

第十二屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA12-044

作品名稱：掌能傷人，亦能助人

姓名：陳逸恩

關鍵字：駐波、拍痰、掌法

摘要

武俠小說中各式各樣的「掌法」，常常是用手大力擊打胸腔，看起來與拍痰沒兩樣。差異何在？手指沒有彎曲所施予的拍擊，與手指密合、手掌彎曲成杯狀的打擊，兩者的差異可以設計成實驗驗證。本研究以免費的聲音分析軟體，分析聲波頻譜，並試著以駐波模型來說明以掌法傷人和拍痰療法的原理。

壹、研究動機

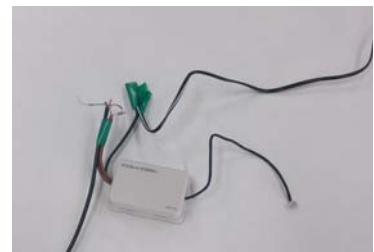
「水能載舟，亦能覆舟。」手掌也一樣，可以傷人，但在日常生活中也可以助人。嬰幼兒感冒而有痰滯留在呼吸系統中時，有一種胸部物理叩擊(俗稱拍痰)的治療方式，有助於痰的排出。在醫療用品店中，也可以買到拍痰杯來模擬拍痰的手部形狀。在高二物理教到了波動中的駐波以後，我突然想到，拍痰這種民間療法，是不是有可能跟駐波有關。也想到常常在武俠小說中各式各樣的「掌法」，幾乎都是用手大力擊打胸腔，看起來跟拍痰差不多。為什麼同樣是以手掌拍擊胸部，武俠小說中的掌法會讓人吐血，但是胸部物理叩擊卻能治好痰過多的困擾呢？這可以用設計實驗及波形分析的方式來解釋並說明之。

貳、研究目的

以簡易的物理模型研究空心掌形可以助人，但實心掌形卻會傷人的原因。

參、研究設備與器材

- 一、紙做的大箱子（方型密閉容器）一個
- 二、一般麥克風一支
- 三、微型麥克風一個(如圖一)
- 四、兩種拍痰杯(分別適用於小孩及成人)
- 五、Adobe Audition 2.0(電腦軟體)
- 六、Matlab 7.5 R2007b(電腦軟體)
- 七、志願者一人
- 八、鼓一個(如圖二)
- 九、保溫杯一只
- 十、棉線若干
- 十一、兩種不同頻率的音叉各一支（校正軟、硬體用）



圖一、微型麥克風

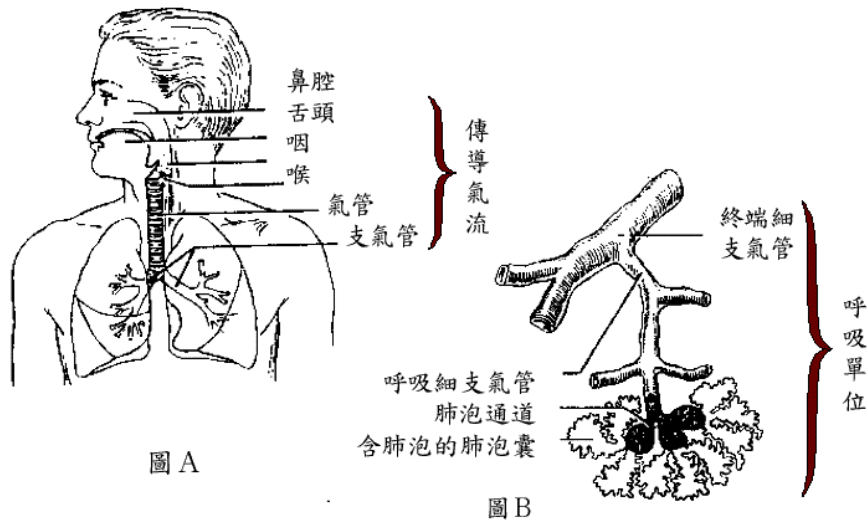


圖二、鼓

肆、理論分析

一、呼吸系統的簡介

呼吸系統包括鼻、咽、喉、氣管、支氣管、細支氣管及肺泡。(如圖三)



圖三、呼吸系統簡介

二、呼吸系統疾病

在兒童時期常見的呼吸系統疾病，可出現在呼吸系統的任何部位，病因大部份為濾過性病毒；若未發生呼吸困難或併發細菌性肺炎，通常可在 1~4 個星期內漸痊癒。患病期間，寶寶可能會出現呼吸急促、咳嗽、多痰、倦怠、食慾差等症狀，醫師會給予靜脈點滴注射，以補充體液。在疾病的病程進展中，寶寶常有咳嗽、呼吸急促、痰量增多但無法自己咳出的現象，倘若痰液滯留於呼吸道，可能會導致肺部合併症，延遲疾病恢復，所以須給予氣霧治療，並配合拍痰(胸部物理拍擊)，使痰液排出，幫助寶寶早日恢復。

三、胸腔物理治療 (拍痰)

1、簡介

病人因長期臥床或疾病原因，使肺部排除痰液的能力下降，易導致分泌物的堆積，而使肺不易擴張。有效的叩擊有助於肺部的擴張及黏液的掉落，其原理為利用手掌拍背時造成的震動，使附著在氣管上的痰液鬆動而移動到大氣管，再經由咳嗽或抽痰的方式清除分泌物，進而改善呼吸情形。(如圖四)



圖四、拍痰動作

2、執行方式：

手彎成杯狀，像在捕捉空氣一樣，叩擊時手腕關節應自然活動彎曲放鬆(如圖五)，以腕力雙手交替拍打或以拍痰杯輔助，叩擊的力量應穩穩地觸及胸壁，叩擊時會發出「波波」聲。避開腰部、脊椎及傷口部位。

(註)圖六為實心掌形，是一般手掌攤開的形狀，也是能夠造成人體傷害的掌形。



圖五、空心手掌



圖六、實心手掌

(註)拍痰杯用途(如圖七及圖八)

有些人及大部分歐美國家認為用手掌為嬰兒拍痰會對嬰兒的身體造成傷害，所以一部分的人改用了用矽質作的拍痰器，當小孩如果被痰壅住時，可用拍痰器拍其背部，幫助痰液吐出。



圖七、小拍痰杯



圖八、大拍痰杯

四、駐波的介紹

1、駐波的定義

反向進行的兩個週期性波動，會合而成之合成波，波形不見前進，波幅僅在波節與波節間作週期性的漲落，稱為駐波。

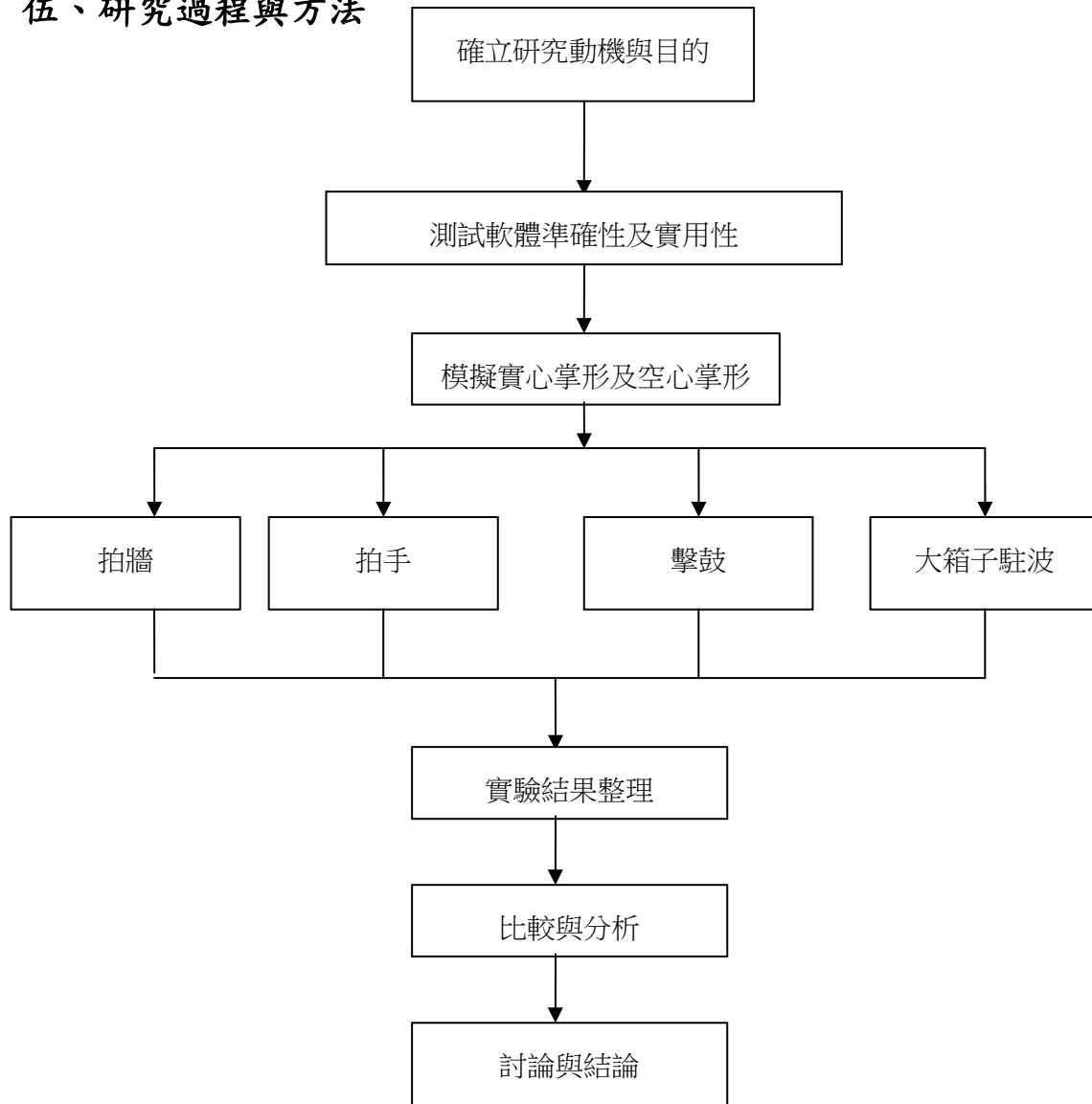
2、駐波形成之條件與原因：

- (1)兩波反向進行
- (2)連續週期波
- (3)波形上下顛倒、左右相反
- (4)振幅相同
- (5)頻率(波長、週期)相等

3、波節與波腹

- (1)波節：形成駐波的介質中位移恆為零之點，稱為節點(或波節)。
- (2)波腹：兩相鄰節點間中央之振動幅度最大、能量最強之點稱為腹點(或波腹)。
- (3)節點任何時刻位移、速度、加速度均為零。
- (4)腹點位移時時變動，最大位移(振幅) $=2R$ 。(R為原入射波振幅)

伍、研究過程與方法

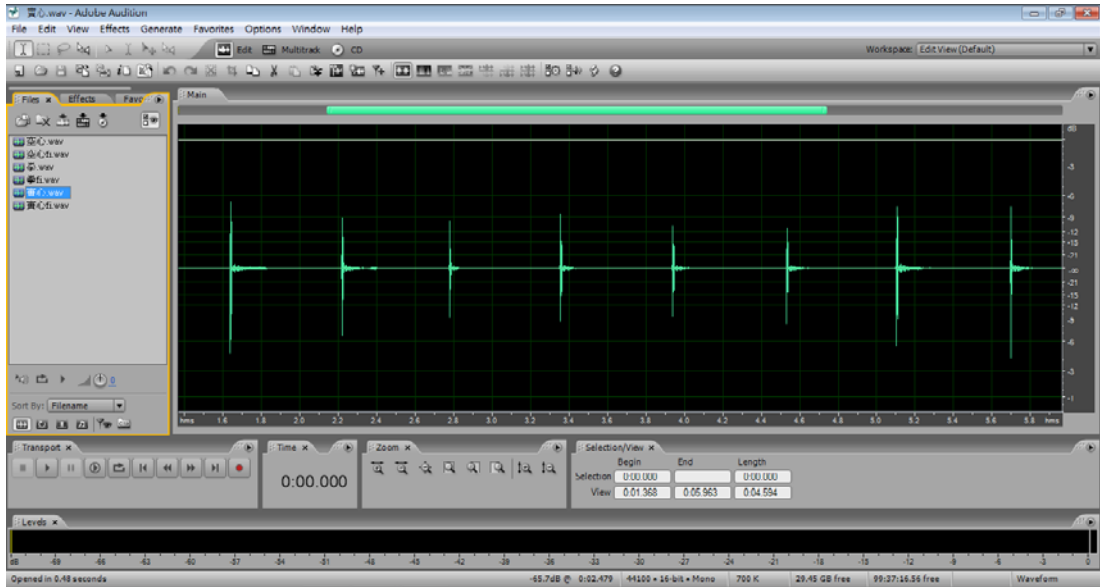


一、軟體簡介及其基本操作方法

我用了兩種可分析波形以及作傅立葉轉換的軟體，一為 Adobe Audition，二是 MATLAB，接下來在此一一介紹。

1、Adobe Audition

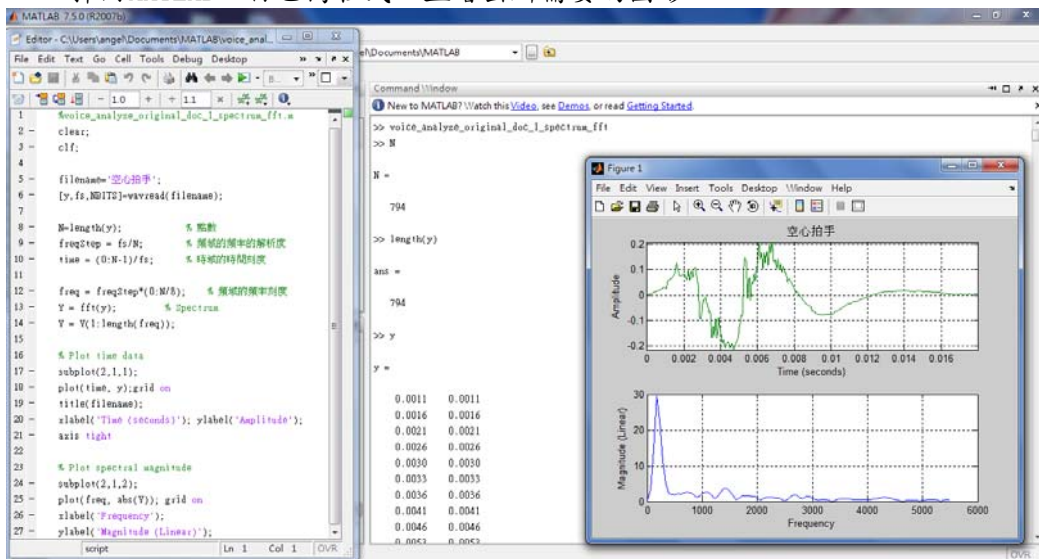
Adobe Audition (以下簡稱 Audition) 的用處很多，是經營 KTV 業者常用的軟體，不過在我的實驗中只用了少許的功能，最主要是用了它的錄音功能。利用 Audition 錄音，不需經轉換便可以直接看到聲音的原始波形，並且可以用”Effects(效果)中 Restoration(重置)的 Noise Reduction(消除雜音)” 去除錄音時產生的雜音，確保實驗的變因受控制。



圖九、Adobe Audition 工作室窗

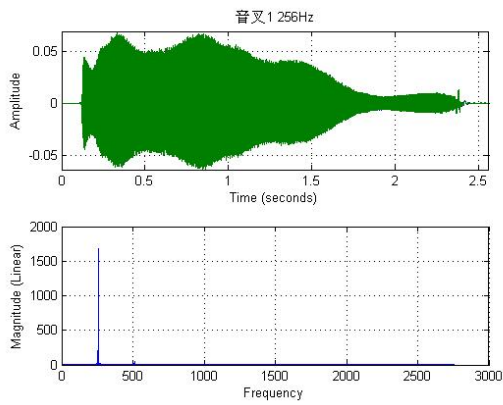
2、MATLAB

MATLAB 是各種系統模擬、數位訊號處理、科學目視的標準語言。在我的研究中，雖然已有Audition錄得的原始波形，但我需要對檔案作傅立葉分析，因此才選擇用MATLAB，自己寫程式，並繪出所需要的圖形。

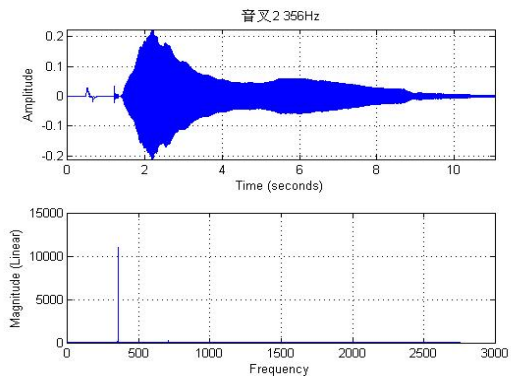


圖十、MATLAB工作室窗

為了測試這兩個軟體，我分別用256Hz和356Hz的音叉(已知頻率)錄製一段聲音測試，實驗結果和音叉頻率相符，相當準確，以下為分析後的圖形。



圖十一、256Hz的音叉分析結果



圖十二、356Hz的音叉分析結果

二、實驗內容及步驟

1、以不同手形拍牆以確定拍擊時聲音的來源

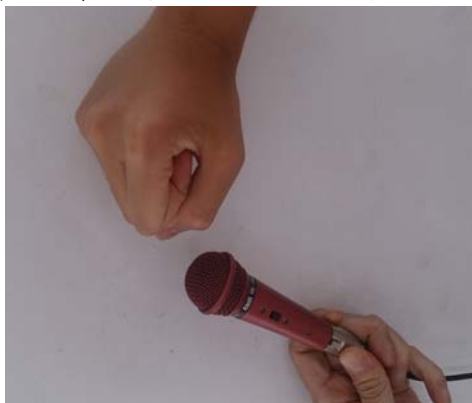
- (1) 在一個雜音不多的空間以三種不同的手形拍柱子並以一般麥克風錄下其聲音。三種聲音分別為：實心手掌拍牆、空心手掌拍牆、手握拳拍牆。
- (2) 以Audition選取所要部分並除去背景雜音，在Matlab7.5中作傅立葉轉換，將原始音檔轉換為包含原始波形及頻率的圖表。



圖十三、實心手掌拍牆



圖十四、空心手掌拍牆



圖十五、手握拳拍牆

2、以不同手形互相拍擊

- (1) 找一個志願者在一個雜音不多的空間中把手擺成三種不同的掌形，透過Adobe

Audition軟體以麥克風分別錄下 3 種聲音:實心手掌拍手、空心手掌拍手及實心手掌與空心手掌互拍。

(2)以Audition選取所要部分(即去除沒有波形的部分)並除去背景雜音,在Matlab7.5中作傅立葉轉換,將原始音檔轉換為包含原始波形及頻率的圖表。

(3)(註)傅立葉轉換:傅立葉轉換的物理意義,是將一段訊號表示為許多正弦波成分(sinusoid component)之疊加。



圖十六、實心手掌



圖十七、空心手掌



圖十八、實心手掌與空心手掌互拍

3、以鼓模擬胸腔,以拍痰杯、不同手勢及兩種不同的拍痰杯拍打鼓面

(1)以鼓來取代胸腔有一個優點,鼓的結構比較單純,對各種不同拍擊的響應非常的類似,可以聽出各種不同的拍擊方式對聲音的影響。

(2)以大拍痰杯、小拍痰杯從 15 公分高處(如圖十九、圖二十)掉下敲打鼓的表面,彈一下之後便以手抓住,不讓它再和鼓面進行第二次的接觸,以免產生不必要的波形。接著在鼓面中間上方附近以麥克風錄下拍痰杯和鼓面撞擊產生的聲音。以Audition選取所要部分並除去背景雜音,在Matlab7.5中作傅立葉轉換,將原始音檔轉換為包含原始波形及頻率的圖表。



圖十九、大拍痰杯擊鼓



圖二十、大拍痰杯擊鼓

- (3)以人手分別用實心掌形、空心掌形從大約 15 公分高處往下拍打鼓的表面，並在鼓面中間上方附近以麥克風錄下手掌和鼓面撞擊產生的聲音。以Audition選取所要部分並除去背景雜音，在Matlab7.5 中作傅立葉轉換，將原始音檔轉換為包含原始波形及頻率的圖表。
- (4)以有蓋保溫杯、無蓋保溫杯(如圖二十一及圖二十二)分別模擬平常手掌張開的樣子及手部叩擊姿勢，從 15 公分高處放下敲打鼓的表面，彈一下之後便以手抓住，不讓它再和鼓面進行第二次的接觸，以免產生不必要的波形。接著在鼓面中間上方附近以麥克風錄下保溫杯和鼓面撞擊產生的聲音。以Audition選取所要部分並除去背景雜音，在Matlab7.5 中作傅立葉轉換，將原始音檔轉換為包含原始波形及頻率的圖表。



圖二十一、手掌張開(有蓋保溫杯)



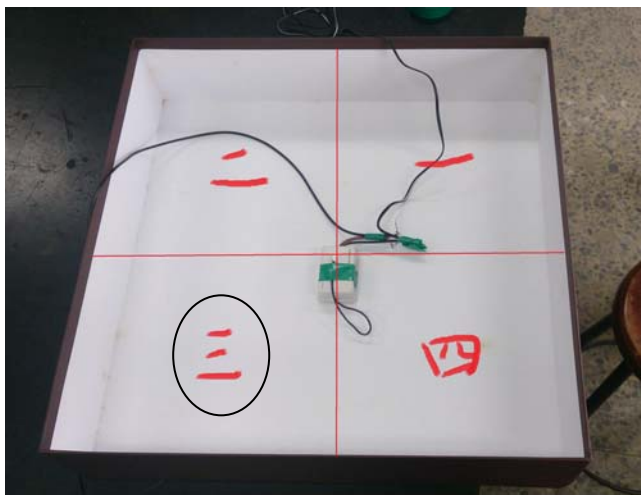
圖二十二、手部叩擊姿勢(無蓋保溫杯)

4、以大盒子模擬胸腔，測量內部的駐波

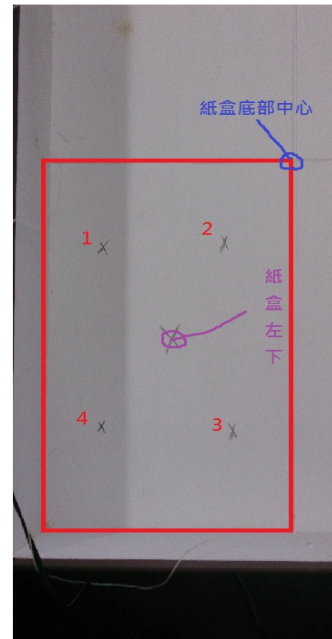
以大盒子模擬人的胸腔，人手直接拍擊，測量內部有無節點和腹點的分佈。探討是否能以駐波的節點和腹點對應在人體內真實器官的位置，來試著解釋以掌商人與以掌助人的差異。

(註)此實驗以微型麥克風錄製聲音，是由於在大箱子內若使用一般麥克風將較難操作，故使用較小型的麥克風。

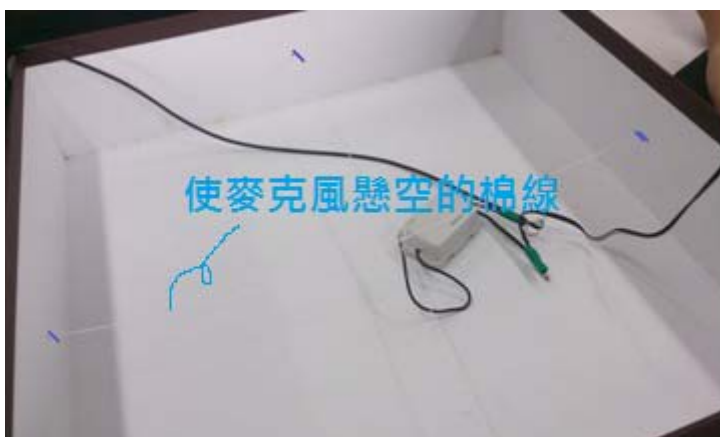
- (1)在紙箱四周穿四個小孔，以細綿線穿過固定微型麥克風(如圖二十五)，把紙箱子分成四個象限(如圖二十三)，在第三象限(左下的部分)鉛筆標示五個點:中央點、點1、點2、點3、點4(如圖二十四)，並把麥克風放在「中央點」附近並以膠帶固定之，然後把蓋子蓋上，分別以實心掌形和空心掌形拍擊。
- (2)將所錄得音檔以Matlab軟體分析，得到五個不同位置及兩種不同掌形的頻譜分析。
- (3)將麥克風移至「點1」、「點2」、「點3」、「點4」四個點附近並重覆以上步驟。(如圖二十七)



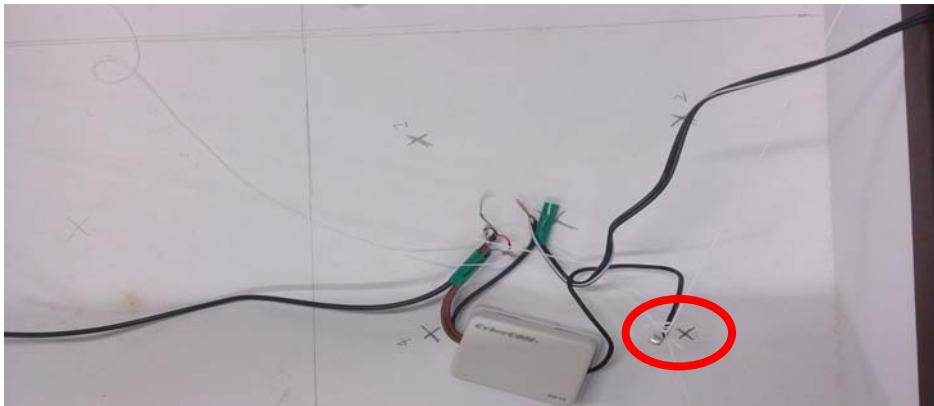
圖二十三、駐波大盒子實驗裝置
(我們使用第三象限/左下的部分進行實驗)



圖二十四、在紙箱底部的標示
(分成左下方之中央點、點1、點2、點3、點4)



圖二十五、在紙箱的四端鑽洞穿以棉線固定麥克風

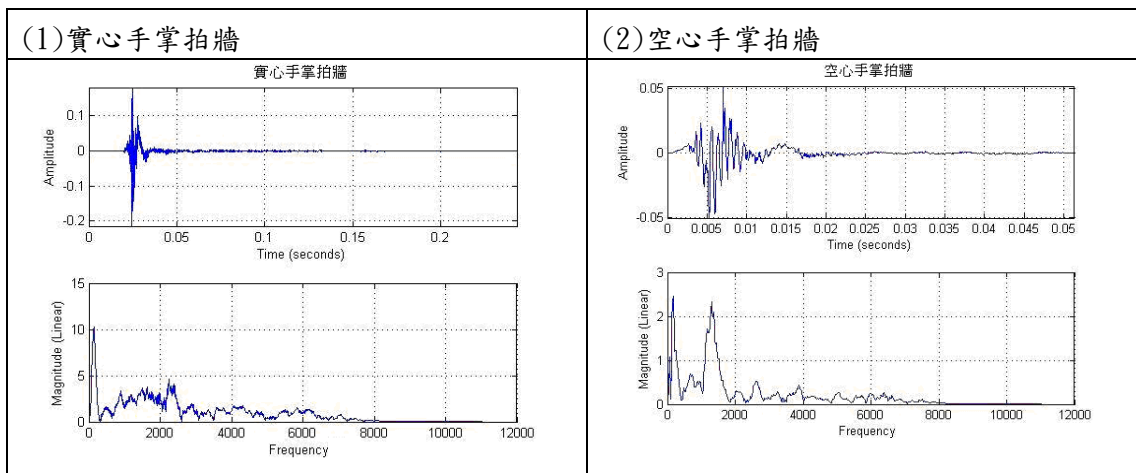


圖二十六、在點 3 的實驗裝置
(紅圈處為實際麥克風位置)

陸、實驗結果與分析

1、以不同手形拍牆以確定拍擊時聲音的來源

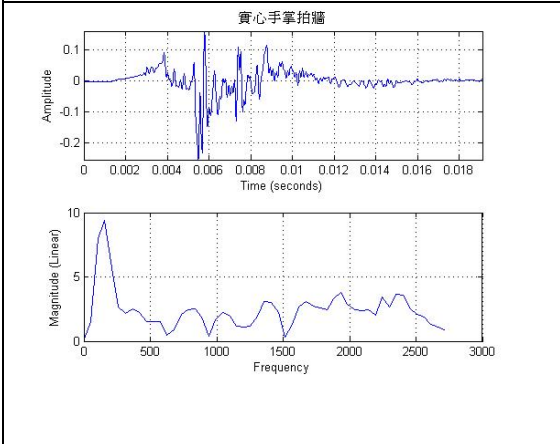
我進行三種不同的手型來拍打建築物的樑柱(分別是實心手掌拍牆、空心手掌拍牆和手握拳拍牆)。由於柱子的質量非常的大，柱子幾乎不會震動，所測得的聲音可以推論是由手掌發出來。



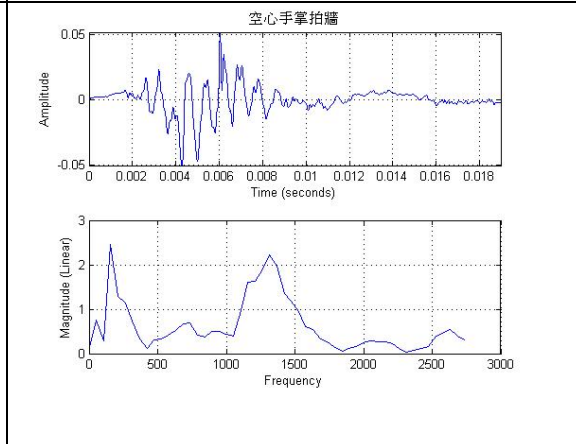
由於每次實驗所得到的波形都非常的類似，我僅選取其中的一次數據作為代表。

分別觀察實心手掌拍牆、空心手掌拍牆的頻譜，可以看出實心掌形拍擊出的頻率較高，而空心掌形拍擊出的頻率較低。觀察原始波形可以發現，兩次拍擊的時間長度是差不多的，但手掌攤平的拍擊具有較多的上下起伏。由頻譜也可以發現，實心掌形高頻率部分的組成較多。

(1) 實心手掌拍牆(上圖低頻部分的放大)

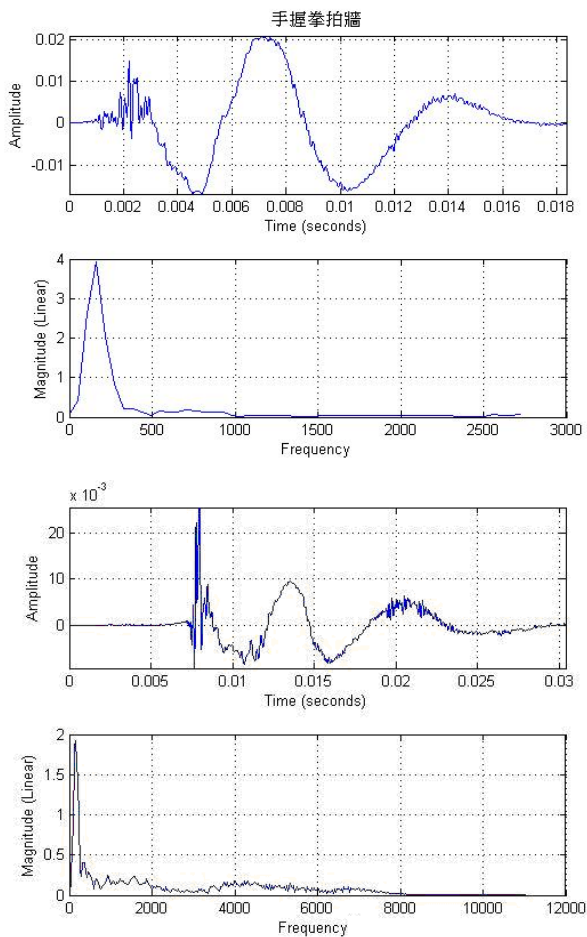


(2) 空心手掌拍牆(上圖低頻部分的放大)



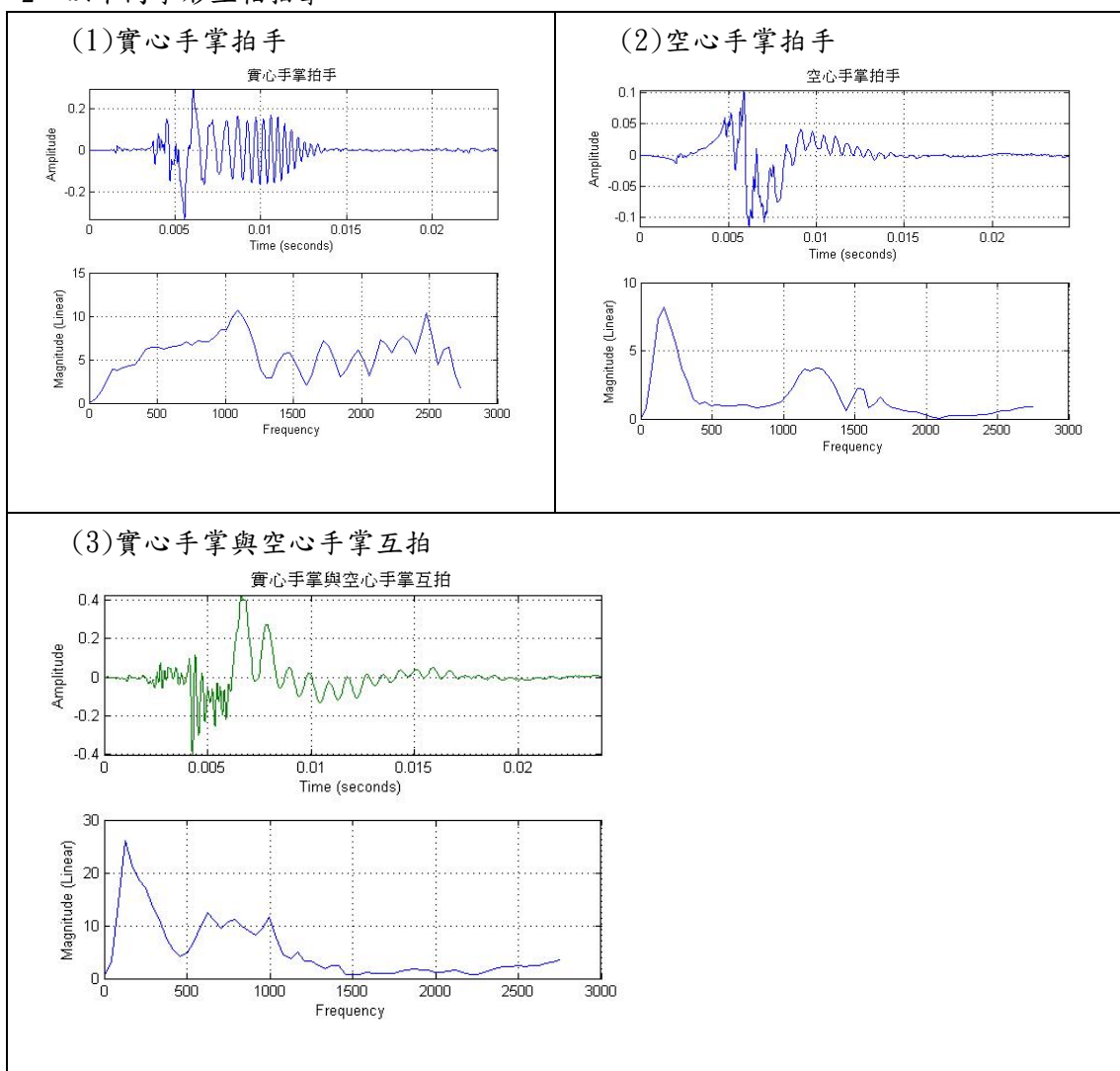
值得注意的是空心掌型的頻譜，出現了一個較高頻率的峰值，頻率大約是在 1300Hz。這個峰值出現的原因值得探討。

(3) 手握拳拍牆



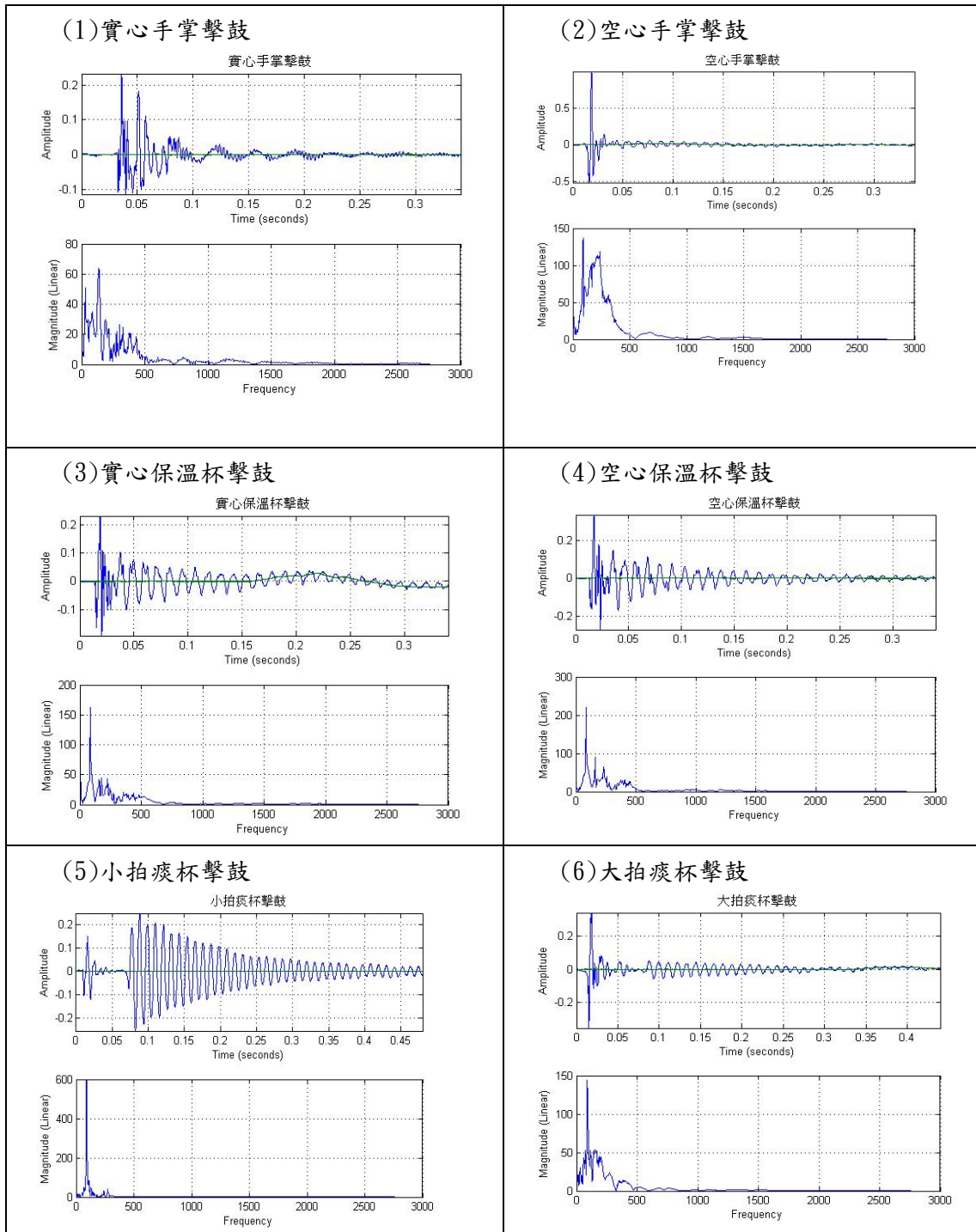
原始波形出現了起伏很大，但變化很慢的波形。雖然樑柱的質量非常的大，但是可以判斷這些波形，是由樑柱震動產生的。

2、以不同手形互相拍擊



首先是以兩隻手掌互拍的實驗。我觀察到(1)(2)兩實驗中，空心手掌互拍的聲音較實心手掌互拍的聲音小很多，猜測此現象是因為空心手掌拱起來時，接觸面積的肉較多，可以作為緩衝，因此打擊的聲音會比較小。以空心的手掌互拍，所得到的頻譜有兩個主要的峰值，這種拍手的效果對於頻率的選擇性較高。峰值出現在大約在 1250Hz 左右。在實驗(3)中，空心手掌與實心手掌互相拍擊，所得到的原始波形、頻譜，與空心的手掌互拍較為類似，只是第二峰值較不明顯。第二峰值出現的原因，可能與兩手掌之間的空隙大小有關。由於頻率具有選擇性，可以推論兩手掌之間的空隙可能出現聲波的駐波。由於手掌間的空隙並不是純粹的長方體，泛音可能不是基音的整數倍。

3、以鼓模擬胸腔，以拍痰杯、保溫杯及兩種不同手勢拍打鼓面



(1)(2)兩實驗中實心手掌與空心手掌拍打鼓面，所得到的原始波形與頻譜不同。

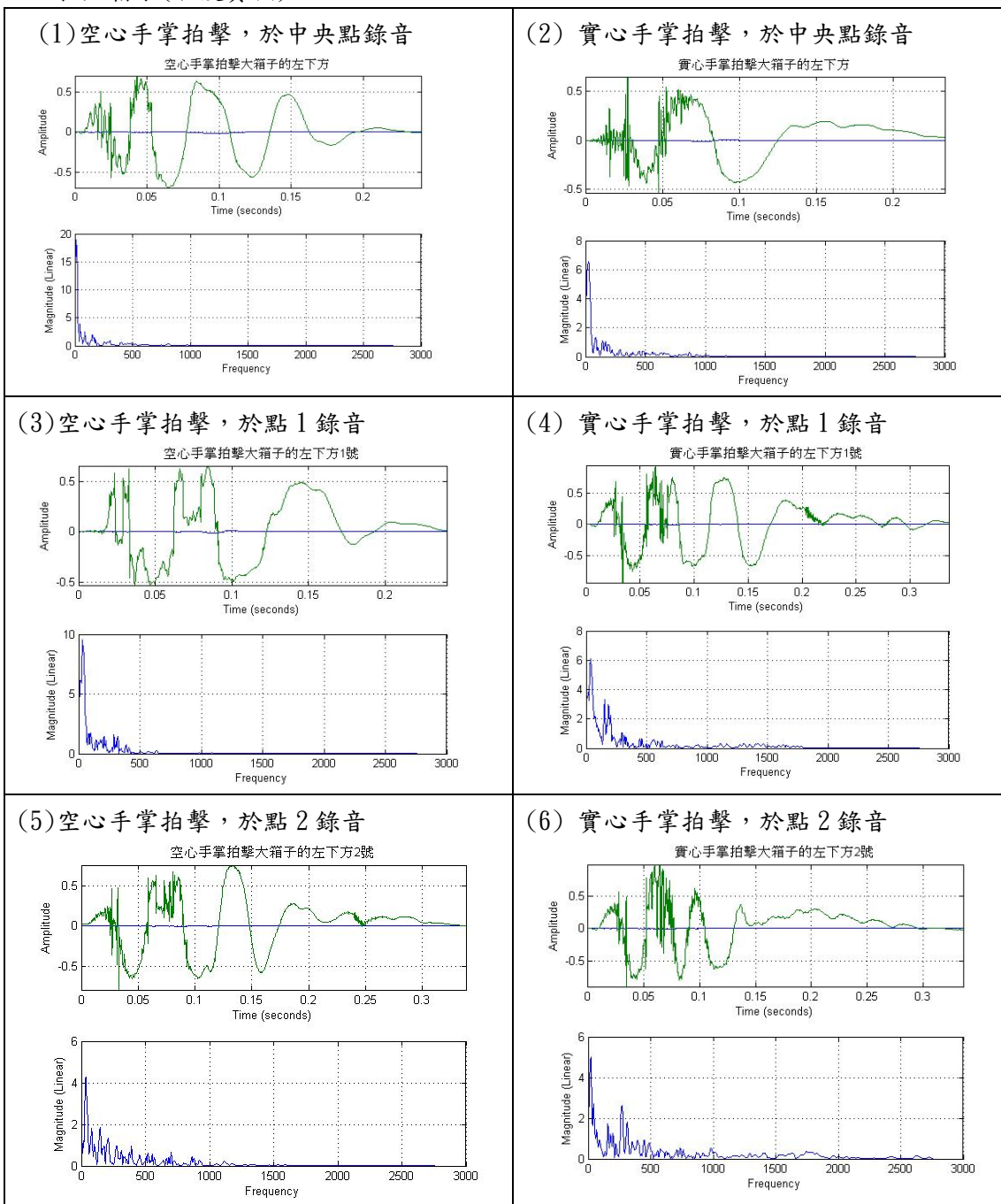
以空心手掌打鼓，鼓面在 0.05 秒內馬上達到平衡。以實心手掌拍打鼓面，要在 0.2 秒後才會達到平衡。

(3)(4)兩實驗中以有蓋與無蓋的保溫杯來模擬實心、空心手勢，鼓對這兩種實驗的反應是幾乎相同的，模擬的效果並不好。

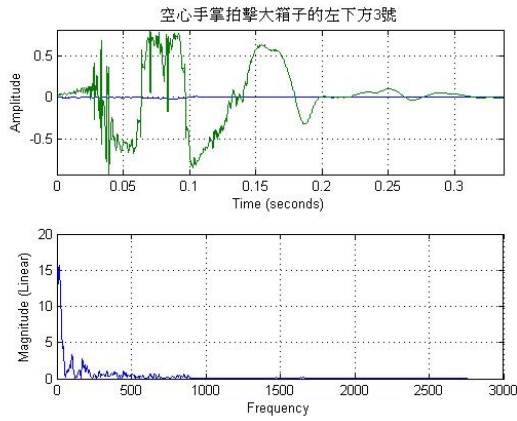
(5)(6)兩實驗中以大小拍痰杯拍擊鼓的表面，雖然大拍痰杯的原始波形衰減的非常的快速，但兩者的頻譜非常的類似，都有一個極高的峰值。這個峰值所對應的

頻率，應該就是鼓面震動的基頻。這個峰值在各個頻譜中均出現。而大拍痰杯的原始波形衰減的非常快的原因，可能是拍痰杯與鼓面密合的太好，導致拍痰杯離開鼓面時，吸住了鼓面所導致的結果。

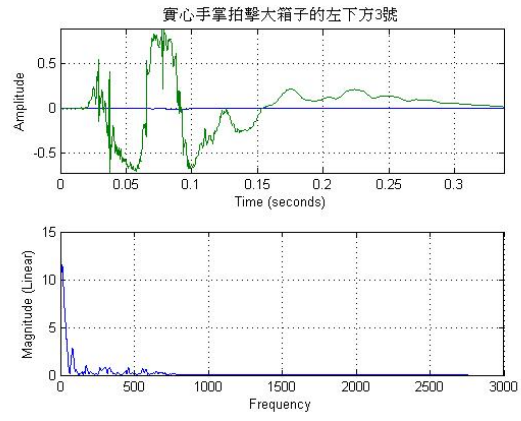
4、拍大箱子(駐波實驗)



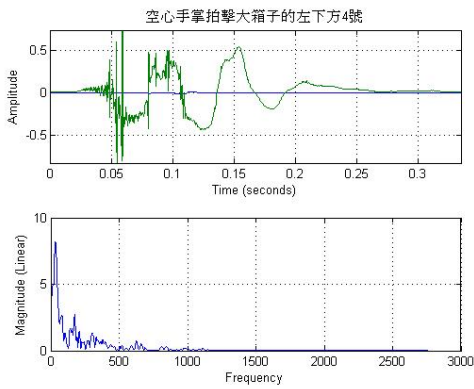
(7) 空心手掌拍擊，於點3錄音



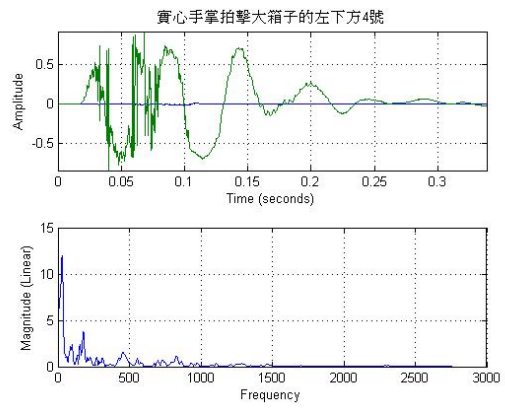
(8) 實心手掌拍擊，於點3錄音



(9) 空心手掌拍擊，於點4錄音



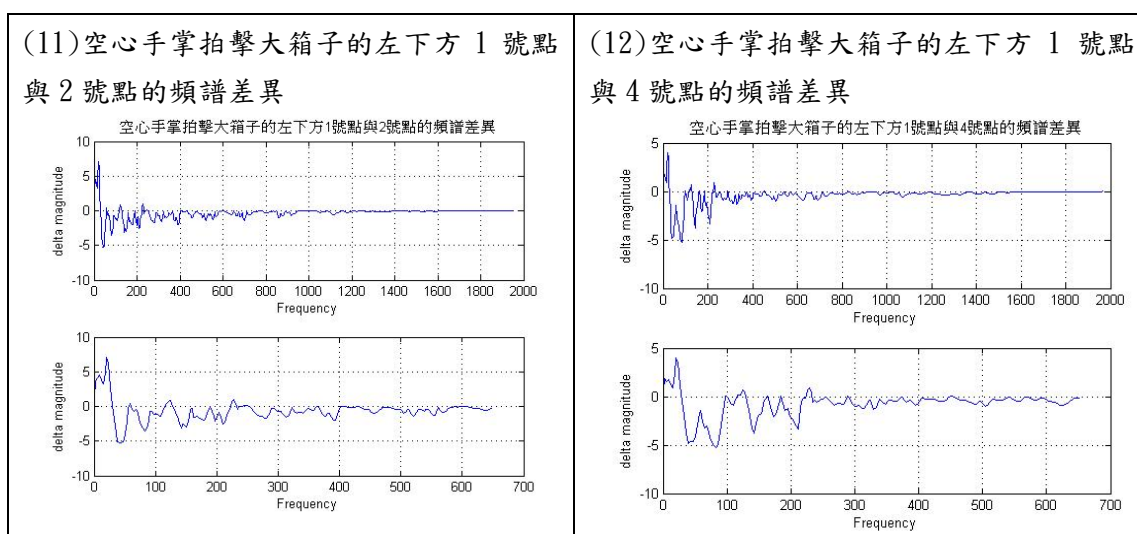
(10) 實心手掌拍擊，於點4錄音



在五個點分別以不同的掌形拍擊。拍擊時，分別在中央點與1, 2, 3, 4 號點測量聲波波形，以 Audition 選取所要部分並除去背景雜音，在 Matlab7.5 中作傅立葉轉換，將原始音檔轉換為頻譜。實驗結果如圖(1)~圖(10)所示。

由頻譜可觀察到某些頻率的強度為零，可能的原因是該頻率的聲波形成駐波，節點即在該測量點附近。

將 1 號點與 2 號點的頻譜的最大值等比例放大至相同，並將兩頻譜的振幅相減，可得圖(11)，圖(11)下圖為上圖在低頻部份的放大(因高頻部分差異很小)。以同樣方式處理 1 號點與 4 號點的頻譜，可得圖(12)。

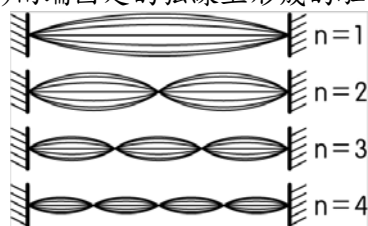


拍擊時在大箱子內部不同的點所得到的頻譜在高頻部分幾乎相同，但是只在低頻部分有所差異。

柒、討論及應用

1、空心掌形與實心掌形頻譜比較，多出一個峰值的可能原因-空心掌形內部可能形成駐波

(1)兩端固定的弦線上形成的駐波



兩端固定的弦線上形成駐波時，由於弦的兩個固定端必定為節點，如上圖中所示，駐波波長 λ 與弦線長度 l 間須符合下式的關係： $l = n\left(\frac{\lambda}{2}\right)$

式中 n 為正整數，即 $\lambda_n = \frac{2l}{n}$ ($=2l$ 、 l 、 $\frac{2}{3}l$ 、 $\frac{1}{2}l$ 、 \dots)，而兩端固定的弦線上所形成的駐波之最大波長為 $\lambda = 2l$ 。若已知弦波的速率為 v ，則振動頻率 f 為：

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2l}$$

(2)假設拍柱空心掌形是一個密閉的長方體容器而會在較長的一邊產生兩端固定的駐波，而彎曲的掌形長度是 13 公分=0.13 公尺，即兩固定端的距離 $l=0.13$ 公尺，且溫度則是在室溫 25°C，代入式中計算得

$f_1=1 \times (331+0.6 \times 25) \div (0.13 \times 2)=1330\text{Hz}$ ，此和拍柱空心掌形的頻譜中出現的一個較高頻率的峰值(大約在 1300Hz附近)大約相同，這或許是空心手掌拍牆比實心手掌拍牆多出一個峰值的原因。

- 2、一開始，我曾經想過用CPR練習所使用的安妮簡易人體模型模擬人的身體，探討駐波的節點和腹點在安妮內的位置及在人體內所對應的真實器官位置，驗證是真的剛好在痰容易聚集和脆弱、容易受傷的部位。但經過考量之後，我放棄了使用安妮來作實驗，因為安妮內部還有許多的機械構造，拍擊安妮時會發出許多的雜音。
- 3、使用保溫杯來取代薄銅片，是由於不容易取得質量及截面積均相同的薄銅片。保溫杯一端開口，一端封閉，將保溫杯倒過來開口的那一端朝下掉落相當於空心的掌形，封閉端向下掉落相當於實心的掌形，由於是同一個保溫杯，兩次實驗的質量是相同的。
- 4、使用手掌直接拍擊，所錄得的聲音大小和人手拍擊的力道及聲音和麥克風距離的遠近均有關，而在我的實驗中，很難控制這兩個變因，故無法比較聲音的強度。本實驗主要著重於各個波形之頻率的分析與討論，因為即使聲音的大小聲改變了，頻率仍不會因而改變。
- 5、由於麥克風的遠近，拍擊的力量的大小，均會影響錄到的聲音的強度，所以我希望往後若有繼續研究的機會，將利用Matlab程式，將錄得的聲音強度均轉換到相同。這樣將能比較聲音之間強度(振幅)的差別。

捌、結論

- 一、空心掌形與實心掌形在各種不同的拍擊實驗中所得到的頻譜均不同，但在大多數的實驗中，空心掌形的頻譜比實心掌形的頻譜多出一個峰值。
- 二、我認為駐波達到拍痰的效果是因為駐波推動人體裡面的痰，進而排出呼吸道內的痰。而以掌法傷人是當駐波中的腹點經過重要器官，產生更大的破壞力。但這個想法還需要更多的時間與實驗來驗證。
- 三、以大箱子模擬胸腔的拍擊實驗中，不同位置所測得的頻譜亦不同。特定的頻率在某些位置強度為零，可以推論箱內形成駐波，而強度為零的點為駐波的節點。
- 四、至於手部姿勢的不同(實心或空心)造成不同的結果，可能來自內部和外部的氣壓差。但是以橡皮球可做為拍痰杯(類似空心手部姿勢)的類似構造，經過推導(見下方附錄)，內部的壓力差很小，造成的影響很小，可以忽略。

玖、參考資料及其他

一、三軍總醫院護理部，拍痰(叩擊)注意事項。

http://www2.ndmctsgh.edu.tw/nur/category_content_data/192/20120603161910828.pdf

二、財團法人長庚紀念醫院全球資訊網，胸腔物理治療(拍痰)。

http://www.cgmh.org.tw/asproot/article/health_cntt.asp?artno=00309

三、高雄醫學大學附設中和紀念醫院，小兒胸腔物理治療(拍痰)。

<http://www.kmuh.org.tw/www/nurse/newweb/teach/ped/小兒胸腔物理治療-拍痰%28更新%29.pdf>

四、國泰綜合醫院兒科，呼吸道感染的照顧。

<http://www.cgh.org.tw/tw/content/article/healthy/045.pdf>

五、物奧初試考題 2008 年計算題第一題。

六、來自耶魯大學的拍手研究

http://www.haskins.yale.edu/sr/sr086/SR086_06.pdf

七、MATLAB 程式設計與應用，張智星，清蔚科技出版。

八、MATLAB 簡介

<http://zh.wikipedia.org/wiki/MATLAB>

九、Adobe Audition 簡介

<http://baike.baidu.com/view/438605.htm>

十、How To Do Chest Physical Therapy: Child Under Five

<http://cysticfibrosis.about.com/od/respiratorytherapy/ss/CPTyoungchild.htm>

拾、附錄

一、所使用的Matlab的程式

此為分析大多數的圖形所用的程式，部分是參考前人的方法，部分是自己打的。除此程式外，我仍有打其他程式，製做其他種類的圖形

```
%voice_analyze_original_doc_1_spectrum_fft.m
```

```
clear;
```

```
clf;
```

```
filename=' 實心手掌拍牆';
```

```
[y, fs, NBITS]=wavread(filename);
```

```
N=length(y);
```

```
freqStep = fs/N;
```

```
time = (0:N-1)/fs;
```

```
freq = freqStep*(0:N/16);
```

```
Y = fft(y);
```

```
Y = Y(1:length(freq));
```

```
% Plot time data
```

```
subplot(2,1,1);
```

```
plot(time, y);grid on
```

```
title(filename);
```

```
xlabel(' Time (seconds)'); ylabel(' Amplitude');
```

```
axis tight
```

```
% Plot spectral magnitude
```

```
subplot(2,1,2);
```

```
plot(freq, abs(Y)); grid on
```

```
xlabel(' Frequency');
```

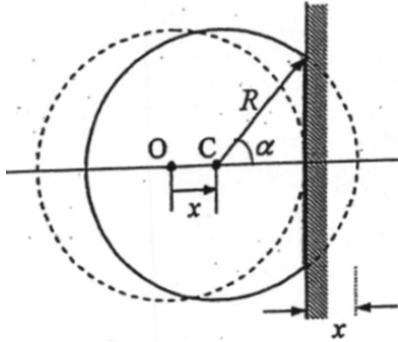
```
ylabel(' Magnitude (Linear)');
```

二、以薄壁橡皮球模擬拍痰杯的力學分析

薄壁橡皮球的質量為 m ，經充氣後，其半徑為 R ，球內部的空氣壓力高出大氣壓力的差值為 Δp 。考慮下述的情況：該橡皮球垂直投擲在一堵鉛直豎立的牆壁上，其和牆壁的接觸面積為 $A = \pi (R \sin\alpha)^2$ ，如右圖的實線所示。假設在整個碰撞過程中， α 都很小，可取 $\sin\alpha \approx \alpha$ ，且球皮的張力，相較於氣體壓力對球壁的作用力，可忽略不計，討論下

列各項：

設 $m = 5.67 \times 10^{-2} \text{ kg}$ ， $R = 3.175 \text{ cm}$ ， $k = 1.10 \times 10^4 \text{ N/m}$ ， $v_0 = 2.0 \text{ m/s}$ ，計算橡皮球和牆壁的接觸時間 t_0 和該球在碰撞期間所受平均力的量值。



在橡皮球和牆壁接觸期間，其受力情形如右圖所示。球所受的外力來自於大氣壓力 p_0 和牆壁接觸面 AB 的反作用力 N 。至於球內部的空氣壓力 p 屬於內力，對於球的運動沒有影響。大氣壓力作用於 AA' 弧面的總力和作用於另一對稱的弧面 BB' 的總力，彼此抵銷，而作用於 $A'B'$ 弧面的總力則等於 $p_0 \times (\text{A'B' 平面面積}) = p_0 \times A$ 。圖中 $A'B'$ 平面的面積等於接觸面 AB 的面積，等於 $A = \pi(R \sin \alpha)^2$ 。因此作用於球的合力為

$$F = p_0 A - N \quad (1)$$

式中的方向取向右為正，向左為負。又單考慮橡皮球和牆壁接觸的平面部分 AB ，在接觸期間沿 x 方向並不移動，即保持靜止，故

$$N = pA \quad (2)$$

由(1)和(2)兩式可得

$$F = -(p - p_0)A = -(p - p_0) \times \pi(R \sin \alpha)^2 \approx -(p - p_0) \pi R^2 \alpha^2 \quad (3)$$

式中的負號代表方向向左。橡皮球中心的位移為

$$x = R - R \cos \alpha \approx \frac{1}{2} R \alpha^2, \text{ 方向向右} \quad (4)$$

由(3)和(4)兩式可得

$$F \approx -2\pi R(p - p_0)x \quad (5)$$

其次考慮球在受壓期間，其內部的空氣壓力 p 有否變化？如下圖所示， AEB 圓弧面的面積為

$$S = \int_0^\alpha R^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) \quad (6)$$

AEB 對圓心 O 所張開的立體角為

$$\Omega = \frac{S}{R^2} = 2\pi(1 - \cos \alpha) \quad (7)$$

故 $AEBCA$ 的體積為

$$V_1 = \frac{\Omega}{4\pi} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos \alpha) \quad (8)$$

角 $ACBDA$ 錐的體積為

$$V_2 = \frac{1}{3} \times (R \cos \alpha) \times \pi(R \sin \alpha)^2 = \frac{1}{3} \pi R^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$$

橡皮球在和牆壁接觸期間所減少的體積為 ADBEA 所圍裹的體積，等於

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{3}\pi R^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \quad (10)$$

因此可得橡皮球在受壓期間的體積為

$$\begin{aligned} V &= V_0 - \Delta V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \left[\frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{3}\pi R^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \right] \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \left[\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha) + \frac{1}{4}\cos \alpha \sin^2 \alpha \right] \quad (11) \end{aligned}$$

若 α 很小，則上式可近似為

$$V \approx \frac{4}{3}\pi R^3 \left[\frac{1}{2} \left(1 + 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \alpha^2 \right] = \frac{4}{3}\pi R^3 \left(1 - \frac{\alpha^4}{8} \right) \quad (12)$$

由上式可知，若 α 很小，則球內部的空氣體積可視為不變，即在橡皮球和牆壁接觸的期間，其內部的空氣壓力 p 保持不變，故 $\Delta p = p - p_0 = \text{定值}$ 。(5)式可寫為

$$F \approx -2\pi R(\Delta p)x = -kx \quad (13)$$

式中 $k = 2\pi R(\Delta p)$ 。

橡皮球在和牆壁接觸的期間，做簡諧運動，故球中心位置 x 和時間 t 的函數關係式為

$$x = a \sin \omega t, \quad \text{式中 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14)$$

設 a 為球的最大位移量值，由力學能守恆定律可得

$$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0 \quad (15)$$

當 $t = \frac{1}{2}t_0$ 時，球中心的位移最大，即

$$a = a \sin \omega \left(\frac{t_0}{2} \right) \Rightarrow \omega \left(\frac{t_0}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (16)$$

可得橡皮球所受的力 F 為

$$F = -ka \sin \omega t = -\sqrt{mk}v_0 \sin(\sqrt{k/m}t) \quad (17)$$

橡皮球在碰撞期間所受平均力為

$$\bar{F} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} F dt = -\frac{\sqrt{mk}}{t_0} v_0 \int_0^{t_0} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) dt = -\frac{\sqrt{mk}}{t_0} v_0 \cdot 2\sqrt{\frac{m}{k}} = -\frac{2mv_0}{t_0} \quad (18)$$

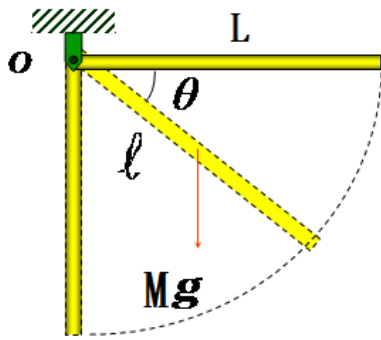
橡皮球和牆壁接觸時間 $t_0 = \pi \sqrt{\frac{5.67 \times 10^{-2}}{1.10 \times 10^4}} = 7.13 \times 10^{-3} s$ ，故得

$$\bar{F} = -\frac{2 \times 5.56 \times 10^{-2} \times 2.0}{7.13 \times 10^{-3}} = 31.8 N$$

三、手掌質量的測量

本次實驗因為時間過少，未能真正將實驗器材的重量控制到和手掌差不多，故下方列出測量手掌質量的實驗步驟及力學推導過程，以供參考。

先量出整隻手臂的重量，再以手臂與手掌的體積比，算出掌重。



1. 首先，假設手臂是一根棍子，將手臂放鬆後，以肩膀為支點，由水平自由掉落，借此求出質心與支點的距離

$$\left\{ \begin{array}{l} L: \text{手臂長度} \\ l: \text{質心到支點的距離} \\ M: \text{手臂質量} \\ I: \text{手臂之轉動慣量(支點在一端的木棒，轉動慣量為 } \frac{1}{3}ml^2 \text{)} \end{array} \right.$$

重力位能轉換成動能，求出質心到支點的距離 l 。

$$\begin{aligned} Mgl &= \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}Ml^2 \cdot \frac{v^2}{l^2} \\ &= \frac{1}{6}Mv^2 \\ l &= \frac{v^2}{6g} \end{aligned}$$

這時的 v 為未知量，所以我將光電計時器架設在手臂落下的底端，即可求得 v 。

2. 得到 l 後，在用力矩平衡來求出手臂質量。

$$\begin{aligned} FL &= Mgl \\ FL &= Mg \frac{v^2}{6g} \\ M &= \frac{6FL}{v^2} \end{aligned}$$

3. 有了手臂質量後，仍須得到體積比，才能求得手掌質量

而求體積比的方法是分別將手臂與手掌浸泡到水中，測量水之體積變化量

有了手臂體積 V_1 與手掌體積 V_2 後，手掌質量 m 即可求得

$$\begin{aligned} m &= \frac{V_1}{V_2} \cdot M \\ &= \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{6FL}{v^2} \end{aligned}$$