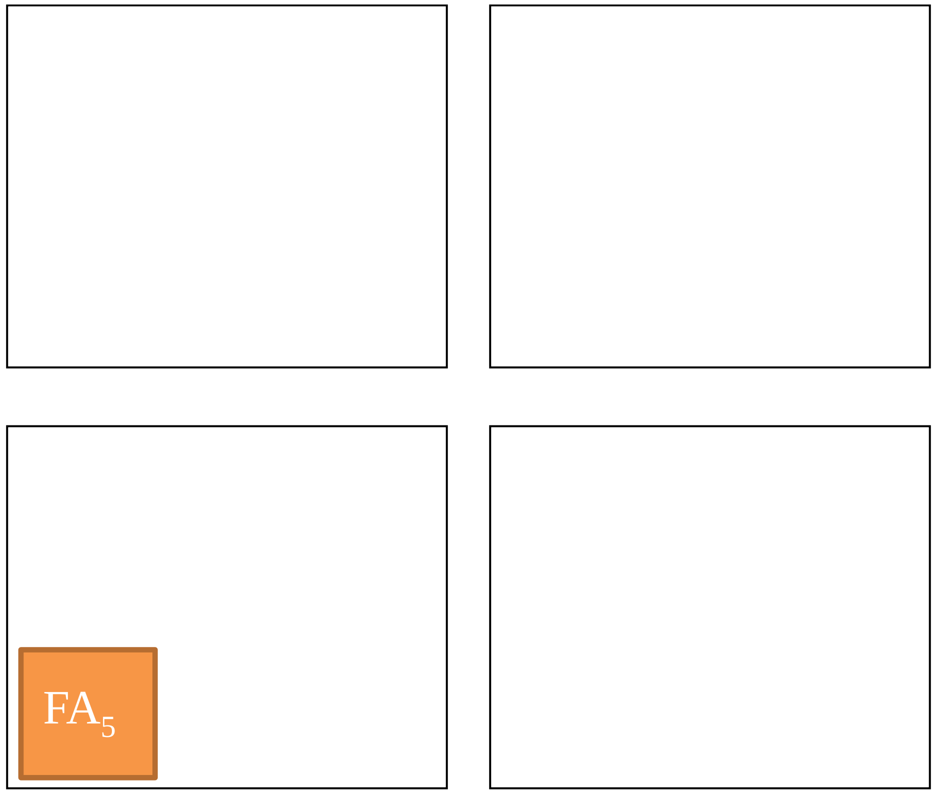
特別注意

a.紅 cycle 變為黑 cycle 的現象

b.$2^3*(n+1)-7(n-1)$亦可看成$2^3*2+2^{3-3}*(n-1)$~~~其中的 2^{3-3}乃因 FA 除以2^3後表示其含有的 FA_3個數，而此法為假設全部都可以走捷徑所以先以點的數目乘以 2，

但又要補回每個 FA_3 中有一個無法走捷徑的 cycle 所以要加回去 FA_3 的數目乘以 n-1= 2^{3-3}*(n-1)

(2)接著看 FA_5



同理 FA_5 的橘色區域的 path 長度可為

2^5*(n+1) , 2^5*(n+1)-(n-1) , 2^5*(n+1)-2(n-1) ,…, 2^5*(n+1)-(2^5-1)(n-1)= 2^5*2+2^{5-3}*(n-1)

(3)FA_7

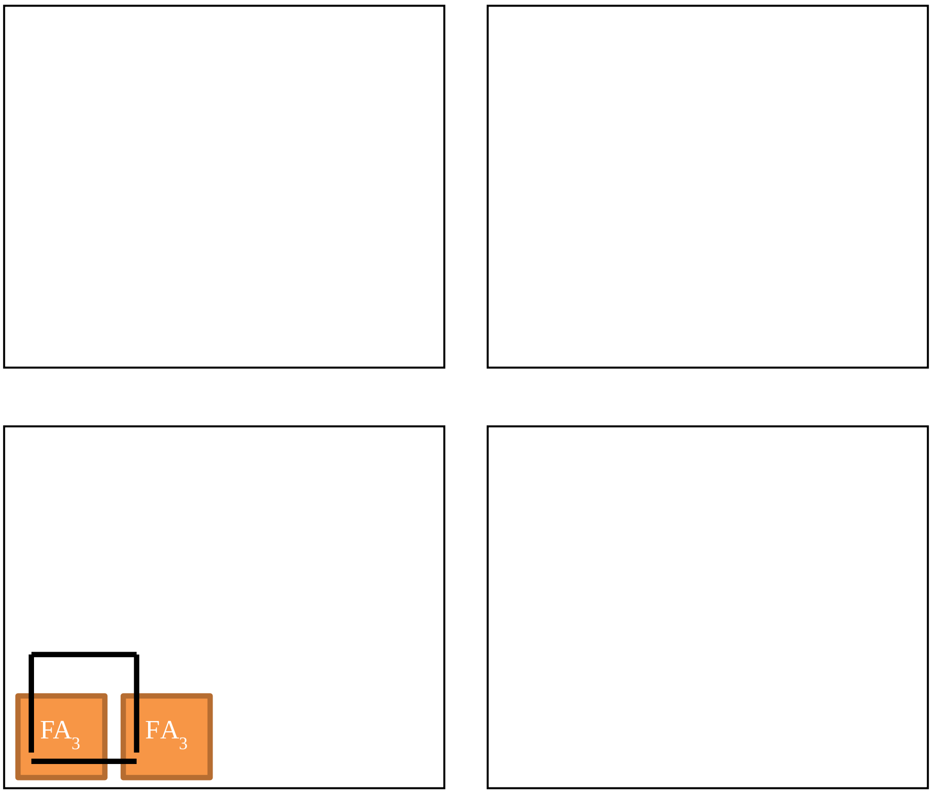
同理 FA_7 的橘色區域的 path 長度可為

2^7*(n+1) , 2^7*(n+1)-(n-1) , 2^7*(n+1)-2(n-1) ,…, 2^7*(n+1)-(2^7-1)(n-1)= 2^7*2+2^{7-3}*(n-1)

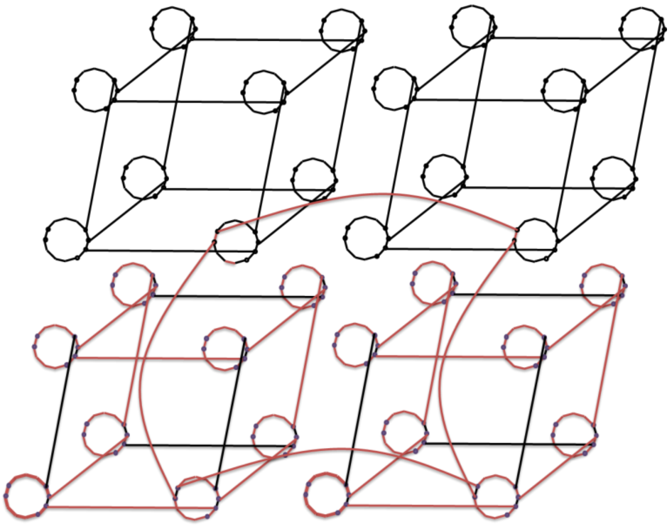
依此類推，對於大於等於 3 的正奇數 k，此種形式的圖所含的長度為

$\underline{2^k*(n+1)}$, 2^k*(n+1)-(n-1) , 2^k*(n+1)-2(n-1) ,…, 2^k*(n+1)-(2^k-1)(n-1)= $\underline{2^k*2+2^{k-3}*(n-1)}$

(4)再來看雙 FA_3

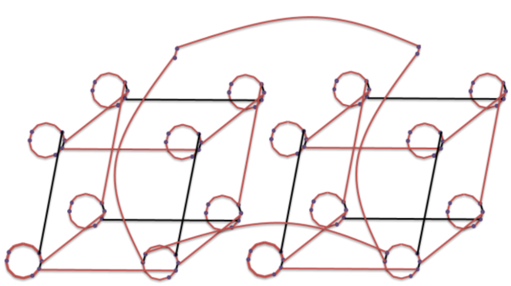
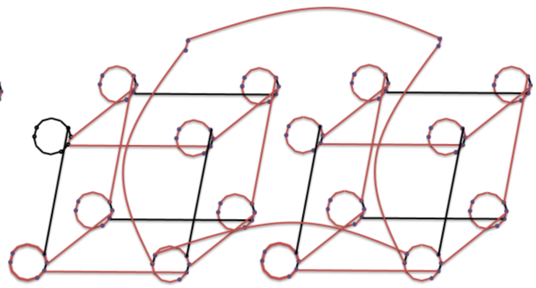
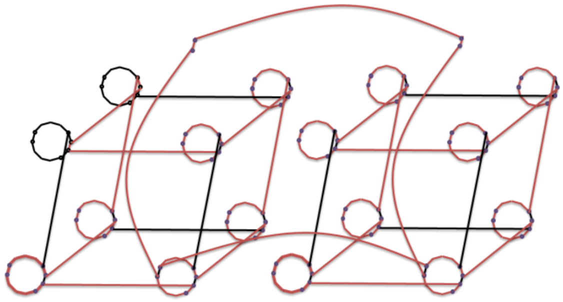


由於兩塊 FA_3 要可相連所以必須多連結其上四個點如圖所示

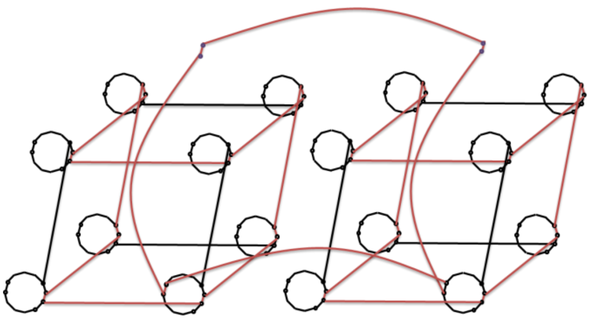


橘色區域可能長度為

$2^4*(n+1)+2*2$ ， $2^4*(n+1)+2*2-(n-1)$ ， $2^4*(n+1)+2*2-2(n-1)$,⋯, $2^4*(n+1)+2*2-2^1(2^3-1)(n-1)=2^4*2+2^{4-3}*(n-1)+2*2$ 如

,…,



特別注意

a. 紅 cycle 變為黑 cycle 的現象

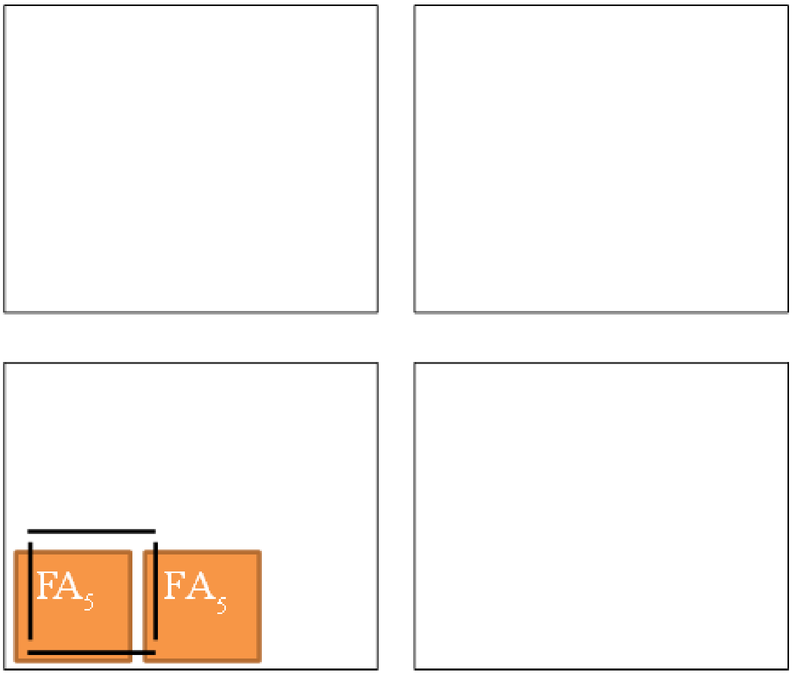
b. 最後一個$2^4*(n+1)+2*2-2^1(2^3-1)(n-1)$的$2^1$是因為有$2^1$個 FA_3而(2^3-1)則是因為每個 FA_3有 7 個 cycle 需要補

c.$2^4*(n+1)+2*2-2(2^3-1)(n-1)$亦可看成 $2^4*2+2^{4-3}*(n-1)+2*2$~~~其中的 2^{4-3}乃因雙 FA 除以2^3後表示其含有的 FA_3個數，而此法為假設全部都可以走捷徑所以先以點的數目乘以 2，

但又要補回每個 FA_3中有一個無法走捷徑的 cycle 所以要加回去 FA_3的數目乘以 n-1=$2^{4-3}*(n-1)$

又因為多走上面 2*2 個點，所以再加 2*2

(5)接著看雙 FA_5



同理雙 FA_5 的橘色區域的 path 長度可為

$2^6*(n+1)+2*2$ ， $2^6*(n+1)+2*2-(n-1)$ ， $2^6*(n+1)+2*2-2(n-1)$,⋯, $2^6*(n+1)+2*2-2^3(2^3-1)(n-1)=2^6*2+2^{6-3}*(n-1)+2*2$

(6)雙 FA_7

同理雙 FA_7 的橘色區域的 path 長度可為

$2^8*(n+1)+2*2$ ， $2^8*(n+1)+2*2-(n-1)$ ， $2^8*(n+1)+2*2-2(n-1)$,⋯, $2^8*(n+1)+2*2-2^5(2^3-1)(n-1)=2^8*2+2^{8-3}*(n-1)+2*2$

依此類推，對於大於等於 3 的正奇數 k，此種形式的圖所含的長度為

$\underline{\mathbf{2^{k+1}}*(n+1)+2*2}$ ， $2^{k+1}*(n+1)+2*2-(n-1)$ ， $2^{k+1}*(n+1)+2*2-2(n-1)$,⋯, $2^{k+1}*(n+1)+2*2-2^{k+1-3}(2^3-1)(n-1)=\underline{\mathbf{2^{k+1}}*2+\mathbf{2^{k+1-3}}*(n-1)+2*2}$

(7)比大小

<u>*Case1:*</u> 對於大於等於 3 的正奇數 k，FA_k 中的最長 path 是否有比雙 FA_k 中的最短 path 還要長

由(3)和(6)最後的結論得用[$\underline{\mathbf{2^k}*(n+1)}$]-[$\underline{\mathbf{2^{k+1}}*2+\mathbf{2^{k+1-3}}*(n-1)+2*2}$] 來看誰比較大

[2^k*(n+1)]-[2^{k+1}*2+2^{k+1-3}*(n-1)+2*2]= 2^{k-2}(3n-11)-4

Case2: 對於大於等於 3 的正奇數 k，雙 FA_k 中的最長 path 是否有比雙 FA_{k+1} 中的最短 path 還要長

由(3)和(6)最後的結論得用[2^k*(n+1)+2*2]-[2^{k+1}*2+2^{k+1-3}*(n-1)] 來看誰比較大

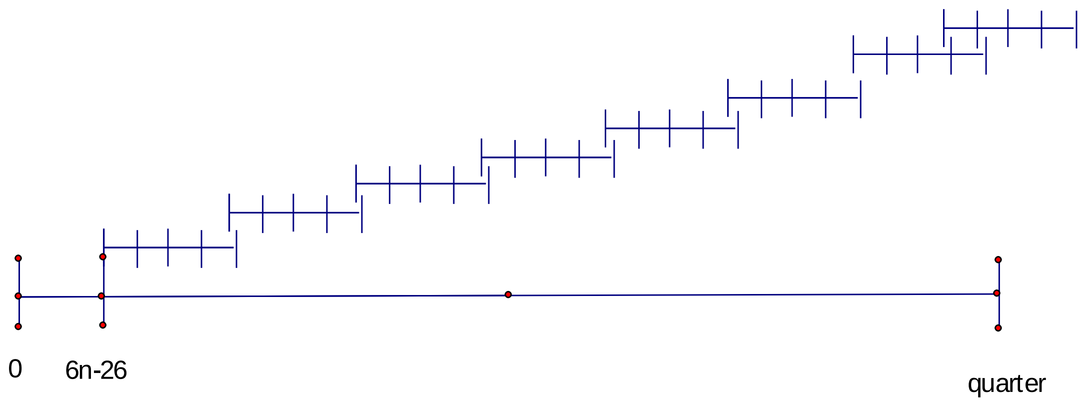
[2^k*(n+1)+2*2]-[2^{k+1}*2+2^{k+1-3}*(n-1)]= 2^{k-2}(3n-11)-4

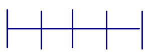
在 *Case1* 和 *Case2* 中因為 $n \geq 7$ 而且 k 為大於等於 3 的正奇數

所以 2^{k-2}(3n-11)-4≥ 2^{3-2}(3*7-11)-4=16≥0

而且對於 $n \geq 7$，最小 path 為2^{3-2}(3n-11)-4=6n-26

因此，對於 $n \geq 7$，我們找到了如圖所示的 cycle

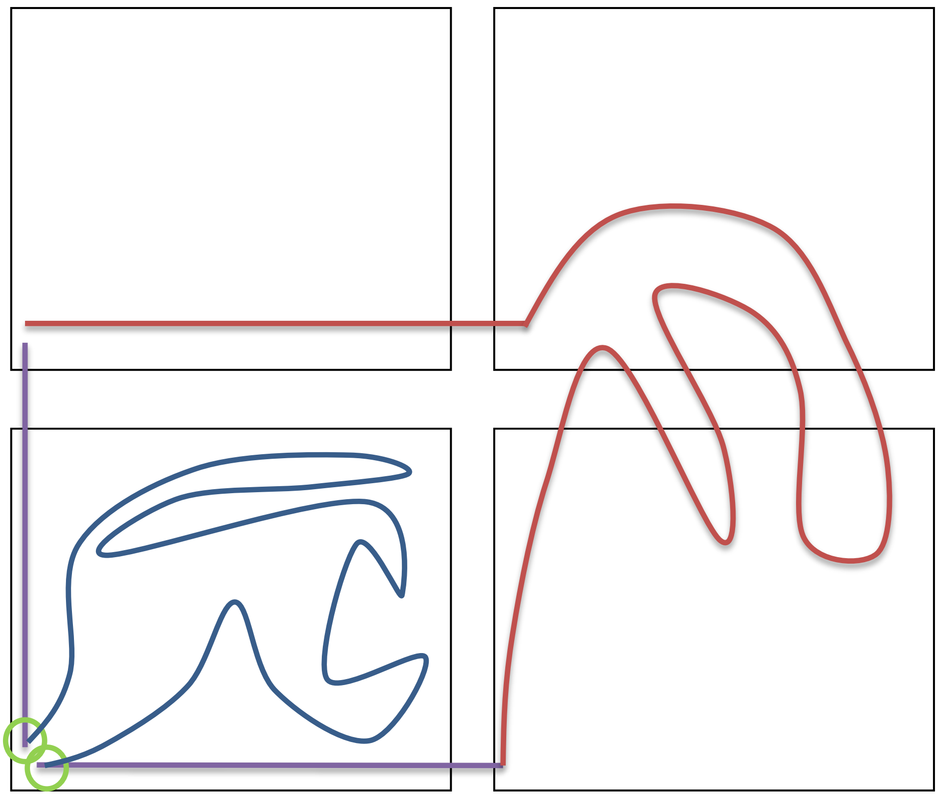


接著我們只要利用接下的**第二部分:**10,11,01 把 

之中的縫隙填滿即可得到長度大於等於 6n-26 的所有 cycle 了。

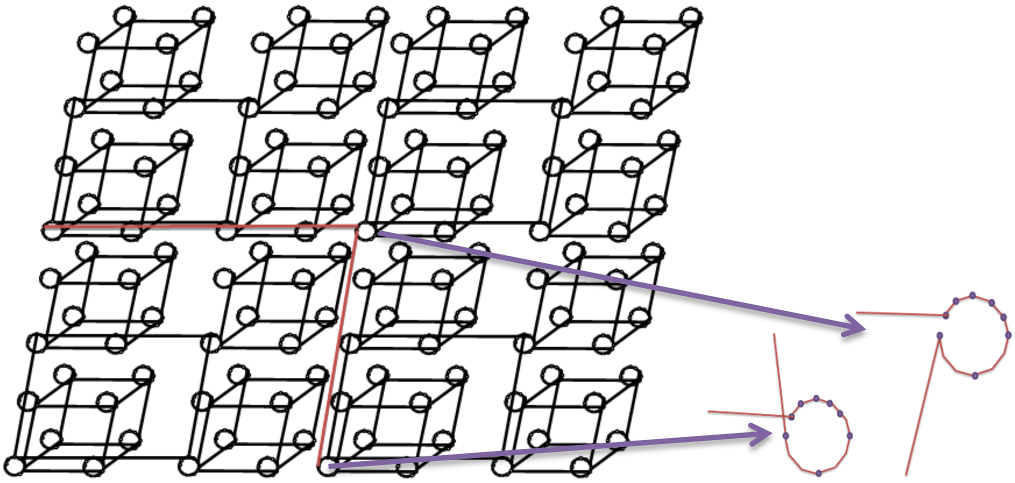
附錄 1(因為頁數實在不夠，已經刪到不能再刪了，只好這樣將就，雖說是附錄，但他也非常非常重要喔!~~)

二.第二部分:10,11,01

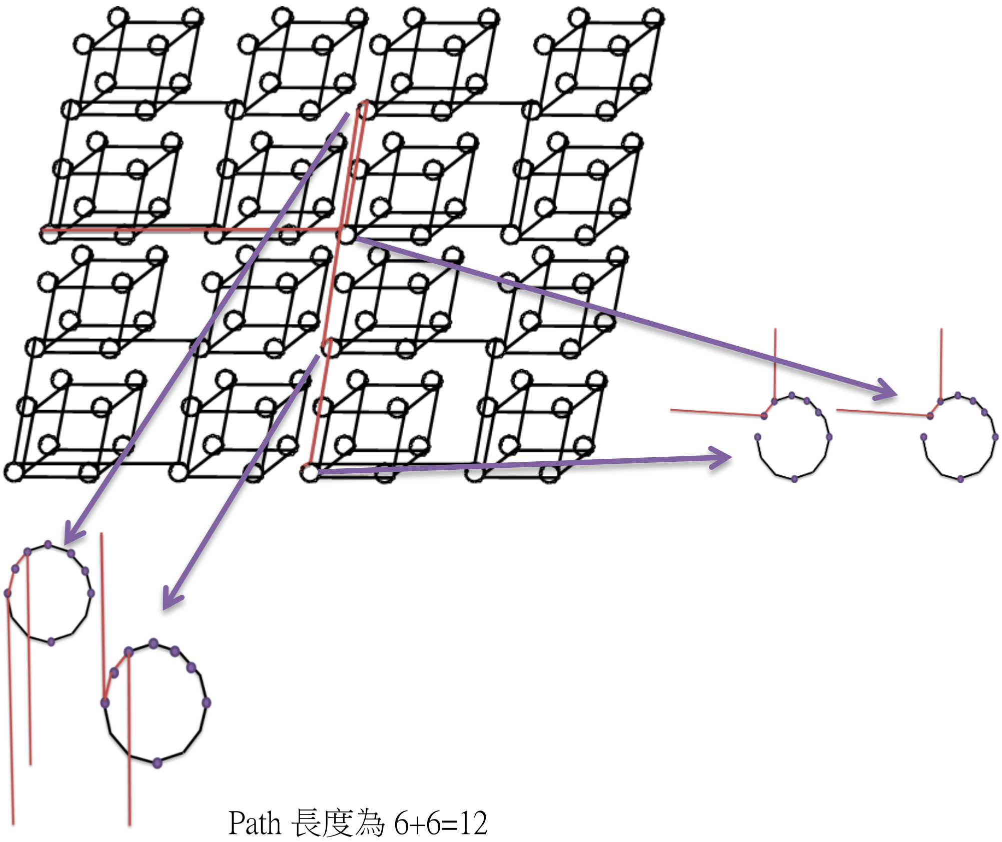


藍色曲線為第一部分的 path 而紅色的則為第二部分的 path，左下方小綠環所圈起來的點則算在第一部分的 path 長度內。

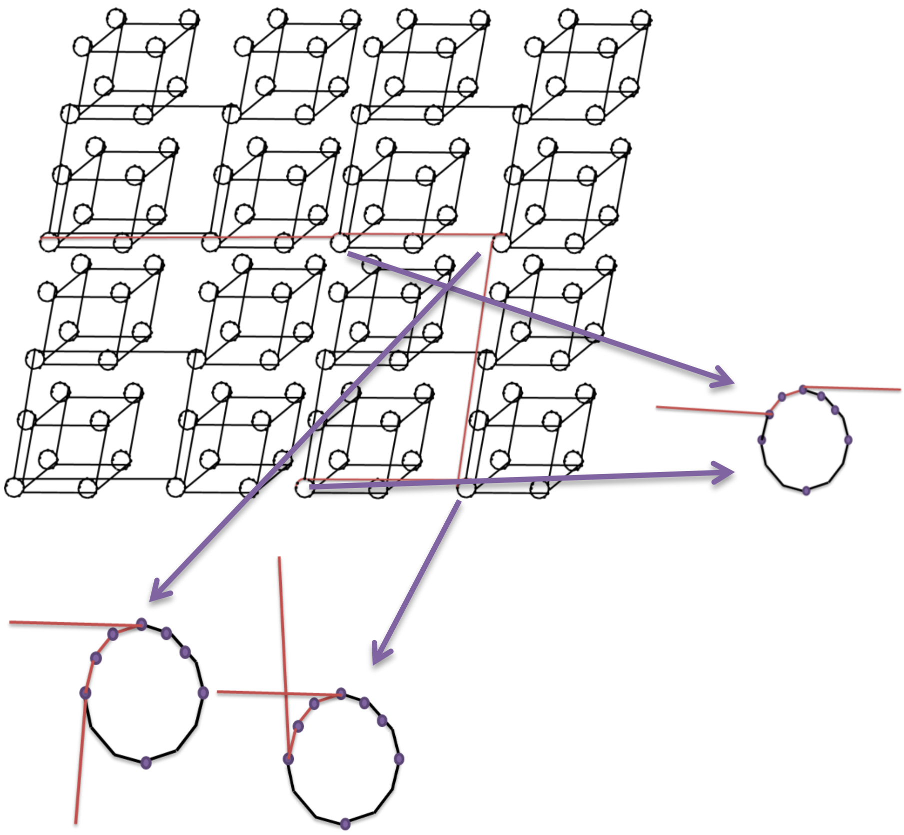
(1) n=7



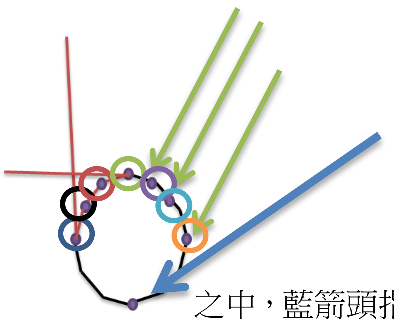
Path 長度為 6



Path 長度為 6+6=12



Path 長度為 6+6+4=16

在  之中，藍箭頭指的點為連接斜邊的點所以不能使用，綠箭頭指的點仍可使用，所以現在還可以使用 3 次，而由上面的圖不難看出在 6+6 之後的每一次擴大均為加四，所以 n=7 時還有長度為 6+6+4*2=20, 6+6+4*3=24, 6+6+4*4=28

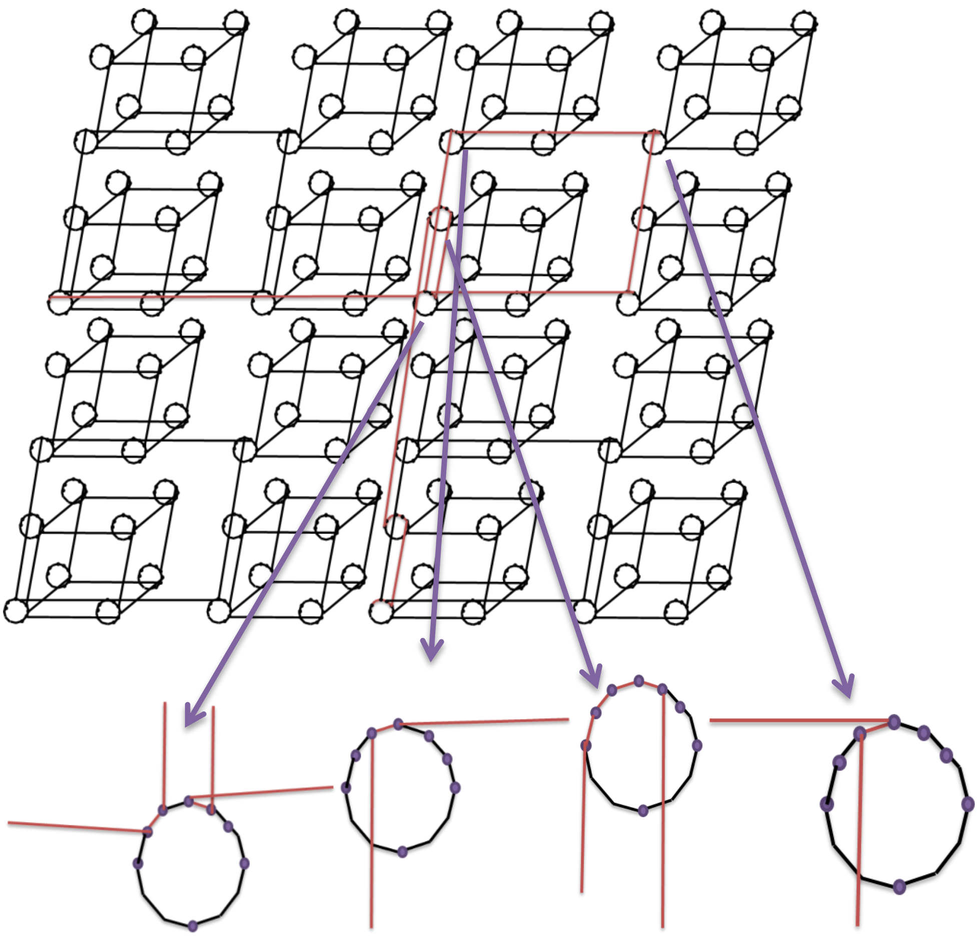
所以我們現在有長度為 6,12,16,20,24,28 的 path 了

一般在學術界中，習慣把橘圓圈的點,水藍圓圈的點,紫圓圈的點,淡綠圓圈的點,紅圓圈的點,黑圓圈的點,深藍圓圈的點,藍箭頭指的點依序稱為 0,1,2,3,4,5,6,7

所以我們可以把之前的結論整理成由 5 走出去的 path 長度為 6, 由 4 走出去的 path 長度為 12, 由 3 走出去的 path 長度為 16, 由 2 走出去的 path 長度為

20, 由 1 走出去的 path 長度為 24, 由 0 走出去的 path 長度為 28。

接著，我們注意到由 2 走出去的 path，如果我們在她的 3,4 位置動手腳如圖所示，我們又可以多得到一些長度的 path



Path 長度為 6+6+4*2+6=26

同理，若我們在 1 走出去時在 3,4 位置動手腳,我們可得長度為 6+6+4*2+6*2=30 的 path, 若我們在 0 走出去時在 3,4 位置動手腳,我們可得長度為 6+6+4*2+6*3=34 的 path~~~

6　　12　　16　　20　　24　　28

20 → 26　　24 → 30　　28 → 34

如此一來我們就有長度為 24,26,28,30 的連續偶數的 path 了

6	12	16	20	24	28
			26	30	34

特別注意，n=7 的時候有四個連續偶數分別為 24,26,28,30

(二)n=9

由於 $FCCC_n$ 具有非常佳的遞迴擴大性質與對稱性質，所以當 n 從 7 到 9 的時候，我們用和(1)相同的原理可以輕易推得

6	12	16	20	24	28	32	36
			26	30	34	38	44

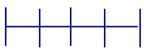
和

6	12	16	20	24	28	32	36
			26	30	34	38	44

所以我們在 n=9 的時候有長度為 24,26,28,30,…38 的連續偶數的 path 了

特別注意，n=9 的時候有八個連續偶數分別為 24,26,28,30,…38

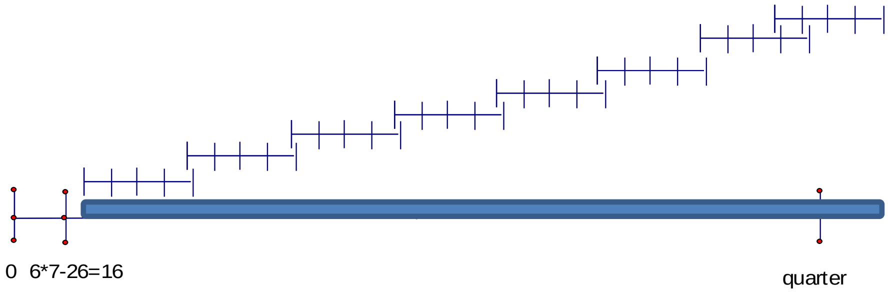
同理可知 n=11 的時候有十二個連續偶數分別為 24,26,28,30,…46

對於 n=7 來說他的  之中兩直線之中的縫隙只有兩個偶數為漏洞

[如一.中的 2^3*(n+1), 2^3*(n+1)-(n-1)之間， 2^3*(7+1), 2^3*(7+1)-(7-1)]

但二.中卻找到在 n=7 的時候有四個連續整數的紅線 path，因此在我們把一.中的紅線 path 和二.中的藍線 path 交錯連結起來後就可以把縫隙填滿了如圖所示

所以對於 n=7，我們可以找到 cycle 的長度如下圖所示



在 n=9 的時候漏洞數為(9-3)/2=3 而有八個連續整數，所以亦可全部填滿而無缺漏。

在 n=11 的時候漏洞數為(11-3)/2=4 而有十二個連續整數，所以亦可全部填滿而無缺漏。

又因為 FCCC 本身的對稱性質和遞迴性質所以可以輕易推知對於 $n \geq 7$，我們可以找到長度為(6n-26)+24=6n-2 以上所有可能長度的 cycle 了。如圖所示

伍、研究結果與討論：

一.研究結果

對於 $FCCC_n$

(一)

我們成功地找出了一個和前人方法截然不同的的方法來找所有長度的 cycles。

(二)

當 $n \geq 7$且n 為奇數時:

我們已經可以找到長度為$(n+1)2^n$ 到 6n-2 的 cycle。

二.討論

(一)

捷徑法在找長度的過程中佔了非常重要的角色，”製造出一系列遞迴圖的方法”與”走小路的方法”都需要。

(二)

在找長度為$(n+1)2^{n-2}$ 到 6n-2 的 cycle 時，以”左下角(00)之一系列遞迴圖(和上面(一)相似，但這邊的遞迴圖有關鍵的修飾)”和”其他部分(01,11,10)的遞迴 path”和”在(一)中廣泛使用的”走小路的方法”…這三者的完美搭配才得以完成。

(三)

因為在找長度為$(n+1)2^{n-2}$ 到 6n-2 的 cycle 時，發現了**”左下角(00)之一系列遞迴圖”**和 **”其他部分(01,11,10)的遞迴 path”**和**”走小路的方法”**結合的方法，且回顧在找長度為$(n+1)2^n$ 到$(n+1)2^{n-2}$ 的 cycle 時使用的**”製造出一系列遞迴圖的方法”**和**”走小路的方法”**，我們發現他們有共通點:都是先有規則且系統性的製造出一系列的遞迴圖，在走小路的方法分別在前面一系列的遞迴圖中的每一個圖再分別找出一系列長度的 cycle，就好像”遞迴中的遞迴”一樣，藉由這樣的方法我們可以找到非常多 cycle，畢竟，當 n 非常大的時候$(n+1)2^n$ 到 6n-2 和全部已經沒甚麼兩樣了，但是，對此非常熱忱的我將繼續進行找尋長度 6n-2 以下之 cycle。

(四)

一開始想進行這個研究的時候只亦心想要找到所有長度的 cycle，但是在研究開始之後才發現前面屢次提到的”遞迴圖”，不管是上面(一)或(二)所提的樣貌都讓我覺得他非常的漂亮、可愛，雖然他原先只是個工具，但是現在亦可對他的遞迴情形、型態進行一個獨立的、專門的探討，因為我的遞迴方法已經是一個獨特的演算法了。

(五)

現在只有解決 n 為奇數的情況，因為這一套方法只要稍作修改即可以解決 n 為偶數，$FCCC_n$不為二分圖的情況，所以將來渴望再用此法做出 n

為偶數的部份。

陸、應用性與未來展望

一. 應用性

(一

一個網絡系統中若含有各種大小的迴圈,那麼此網絡系統將可以靈活的被使用。

例如:本來一家公司全員工作的時候期迴圈串聯了全部電腦，但今天突然有人生病請假而無法來上班，此時若該網絡存在長度為「全部長度少一的迴圈」則該網絡仍可繼續運作，工作仍可繼續進行。

(二)

它高度的應變性在很多地方將使工作的進行非常方便,例如今天有一家公司依照FCCC的結構來擺設網絡，由於幾乎所有長度的cycle都被找到了，所以它可以處理任何大小的case而以不同長度的cycle來解決它，特別對於循環性工作將更為方便。

(三)

除了上述的應變性之外,由於我們現在對於各個長度的cycle的樣子非常清楚，所以若工作的規模不足以需要使用到佔據每部分一些點(ex:s-2,s-4,…s-10…上面有清楚的介紹)則可同時進行很多工作($FCCC_9$中可以同時有很多個FA_3進行工作)。

(四)

以往找cycle的方式大都是像無頭蒼蠅般的瞎找,總是花了非常多時間才找到,就算找到了可能還漏了很多沒講,就算沒有漏掉他們可能也未必瞭解那些cycle的樣子,但是本篇報告所提的方法除了不會漏掉之外還可以告訴你他精確的樣子，與前者比較是個截然不同的結果。

二.未來展望

(一)

因為在$n = 3,5$時我們還剩下一點點長度的 cycle 未找到,未來希望可 以把剩下長度的 cycle 找完。

(二)

雖然在$n \geq 7$時我們現在已經可以找到長度為$(n+1)2^n$到$6n-2$的 cycle 了，但是未來仍希望可以把剩下長度的 cycle($6n-2$ 以下)找完。

(三)

因為目前找到的各長度的 cycle 其壞點部份的位置為特定位置，但實際情況卻可能複雜而多樣，因此我們將來想探討壞點部份的位置為非特定位置的情況。

(四)

由於在本報告的遞迴方法中，生成圖乃來自數個生成子圖，可見 $FCCC_n$ 可被拆成數個子圖，所以我們將來想探討在某點或某幾點壞掉的情況

下，剩下的點能走出哪些數目的子圖，並找出各種數目子圖的方法數，並且渴望再更進一步找出一套簡潔有利的方法來找，而這在實際生活中也非常實用。

例如:一個網絡中若有節點突然有狀況而無法參與工作，則剩下的節點可迅速地再組織成一個或數個串聯系統繼續工作，在人力、物力、金錢的浪費上將大量減少。

(五)本篇報告大量使用遞迴方法，雖然有兩種不一樣的型態，但是基本想法卻是一致的，未來可望能用這樣的演算法在其他圖中解決問題。

柒、參考資料：

[1] 徐力行 沒有數字的數學 天下文化 2003.9.15

[2] L. N. Bhuyan, D. P. Agrawal, "Generalized hypercube and Hyperbus Structures for a computer network", IEEE Trans. on computers, c-33, p.323-333, 1984.

[3] M. Ma, "The spanning connectivity of folded hypercubes", 180, P.3373-3379, 2010.

[4] I. Fris, I. Have1, and P. Liebl, "The diameter of the cube-connected cycles," Information Processing Letters, 61, P.157-160, 1997.

[5] S. Y. Hsieh, C. N. Kuo, "Hamiltonian-connectivity and strongly Hamiltonian-laceability of folded hypercubes," Computers and Mathematics with Applications, 53, p.1040-1044, 2007.

[6] T. Y. Ho, Y. H. Ho, C. W. Tsay, and L. H. Hsu, "Cycles in Cube-Connected Cycles Graphs," in prepare.

[7] A. Germa , M. C. Heydemann , and D. Sotteau, "Cycles in the cube-connected cycles graph", Discrete Applied Mathematics, 83, p.135-155, 1998.

[8] T. Y. Ho, Z. M. Wei, C. W. Tsay, and L. H. Hsu, "Fault- Tolerant Hamiltonicity of Cube-Connected Cycles Graphs," submitted to Applied Mathematics Letters.

[9] J. S. Fu, "Fault-free cycles in folded hypercubes with more faulty Elements," Information Processing Letters, 108, p.261-263, 2008.
uters and Mathematics with Applications, 53, p.1040-1044, 2007.

[10] A. El-Amawy, S. Latifi, "Properties and Performance of Folded Hypercubes " ,IEEE transmission on parallel and distributed systems, vol. 2, no. 1, january 1991.

[11] M. P. Sebastian, P. S. Nageudra Rao, Lawrence Jenkins, "VLSI/WSI Designs for Folded Cube-Connected Cycles Architectures," IEEE Intemtionul Conference on VLSI Design ,p.276-279, january 1996.