

# 第十一屆旺宏科學獎

## 成果報告書

參賽編號：SA11-412

作品名稱：天羅地網—雷射光線之反射路徑與  
正  $n$  邊形完全圖之關係探討

姓名：黃柏竣

關鍵字：完全圖、完全反射數、鏡面轉動數

## 目 錄

壹、研究動機.....	P.1
貳、研究目的.....	P.2
參、研究設備及器材.....	P.2
肆、研究過程與方法.....	P.3
一、定義 1.....	P.3
二、定義 2.....	P.6
三、上界估計值.....	P.11
四、定義 3.....	P.12
五、偶數邊的鏡面調整的規則、性質、策略擬定及尋求最佳解的過程.....	P.14
六、奇數邊的鏡面調整的規則、策略擬定及尋求最佳解的過程.....	P.24
伍、研究結果.....	P.27
陸、結論與討論.....	P.28
柒、兩部電影所啓發的兩項應用 .....	P.29
捌、參考資料.....	P.30

# 天羅地網－雷射光線之反射路徑與正 $n$ 邊形完全圖之關係探討

## 壹、研究動機

在數學專題課裡，老師帶領著我們研讀一些文章，其中有一篇文章「*Point Mirror Reflection*」[5]，是關於光線在鏡面間的反射路徑探討，這個物理現象讓我們聯想到曾經看過一部精彩的電影：Entrapment (中文片名：「將計就計」)，影片中女主角爲了盜取在博物館展覽的寶物，必須穿越許多錯綜複雜雷射光線，以避免觸動警報系統。這引起了我們對這個主題研究的動機，我們想到是否能經由鏡面位置的安排與適當的轉動角度，佈置出如天羅地網的雷射光線，形成一個十分完善的防盜警報系統，於是我們就開始進行資料的搜尋與查證。

首先，在國內科展及國際科展所查尋到的資料分數學與物理兩大類：第一類是數學的科展部分，我們發覺之前的有關鏡射或反射的科展作品，主要多是探討多邊形周長最小值的問題，如：第三十八屆中小學科展的「鏡射乾坤」，內容爲利用鏡射研究出內接多邊形周長最小值。2004 年的國際科展的「正  $n$  邊形光圈之路徑追蹤」，是利用光的反射定律，自正  $n$  邊形邊上一點  $P$  朝鄰邊發出一條光線，若依逆(順)時針方向依序與每邊皆碰撞一次，經一圈而可回到  $P$  點，則此路徑稱爲「光圈」，其內容在探討正  $n$  邊形內能能否形成光圈之相關問題。第二類是物理的科展部分，物理方面的研究主要多是探討光的折射率居多與我們所探討的數學理論方向不同。

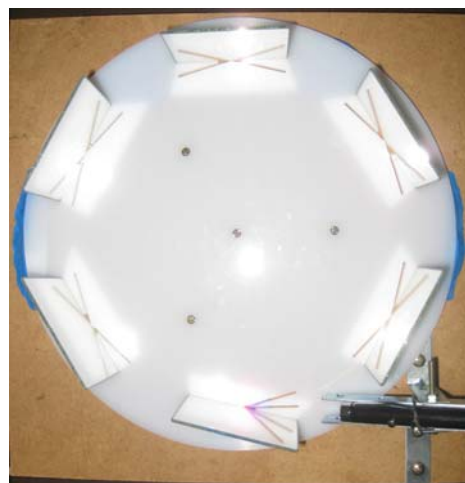
此外我們也上網搜尋了「*Point Mirror Reflection*」[5]之作者 M. Oskar van Deventer 以了解其對於相關問題是否有更進一步之發展，不過均無所獲。因此在確立了研究主題沒有人做進一步的探討後，我們就開始著手進行研究，以下我們即將佈下一個天羅地網，請拭目以待。

## 貳、研究目的

- 一、探討在只將第一個鏡面(引入光線之入射鏡面)順時針轉動  $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ ，而其餘鏡面不轉動時，光線在正  $n$  邊形各頂點的鏡面間之反射情形並計算其反射數。
- 二、進一步討論除第一個鏡面(引入光線之入射鏡面)順時針轉動  $\theta = \frac{90^\circ}{n}$  外，再旋轉其他鏡面後，光線在正  $n$  邊形各頂點的鏡面間反射的情形。
- 三、在  $n$  爲偶數之情形下，將鏡面依順時針或逆時針旋轉一個  $\theta$  角，找出鏡面調整之規則，藉由調整多個鏡面以增加光線在正  $n$  邊形各頂點的鏡面間的反射次數並計算其調整後之反射次數，並運用鏡面調整之規則擬訂策略找尋反射數的最大值。
- 四、在  $n$  爲奇數之情形下，將鏡面依順時針或逆時針旋轉一個  $\theta$  角或  $2\theta$  角，找出鏡面調整之規則，藉由調整多個鏡面以增加光線在正  $n$  邊形各頂點的鏡面間的反射次數並計算其調整後之反射次數，並運用鏡面調整之規則擬訂策略找尋反射數的最大值。
- 五、探討正  $n$  邊形之邊數  $n$  的質因數與缺少的反射線數之關聯性。

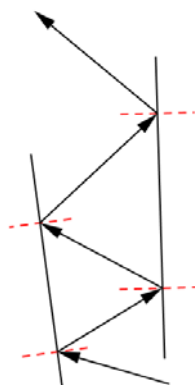
## 參、研究設備及器材

- 一、紙和筆、電腦
- 二、GeoGebra 軟體、Matlab 軟體
- 三、自製模型組、4MW 以下之雷射頭、平面鏡

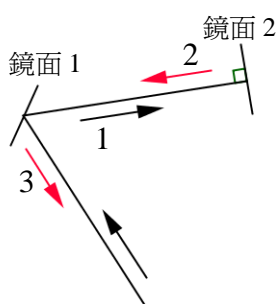


## 肆、研究過程與方法

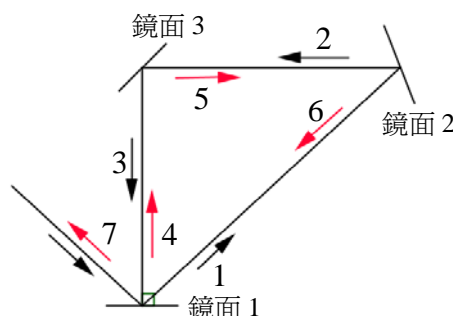
我們都知道雷射光可在兩個鏡面間做許多次的反射，如圖例(一)。在圖例(二)中，雷射光線在經鏡面 1 反射後垂直地打在鏡面 2 上並沿原路徑反射回來，光線在這兩個鏡面間經歷了 3 次反射。在圖例(三)中，雷射光線在經鏡面 1、鏡面 2、鏡面 3 反射後垂直地打在鏡面 1 上並沿原路徑反射回來，光線在這三個鏡面間經歷了 7 次反射。



圖(一) 雷射光在兩個鏡面間做反射。 反射並沿原路徑反射回來。



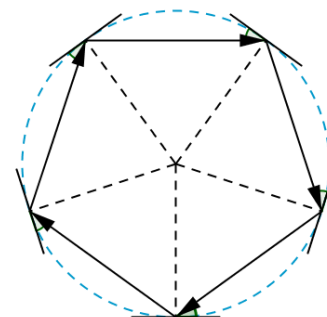
圖(二) 雷射光在兩個鏡面間做



圖(三) 雷射光在三個鏡面間做  
反射並沿原路徑反射回來。

本文我們將鏡面擺放於正  $n$  邊形的頂點處，並探討雷射光線在此正  $n$  邊形的各個鏡面間的反射情形，但只針對雷射光線能夠垂直地打在某個鏡面上，並依原路徑折返回發光源的反射路徑去計算其反射數。首先我們發現其反射路徑與反射數與正  $n$  邊形的邊數  $n$  之公因數有密切的關係，其次我們探討如何適當地調整鏡面可使雷射光線在此正  $n$  邊形的鏡面間的反射數達到最大值？

在一個正  $n$  邊形的  $n$  個頂點處各放一個鏡子(*Point Mirror* 即將鏡面縮為極短，視為正  $n$  邊形的頂點，以防止鏡面過長時，雷射光線在非頂點處進行反射)，鏡面之法線為頂點與中心之連線，若由其中一個頂點往相鄰的另一頂點發射一雷射光線，由於入射線與每個鏡面的夾角恰為一個弦切角等於  $\frac{180^\circ}{n}$ ，即光線行經各鏡面之入射角與反射角均相同，因此由反射原理，我們知道光線會在這  $n$  個鏡面間不斷地進行循環的反射作用，如右圖(四)以正五邊形之情形為例說明。

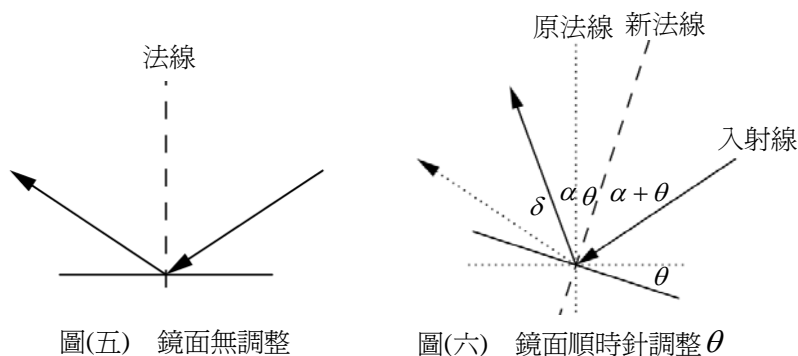


圖(四)，圖中之虛線表法線，入射線與鏡面之夾角恰為一弦切角

$$= \frac{180^\circ}{5}, \text{光線會在這 } n \text{ 個鏡面間不}$$

斷地進行循環的反射作用

首先爲了避免這種無限循環的反射作用，我們利用物理學上的光槓桿原理，將鏡面作一些調整，並在以下的圖例(五)~圖例(六)對鏡面有無調整做對照說明，以方便本研究過程之進行。

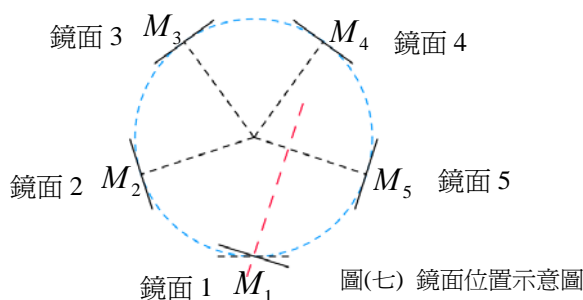


由入射角=反射角可知  
 $\delta + \alpha = \alpha + 2\theta$   
 $\Rightarrow \delta = 2\theta$

光槓桿原理是光反射的應用之一，固定入射光的方向，當鏡子轉動一角度時，反射線所轉的角度是鏡子的 2 倍，稱之爲光槓桿原理，如圖(六)。經由此一調整的作用可避免光線進行無限次循環的反射問題。因此以下我們的討論情形都是將雷射光線沿切線方向射向一順時針調整角度  $\theta = \frac{90^\circ}{n}$  的鏡面(即下文中之鏡面 1)且其餘鏡面皆不轉動，其中  $n$  爲正  $n$  邊形之邊數，藉由此一調整的作用將雷射光線引入，而爲了方便我們的討論與研究的進行，我們運用了一些符號與定義，在此先作說明：

**一、定義 1：**

(一)鏡面位置：正  $n$  邊形的頂點依順時針方向依序擺放  $n$  個鏡面(Point Mirror)，並依序稱爲鏡面 1、鏡面 2、...、鏡面  $n$ ，以  $M_1$ 、 $M_2$ 、...、 $M_n$  表示。如圖(七)所示：



(二)層：當光線第一次射入鏡面 1 時(即第一次經光槓桿原理之作用)，稱爲第一層反射；  
 當光線第二次射入鏡面 1 時(即第二次經光槓桿原理之作用)，稱爲第二層反射；  
 ⋮  
 當光線第  $L$  次射入鏡面 1 時(即第  $L$  次經光槓桿原理之作用)稱爲第  $L$  層反射。

(三)反射次數：第一層反射次數總和稱爲  $R_1$ ；  
 第二層反射次數總和稱爲  $R_2$ ；  
 ⋮  
 第  $L$  層反射次數總和稱爲  $R_L$ 。

(四)跳躍數：在第一層時，光線的路徑依順時針方向連續每一個鏡面均反射 1 次，稱爲跳躍數 1，記爲  $J_1 = 1$ ；  
 在第二層時，光線的路徑依順時針方向連續每兩個鏡面均反射 1 次，稱爲跳躍數 2，記爲  $J_2 = 2$ ；  
 ⋮  
 在第  $L$  層時，光線的路徑依順時針方向連續每  $L$  個鏡面均反射 1 次，稱爲跳躍數  $L$ ，記爲  $J_L = L$ 。

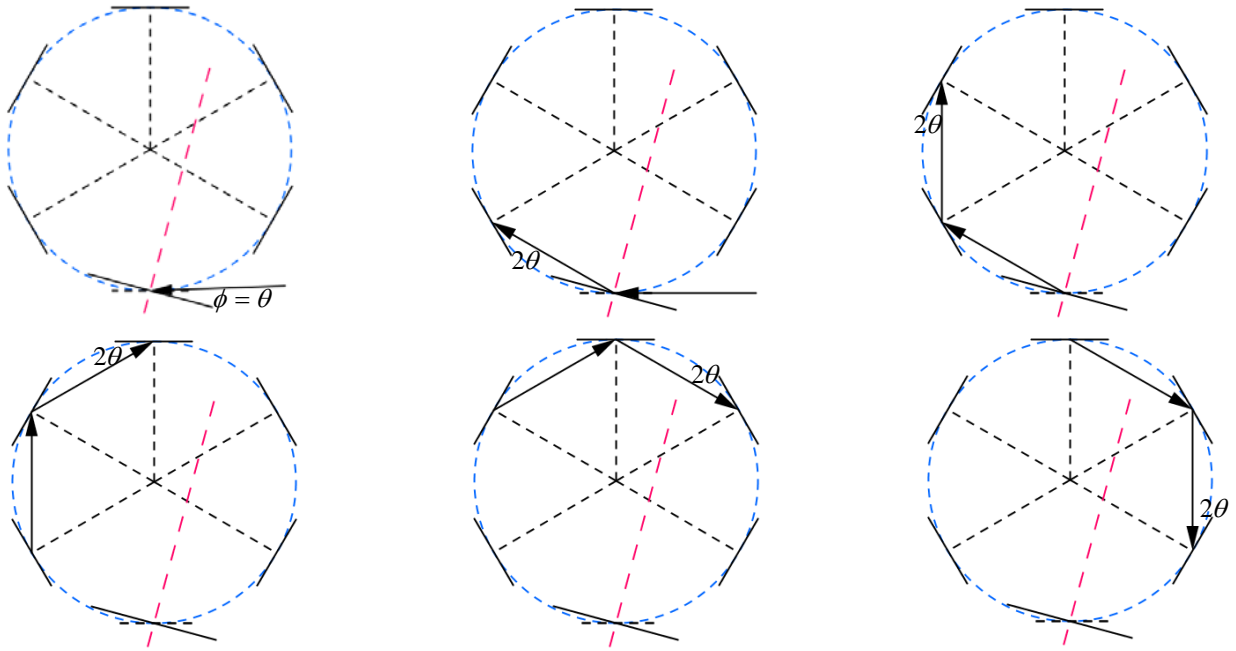
(五)圈數：在第一層時，當光線每經過鏡面 1 一次(但不一定要碰到鏡面 1)稱爲一圈，因此在第一層中，光線所繞的總圈數記爲  $O_1$ ；  
 在第二層時，當光線每經過鏡面 1 一次(但不一定要碰到鏡面 1)稱爲一圈，因此在第二層中，光線所繞的總圈數記爲  $O_2$ ；  
 ∴  
 在第  $L$  層時，當光線每經過鏡面 1 一次(但不一定要碰到鏡面 1)稱爲一圈，因此在第  $L$  層中，光線所繞的總圈數記爲  $O_L$ 。

以下以正六邊形爲例，對上述的符號及定義作說明並觀察其反射路徑：

**觀察：六邊形**：在  $n=6$  時，假設入射光線的方向與所反射鏡面順時針方向之夾角爲  $\phi$ ，又令

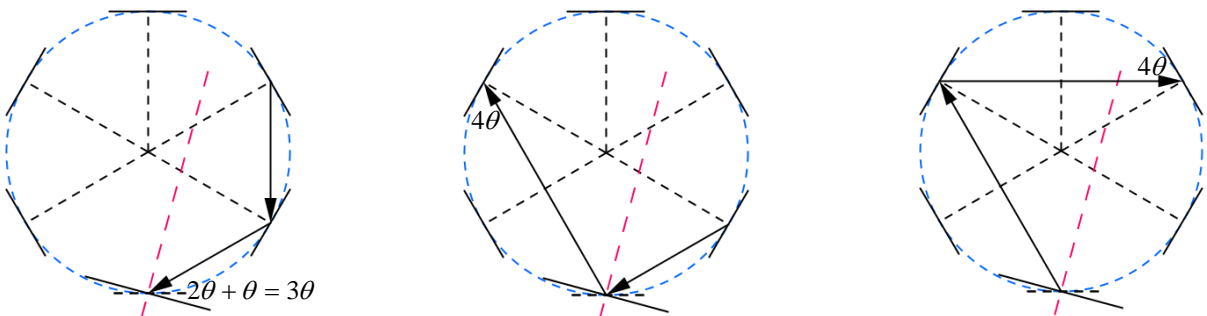
$$\theta = \frac{90^\circ}{6}，\text{觀察 } \phi \text{ 的角度變化。}$$

第一層  $M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4 \ M_5 \ M_6$   
 $\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta$   
 在第一層裡， $R_1 = 6$ ， $J_1 = 1$ ， $O_1 = 1$ 。



圖(八)正六邊形的第一層反射

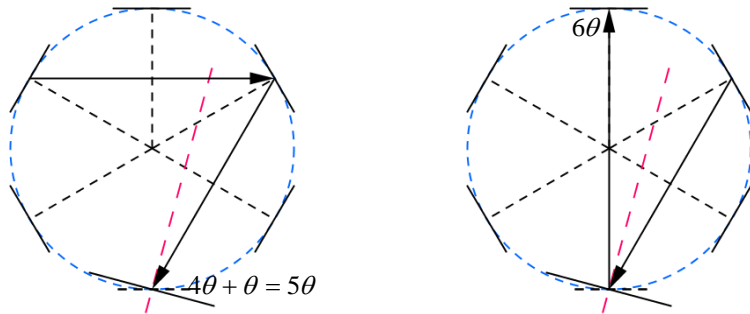
第二層  $M_1 \ M_3 \ M_5$   
 $3\theta \rightarrow 4\theta \rightarrow 4\theta$   
 在第二層裡， $R_2 = 3$ ， $J_2 = 2$ ， $O_2 = 1$ 。



圖(九) 正六邊形的第二層反射

第三層  $M_1 \quad M_4$   
 $5\theta \rightarrow 6\theta = 90^\circ$   
 開始折返回原入射路徑

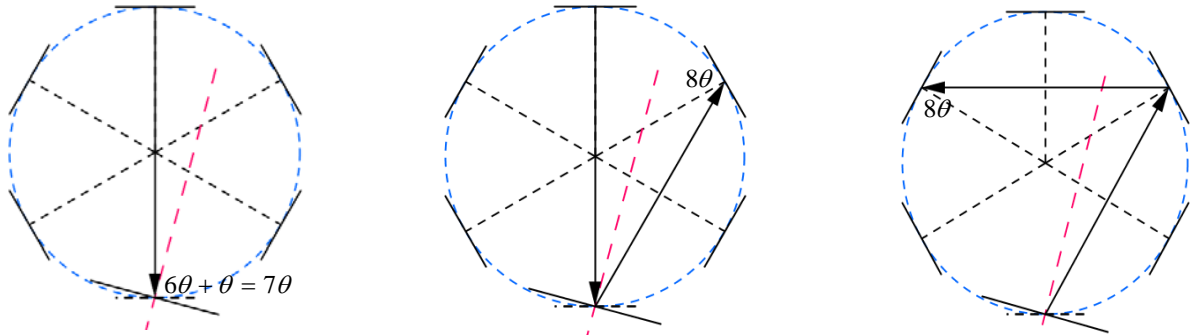
在第三層裡， $R_3 = 2$ ， $J_3 = 3$ ， $O_3 = 1$ 。



圖(十) 正六邊形的第三層反射

第四層  $M_1 \quad M_5 \quad M_3$   
 $7\theta \rightarrow 8\theta \rightarrow 8\theta$

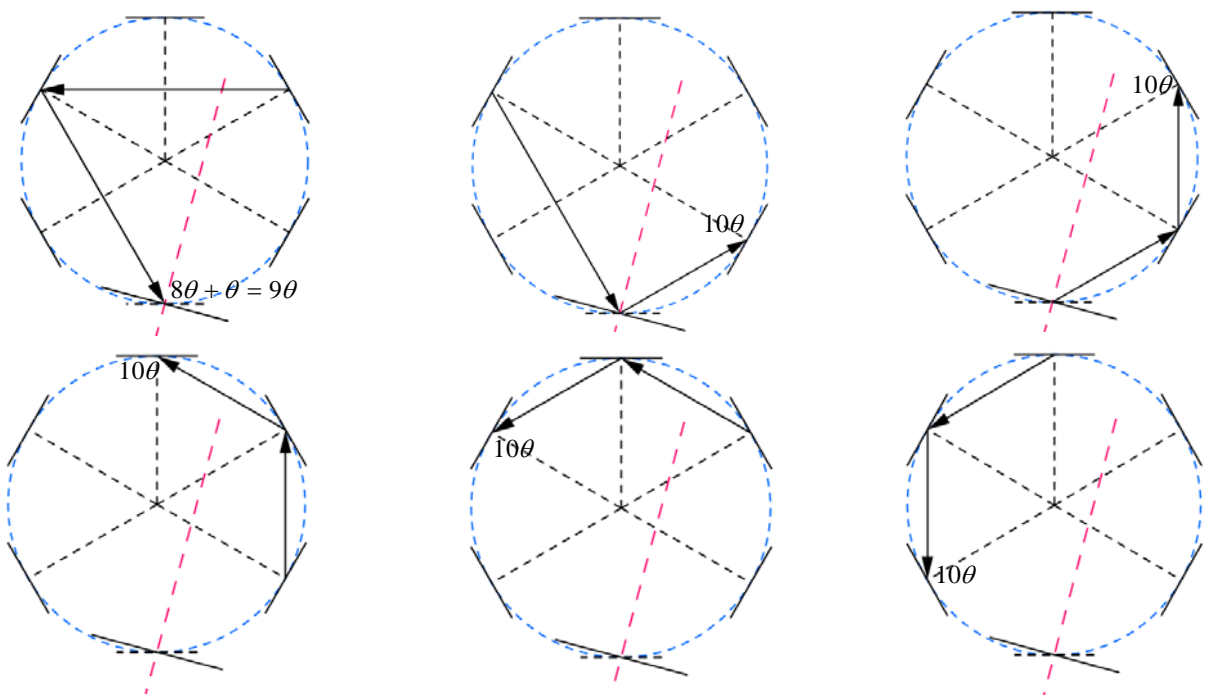
在第四層裡， $R_4 = 3$ ， $J_4 = 4$ ， $O_4 = 2$ 。



圖(十一) 正六邊形的第四層反射

第五層  $M_1 \quad M_6 \quad M_5 \quad M_4 \quad M_3 \quad M_2$   
 $9\theta \rightarrow 10\theta \rightarrow 10\theta \rightarrow 10\theta \rightarrow 10\theta \rightarrow 10\theta$

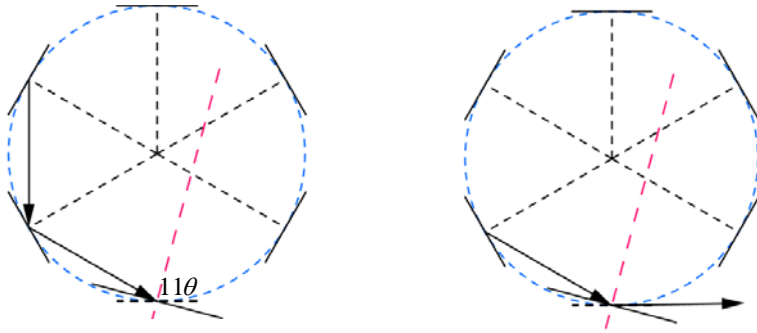
在第五層裡， $R_5 = 6$ ， $J_5 = 5$ ， $O_5 = 5$ 。



圖(十二) 正六邊形的第五層反射

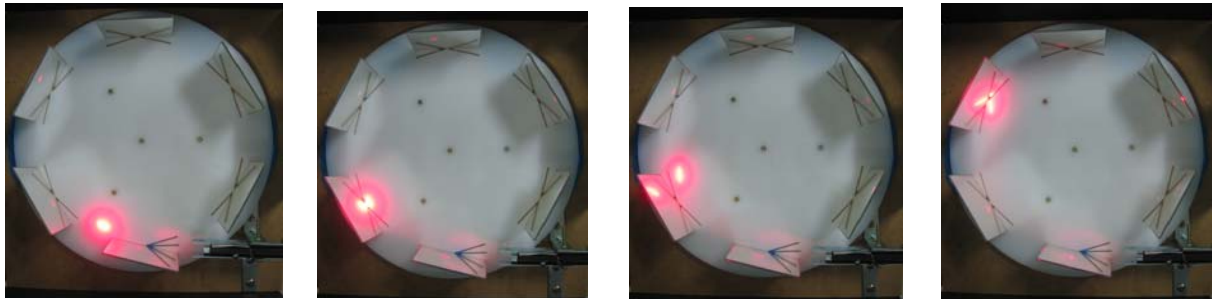


第六層  $M_1$   
 $11\theta \rightarrow$  回到發光源  
 在第六層裡， $R_6 = 1$ ， $J_6 = 6$ ， $O_6 = 1$ 。

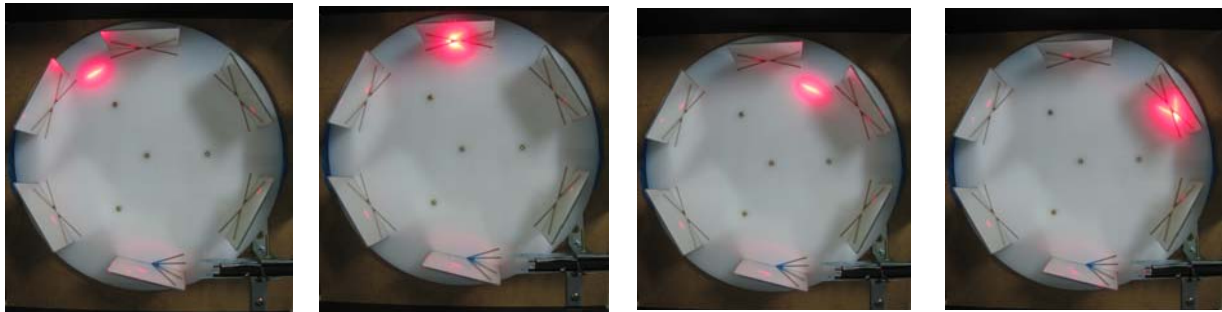


圖(十三) 正六邊形的第六層反射

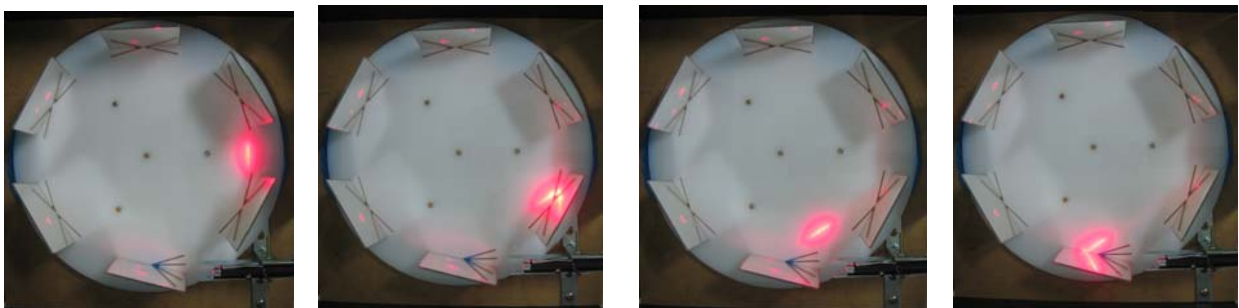
以下為實際以六邊形之模型組進行模擬之實拍圖(光線在第一層反射之情形)



(依光線行進之順序為由左至右)



(依光線行進之順序為由左至右)



## 二、定義 2：

(一)完全反射數：在正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面間，光線在任兩個鏡面間均可形成反射，即光線之反射路徑恰為正  $n$  邊形之所有邊及對角線，此時之反射數的總和為  $2C_2^n + 1$ ，稱為完全反射數，此時反射路徑所形成的圖稱為完全圖。



(二)原始反射數：在正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面間，我們將雷射光線射向一順時針調整角度

$\theta = \frac{90^\circ}{n}$  的鏡面，且其他鏡面皆不調動，而光線在此正  $n$  邊形上的反射次數，稱為原始反射數。

(三)缺線數：缺線數 =  $\frac{1}{2}$  ( 完全反射數 - 反射數 )

**定理一：**在正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面間，我們將雷射光線射向一順時針調整角度  $\theta = \frac{90^\circ}{n}$  的鏡面，且其他鏡面皆不調動，則光線在正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面間反射必定在第  $n$  層才會返回到發光源的起始點。

證明：

假設入射光線的方向與所反射鏡面順時針方向的夾角為  $\phi$ ，

又令  $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ ，則觀察  $\phi$  的角度變化。

第一層  $\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow \dots \rightarrow 2\theta$

第二層  $3\theta \rightarrow 4\theta \rightarrow 4\theta \rightarrow \dots \rightarrow 4\theta$

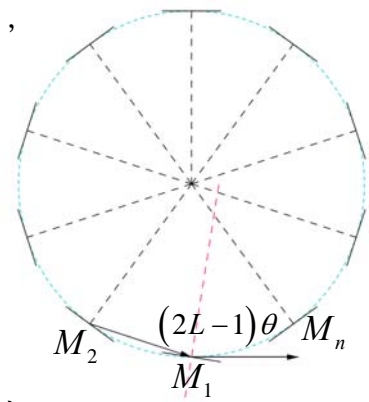
...

第  $L$  層  $(2L-1)\theta \rightarrow 2L\theta \rightarrow 2L\theta \rightarrow \dots \rightarrow 2L\theta$

因為要返回原發光源的起始點必定由  $M_2 \rightarrow M_1$  反射回去，

因此當光線由  $M_2$  反射到  $M_1$  時， $\phi$  必定為  $180^\circ - \theta$ ，如圖(十四)，

故  $(2L-1)\theta = 180^\circ - \theta \Rightarrow 2L\theta = 180^\circ \Rightarrow 2 \times L \times \frac{90^\circ}{n} = 180^\circ \Rightarrow L = n$



圖(十四) 定理一說明圖

**引理一：**在正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面間，我們將雷射光線射向一順時針調整角度  $\theta = \frac{90^\circ}{n}$  的鏡面，且其他鏡面皆不調動，則光線在正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面間反射

(1)當  $n$  為偶數時，光線在第  $\frac{n}{2}$  層的最後一次反射後就開始折返回原入射路徑。

(2)當  $n$  為奇數時，光線在第  $\frac{n+1}{2}$  層的第一次反射後就開始折返回原入射路徑。

證明：

由定理一的證明過程中得知：

(1) $n$  為偶數時，光線要開始依原入射路徑折返，此時  $\phi = 90^\circ$ ；

若在第  $L$  層達到，則  $(2L-1)\theta = 90^\circ \Rightarrow (2L-1)\frac{90^\circ}{n} = 90^\circ \Rightarrow n = 2L-1$ ，

故  $L = \frac{n+1}{2}$  (不合) 或  $2L\theta = 90^\circ \Rightarrow 2L\frac{90^\circ}{n} = 90^\circ$ ，故  $L = \frac{n}{2}$

但在第  $\frac{n}{2}$  層， $\phi$  只有  $(n-1)\theta$  及  $n\theta$  兩次反射，而  $n\theta = 90^\circ$ ，因此光線在第  $\frac{n}{2}$  層的最後

一次反射後就開始依原入射路徑折返。

(2)  $n$  為奇數時，光線要開始反射依原入射路徑折返，此時  $\phi = 90^\circ$ ；

若在第  $L$  層達到，則  $(2L-1)\theta = 90^\circ \Rightarrow (2L-1)\frac{90^\circ}{n} = 90^\circ \Rightarrow n = 2L-1$ ，

故  $L = \frac{n+1}{2}$  或  $2L\theta = 90^\circ \Rightarrow 2L\frac{90^\circ}{n} = 90^\circ$ ，故  $L = \frac{n}{2}$  (不合)

但在第  $\frac{n+1}{2}$  層， $\phi$  有  $n\theta \rightarrow (n+1)\theta \rightarrow (n+1)\theta \rightarrow \dots \rightarrow (n+1)\theta$ ，

而  $n\theta = 90^\circ$ ，因此光線在第  $\frac{n+1}{2}$  層的第一次反射後就開始依原入射路徑折返。

事實上，我們發現正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面間，連續兩個鏡面的間隔弧度為  $\frac{360^\circ}{n}$ ，假設入射光線的方向與所反射鏡面順時針方向的夾角為  $\phi$ ，我們觀察在每一層裡  $\phi$  的角度變化：

第一層： $\phi$  的角度變化為  $\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow 2\theta \rightarrow \dots \rightarrow 2\theta$ ，其中  $2\theta = \frac{180^\circ}{n}$  為弦切角，剛好為所對弦

弧度的一半，因此每次鏡面與鏡面的移動弧度為  $\frac{360^\circ}{n}$ ，也就是說每次反射均跳動一個鏡面，即  $J_1 = 1$ 。

第二層： $\phi$  的角度變化為  $3\theta \rightarrow 4\theta \rightarrow 4\theta \rightarrow \dots \rightarrow 4\theta$ ，其中  $4\theta = \frac{360^\circ}{n}$  為弦切角，剛好為所對弦

弧度的一半，因此每次鏡面與鏡面的移動弧度為  $\frac{360^\circ}{n} \times 2$ ，就是說每次反射均跳動二個鏡面，即  $J_2 = 2$ 。

⋮

第  $L$  層： $\phi$  的角度變化為  $(2L-1)\theta \rightarrow 2L\theta \rightarrow 2L\theta \rightarrow \dots \rightarrow 2L\theta$ ，其中  $2L\theta = \frac{180^\circ}{n} \times L$  為弦切

角，剛好為所對弦弧度的一半，因此每次鏡面與鏡面的移動弧度為  $\frac{360^\circ}{n} \times L$ ，也就是說每次反射均跳動  $L$  個鏡面，即  $J_L = L$ 。

經由上述的觀察，我們有了以下的定理：

**定理二：**在正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面間，我們將雷射光線射向一順時針調整角度  $\theta = \frac{90^\circ}{n}$  的鏡面，且其他鏡面皆不調動，則正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面間，光線在第  $L$  層的所有反射次數為

$$R_L = \frac{n}{\gcd(n, J_L)} \text{，且 } J_L \times R_L = n \times O_L$$

證明：

根據我們的定義，每一層的反射光線必需由  $M_1$  開始做反射。

在第  $L$  層的反射中，光線一定由  $M_1$  開始做反射，

而且此時光線每  $L$  個鏡面反射一次，即  $J_L = L$ ，

但要進入第  $L+1$  層則必須又要回到  $M_1$  開始反射，

因此光線在第  $L$  層的反射過程中，

跳躍數  $J_L$  乘上經過反射鏡面數  $R_L$  必定為  $n$  的倍數，

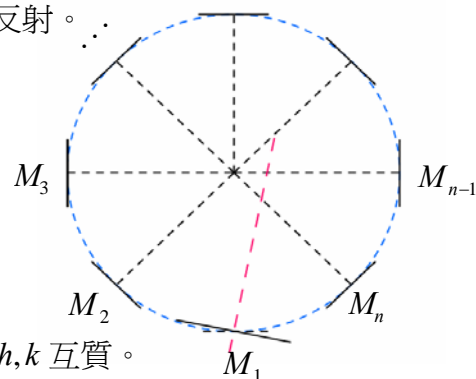
故  $J_L \times R_L = n \times t$ ， $t \in N$ 。

設  $\gcd(n, J_L) = d$ ，令  $n = dh$ ， $J_L = dk$ ， $h, k \in N$ ，其中  $h, k$  互質。

$$dk \times R_L = dh \times t \Rightarrow k \times R_L = h \times t$$

因此  $k$  必整除  $t$ ，取  $t = k$  (最小值)，則  $R_L = h$ ， $k = O_L$  (圈數)，

故  $R_L = h = \frac{n}{d} = \frac{n}{\gcd(n, J_L)}$ ，也得到  $J_L \times R_L = n \times O_L$ 。



圖(十五) 定理二說明圖

**引理二：**當正  $n$  邊形的第一個鏡面依順時針調整角度  $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ ，且其餘鏡面均不轉動，則在正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面間，光線從發光源出發到折返回到發光源處，光線在各鏡面間的原始反射數為  $\sum_{L=1}^n R_L = \sum_{L=1}^n \frac{n}{\gcd(n, J_L)}$ 。

證明：

由定理一及定理二得證。

照上述作法，我們將到  $n=1\sim 30$  前全部都做了一遍，其值如下表一：

正 $n$ 邊形	完全反射數	原始反射數	正 $n$ 邊形	完全反射數	原始反射數
<b><math>n = 5</math></b>	<b>21</b>	<b>21</b>	$n = 18$	307	183
6	31	21	<b>19</b>	<b>343</b>	<b>343</b>
<b>7</b>	<b>43</b>	<b>43</b>	20	381	231
8	57	43	21	421	301
9	73	61	22	463	333
10	91	63	<b>23</b>	<b>507</b>	<b>507</b>
<b>11</b>	<b>111</b>	<b>111</b>	24	553	301
12	133	77	25	601	523
<b>13</b>	<b>157</b>	<b>157</b>	26	651	471
14	183	127	27	703	549
15	211	147	28	757	473
16	241	171	<b>29</b>	<b>813</b>	<b>813</b>
<b>17</b>	<b>273</b>	<b>273</b>	30	871	441

表一

根據上表之觀察，我們發現以下的引理：

**引理三：**在正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面間，我們將雷射光線射向一順時針調整角度  $\theta = \frac{90^\circ}{n}$  的鏡面，且其他鏡面皆不調動，則當  $n = p$ ， $p$  為大於 2 的質數時，正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面中，其原始反射數恰等於完全反射數，即缺線數為 0。

證明：

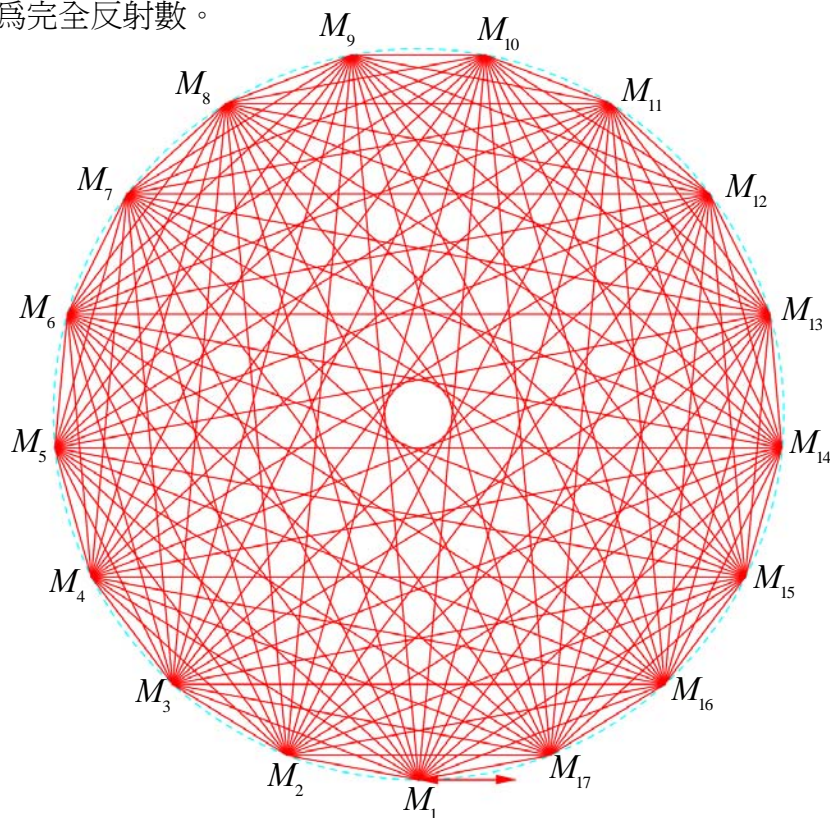
由引理二得知反射次數總和為

$$\sum_{l=1}^n R_l = \sum_{l=1}^p \frac{p}{\gcd(p, J_l)} = \frac{p}{\gcd(p, 1)} + \frac{p}{\gcd(p, 2)} + \dots + \frac{p}{\gcd(p, p)}$$

$$= p(p-1) + 1 = p^2 - p + 1 = 2C_2^n + 1$$

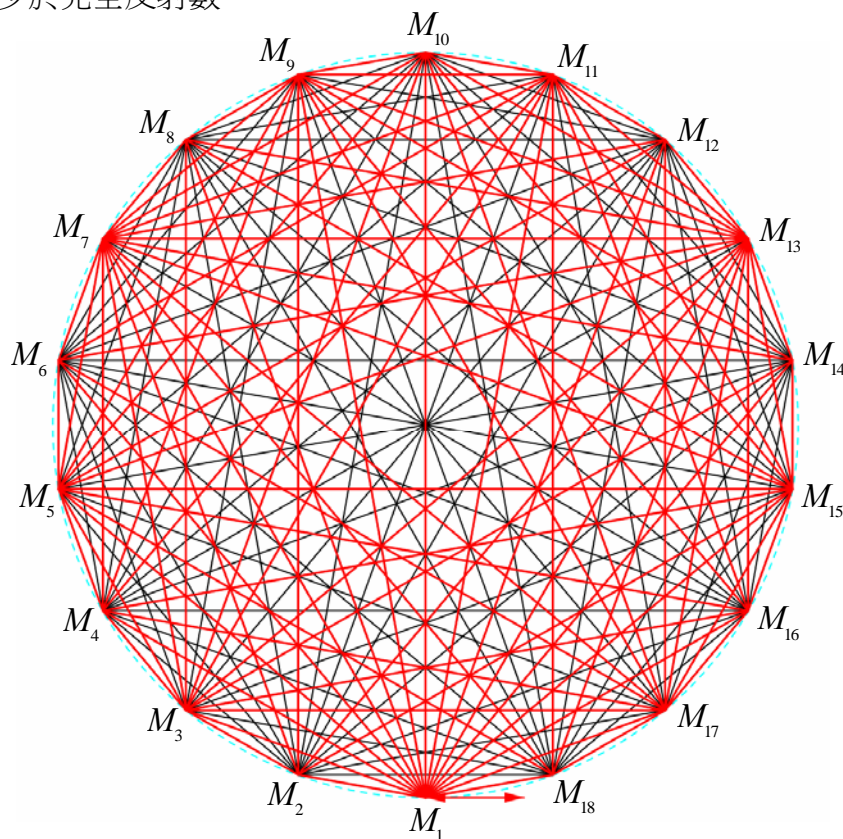
故得其原始反射數恰等於完全反射數。

如圖(十六)中之正十七邊形，光線之反射路徑恰為正十七邊形之所有邊及對角線，故其原始反射數恰為完全反射數。



圖(十六) 正十七邊形反射數恰為完全反射數

如圖(十七)中正十八邊形，光線之反射路徑無法行經正十八邊形之所有邊及對角線，故其原始反射數少於完全反射數。



圖(十七) 圖中之紅色線代表光線之反射路徑，黑色線為缺線

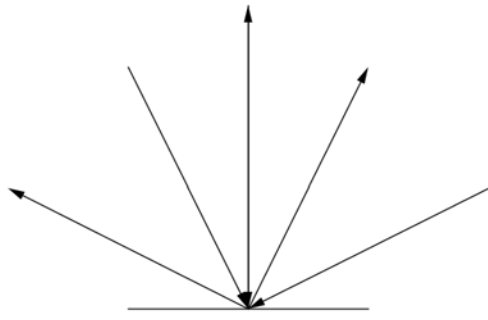
### 三、上界估計值：

在  $n$  為偶數時的正  $n$  邊形反射數無法達到完全反射數，因此我們希望找出在  $n$  為偶數時，其反射數的上界估計值。如下圖(十八)中，從反射定律，我們可以知道一個反射鏡面的反射情形，在正  $n$  邊形反射中，我們可以知道入射點  $M_1$  的反射數為  $n$ ，因為從入射光線算起，加上至正  $n$  邊形上任意一點皆可與之形成反射，總共為  $n$  條反射線，如下圖(十九)。

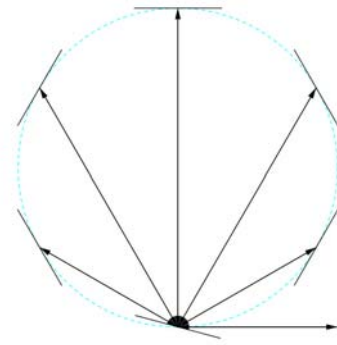
在正  $n$  邊形反射中，我們可以知道反射點  $M_x$  的反射數為  $n-1$ ，因為正  $n$  邊形上的任一點皆可與之形成反射，總共為  $n-1$  條反射線，如下圖(二十)。

在正  $n$  邊形反射中，我們可以知道除了入射點  $M_1$  與折返點  $M_x$  以外的點之反射數為  $n-2$ ，因為與對面鏡面的反射會使光線折返，所以除了對面鏡面的反射無法達到外，其餘正  $n$  邊形上的任一點皆可與之形成反射，總共為  $n-2$  條反射線，如下圖(二十一)。因此理想的偶數正  $n$  邊形最大反射數為  $n + (n-1) + (n-2)(n-2) = n^2 - 2n + 3$ ，我們將  $n^2 - 2n + 3$  此一數值稱為上界估計值。（註：奇數邊的上界估計值即為完全反射數）

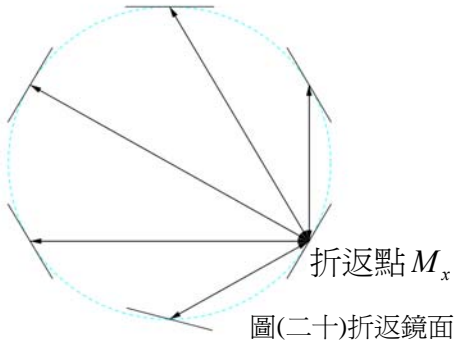




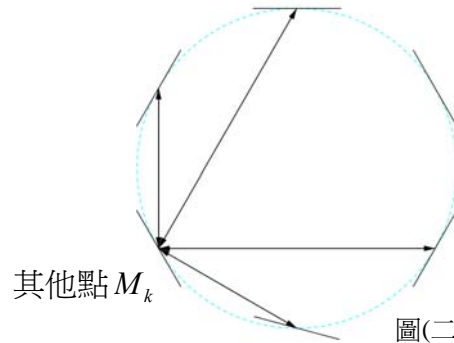
圖(十八) 反射定律



入射點  $M_1$  圖(十九) 入射鏡面



圖(二十)折返鏡面



圖(二十一)任意鏡面

#### 四、定義 3：

由上述試驗所知，當  $n = p$  ( $p$  為質數) 時，其原始反射數恰等於完全反射數，但  $n$  為偶數的合成數時，原始反射數卻不能達到完全反射數，因此我們試圖去調整鏡面使得反射數能夠達到上界估計值，為了使問題能夠較易執行，我們考慮每個鏡面能有五種調整方法，稱為鏡面轉動數，定義如下：

(一)鏡面轉動數：

在正  $n$  邊形的  $n$  個鏡面中，令  $\theta = \frac{90^\circ}{n}$ ，則每個鏡面可以依順時針或逆時針旋轉一個  $\theta$  角亦或是不轉動。

若鏡面依順時針轉動一個  $\theta$ ，我們以代號  $m_k = 1$  表示， $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ；

若鏡面依順時針轉動二個  $\theta$ ，我們以代號  $m_k = 2$  表示， $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ；

若鏡面依逆時針轉動一個  $\theta$ ，我們以代號  $m_k = -1$  表示， $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ；

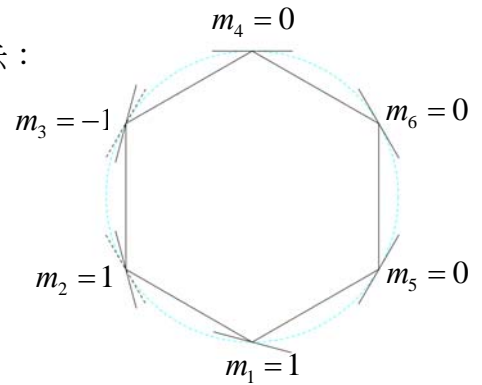
若鏡面依逆時針轉動二個  $\theta$ ，我們以代號  $m_k = -2$  表示， $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ；

若鏡面不轉動，我們以代號  $m_k = 0$  表示， $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 。

如圖(二十二)所示：

爲了方便表示，我們將鏡面轉動數以陣列的方式表示：

$$\begin{array}{cccccc} \text{鏡面位置} & M_1 & M_2 & M_3 & \cdots & M_{n-1} & M_n \\ \text{鏡面轉動數} & [ & m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{n-1} & m_n & ] \end{array}$$



(二)鏡面移動函數： $M_k(x)$ ，其中 $k$ 代表光線正打在第 $k$ 個鏡面，圖(二十二) 鏡面轉動數

$x$ 代表光線即將依順時針方向移動 $x$ 個鏡面。

(三)反射路徑函數：由反射路徑的移動情形我們可以定義一個函數關係

$$f(M_k(x)) = \begin{cases} M_{k+x}(x+m_{k+x}) & \text{if } k+x \leq n \\ M_r(x+m_r) & \text{if } k+x > n, k+x = n \cdot q + r, 0 \leq r < n \end{cases}$$

**[圖例說明]**：以下分別以 $n=5$ 及 $n=6$ 爲例作說明，得到如下的路徑：

**正五邊形： $n=5$**

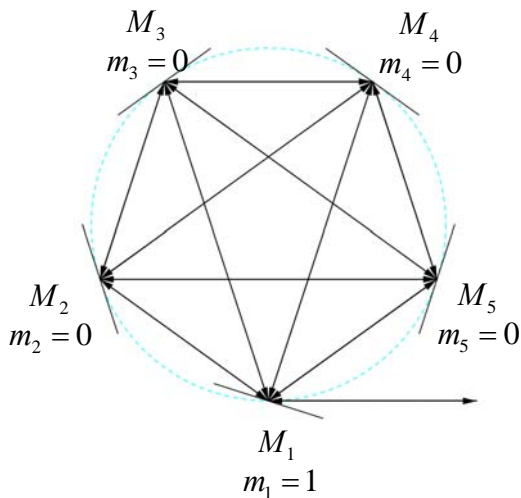
第一層： $M_1(1) \rightarrow M_2(1) \rightarrow M_3(1) \rightarrow M_4(1) \rightarrow M_5(1)$

第二層： $M_1(1+1) \rightarrow M_3(2) \rightarrow M_5(2) \rightarrow M_2(2) \rightarrow M_4(2)$

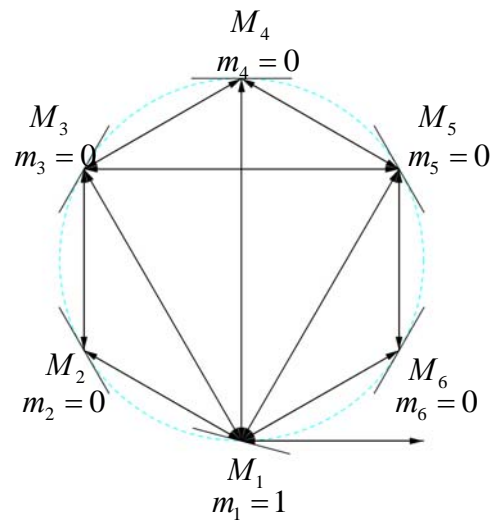
第三層： $M_1(2+1) \rightarrow M_4(3) \rightarrow M_2(3) \rightarrow M_5(3) \rightarrow M_3(3)$

第四層： $M_1(3+1) \rightarrow M_5(4) \rightarrow M_4(4) \rightarrow M_3(4) \rightarrow M_2(4)$

第五層： $M_1(4+1) \rightarrow$ 發光源



圖(二十三) 正五邊形的反射情形



圖(二十四) 正六邊形反射情形



## 正六邊形： $n = 6$

第一層：  $M_1(1) \rightarrow M_2(1) \rightarrow M_3(1) \rightarrow M_4(1) \rightarrow M_5(1) \rightarrow M_6(1)$

第二層：  $M_1(1+1) \rightarrow M_3(2) \rightarrow M_5(2)$

第三層：  $M_1(2+1) \rightarrow M_4(3)$

第四層：  $M_1(3+1) \rightarrow M_5(4) \rightarrow M_3(4)$

第五層：  $M_1(4+1) \rightarrow M_6(5) \rightarrow M_5(5) \rightarrow M_4(5) \rightarrow M_3(5) \rightarrow M_2(5)$

第六層：  $M_1(5+1) \rightarrow$  發光源

## 五、偶數邊的鏡面調整規則、性質、策略擬定及尋求最佳解的過程：

我們試圖去調整鏡面使得在  $n$  為偶數的情形，反射數能夠達到上界的估計值，每個鏡面的鏡面轉動數均有  $1, 0, -1$ ，但調整鏡面的工作量相當可觀，因此需要有判斷的法則去進行，經由實驗與觀察，我們得到一些規則，藉由這些規則的輔助，我們在調整鏡面後，確實可增加光線的反射數。

### (一)偶數邊的鏡面調整規則：

**規則(一)**：在光線反射過程中， $M_k(x)$  中的  $x$  不能為  $0$  或  $n$ ，因為  $x$  的值代表即將順時針方向移動  $x$  個鏡面。

**規則(二)**：若  $m_l = 1$ ，則光線反射路徑不會連續經過  $M_l$  及  $M_{l+1}$ ，也就是說反射光線缺一條

$$\overline{M_l M_{l+1}}。$$

[說明]：若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+1}$ ，其中  $m_l = 1$ ，則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+1) = M_l(x+1)$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_{k+x}(x+1)) = M_{k+x+x+1}(x+1+m_{k+2x+1}) = M_{l+1}(x+1+m_{k+2x+1})$$

$$\text{因此 } k+x+1 \equiv k+x+x+1 \pmod{n} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{n}，$$

故  $x = 0$  或  $n$ ，由規則(一)得到矛盾。

**規則(三)**：若  $m_l = -1$ ，則光線反射路徑不會連續經過  $M_{l-1}$  及  $M_l$ ，也就是說反射光線缺一條

$$\overline{M_{l-1} M_l}。$$

[說明]：若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_{l-1} \rightarrow M_l$ ，其中  $m_l = -1$ ，則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+m_{k+x}) = M_{l-1}(x+m_{k+x})$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_{k+x}(x+m_{k+x})) = M_{k+2x+m_{k+x}}(x+m_{k+x}+(-1)) = M_l(x+m_{k+x}+(-1))$$

$$\text{因此 } k+x+1 \equiv k+2x+m_{k+x} \pmod{n} \Rightarrow \text{，即 } x+m_{k+x} = 1$$

$$\text{故 } f(M_k(x)) = M_{l-1}(x + m_{k+x}) = M_{l-1}(1)$$

而  $f^2(M_k(x)) = M_l(x + m_{k+x} + (-1)) = M_l(0)$ ，由規則(一)得到矛盾。

**規則(四)**：(1)若  $m_l = 1$ ， $m_{l+1} = -1$ ，其形式為  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{matrix}$ ，則必缺一條反射線  $\overline{M_l M_{l+1}}$ 。

[說明]：由規則(二)、規則(三)可得知必缺一條反射線  $\overline{M_l M_{l+1}}$ 。

(2)若  $m_l = 1$ ， $m_{l+1} = 0$ ， $m_{l+2} = -1$ ，其形式為  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$ ，則必缺二條反射線

$$\overline{M_l M_{l+1}}，\overline{M_{l+1} M_{l+2}}。$$

[說明]：由規則(二)、規則(三)可得知必缺二條反射線  $\overline{M_l M_{l+1}}$ ， $\overline{M_{l+1} M_{l+2}}$ 。

(3)若  $m_l = 1$ ， $m_{l+1} = 0$ ， $m_{l+2} = 0$ ， $m_{l+3} = -1$ ，其形式為  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$ ，則

$$\text{必缺三條反射線 } \overline{M_l M_{l+1}}，\overline{M_{l+1} M_{l+2}}，\overline{M_{l+2} M_{l+3}}。$$

[說明]：由規則(二)、規則(三)可得知必缺二條反射線  $\overline{M_l M_{l+1}}$ ， $\overline{M_{l+2} M_{l+3}}$ 。

若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_{l+1} \rightarrow M_{l+2}$ ，其中  $k \neq l$ ， $\therefore$  必缺一條反射線

$$\overline{M_l M_{l+1}}，\text{則 } f(M_k(x)) = M_{k+x}(x + m_{k+x}) = M_{l+1}(x + 0)，\therefore m_{k+x} = m_{l+1} = 0$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_{k+x}(x)) = M_{k+2x}(x + m_{k+2x}) = M_{l+2}(x + 0)，$$

$$\text{因爲 } m_{k+2x} = m_{l+2} = 0，\text{因此 } \begin{cases} k + x \equiv l + 1(\text{mod } n) \\ k + 2x \equiv l + 2(\text{mod } n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \equiv 1(\text{mod } n) \Rightarrow k \equiv l(\text{mod } n) \Rightarrow k = l，\text{與已知條件 } k \neq l \text{ 矛盾}$$

所以必缺一條反射線  $\overline{M_{l+1} M_{l+2}}$ ，因此  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$  必缺三條反射

$$\text{線 } \overline{M_l M_{l+1}}，\overline{M_{l+1} M_{l+2}}，\overline{M_{l+2} M_{l+3}}。$$

**規則(五)**：(1)以中心點為對稱中心的兩鏡面  $M_l$  及  $M_{l+\frac{n}{2}}$ ，若  $m_l = 0$  及  $m_{l+\frac{n}{2}} = 0$ ，則光線反射路

徑不會連續經過  $M_l$  及  $M_{l+\frac{n}{2}}$ ，否則會形成迴圈。

[說明]：若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n}{2}}$ ，其中  $m_l = 0$  及  $m_{l+\frac{n}{2}} = 0$ ，則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+0) = M_l(x+0)$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_{k+x}(x)) = M_{k+2x}(x+0) = M_{l+\frac{n}{2}}(x)$$

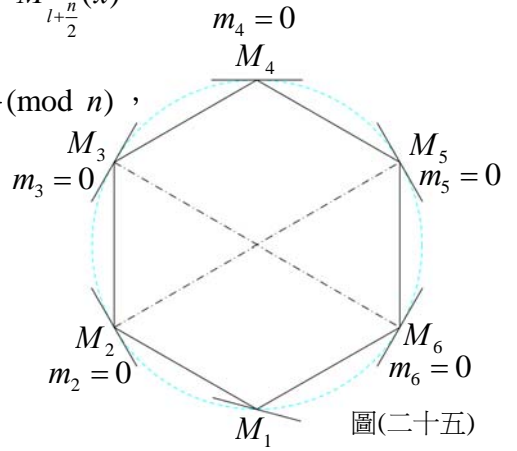
$$\text{因此 } k+x+\frac{n}{2} \equiv k+2x \pmod{n} \Rightarrow x \equiv \frac{n}{2} \pmod{n},$$

$$\text{即 } x = \frac{n}{2}, \text{ 故 } f(M_k(\frac{n}{2})) = M_l(\frac{n}{2})$$

$$f^2(M_k(\frac{n}{2})) = M_{l+\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})$$

$$f^3(M_k(\frac{n}{2})) = M_l(\frac{n}{2})$$

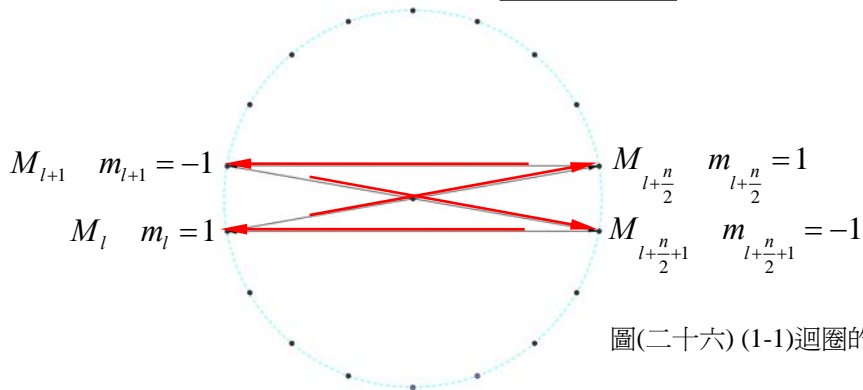
$$f^4(M_k(\frac{n}{2})) = M_{l+\frac{n}{2}}(\frac{n}{2}) \text{ 形成迴圈，如右圖}$$



圖(二十五)

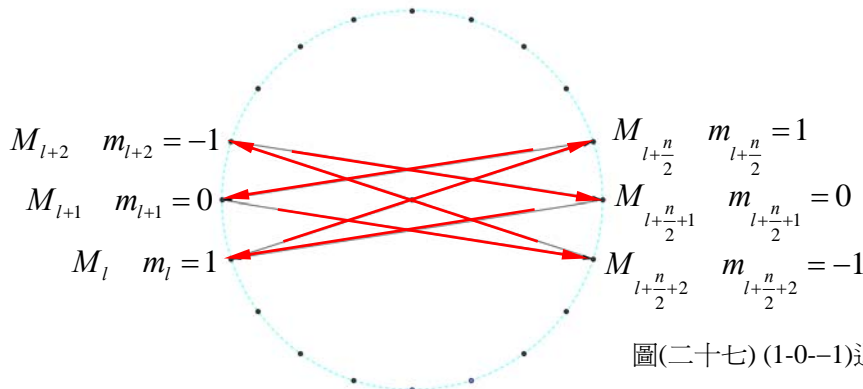
(0-0)的迴圈情形

(2)以中心點為對稱中心的兩組  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{matrix}$ 、 $\begin{matrix} M_{l+\frac{n}{2}} & M_{l+\frac{n}{2}+1} \\ 1 & -1 \end{matrix}$  會形成迴圈。



圖(二十六) (1-1)迴圈的情形

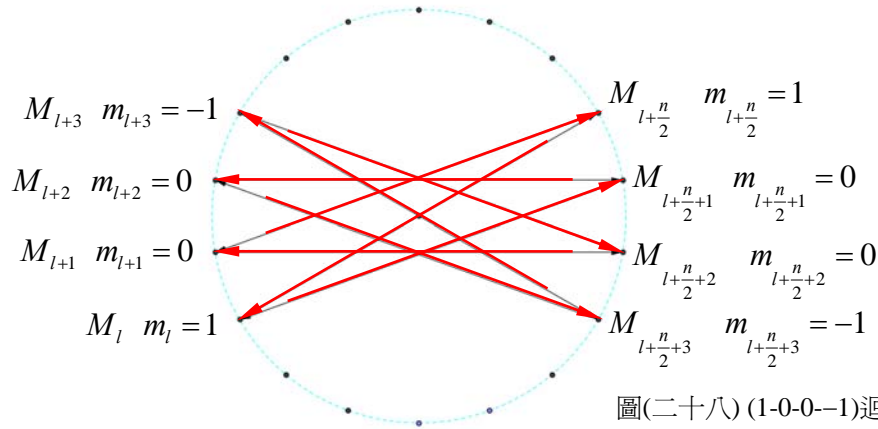
(3)以中心點為對稱中心的兩組  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$ 、 $\begin{matrix} M_{l+\frac{n}{2}} & M_{l+\frac{n}{2}+1} & M_{l+\frac{n}{2}+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$  會形成迴圈。



圖(二十七) (1-0--1)迴圈的情形

(4)以中心點為對稱中心的兩組  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$ 、 $\begin{matrix} M_{l+\frac{n}{2}} & M_{l+\frac{n}{2}+1} & M_{l+\frac{n}{2}+2} & M_{l+\frac{n}{2}+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$  會

形成迴圈。



圖(二十八) (1-0-0--1)迴圈的情形

**規則(六)**：當光線反射到鏡面  $M_l$  後依原路徑折返，此時  $m_l = 0$

[說明]：反射光線要依原路徑折返，其中必有  $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_k$  路徑，則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x + m_{k+x}) = M_l(x + m_l), \quad k + x \equiv l \pmod{n}$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_l(x + m_l)) = M_{l+x+m_l}(x + m_l + m_{l+x+m_l})$$

因此  $k + x + x + m_l \equiv k \pmod{n} \Rightarrow 2x + m_l \equiv 0 \pmod{n}$ ，但  $m_l \in \{1, 0, -1\}$

故得  $m_l = 0$ ， $2x \equiv 0 \pmod{n}$ ，即  $x = \frac{n}{2}$

$$\Rightarrow f(M_k(\frac{n}{2})) = M_{k+\frac{n}{2}}(\frac{n}{2} + 0) = M_l(\frac{n}{2}), \quad f^2(M_k(\frac{n}{2})) = M_k(\frac{n}{2} + m_k)$$

**[說明例]：鏡面不轉動與鏡面轉動之結果比較**

(1)原本不轉動的正六邊形鏡面反射： $\begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \\ [ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ] \end{matrix}$

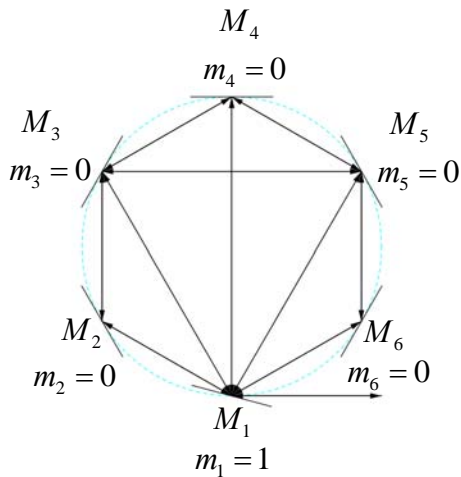
$M_1(1) \rightarrow M_2(1) \rightarrow M_3(1) \rightarrow M_4(1) \rightarrow M_5(1) \rightarrow M_6(1) \rightarrow M_1(1+1) \rightarrow M_3(2) \rightarrow M_5(2) \rightarrow M_1(2+1) \rightarrow M_4(3) \rightarrow M_1(3+1) \rightarrow M_5(4) \rightarrow M_3(4) \rightarrow M_1(4+1) \rightarrow M_6(5) \rightarrow M_5(5) \rightarrow M_4(5) \rightarrow M_3(5) \rightarrow M_2(5) \rightarrow M_1(5+1) \rightarrow$ 發光源

如下圖(二十九)中共計反射 21 次。

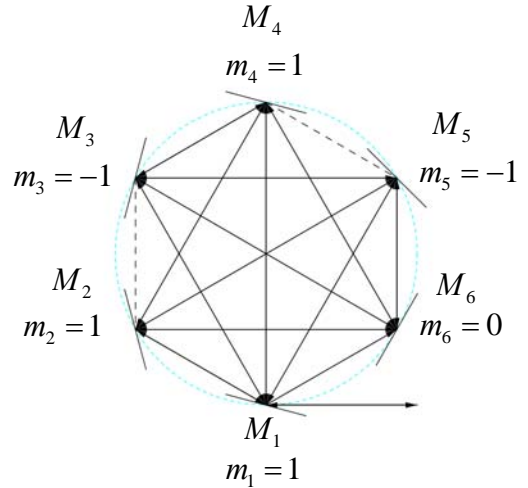
(2)我們將鏡面轉動之規則用於正六邊形中： $\begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \\ [ & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & ] \end{matrix}$

$M_1(1) \rightarrow M_2(1+1) \rightarrow M_4(2+1) \rightarrow M_1(3+1) \rightarrow M_5(4-1) \rightarrow M_2(3+1) \rightarrow M_6(4+0)$   
 $\rightarrow M_4(4+1) \rightarrow M_3(5-1) \rightarrow M_1(4+1) \rightarrow M_6(5+0) \rightarrow M_5(5-1) \rightarrow M_3(4-1)$   
 $\rightarrow M_6(3+0) \rightarrow M_3(3-1) \rightarrow M_5(2-1) \rightarrow M_6(1+0) \rightarrow M_1(1+1) \rightarrow M_3(2-1)$   
 $\rightarrow M_4(1+1) \rightarrow M_6(2+0) \rightarrow M_2(2+1) \rightarrow M_5(3-1) \rightarrow M_1(2+1) \rightarrow M_4(3+1)$   
 $\rightarrow M_2(4+1) \rightarrow M_1(5+1) \rightarrow \text{發光源}$

如下圖(三十)中共計反射 27 次。



圖(二十九) 原本不轉動的正六邊形鏡面反射情形



圖(三十)轉動過後的正六邊形鏡面反射情形

## (二)、性質：

經由上述邊數  $n$  為偶數時的正  $n$  邊形之鏡面調整的規則，我們發現了幾個重要的性質，而為了方便以下性質之證明，在此先給出兩個計算公式：

(1)位置公式： $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_0 - \beta - 2\gamma = n - E - P = n - 2$

[說明]： $x_1$  為  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{matrix}$  佔用的兩個位置； $x_2$  為  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$  佔用的三個位置；

$x_3$  為  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$  佔用的四個位置； $x_0$  為  $\begin{matrix} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{matrix}$  佔用的兩個位置

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  皆為其組數， $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$  且  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ ；

而  $E$  為入射鏡面，佔用一個位置； $P$  為折返點，佔用一個位置，其中  $x_2$  及  $x_3$  中的 0 會與  $x_0$  中的 0 重複算，故需減掉重複算的 0。

(2)缺線公式： $\alpha x'_1 + \beta x'_2 + \gamma x'_3 + \delta x'_4 = y$ ， $y$  為缺線數。

[說明]： $x'_1$  為  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{matrix}$  所產生的一條缺線； $x'_2$  為  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$  所產生的兩條缺線

$x'_3$  為  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$  所產生的三條缺線； $x'_4$  為  $\begin{matrix} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{matrix}$  所產生的一條缺線

性質(一)：若缺線數為  $\frac{n-2}{2}$ ，意即反射數達到上界估計值，鏡面只能由  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ \hline 1 & -1 \end{array}$  及  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$  去搭配。

[證明]：見附錄。

性質(二)：若缺線數為  $\frac{n-2}{2}+1$ ，鏡面只能由一組  $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}$  與  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ \hline 1 & -1 \end{array}$  及  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$  去搭配。

[證明]：見附錄。

性質(三)：若缺線數為  $\frac{n-2}{2}+2$ ，鏡面只能由兩組  $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}$  或一組  $\begin{array}{cccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$  與  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ \hline 1 & -1 \end{array}$  及  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$  去搭配。

[證明]：見附錄。

性質(四)：若缺線數為  $\frac{n-2}{2}+3$ ，鏡面只能由三組  $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}$  或一組  $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}$  及一組  $\begin{array}{cccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$  與  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ \hline 1 & -1 \end{array}$  及  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$  去搭配。

[證明]：見附錄。

### (三)策略擬定及尋求最佳解的過程：

在尋求上界估計值的過程裡每個鏡面(除入射點之鏡面外)的鏡面轉動數均有 1, 0, -1 三種情形，加上考慮排列組合的搭配，工作量相當可觀，因此經由規則(一)~規則(六)以及性質(一)、(二)、(三)、(四)，我們擬定出以下的策略，可以有效地減少排列組合的工作量：

**策略(一)**：由性質(一)得知，若缺線數為  $\frac{n-2}{2}$ ，意即反射數達到上界估計值，鏡面只能由

$\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ \hline 1 & -1 \end{array}$  及  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$  去搭配，再經由電腦程式的輔助，找出鏡面正確的擺放位置。

**策略(二)**: 由性質(二)得知, 若缺線數為  $\frac{n-2}{2}+1$ , 鏡面只能由一組  $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$  與  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{array}$

及  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{array}$  去搭配, 再經由電腦程式的輔助, 找出鏡面正確的擺放位置。

**策略(三)**: 由性質(三)得知, 若缺線數為  $\frac{n-2}{2}+2$ , 鏡面只能由兩組  $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$  或一組

$\begin{array}{cccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$  與  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{array}$  及  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{array}$  去搭配, 再經由電腦程式的輔助,

找出鏡面正確的擺放位置。

**策略(四)**: 由性質(四)得知, 若缺線數為  $\frac{n-2}{2}+3$ , 鏡面只能由三組  $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$  或一組

$\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$  及一組  $\begin{array}{cccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$  與  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{array}$  及  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{array}$  去搭配,

再經由電腦程式的輔助, 找出鏡面正確的擺放位置。

**求最佳解**:

**步驟(一)**: 執行策略(一), 若無法找出最佳解, 即表示此正  $n$  邊形之缺線數大於  $\frac{n-2}{2}$ , 於是我們進行步驟(二)。

**步驟(二)**: 執行策略(二), 若無法找出最佳解, 即表示此正  $n$  邊形之缺線數大於  $\frac{n-2}{2}+1$ , 於是我們進行步驟(三)。

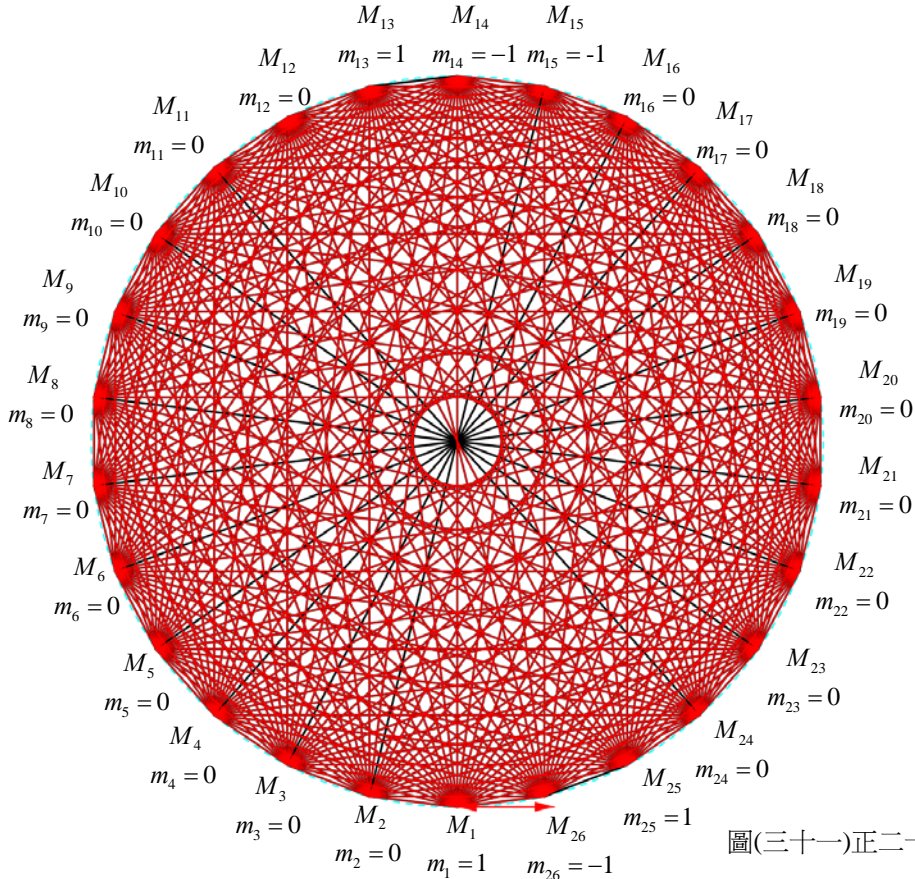
**步驟(三)**: 執行策略(三), 若無法找出最佳解, 即表示此正  $n$  邊形之缺線數大於  $\frac{n-2}{2}+2$ , 於是我們進行步驟(四)。

**步驟(四)**: 執行策略(四)。

我們對於在  $n$  為偶數, 且  $6 \leq n \leq 30$  的情形運用前述之規則、性質與擬定策略作一完整的探討, 其中  $6 \leq n \leq 16$  及  $n=22, 26$  時, 執行策略(一)即可求得最佳解, 最大反射數均可達到上界估計值, 在此以  $n=26$  為圖例。



圖例： $n=26$ ，使用  $\underline{1 \ -1}$  即達到最佳解的反射路徑，反射數為 627。



圖(三十一)正二十六邊形鏡面反射情形

下面我們針對未達上界估計值的  $n=18, 20, 24, 28, 30$  之情形逐一進行策略之操作說明，其求所求得之反射數即為最大值：

(1)  $n=18$ 時

步驟(一)：執行策略(一)

發現最大解  $[1 \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ，缺線數為 16 大於  $\frac{18-2}{2}$ ，非最佳解，於是我們進行步驟(二)。

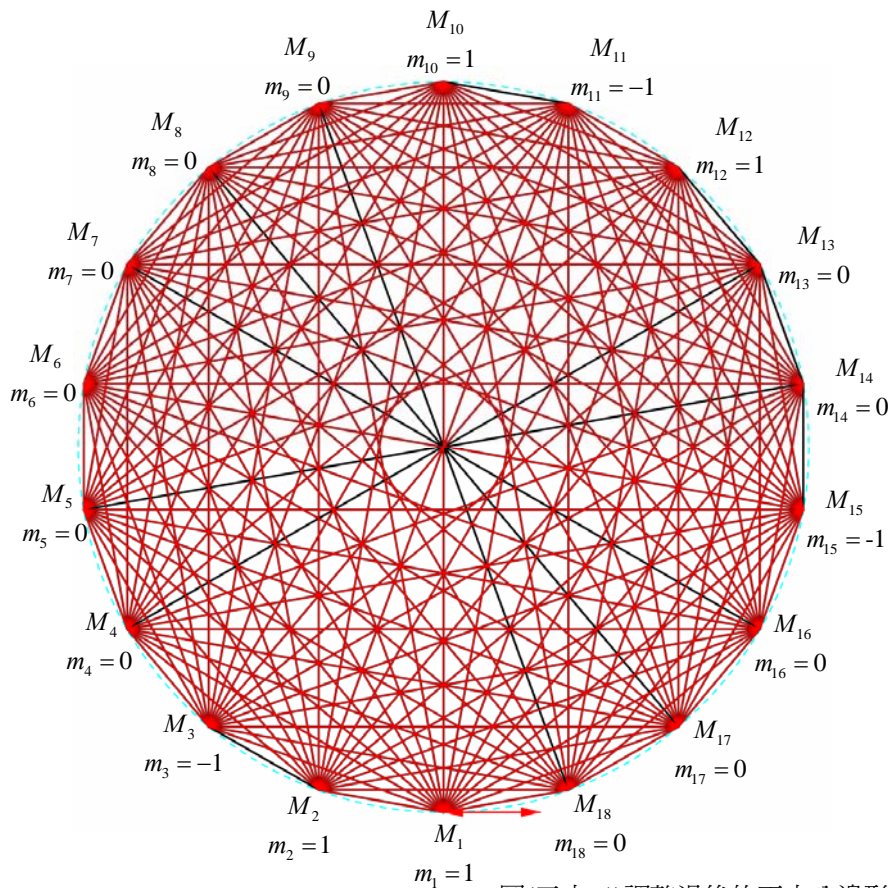
步驟(二)：執行策略(二)

發現最大解  $[1 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ 0} \ \underline{-1 \ 1} \ \underline{-1 \ 1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ \underline{1 \ -1}]$ ，缺線數為 15 大於  $\frac{18-2}{2} + 1$ ，非最佳解，於是我們進行步驟(三)。

步驟(三)：執行策略(三)

發現最大解  $[1 \ \underline{1 \ 0} \ \underline{-1 \ 0} \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 1 \ 0 \ \underline{-1 \ 1} \ \underline{-1 \ 0}]$  與  $[1 \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ 0} \ 0 \ \underline{-1 \ 0} \ 0 \ 0]$ ，缺線數為 10 等於  $\frac{18-2}{2} + 2$ ，於是我們找到最佳解。

圖例： $n=18$  時，使用  $\underline{1 \ -1}$  及  $\underline{1 \ 0 \ 0 \ -1}$  達到最佳解的反射路徑，反射數為 287。



圖(三十二)調整過後的正十八邊形鏡面反射情形

(2)  $n = 20$  時

步驟(一)：執行策略(一)

發現最大解  $[1 \ 0 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0]$ ，

缺線數為 13 大於  $\frac{20-2}{2}$ ，非最佳解，於是我們進行步驟(二)。

步驟(二)：執行策略(二)

發現最大解  $[1 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ 0} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ 0]$

與  $[1 \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ 0} \ \underline{1 \ 0} \ 0 \ 0 \ 0]$ ，缺線數為

13 大於  $\frac{20-2}{2} + 1$ ，非最佳解，於是我們進行步驟(三)。

步驟(三)：執行策略(三)

發現最大解  $[1 \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ \underline{1 \ 0} \ \underline{1 \ -1} \ 0 \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ -1} \ \underline{1 \ 0} \ \underline{1 \ -1}]$ ，

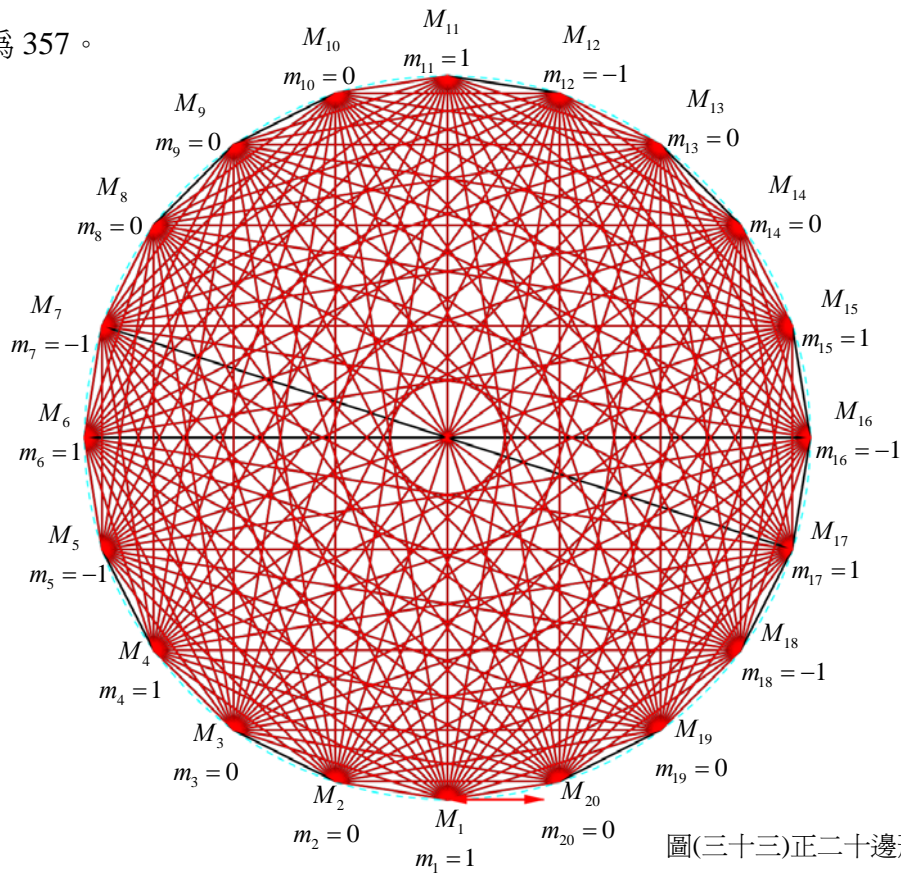
缺線數為 13 大於  $\frac{20-2}{2} + 2$ ，非最佳解，於是我們進行步驟(四)。

步驟(四)：執行策略(四)

發現最大解  $[1 \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ 0 \ 0 \ \underline{1} \ \underline{0} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{0} \ 0 \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1}]$ ，

缺線數為 12 等於  $\frac{20-2}{2}+3$ ，於是我們找到最佳解。

圖例： $n=20$  時，使用  $\underline{1 \ -1}$ 、 $\underline{1 \ 0 \ -1}$  及  $\underline{1 \ 0 \ 0 \ -1}$  達到最佳解的反射路徑，反射數為 357。



圖(三十三)正二十邊形鏡面反射情形

(3)  $n=24$  與  $28$  時，如同  $n=18$ ，在步驟(三)時找到最佳解

$n=24$  的解，缺線數為 13 等於  $\frac{24-2}{2}+2$

$[1 \ 0 \ 0 \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ \underline{1} \ \underline{0} \ \underline{0} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ 0 \ 0]$

$n=28$  的解，缺線數為 15 等於  $\frac{28-2}{2}+2$

$[1 \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ 0 \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ 0 \ 0 \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{0} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{0} \ \underline{-1}]$

(4)  $n=30$  時，如同  $n=20$ ，在步驟(四)時找到最佳解，缺線數為 17 等於  $\frac{30-2}{2}+3$

$[1 \ \underline{1} \ \underline{0} \ \underline{-1} \ 0 \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{0} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ 0 \ 0 \ \underline{1} \ \underline{0} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ 0 \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1} \ \underline{1} \ \underline{-1}]$



## 六、奇數邊的鏡面調整規則、策略擬定及尋求最佳解的過程：

在  $n$  為奇數(合成數)的情形，我們考慮每個鏡面的鏡面轉動數均有  $2, 1, 0, -1, -2$ ，利用鏡面的轉動使反射數增加，並探討是否能夠達到完全反射數(奇數邊的上界的估計值)，我們得到一些規則，藉由這些規則的輔助，我們在調整鏡面後，確實可增加光線的反射數。

### (一)奇數邊的鏡面調整規則：

**規則(一)**：在光線反射過程中， $M_k(x)$  中的  $x$  不能為  $0$  或  $n$ ，因為  $x$  的值代表即將順時針方向移動  $x$  個鏡面。

**規則(二)**：若  $m_l = 1$ ，則光線反射路徑不會連續經過  $M_l$  及  $M_{l+1}$ ，也就是說反射光線缺一條  $\overline{M_l M_{l+1}}$ 。

[說明]：若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+1}$ ，其中  $m_l = 1$ ，則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+1) = M_l(x+1)$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_{k+x}(x+1)) = M_{k+x+x+1}(x+1+m_{k+2x+1}) = M_{l+1}(x+1+m_{k+2x+1})$$

$$\text{因此 } k+x+1 \equiv k+x+x+1 \pmod{n} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{n},$$

故  $x=0$  或  $n$ ，由規則(一)得到矛盾。

**規則(三)**：若  $m_l = -1$ ，則光線反射路徑不會連續經過  $M_{l-1}$  及  $M_l$ ，也就是說反射光線缺一條  $\overline{M_{l-1} M}$ 。

[說明]：若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_{l-1} \rightarrow M_l$ ，其中  $m_l = -1$ ，則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+m_{k+x}) = M_{l-1}(x+m_{k+x})$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_{k+x}(x+m_{k+x})) = M_{k+2x+m_{k+x}}(x+m_{k+x}+(-1)) = M_l(x+m_{k+x}+(-1))$$

$$\text{因此 } k+x+1 \equiv k+2x+m_{k+x} \pmod{n} \Rightarrow \text{, 即 } x+m_{k+x} = 1$$

$$\text{故 } f(M_k(x)) = M_{l-1}(x+m_{k+x}) = M_{l-1}(1)$$

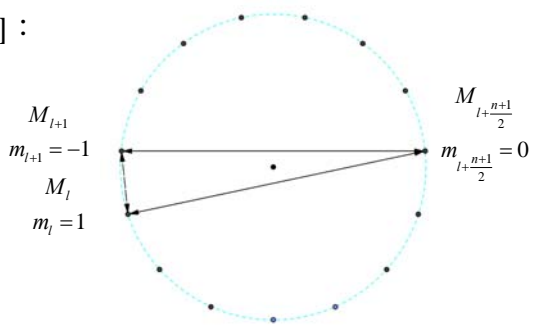
而  $f^2(M_k(x)) = M_l(x+m_{k+x}+(-1)) = M_l(0)$ ，由規則(一)得到矛盾。

**規則(四)**：

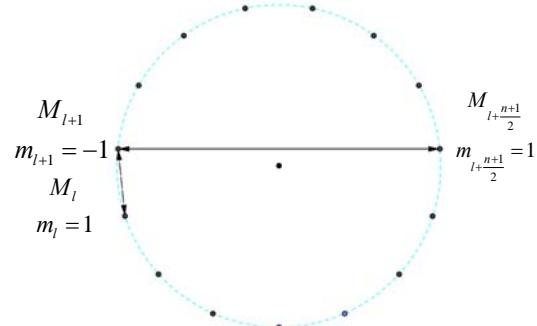
(1)若使用  $\begin{bmatrix} M_k & M_{k+1} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  (如圖 a 以代號 A 表示)，則必有三條缺線；

而碰到  $\begin{bmatrix} M_{k+\frac{n+1}{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$  (如圖 b 以代號 B 表示)時，則必有兩條缺線。

[說明]：



圖(a)

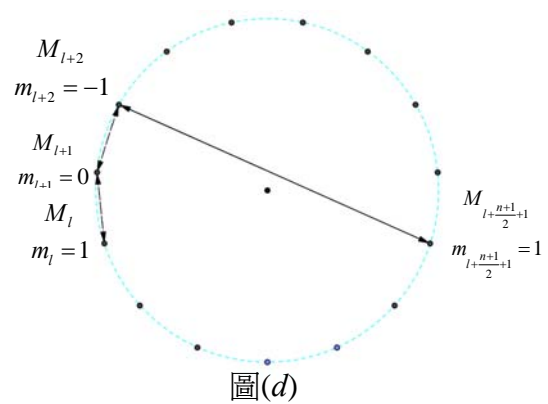
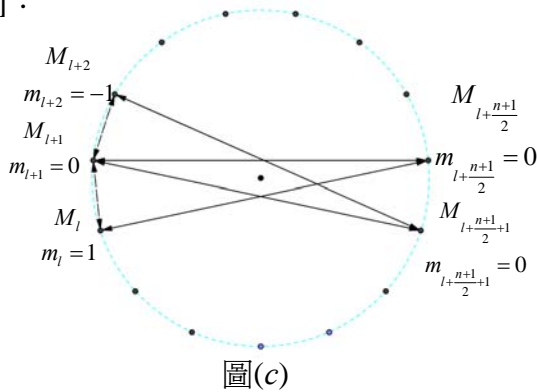


圖(b)

(2)若使用  $\begin{matrix} M_k & M_{k+1} & M_{k+2} \\ [ & 1 & 0 & -1 & ] \end{matrix}$  (如圖 c 以代號 C 表示), 則必有六條缺線;

而碰到  $\begin{matrix} M_{k+\frac{n+1}{2}} \\ [ & 1 & ] \end{matrix}$  (如圖 d 以代號 D 表示)時, 則必有三條缺線。

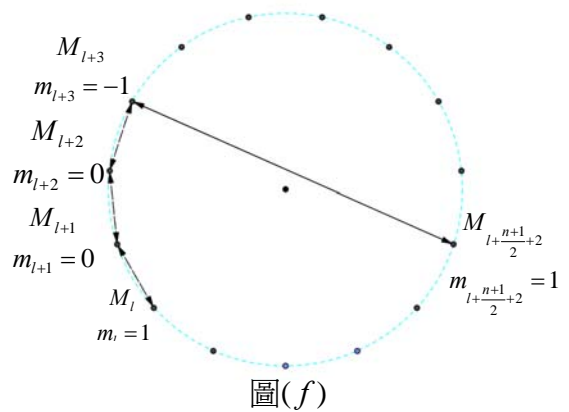
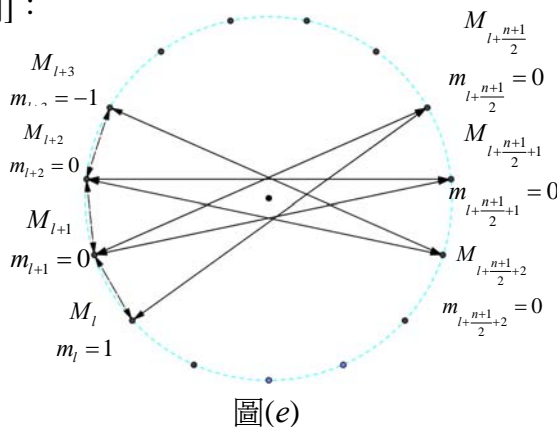
[說明]:



(3)若使用  $\begin{matrix} M_k & M_{k+1} & M_{k+2} & M_{k+3} \\ [ & 1 & 0 & 0 & -1 & ] \end{matrix}$  (如圖 e 以代號 E 表示), 則必有九條缺線;

而碰到  $\begin{matrix} M_{k+\frac{n+1}{2}+2} \\ [ & 1 & ] \end{matrix}$  (如圖 f 以代號 F 表示)時, 則必有四條缺線。

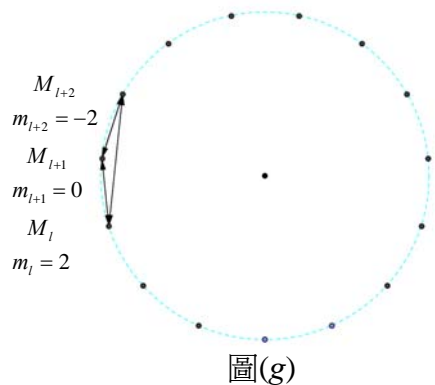
[說明]:



(4)若使用  $\begin{matrix} M_k & M_{k+1} & M_{k+2} \\ [ & 2 & 0 & -2 & ] \end{matrix}$

(如圖 g 以代號 G 表示), 則必有三條缺線

[說明]:

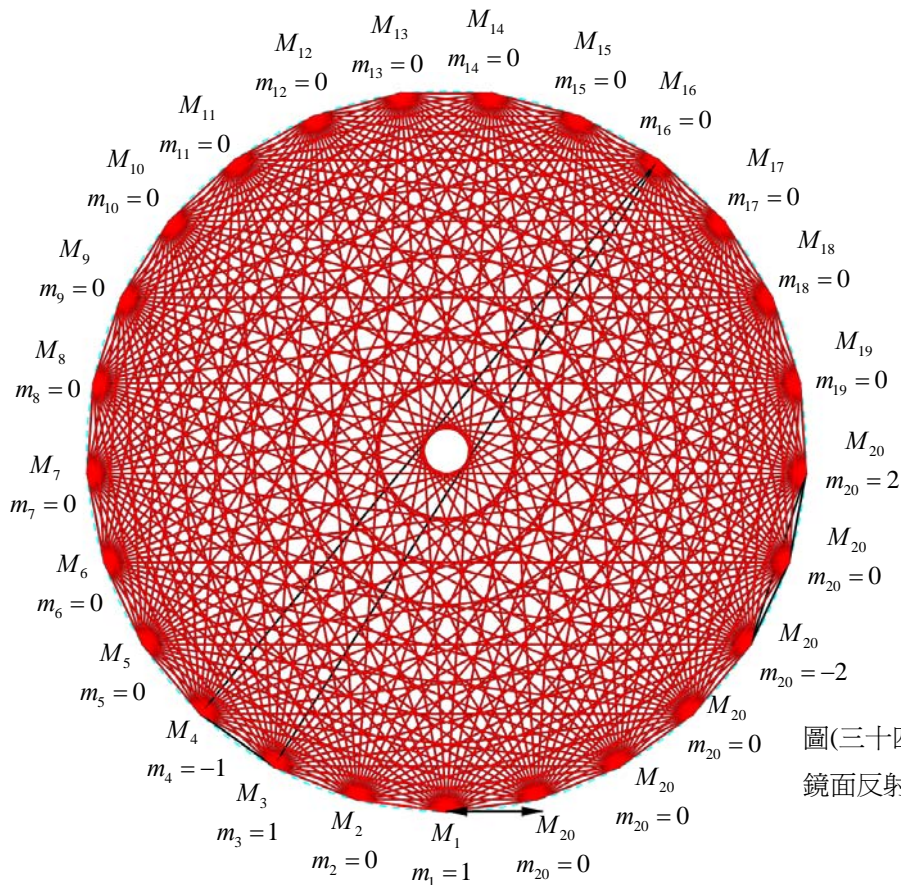


## (二)策略擬定及尋求最佳解的過程:

在奇數中, 若缺線數為 1, 則沒有辦法藉由以上七組減少缺陷的策略達成。因為由上述七種方式去做排列, 只要放進任何一組, 缺陷數至少都增加 2, 不可能會有缺一條出現, 所以在奇數中沒有缺陷為 1 條的情況。而以下是缺陷數 2 到 12 的排列, 將由表格呈現, 其中 A+B 表示上圖中同時搭配圖 a 與圖 b 的情形, 2A 表示圖 a 使用 2 次的情形, 3A 表示圖 a 使用 3 次的情形, 以此類推。

缺線數	完全沒有碰到(對邊的 1)	有碰到(對邊的 1)
1	0	0
2	0	B
3	A	D
4	0	F
5	0	A+B / B+D / B+G
6	2A / A+G / C	B+F / 2D / A+D / D+G
7	0	D+F / A+F / F+G
8	0	2A+B / A+B+G / B+2G / A+B+D / B+D+G / B+2D / B+C / 2G
9	3A / 2A+G / A+2G / A+C / C+G / E	2A+D / A+D+G / 2D+G / A+2D / 2D+G / 3D / B+D / A+B+F / B+F+G / B+D+F
10	0	E+2G / A+D+F / D+F+G / 2A+F / A+F+G / B+G / 2D+F
11	0	3A+B / 2A+B+G / A+B+2G / B+3G / A+B+C / B+C+G / B+E
		2A+B+D / A+B+D+G / B+D+2G / B+C+D / A+B+2D / B+2D+G
		B+3D / A+2F / 2F+G / D+2F
12	4A / 3A+G / 2A+2G / A+3G	3A+D / 2A+D+G / A+D+2G / D+3G / A+C+D / C+D+G / D+E
		2A+2D / A+2D+G / 2D+2G / C+2D / B+2D+F
		A+B+D+F / B+D+F+G / A+3D / 3D+G
	2A+C / A+C+G / C+2G / A+E / E+G / 2C	4D / 3F
		2A+B+F / A+B+F+G / B+F+2G / B+C+F / 2B+2F

圖例：n=25 時，使用 1 -1、2 0 -2 達到最佳解的反射路徑，反射數為 589。



圖(三十四)正二十五邊形  
鏡面反射情形





四、在  $n$  為奇數的情形，正  $n$  邊形的每個鏡面(除入射點之鏡面外)的鏡面轉動數均有  $2, 1, 0, -1, -1$  的情形，在  $n$  為奇數(合成數)，且  $9 \leq n \leq 33$  的情形之最大解整理如下表所呈現：

$n$	只使用 1-1、10-1、100-1 的情況	$C$	$P$	$d$
9	(10001*-1000)	73	69	2
15	(11-100001*-100001-1)	211	195	8
	(10001-101*-101-1000)			
	(10000001*-1001-11-1)			
21	(101-10000100-10000001*-10)	421	397	12
	(10000000100-11-1001-11*-10)			
25	(100000000001*0-100001-101-100)	601	583	9
27	(1000000001-1001*-1000001-10001-1)	703	667	18
	(11-11-1001-100001*-10000000001-10)			
$n$	搭配 20-2 的情況	$C$	$P$	$d$
9	(10001*-1000)	73	69	2
15	(1*0000000020-21-10)	211	199	6
21	(1*1-1000000010-10000020-2)	421	401	10
25	(1*01-100000000000000020-2000)	601	589	6
27	(1*000020-2001-100020-20001-10000)	703	679	12

## 陸、結論與討論

一、對照表：下表中之  $C$  為完全反射數， $P$  為最佳解， $d$  為完全反射數與最佳解之缺線數

(1)  $n$  為偶數

$n$	鏡面轉動數	$C$	$P$	$d$
6	[101-100*]	31	27	2
	[11-11-10*]			
8	[11-10*1-11-1]	57	51	3
10	[11-10*01-11-10]	91	83	4
12	[11-11-10*1-11-11-1]	133	123	5
14	[11-11-11-11-11-11-10*]	183	171	6
16	[11-10*00001-11-10000]	241	227	7
18	[11-1000*0001-1100-1000]	307	287	10
	[110-101-10*01-1010-11-10]			
20	[11-11-10010*-11-11-1100-11-1]	381	357	12
22	[10000000001-1000000000*]	463	443	10
	[101-11-11-11-11-100*1-11-11-11-1]			
	[11-11-11-11-11-11-11-11-11-11-10*]			
24	[1001-11-11-10*00100-11-11-11-100]	553	527	13
26	[10000000000*1-100000000001-1]	651	627	12

28	[1 1 -1 1 -1 1 -1 0 1 -1 1 -1 0 0* 1 -1 1 -1 1 -1 1 0 -1 1 -1 1 0 -1]	757	727	15
30	[1 1 0 -1 0 1 -1 1 0 -1 1 -1 1 -1 1 -1 0* 0 1 0 -1 1 -1 0 1 -1 1 -1 1 -1]	871	837	17
32	[1 1 -1 1 -1 1 -1 1 0 0 -1 1 -1 1 -1 0* 1 -1 1 -1 1 -1 1 0 0 1 -1 1 -1 1 -1]	993	959	17
34	[1 0* 1 -1 1 -1 1 -1 0 1 -1 1 0 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 0 -1 1 -1 0 1 -1 1 -1]	1123	1087	18

(2)  $n$  為奇數

$n$	鏡面轉動數	$C$	$P$	$d$
9	(1 0 0 0 1* -1 0 0 0)	73	69	2
15	(1* 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 -2 1 -1 0)	211	199	6
21	(1* 1 -1 0 0 0 0 0 0 1 0 -1 0 0 0 0 2 0 -2)	421	401	10
25	(1* 0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 -2 0 0 0)	601	589	6
27	(1* 0 0 0 0 2 0 -2 0 0 1 -1 0 0 2 0 -2 0 0 0 1 -1 0 0 0 0)	703	679	12

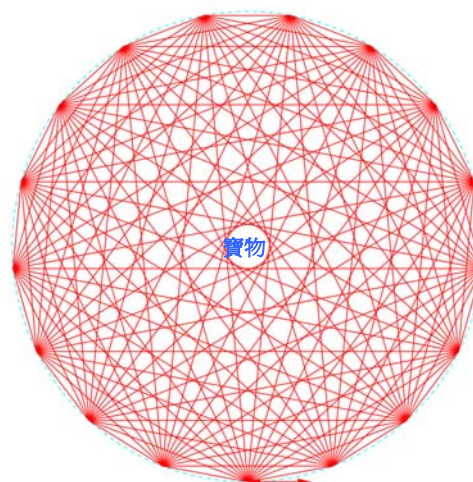
三、從我們發現的最佳解中，觀察到在  $6 \leq n \leq 16$  及  $n=22,26$  時，最佳解之反射數都是上界估計值，而  $n=18,24,28,32,34$  時，缺線數都比上界估計值的缺線數多兩條；而  $n=20$  與  $n=30$ ，缺線數都比上界估計值的缺線數多三條，故推測當邊數  $n$  愈來愈大時，其質因數組成的個數與形式的複雜度，最佳解的缺線數與上界估計值的缺線數之差距也會愈來愈大。

四、進一步探討能否將平面上正  $n$  邊形之鏡面擺放與反射之情形推廣至空間中球面之反射情形。

## 柒、兩部電影所啟發的兩項應用

### 一、天羅地網－防盜警報系統 (啟發來源：電影 **Entrapment**，中文片名：「將計就計」)

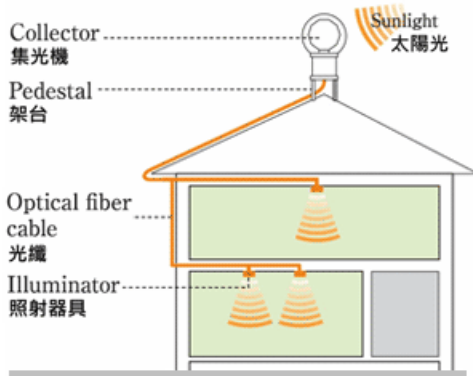
[說明]：如同前文中研究動機所提，在電影：Entrapment (中文片名：「將計就計」)，影片中女主角為了盜取在博物館展覽的寶物，必須穿越許多錯綜複雜雷射光線，以避免觸動警報系統。我們想到經由本文所探討的理論將鏡面經適當的轉動角度與位置的安排，可佈置出如天羅地網的雷射光線，配合紅外線感應器，形成一個十分完善的防盜警報系統。



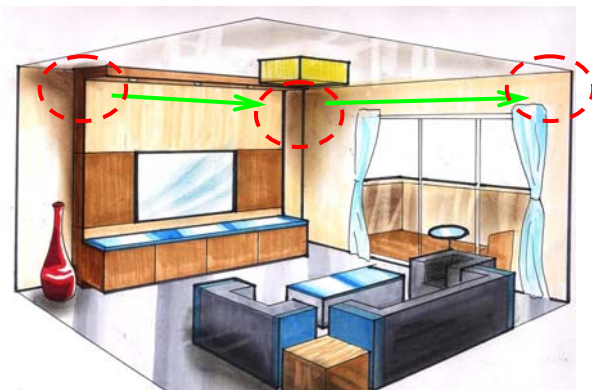
### 二、節能減碳－綠建築的照明系統 (啟發來源：電影，中文片名：「神鬼傳奇」)

[說明]：電影：(中文片名：「神鬼傳奇」)，影片中男主角在一地下洞穴中利用手槍射擊了一個銅鏡，將光線引入洞穴中，並透過鏡面的反射後照亮了整個洞穴。這有趣又神奇的一幕，在當時只覺得是電影的效果，經由本作品之研究後，我們想到是否能經由鏡面位置的安排，產生如電影般的照明效果，將我們的理論作一實際之應用。

在這部分我們也上網查尋了一些資料，發覺目前在綠建築的照明方面大致分兩大類：(1)採追日系統配合光纖傳送方式，多用於室內照明，為定點之照明，如下圖所示。由於光纖傳送方式成本相當高，若能利用我們研究之理論配合在室內裝潢時，於室內之樑柱、角落或層板間，適當的配置一些鏡面(室內可採六面或八面即可)，藉由採光與集光之設計將光線引入，經鏡面之反射提高照明度。此舉雖不能完全取代電燈之照明，但可發揮輔助之功效，也符合現今綠建築以自然採光之概念，也可達到節能減碳之效果。



追日系統與光纖傳送



示意圖：圖中虛線標記處即鏡面擺放位置

(2)利用天井採光，多用於大型之地下停車場，如台大運動場的地下停車場，即利用天井的透光及通風設施，減少照明及抽風用電，但單純的天井採光其照明之效果大都是集中在天井周圍，其他地方之亮度仍不佳，因此我們可以利用天井採光及集光後，配合停車場常見之凸面鏡，如下圖中所示，輔以我們的研究理論將光線引入後經由鏡面之反射，可以增加地下停車場的照明效果，且此照明範圍較天井採光之方式更為廣泛。



示意圖：圖中虛線標記處即鏡面擺放位置

## 捌、參考資料

1. 余文卿(民 99)。普通高級中學數學 2。翰林出版。
2. 台北市建國高級中學 49 屆 314 班合譯。針與線。數學思考(50 頁)。九章出版。1998 年 12 月一版
3. 何思賢,康雅婷,陳瓏方。第38屆國中數學科展作品第二名。鏡射乾坤。.
4. 林佑蒔。2004 年國際科展。正  $n$  邊形光圈之路徑追蹤。
5. Elwyn R. Berlekamp & Tom Rodgers, The Mathematician and Pied Puzzler: A Collection in Tribute to Martin Gardner. M. Oskar van Deventer, Point Mirror Reflection(pp.245-251)

# 附 錄

## 一、偶數邊之規則(五)補充說明：

**規則(五)**：(1)以中心點為對稱中心的兩鏡面  $M_l$  及  $M_{l+\frac{n}{2}}$ ，若  $m_l = 0$  及  $m_{l+\frac{n}{2}} = 0$ ，則光線反射路徑不會連續經過  $M_l$  及  $M_{l+\frac{n}{2}}$ ，否則會形成迴圈。

[說明]：若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n}{2}}$ ，其中  $m_l = 0$  及  $m_{l+\frac{n}{2}} = 0$ ，則

$$f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+0) = M_l(x+0)$$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_{k+x}(x)) = M_{k+2x}(x+0) = M_{l+\frac{n}{2}}(x)$$

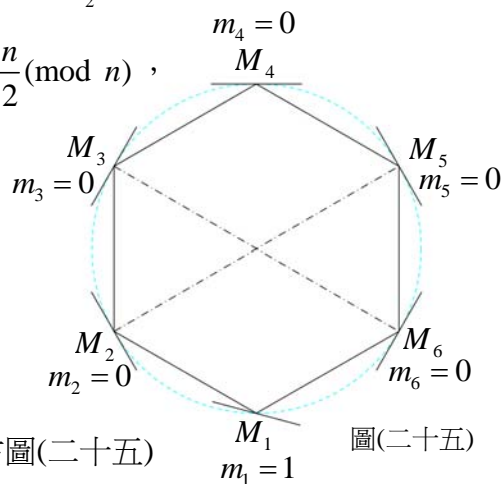
$$\text{因此 } k+x+\frac{n}{2} \equiv k+2x \pmod{n} \Rightarrow x \equiv \frac{n}{2} \pmod{n},$$

$$\text{即 } x = \frac{n}{2}, \text{ 故 } f(M_k(\frac{n}{2})) = M_l(\frac{n}{2})$$

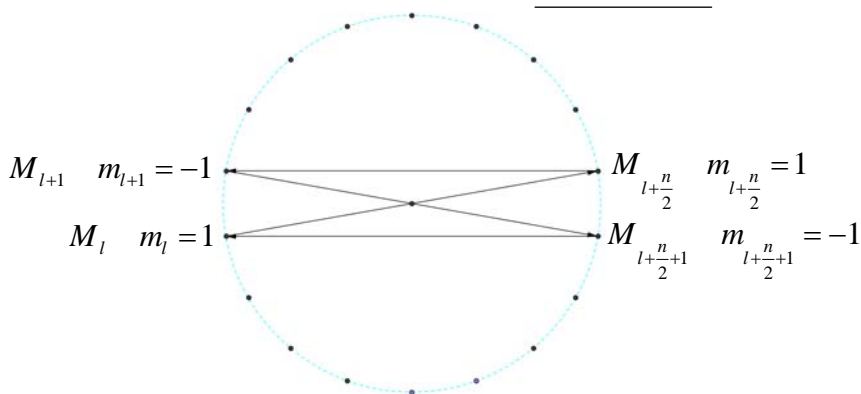
$$f^2(M_k(\frac{n}{2})) = M_{l+\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})$$

$$f^3(M_k(\frac{n}{2})) = M_l(\frac{n}{2})$$

$$f^4(M_k(\frac{n}{2})) = M_{l+\frac{n}{2}}(\frac{n}{2}) \text{ 形成迴圈，如右圖(二十五)}$$

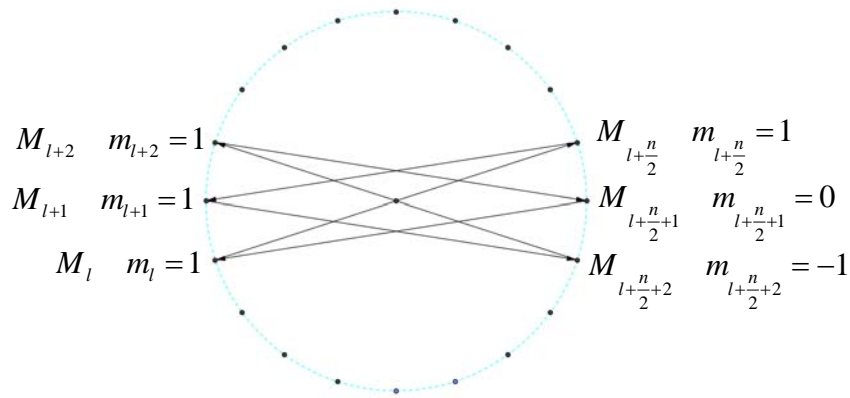


(2)以中心點為對稱中心的兩組  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{matrix}$ 、 $\begin{matrix} M_{l+\frac{n}{2}} & M_{l+\frac{n}{2}+1} \\ 1 & -1 \end{matrix}$  會形成迴圈。



[說明]：  $f(M_l(x)) = M_l(\frac{n}{2}-1+(1)) \rightarrow M_{l+\frac{n}{2}+1}(\frac{n}{2}+(1)) \rightarrow M_{l+n+1}(\frac{n}{2}+1+(-1))$   
 $\rightarrow M_{l+\frac{n}{2}+1}(\frac{n}{2}+(-1)) \rightarrow M_{l+n}(\frac{n}{2}-1+(1)) \rightarrow \dots$  無限循環

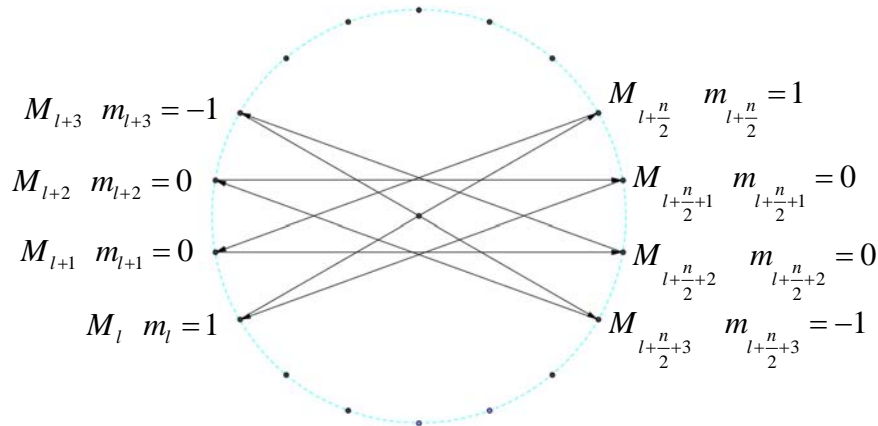
(3)以中心點為對稱中心的兩組  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$ 、 $\begin{matrix} M_{l+\frac{n}{2}} & M_{l+\frac{n}{2}+1} & M_{l+\frac{n}{2}+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$  會形成迴圈。



[說明]： $f(M_l(x)) = M_l(\frac{n}{2}-1+(1)) \rightarrow M_{l+\frac{n}{2}}(\frac{n}{2}+(1)) \rightarrow M_{l+n+1}(\frac{n}{2}+1+(0))$   
 $\rightarrow M_{l+\frac{n}{2}+2}(\frac{n}{2}+1+(-1)) \rightarrow M_{l+2}(\frac{n}{2}+(-1)) \rightarrow M_{l+\frac{n}{2}+1}(\frac{n}{2}-1+(0))$   
 $\rightarrow M_l(\frac{n}{2}-1+(1)) \rightarrow \dots$ 無限循環

(4)以中心點為對稱中心的兩組  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$ 、 $\begin{matrix} M_{l+\frac{n}{2}} & M_{l+\frac{n}{2}+1} & M_{l+\frac{n}{2}+2} & M_{l+\frac{n}{2}+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$  會

形成迴圈。



[說明]： $f(M_l(x)) = M_l(\frac{n}{2}-1+(1)) \rightarrow M_{l+\frac{n}{2}}(\frac{n}{2}+(1)) \rightarrow M_{l+n+1}(\frac{n}{2}+1+(0))$   
 $\rightarrow M_{l+\frac{n}{2}+2}(\frac{n}{2}+1+(0)) \rightarrow M_{l+n+3}(\frac{n}{2}+1+(-1)) \rightarrow M_{l+\frac{n}{2}+3}(\frac{n}{2}+(-1))$   
 $\rightarrow M_{l+n+2}(\frac{n}{2}-1+(0)) \rightarrow M_{l+\frac{n}{2}+1}(\frac{n}{2}-1+(0)) \rightarrow M_{l+n}(\frac{n}{2}-1+(1))$   
 $\rightarrow \dots$ 無限循環

## 二、偶數邊之性質證明：

(1)位置公式： $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \gamma x_0 - \beta - 2\gamma = n - E - P = n - 2$

[說明]： $x_1$  爲  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{array}$  佔用的兩個位置； $x_2$  爲  $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$  佔用的三個位置；

$x_3$  爲  $\begin{array}{cccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$  佔用的四個位置； $x_0$  爲  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{array}$  佔用的兩個位置

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  皆爲其組數， $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$  且  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ ；

而  $E$  爲入射鏡面，佔用一個位置； $P$  爲折返點，佔用一個位置，其中  $x_2$  及  $x_3$  中的 0 會與  $x_0$  中的 0 重複算，故需減掉重複算的 0。

(2)缺線公式： $\alpha x'_1 + \beta x'_2 + \gamma x'_3 + \delta x'_4 = y$ ， $y$  爲缺線數。

[說明]： $x'_1$  爲  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{array}$  所產生的一條缺線； $x'_2$  爲  $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$  所產生的兩條缺線

$x'_3$  爲  $\begin{array}{cccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$  所產生的三條缺線； $x'_4$  爲  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{array}$  所產生的一條缺線

性質(一)：若缺線數爲  $\frac{n-2}{2}$ ，意即反射數達到上界估計值，鏡面只能由  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{array}$  及  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{array}$

去搭配。

[證明]：

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 - \beta - 2\gamma = n - 2 \\ \alpha x'_1 + \beta x'_2 + \gamma x'_3 + \delta x'_4 = \frac{n-2}{2} \end{cases} \quad , \text{代入我們所定義的值可得}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 2\delta - \beta - 2\gamma = n - 2 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = \frac{n-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta + 2\gamma = 0$$

$$\text{因 } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z \text{ 且 } \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0 \Rightarrow \beta = \gamma = 0$$

性質(二)：若缺線數爲  $\frac{n-2}{2} + 1$ ，鏡面只能由一組  $\begin{array}{ccc} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$  與  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{array}$  及  $\begin{array}{cc} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{array}$  去

搭配。

[證明]：



$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 - \beta - 2\gamma = n - 2 \\ \alpha x'_1 + \beta x'_2 + \gamma x'_3 + \delta x'_4 = \frac{n-2}{2} + 1 \end{cases}, \text{代入我們所定義的值可得}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 2\delta - \beta - 2\gamma = n - 2 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = \frac{n-2}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow \beta + 2\gamma = 1,$$

因  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$  且  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0 \Rightarrow \beta = 1, \gamma = 0$

性質(三)：若缺線數為  $\frac{n-2}{2} + 2$ ，鏡面只能由兩組  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$  或一組

$$\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \text{與} \begin{matrix} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{matrix} \text{及} \begin{matrix} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{matrix} \text{去搭配。}$$

[證明]：

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 - \beta - 2\gamma = n - 2 \\ \alpha x'_1 + \beta x'_2 + \gamma x'_3 + \delta x'_4 = \frac{n-2}{2} + 2 \end{cases}, \text{代入我們所定義的值可得}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 2\delta - \beta - 2\gamma = n - 2 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = \frac{n-2}{2} + 2 \end{cases} \Rightarrow \beta + 2\gamma = 2$$

因  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$  且  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0 \Rightarrow \beta = 2, \gamma = 0$  或  $\beta = 0, \gamma = 1$

性質(四)：若缺線數為  $\frac{n-2}{2} + 3$ ，鏡面只能由三組  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$  或一組  $\begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$  及

$$\text{一組} \begin{matrix} M_l & M_{l+1} & M_{l+2} & M_{l+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \text{與} \begin{matrix} M_l & M_{l+1} \\ 1 & -1 \end{matrix} \text{及} \begin{matrix} M_l & M_{l+\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{matrix} \text{去搭配。}$$

[證明]：

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 - \beta - 2\gamma = n - 2 \\ \alpha x'_1 + \beta x'_2 + \gamma x'_3 + \delta x'_4 = \frac{n-2}{2} + 3 \end{cases}, \text{代入我們所定義的值可得}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 2\delta - \beta - 2\gamma = n - 2 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = \frac{n-2}{2} + 3 \end{cases} \Rightarrow \beta + 2\gamma = 3$$

因  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$  且  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0 \Rightarrow \beta = 3, \gamma = 0$  或  $\beta = 1, \gamma = 1$

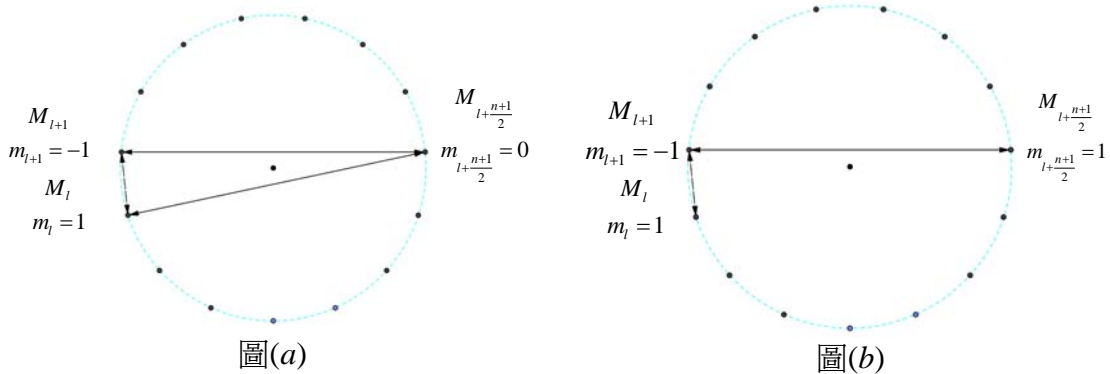


### 三、奇數邊迴圈形式之說明：

**規則(四)：迴圈的形式**

(1)若使用  $\begin{bmatrix} M_k & M_{k+1} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  (如圖 a 以代號 A 表示)，則必有三條缺線；

而碰到  $\begin{bmatrix} M_{k+\frac{n+1}{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$  (如圖 b 以代號 B 表示)時，則必有兩條缺線。



[圖(a)之說明]：若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}}$ ，且  $k \neq l$ ，則

$$M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}} \rightarrow M_{l+1} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}} \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}} \rightarrow \dots \text{無限循環}$$

證：  $f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+1) = M_l(x+1) = M_l(\frac{n+1}{2})$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_l(x+1)) = M_{l+x+1}(x+1+1) = M_{l+\frac{n+1}{2}}(x+2) = M_{l+\frac{n+1}{2}}(\frac{n+1}{2})$$

$$f^3(M_k(x)) = M_{k+1}(\frac{n-1}{2}) ; f^4(M_k(x)) = M_{k+\frac{n+1}{2}}(\frac{n-1}{2}) ; f^5(M_k(x)) = M_k(\frac{n+1}{2})$$

[圖(b)之說明]：若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}}$ ，且  $k \neq l$ ，則

$$M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}} \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}} \rightarrow M_l \rightarrow \dots \text{無限循環}$$

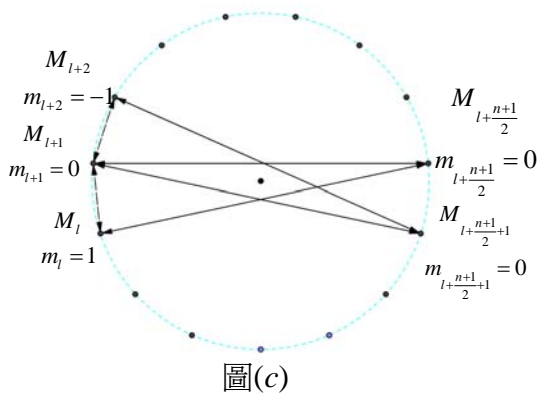
證：  $f(M_k(x)) = M_{k+x}(x-1) = M_{l+1}(x-1) = M_{l+1}(\frac{n-1}{2})$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_{l+1}(x-1)) = M_{l+1+x-1}(x-1+1) = M_{l+\frac{n+1}{2}}(x) = M_{l+\frac{n+1}{2}}(\frac{n+1}{2})$$

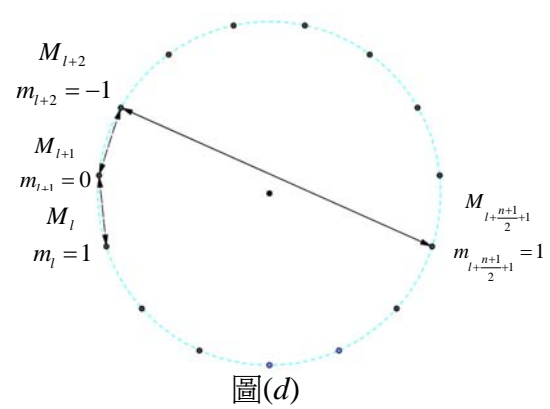
$$f^3(M_k(x)) = M_{l+1}(\frac{n-1}{2}) ; f^4(M_k(x)) = M_{l+\frac{n+1}{2}}(\frac{n+1}{2})$$

(2)若使用  $\begin{bmatrix} M_k & M_{k+1} & M_{k+2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  (如圖  $c$  以代號  $C$  表示), 則必有六條缺線;

而碰到  $\begin{bmatrix} M_{k+\frac{n+1}{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$  (如圖  $d$  以代號  $D$  表示)時, 則必有三條缺線。



圖(c)



圖(d)

[圖(c)之說明]: 若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}}$ , 且  $k \neq l$ , 則

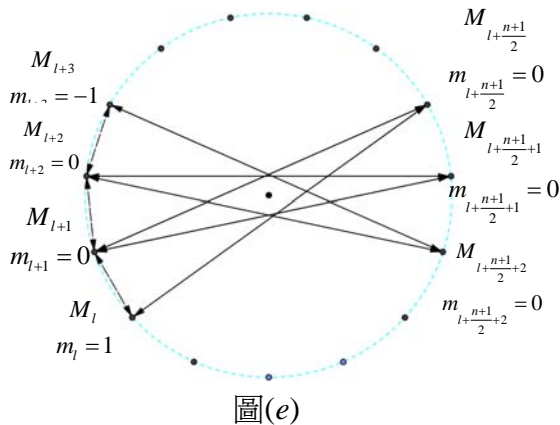
$$\begin{aligned} M_k &\rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}} \rightarrow M_{l+1} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+1} \rightarrow M_{l+2} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+2} \\ &\rightarrow M_{l+1} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}} \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}} \rightarrow M_{l+1} \rightarrow \dots \text{無限循環} \end{aligned}$$

[圖(d)之說明]: 若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+1}$ , 且  $k \neq l$ , 則

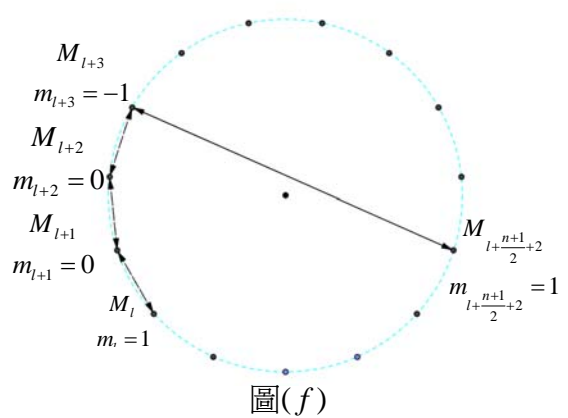
$$M_k \rightarrow M_{l+2} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+1} \rightarrow M_{l+2} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+1} \rightarrow \dots \text{無限循環}$$

(3)若使用  $\begin{bmatrix} M_k & M_{k+1} & M_{k+2} & M_{k+3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  (如圖  $e$  以代號  $E$  表示), 則必有九條缺線;

而碰到  $\begin{bmatrix} M_{k+\frac{n+1}{2}+2} \\ 1 \end{bmatrix}$  (如圖  $f$  以代號  $F$  表示)時, 則必有四條缺線。



圖(e)



圖(f)

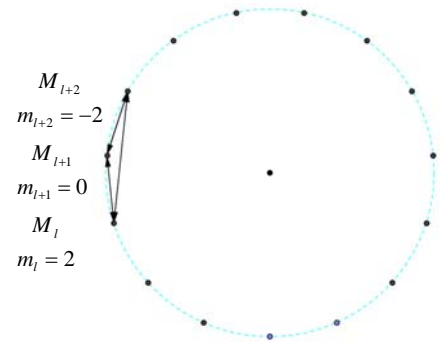
[圖(e)之說明]：若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}}$ ，且  $k \neq l$ ，則

$$\begin{aligned}
 &M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}} \rightarrow M_{l+1} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+1} \rightarrow M_{l+2} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+2} \rightarrow M_{l+3} \\
 &\rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+2} \rightarrow M_{l+2} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+1} \rightarrow M_{l+1} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}} \rightarrow M_l \rightarrow \dots \text{無限循環}
 \end{aligned}$$

[圖(f)之說明]：若光線反射路徑為  $M_k \rightarrow M_l \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+2}$ ，且  $k \neq l$ ，則

$$M_k \rightarrow M_{l+3} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+2} \rightarrow M_{l+3} \rightarrow M_{l+\frac{n+1}{2}+2} \rightarrow \dots \text{無限循環}$$

(4)若使用  $\begin{bmatrix} M_k & M_{k+1} & M_{k+2} \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$  (如圖 g 以代號 G 表示)，則必有三條缺線



圖(g)

[圖(g)之說明]：  $f(M_k(x)) = M_{k+x}(x+2) = M_l(x+2) = M_l(x+2)$

$$f^2(M_k(x)) = f(M_l(x+2)) = M_{l+x+2}(x+2-2) = M_{l+x+2}(x) = M_{l+2}(x-2)$$

$$f^3(M_k(x)) = M_l(x+2) ; f^4(M_k(x)) = M_{l+2}(x-2)$$

## 擴充鏡面演算法

Load  $B_{(x,n)}$  from  $(n-1)$ -side data.

$A = \text{zeros}(1500000, n + 1)$       /\*開空間存放新資料\*/

$k = 1$

For  $i = 1 : x$

$Temp = B(i, 1)$

    If  $Temp \neq 0$

$A(k, 1) = Temp + 1$

$A(k, 2 : n) = B(i, 2 : n)$

$A(k, n + 1) = 1$

$A(k + 1, 1) = Temp + (-1)$

$A(k + 1, 2 : n) = B(i, 2 : n)$

$A(k + 1, n + 1) = -1$

$A(k + 2, 1) = Temp + 0$

$A(k + 2, 2 : n) = B(i, 2 : n)$

$A(k + 2, n + 1) = 1$

    End

$k = k + 3$

End

If  $k < 1500000$

$A(k : 1500000, 1 : n + 1) = \text{empty}$

End

Save  $A$  to  $(n)$ -side data.

## 擴充鏡面程式

```
tic; %計時開始

load data15
[x,y]=size(B);

temp=0; n=1;
A=zeros(1500000,17);

for i=1:x

    temp=B(i,1);
    if temp~=0
        A(n,1)=temp+1;
        A(n,2:y)=B(i,2:y);
        A(n,y+1)=1;

        A(n+1,1)=temp-1;
        A(n+1,2:y)=B(i,2:y);
        A(n+1,y+1)=-1;

        A(n+2,1)=temp;
        A(n+2,2:y)=B(i,2:y);
        A(n+2,y+1)=0;
        n=n+3;
    end

    temp=0;
end

if n<1500000
A(n:1500000,:)=[];
end

B=A;
save data16 B ;
toc
```

## 鏡面反射演算法

Load  $A_{(x,S)}$  from (n)-side data

$B = \text{zeros}(x, S + 1)$

$t = 1$  /\* B 目前儲存到第 t 列\*/

For  $i = 1 : x$

$c = A(i, 1 : S)$  /\*一次抽出一條可能的鏡面擺法\*/

$\text{Temp1} = c(1)$  /\*這一次要前進的步數\*/

$\text{Temp2} = c(1)$  /\*下一次要前進的步數\*/

$\text{location} = 1$  /\*光線初始位置\*/

$k = 1$  /\*目前鏡面反射次數\*/

While ( $\text{Temp1} \neq \lfloor \frac{S}{2} \rfloor$  or  $\text{Temp2} \neq \lfloor \frac{S}{2} \rfloor$ ) /\*偶數邊使用\*/

While ( $\text{Temp1} \neq \lfloor \frac{S}{2} \rfloor$  or  $\text{Temp2} \neq \lfloor \frac{S}{2} \rfloor + 1$ ) /\*奇數邊使用\*/

$\text{Temp1} = \text{Temp2}$  /\*新舊前進步數轉換\*/

If ( $\text{location} + \text{Temp1} > S$ )

$\text{location} = \text{Modular}(\text{location} + \text{Temp1})$

$\text{Temp2} = \text{Temp1} + c(\text{location})$

End

If ( $\text{location} + \text{Temp1} \leq S$ )

$\text{location} = \text{location} + \text{Temp1}$

$\text{Temp2} = \text{Temp1} + c(\text{location})$

End

$k = k + 1$

/\*計算已反射幾次\*/

If ( $\text{Temp2} > S$  or  $\text{Temp2} = 0$ ) /\*反射失敗\*/

$\text{break}$

End

End

If ( $0 < \text{Temp2} < S$ ) /\*反射成功回到起點\*/

$B(t, 1 : S) = c$  /\*放置成功的鏡面\*/

$B(t, S + 1) = k$  /\*放置成功鏡面的反射次數\*/

$t = t + 1$

End

End

Output 反射次數  $k$  為最大的鏡面排法 /\*輸出最大反射次數鏡面與反射次數\*/

## 鏡面反射程式(偶數)

```
clear all
tic;
load data16

%變數設定: t 為成功的路徑數(起始值為 1); B 為存放成功的路徑
A=B(:,2:17);
[x,S]=size(A);
t=1;
B=zeros(x,S+1);
%令 P=[S/2] 做為判斷準則
P=floor(S/2);

for i=1:x
    % 一次讀取一條主程式已經篩選過的路徑，存放在向量 c
    %temp1 為上一次鏡子的角度 temp2 為這次鏡子的角度 ;k 為光線折射次數
    %location 為這次光線所在的位置
    c = A(i, 1:S);
    temp1=c(1); temp2=c(1); k=1; location=1;

    if mod(i,10000)==0
        i
    end

    %未連續跑兩次 [S/2]則繼續迴圈
    while(temp1~=P | temp2~=P)
        temp1=temp2;

        % 如果這次光線所在的位置超過邊數 S，則前進至 mod(S)
        % 並且記錄下次鏡子的角度於 temp2
        if location+temp1 > S
            location=mod(location+temp1,S);
            if location == 0
                temp2=S+1;
                break
            end
            temp2=temp1+c(location);
            if temp2==0
                break
            end
        end
    end
end
```

```

        end

% 如果這次光線所在的位置小於邊數 S，則前進該位置
% 並且記錄下次鏡子的角度於 temp2
        elseif location+temp1 <= S
                location=location + temp1;
                temp2=temp1+c(location);
                if temp2==0
                        break
                end
        end
end

% 記錄已前進的步數於 k
        k=k+1;
        if temp2>S
                break
        end
end

end

% 如果連續兩次輸出的鏡子的角度為 [S/2]，且不是被挑掉的路徑，則輸入 B 矩陣。
% B 矩陣為正確的路徑。
if temp2<S && temp2~=0 && location~=0
        B(t,1:S)=c;
        B(t,S+1)=k-1;
        L(1,t)= location;
        t=t+1;
end
end

% 輸出檔案
fid = fopen('Max.txt','wt');
[m, n] = size(B);
fprintf(fid,'Run % 4d',m);
        fprintf(fid,'\n');
        fprintf(fid,'MAX % 4d',max(B(1:m,n)));
        fprintf(fid,'\n');

k=max(B(1:m,n));

```



```

for i=1:m
if B(i,n)==k
    temp1=L(1,i);
    for j=1: temp1 -1
        fprintf(fid,'% 4d', B(i,j));
    end

    fprintf(fid, ' % 4d*',B(i,temp1));

    for j=temp1+1 : n-1
        fprintf(fid,'% 4d', B(i,j));
    end

    fprintf(fid,'\n');
end
end

toc

```

### 鏡面反射程式(奇數)

```

clear all
tic;
load data15

%變數設定: t 為成功的路徑數(起始值為 1); B 為存放成功的路徑
A=B(:,2:16);
[x,S]=size(A);
t=1;
B=zeros(x,S+1);
%令 P=[S/2] 做為判斷準則
P=floor(S/2);

for i=1:x
    % 一次讀取一條主程式已經篩選過的路徑，存放在向量 c
    %temp1 為上一次鏡子的角度 temp2 為這次鏡子的角度 ;k 為光線折射次數
    %location 為這次光線所在的位置
    c = A(i, 1:S);
    temp1=c(1); temp2=c(1); k=1; location=1;

```

```

if mod(i,10000)==0
    i
end

% 未連續跑兩次 [S/2]則繼續迴圈
while(temp1~=P | temp2~=P+1)
    temp1=temp2;

% 如果這次光線所在的位置超過邊數 S，則前進至 mod(S)
% 並且記錄下次鏡子的角度於 temp2
    if location+temp1 > S
        location=mod(location+temp1,S);
        if location == 0
            temp2=S+1;
            break
        end
        temp2=temp1+c(location);
        if temp2==0
            break
        end

% 如果這次光線所在的位置小於邊數 S，則前進該位置
% 並且記錄下次鏡子的角度於 temp2
        elseif location+temp1 <= S
            location=location + temp1;
            temp2=temp1+c(location);
            if temp2==0
                break
            end
        end
    end

% 記錄已前進的步數於 k
    k=k+1;
    if temp2>S
        break
    end
end

end

```

```

% 如果連續兩次輸出的鏡子的角度為  $[S/2]$ ，且不是被挑掉的路徑，則輸入 B 矩陣。
% B 矩陣為正確的路徑。
if temp2<S && temp2~=0 && location~=0
    B(t,1:S)=c;
    B(t,S+1)=k-1;
    L(1,t)= location;
    t=t+1;
end
end

% 輸出檔案
fid = fopen('Max.txt','wt');
[m, n] = size(B);
fprintf(fid,'Run % 4d',m);
    fprintf(fid,'\n');
    fprintf(fid,'MAX % 4d',max(B(1:m,n)));
    fprintf(fid,'\n');

k=max(B(1:m,n));
for i=1:m
if B(i,n)==k
    temp1=L(1,i);
    for j=1: temp1 -1
        fprintf(fid,'% 4d', B(i,j));
    end

    fprintf(fid, '% 4d*',B(i,temp1));

    for j=temp1+1 : n-1
        fprintf(fid,'% 4d', B(i,j));
    end

    fprintf(fid,'\n');
end
end

toc

```