

第十二屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA12-267

作品名稱：「軌」譎・世界為我而轉

姓名：簡瑋佑

關鍵字：圓內、外擺線、擺線軌跡方程式、

旋轉矩陣、線積分

「軌」譎・世界為我而轉

摘要

本文在討論圓內外擺線的一些性質與圖形，主要研究方分成兩個部分：

- (1) 三角形繞圓內形成的擺線軌跡及擺線所形成的圖形
- (2) 三角形繞圓外形成的擺線軌跡及擺線所形成的圖形
- (3) 三角形繞拋物線外形成的擺線軌跡

一般的擺線都是利用「圓繞圓」的方式進行討論，也有人已經成功的用矩形在圓內操作出擺線，於是我們繼續延伸思考，如果使用三角形呢？把想法付諸實踐後，我們利用矩陣及三角形旋轉的一些性質，找出了圓內、外三角形擺線的軌跡方程式及其圖形！

壹、研究動機：

各位教授好，我們在上物理課討論運動軌跡時，發現了一個滿有趣的東西—擺線，於是我們開始查詢許多資料，因為在不同的幾何圖形上所形成的擺線各具特色，我們對擺線所形成的圖形深感好奇，因此才開始這篇科展作品，請各位教授多多指教！

貳、研究目的：

研究三角形繞圓內、外形成擺線所產生的

- 一、擺線重合的條件
- 二、擺線軌跡方程式
- 三、擺線圖形

參、研究設備與器材：

電腦、數學軟體 MAPLE、紙、筆、GSP 繪圖軟體

二、三角形的擺線

(一)、圓內三角形的擺線：

我們先討論圓內及圓外三角形所形成的擺線；首先，我們先看看圓內三角形所形成的擺線。

三角形可分為銳角、直角及鈍角三角形，因鈍角三角形在圓內繞行的過程中，鈍角無法成為旋轉支點，所以鈍角三角形在旋轉過程中相當於只有鈍角所對的邊在繞行，故我們省略鈍角三角形。

對一已知的三角形(此三角形為銳角三角形或直角三角形)，將任何一邊置於圓上當成一弦，則可得到該弦所對的圓心角 θ ，若被繞行圓的半徑為 r ，則該邊的長度為 $2r \sin \frac{\theta}{2}$ ，在不一般性的情況下，我們假設三角形三邊所對的角度分別為 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 ($\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 \neq 0$) 並設最大邊所對的圓心角為 θ_3 ，所以可得三角形長分別為 $2r \sin \frac{\theta_1}{2}$ 、 $2r \sin \frac{\theta_2}{2}$ 及最大邊 $2r \sin \frac{\theta_3}{2}$ ，在前述討論中，我們知道可繞行的三角形僅限於銳角及直角三角形，所以由三角形的邊角關係可得

$$(2r \sin \frac{\theta_1}{2})^2 + (2r \sin \frac{\theta_2}{2})^2 \geq (2r \sin \frac{\theta_3}{2})^2, \text{ 即}$$

$$(\sin \frac{\theta_1}{2})^2 + (\sin \frac{\theta_2}{2})^2 \geq (\sin \frac{\theta_3}{2})^2 \dots \dots \dots (1)$$

其次，若擺線圖形最後必須繞回原出發點，所以，假設三角形自轉 m 圈之後、公轉 n 圈後會回到原出發點，故有下列關係：

$$(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \cdot m = 2\pi \cdot n \dots \dots \dots (2)$$

接著我們開始討論三角形繞圓內擺線的圖形；設所繞圓的半徑為 r ，三角形 T 的三邊所對的圓心角符合 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 ($\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 \neq 0$ ， $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$) 符合條件(1)及條件(2)，我們用坐標的方式分析，將圓心置於坐標軸圓點，圓心角 θ_1 所對的邊其中一端點置於 x 軸，另一點置於圓上(位於 x 軸上方)，如下圖(一)，此時轉軸為點 $C(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$ ，利用餘弦

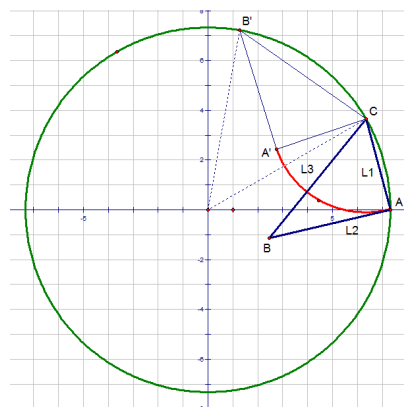
定理可得 $\angle ACB = \cos^{-1}(\frac{(\sin \frac{\theta_1}{2})^2 + (\sin \frac{\theta_3}{2})^2 - (\sin \frac{\theta_2}{2})^2}{2 \cdot \sin \frac{\theta_1}{2} \cdot \sin \frac{\theta_3}{2}})$ ，所以以 C 為旋轉軸、 A 為旋轉

點，旋轉角度為 $\angle OCA + \angle OCB' - \angle ACB$ ，即

$$\pi - (\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_3}{2} + \cos^{-1}(\frac{(\sin \frac{\theta_1}{2})^2 + (\sin \frac{\theta_3}{2})^2 - (\sin \frac{\theta_2}{2})^2}{2 \cdot \sin \frac{\theta_1}{2} \cdot \sin \frac{\theta_3}{2}}))。$$

同理，利用餘弦定理可求得 $\angle A'B'C$ 為，

$$\angle A'B'C = \cos^{-1}(\frac{(\sin \frac{\theta_2}{2})^2 + (\sin \frac{\theta_3}{2})^2 - (\sin \frac{\theta_1}{2})^2}{2 \cdot \sin \frac{\theta_1}{2} \cdot \sin \frac{\theta_3}{2}})$$



圖(一)

所以以 B' 為旋轉軸、 A' 為旋轉點，旋轉角度為

$$\pi - \left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} + \cos^{-1} \left(\frac{(\sin \frac{\theta_2}{2})^2 + (\sin \frac{\theta_3}{2})^2 - (\sin \frac{\theta_1}{2})^2}{2 \cdot \sin \frac{\theta_2}{2} \cdot \sin \frac{\theta_3}{2}} \right) \right);$$

最後，點 A 經過兩次旋轉後，

本身是旋轉軸又是旋轉點，故無軌跡。

而我們利用旋轉矩陣 $\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ 及向量的平移，可逐步構築出圓內三角形所繞出的擺線，以下為畫出軌跡的過程：

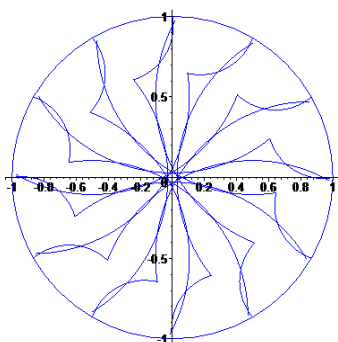
1、利用 [旋轉點]-[旋轉軸]，找出待旋轉向量 \vec{v} 。

2、將待旋轉向量已列矩陣形式 (1x2) 乘以旋轉矩陣 $\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ 。

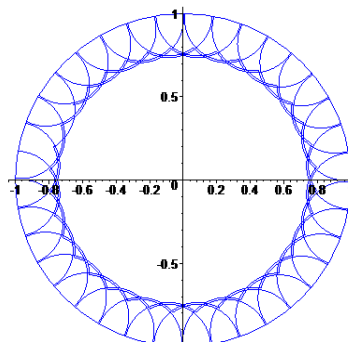
3、再將乘完之 1x2 矩陣加上旋轉軸坐標。

4、在 Maple 中限制上述討論過的旋轉角度即可。

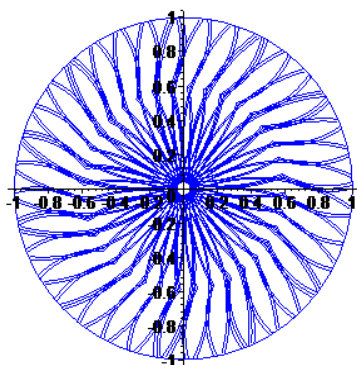
下列為我們常是以不同角度所畫出的圓內繞三角形的圖形，相關的程式設計因篇幅過長，故附於本報告書的附件一，請各位教授參閱。



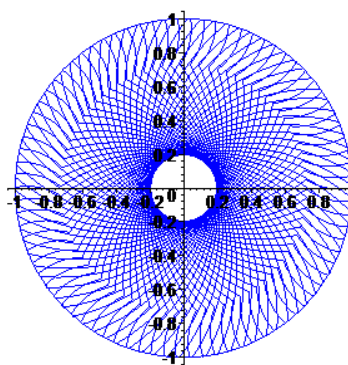
(20, 60, 70) 銳角三角形



(15, 15, 20) 銳角三角形



(30, X, 45) 一直角三角形



(22, X, 68) 一直角三角形

(二)圓外三角形的擺線：

其次，我們再看圓外三角形所形成的擺線；設三角形的三邊長為 l_1 、 l_2 、 l_3 ，圓半徑為 r ，在不失一般性的情況下，我們假設 $l_1 \perp l_2 \perp l_3$ ，由於三角形的三邊是貼著圓上在滾動，所以， l_1 、 l_2 、 l_3 各在圓上有對應的弧長 rq_1 、 rq_2 、 rq_3 ，若要擺線最後回到原出發點，則必有

$$n(rq_1 + rq_2 + rq_3) = m \cdot 2\pi r, \text{ 即 } \frac{q_1 + q_2 + q_3}{2\pi} = \frac{m}{n} \text{ (m, n 為正整數)}$$

而在三角形繞圓的外擺線中，不存在類似鈍角三角形繞圓的內擺線會有某些角碰不到邊的情形，因此，我們在討論時就不分銳角、直角或鈍角三角形，下面我們開始討論三角形繞圓的外擺線。

首先，我們先將三角形的其中一角置於單位圓上點 $(1, 0)$ ，一邊與圓相切，如下圖(二)。以下我們將外擺線分為四個部分討論。

1、在三角形以邊 l_3 沿圓滾動時：

在三角形以邊 l_3 沿圓滾動，以下列兩個性質可得到 B 點的軌跡

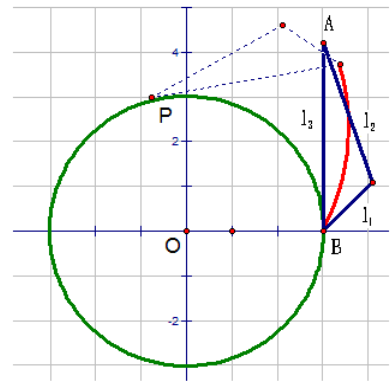
性質一：因三角形以邊 l_3 沿圓滾動，所以滾出的弧長等於邊長。

性質二：設三角形以邊 l_3 沿圓滾動時，邊 l_3 與圓切於點 $P(x, y)$ ，若以圓參數式表示 P

可得 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ，因 \vec{OP} 垂直

\vec{PB} ，所以可得 \vec{PB} 平行 $(\sin \theta, -\cos \theta)$ 。

故 $\vec{OB} = \vec{OP} + \vec{PB} = (\cos \theta + t \cdot \sin \theta, \sin \theta - t \cdot \cos \theta)$ ， $0 \leq t \leq l_3$



圖(二)

2、三角形以一頂點為旋轉軸旋轉時：

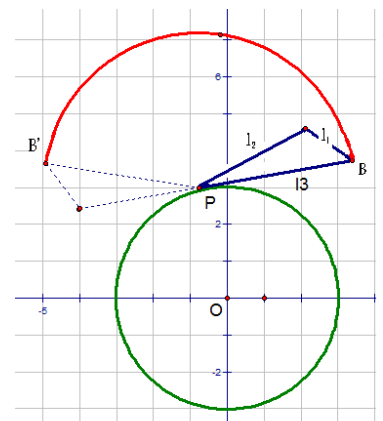
如圖三，設三角形以 P 為旋轉軸，則 A 點所繞出的軌跡為紅色線段。

繞行前， $\vec{AB} = (l_3 \cdot \sin \theta_3, -l_3 \cdot \cos \theta_3)$ ， θ_3 為

與 l_3 相等弧長所對的圓心角，此次繞行相當於以 A 為

圓心， \vec{AB} 為半徑，旋轉 $\pi - k_1$ (k_1 為三角形邊 l_1 所對的

角度，依餘弦定理可得 $k_1 = \cos^{-1}(\frac{(l_2)^2 + (l_3)^2 - (l_1)^2}{2 \cdot l_2 \cdot l_3})$ 。



圖(三)

利用旋轉矩陣 $\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ 即可得本次繞行的軌跡參數式，

$$\begin{cases} x = l_3 \cdot \sin \theta_3 \cdot \cos(t) - l_3 \cos \theta_3 \cdot \sin(t) + \cos \theta_3 \\ y = -l_3 \cdot \sin \theta_3 \cdot \sin(t) - l_3 \cos \theta_3 \cdot \cos(t) + \sin \theta_3 \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi - k_1$$

3、三角形以邊 l_2 沿圓滾動時：

如圖四所示，在滾動的過程中，利用圓參數式及圓心與切點連線垂直切線，我們首先知道

$$\vec{AC} \text{ 平行 } (\sin(t + \theta_3), -\cos(t + \theta_3))$$

，因方向、向量長度與向量的加法可得

$$\vec{OC} = (\cos \theta_3 + (t - l_2) \sin(t + \theta_3), \sin \theta_3 - (t - l_2) \cos(t + \theta_3)), 0 \leq t \leq l_2。$$

利用餘弦定理，三角形中邊 l_3 所對的角為 $k_3 = \cos^{-1}(\frac{(l_1)^2 + (l_2)^2 - (l_3)^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2})$ ，而向量 \vec{BA}

與向量 \vec{PB} 所夾的角為 $\pi - k_3$ ，設 \vec{BA} 平行 $(\cos \phi, \sin \phi)$ ，利用向量的內積及 \vec{BA} 與 \vec{PB} 所夾的

角為 $\pi - k_3$ 可得 $\frac{(\cos \phi, \sin \phi) \cdot (\sin(t + \theta_3), -\cos(t + \theta_3))}{|(\cos \phi, \sin \phi)| |(\sin(t + \theta_3), -\cos(t + \theta_3))|} = \cos(\pi - k_3)$ ，解得

$$\phi = \tan^{-1}(\cos(t + k_3) \cos(k_3) + \sqrt{\cos(t + k_3)^2 \cos(k_3)^2 - \cos(k_3)^2 + \sin(t + k_3)^2})$$

故得 $\vec{CB} = (l_2 \cdot \cos \phi, l_2 \cdot \sin \phi)$ ，因此時 $\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$ ，所以B點的軌跡為

$$\begin{cases} x = \cos \theta_3 + (t - l_2) \sin(t + \theta_3) + l_2 \cos \phi \\ y = \sin \theta_3 - (t - l_2) \cos(t + \theta_3) + l_2 \sin \phi \end{cases}, \text{其中 } 0 \leq t \leq l_2,$$

$$\phi = \tan^{-1}(\cos(t + k_3) \cos(k_3) + \sqrt{\cos(t + k_3)^2 \cos(k_3)^2 - \cos(k_3)^2 + \sin(t + k_3)^2})$$

4、三角形以一頂點為旋轉軸旋轉時：

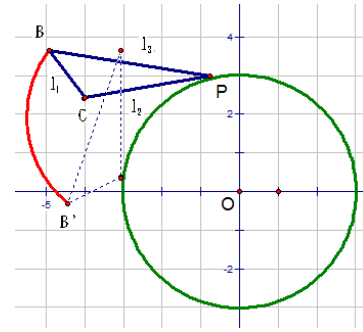
如圖(五)所示，此時旋轉點C的座標為 $C(\cos(\theta_3 + \theta_2), \sin(\theta_3 + \theta_2))$ ，已知

$$\vec{CA} = l_2(\sin(\theta_3 + \theta_2), -\cos(\theta_3 + \theta_2)) \text{ 及 邊 } l_3 \text{ 所對的角}$$

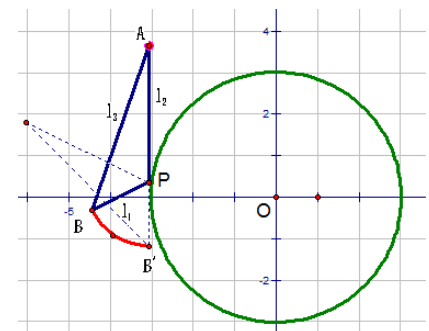
$$k_3 = \cos^{-1}(\frac{(l_1)^2 + (l_2)^2 - (l_3)^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}),$$

設 $\vec{CB} = l_1(\cos \phi, \sin \phi)$ ，利用向量的內積可得

$$\frac{(\cos \phi, \sin \phi) \cdot (\sin(\theta_3 + \theta_2), -\cos(\theta_3 + \theta_2))}{|(\cos \phi, \sin \phi)| |(\sin(\theta_3 + \theta_2), -\cos(\theta_3 + \theta_2))|} = \cos(k_3), \text{ 解得}$$



圖(四)



圖(五)

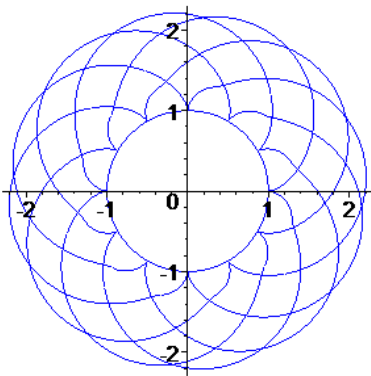
$$\varphi = \theta_3 + \theta_2 - \sin^{-1}(\cos(k_3))$$

再利用旋轉矩陣 $\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ ，可得此時 B 點的軌跡為

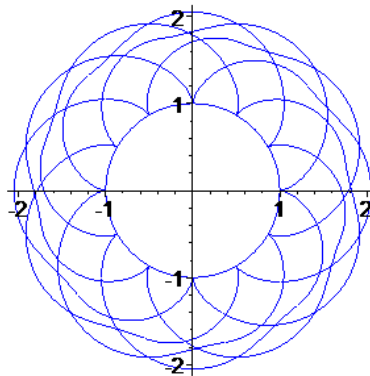
$$\begin{cases} x = l_1 \cos \varphi \cdot \cos(t) + l_1 \sin \varphi \cdot \sin(t) + \cos(\theta_3 + \theta_2) \\ y = -l_1 \cos \varphi \cdot \sin(t) + l_1 \sin \varphi \cdot \cos(t) + \sin(\theta_3 + \theta_2) \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi - k_3, \varphi = \theta_3 + \theta_2 - \sin^{-1}(\cos(k_3))$$

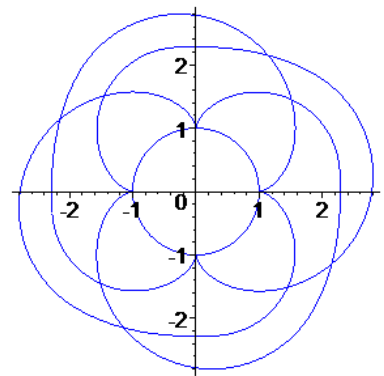
結合(1)、(2)、(3)、(4)的討論可得下列三角形繞圓外擺線的圖形。



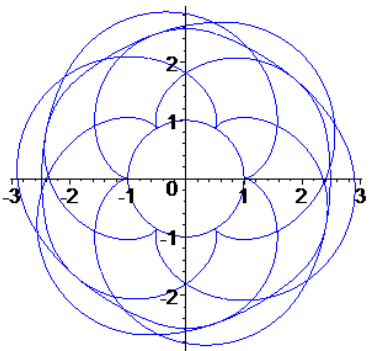
邊長對應弧長角度(20, 60, 70)



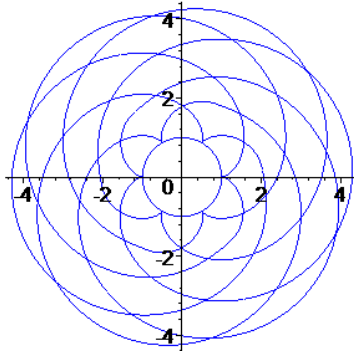
(45, 45, 60)



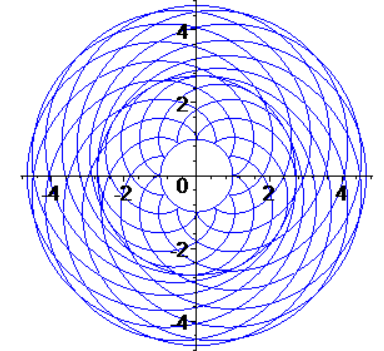
(75, 90, 105)



(90, 100, 110)



(60, 170, 190)

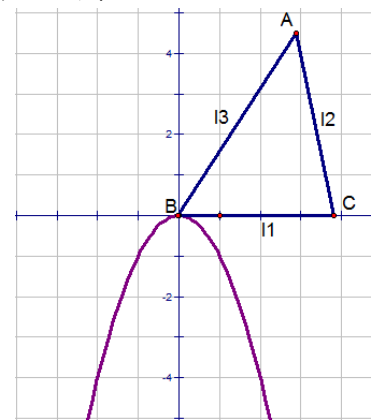


(100, 200, 210)

二、拋物擺線的圖形

在前述的討論中，我們已將圓內三角形擺線及圓外三角形的擺線圖形，擺線長討論完畢，但是我們希望能接續討論三角形在不同的圓錐曲線上的擺線圖形，我們首先討論的就是常見的拋物線。

我們將三角形置於拋物線上(如圖一)滾動，我們將三角形的頂點 B 置於原點，沿拋物線 $y = -x^2$ 向右下方滾動討論 B 點的軌跡，依 $\overline{BC}(l_1) \rightarrow \overline{CA}(l_2) \rightarrow \overline{AB}(l_3)$ 之順序滾動，依滾動的過程分類，可將擺線軌跡分成五段，在我們在下列分段討論。



圖(六)

(一)、第一段擺線軌跡：沿邊 \overline{BC} 切拋物線滾動軌跡

拋物線不同於圓，在前述三角形繞圓的外擺線中，我們可以輕易的掌握三角形的邊與圓弧長之間的關係；但是，在拋物線中我們很難用高中的方法計算與邊長相等的拋物線弧長，故只好用“大學微積分”“弧長積分”的方式計算與邊長相等的拋物線弧長。

此處我們假設拋物線方程式為 $f(x) = -x^2$ ，而弧長計算公式為

$$\int \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int \sqrt{1 + (-2x)^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2x) + c \dots \dots \dots (1)$$

令(1)式等於 \overline{BC} 長 l_1 ，則可得到 \overline{BC} 切拋物線滾動後弧長等於 \overline{BC} 的拋物線點坐標，但求解的過程及解的通式太過複雜，所以我們在此省略計算過程，只令其解為 $soll$ ，即當 $x=soll$ 時

$$\frac{1}{2} soll\sqrt{1 + 4soll^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2soll) = l_1,$$

其次，利用微分，可求得拋物線上每一點 $(t, -t^2)$ 的切線斜率 $m = -2t$ 及切線方程式 $y - (-t^2) = (-2t)(x - t)$ ，由此可得沿著切線方向

的單位向量為 $(\frac{-1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}})$ 或 $(\frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \frac{-2t}{\sqrt{1 + 4t^2}})$ ，

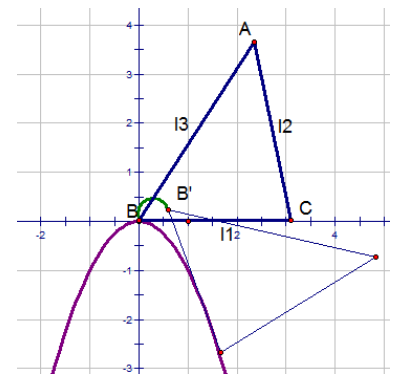
而由圖二可知由切點至 B 點的單位向量為 $(\frac{-1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}})$ ，

再由弧長積分可求得繞行的向量長為 $\frac{1}{2} x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2x) \Big|_{x=0}^t$

，結合方向、長度與拋物線參數式可得 B 點的軌跡為 $B(x_1, y_1)$ ，

$$x_1 = t + \frac{-1}{\sqrt{1 + 4t^2}} (\frac{1}{2} t\sqrt{1 + 4t^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2t)) \quad t=0..soll$$

$$y_1 = -t^2 + \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}} (\frac{1}{2} t\sqrt{1 + 4t^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2t)) \quad t=0..soll$$



圖(七)

(二)、第二段擺線軌跡：以 $(soll, -soll^2)$ 為旋轉點的旋轉軌跡

在第一段軌跡的計算中，利用 $\frac{1}{2} x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2x) = l_1$ 求其解令為 $soll$ ，進而得到當第一段滾動軌跡結束後，B 點將以 $(soll, -soll^2)$ 為旋轉點進行旋轉，旋轉角度為 $\pi - \angle C$ (如圖八)。

在實際計算軌跡的過程，仍需借助旋轉矩陣

$$T = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}, \text{ 故我們需要先找出待旋轉}$$

的向量，設第一段軌跡可知沿邊 \overline{BC} 滾動後的終點在

$B' (x_{1E}, y_{1E})$ ，此時

$$x_{1E} = \text{soll} + \frac{-1}{\sqrt{1+4\text{soll}^2}} \left(\frac{1}{2} \text{soll} \sqrt{1+4\text{soll}^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2\text{soll}) \right)$$

$$y_{1E} = -\text{soll}^2 + \frac{2\text{soll}}{\sqrt{1+4\text{soll}^2}} \left(\frac{1}{2} \text{soll} \sqrt{1+4\text{soll}^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2\text{soll}) \right), \text{ 因旋轉點坐標為}$$

$(\text{soll}, -\text{soll}^2)$ ，故可得待旋轉向量為 $V_2 = (x_{1E} - \text{soll}, y_{1E} + \text{soll}^2)$ 即

$$V_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{1+4\text{soll}^2}} \left(\frac{1}{2} \text{soll} \sqrt{1+4\text{soll}^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2\text{soll}) \right), \right. \\ \left. \frac{2\text{soll}}{\sqrt{1+4\text{soll}^2}} \left(\frac{1}{2} \text{soll} \sqrt{1+4\text{soll}^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2\text{soll}) \right) \right)$$

將 V_2 表現為矩陣形式，與旋轉矩陣 T 相乘後再加上矩陣 $\begin{bmatrix} \text{soll} & -\text{soll}^2 \end{bmatrix}$ ，即可得第二段的軌

跡，下列即為旋轉軌跡中各點的 x 分量及 y 分量的參數式

$$x = \frac{-1}{\sqrt{1+4\text{soll}^2}} \left(\frac{1}{2} \text{soll} \sqrt{1+4\text{soll}^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2\text{soll}) \right) \cos(t) + \frac{2\text{soll}}{\sqrt{1+4\text{soll}^2}} \left(\frac{1}{2} \text{soll} \sqrt{1+4\text{soll}^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2\text{soll}) \right) \sin(t) + \text{soll}, \quad t=0.. \pi - \angle C$$

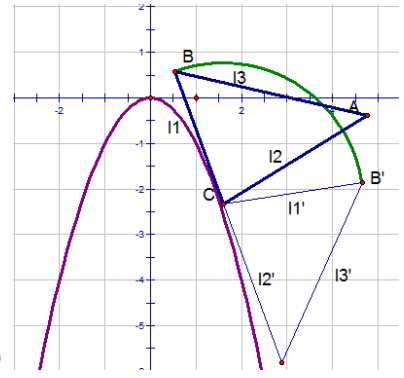
$$y = \frac{-1}{\sqrt{1+4\text{soll}^2}} \left(\frac{1}{2} \text{soll} \sqrt{1+4\text{soll}^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2\text{soll}) \right) (-\sin(t)) + \frac{2\text{soll}}{\sqrt{1+4\text{soll}^2}} \left(\frac{1}{2} \text{soll} \sqrt{1+4\text{soll}^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2\text{soll}) \right) \cos(t) - \text{soll}^2, \quad t=0.. \pi - \angle C$$

(三)、第三段擺線軌跡：沿邊 \overline{CA} 切拋物線滾動的軌跡

在討論該段軌跡時，我們首先確認沿邊 \overline{CA} 滾動完畢後會， $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的坐標，若已完成滾動，我們知道三角形已在拋物線上移動 $l_1 + l_2$ 的距離，所以，利用弧長積分我們可以求得 $\frac{1}{2} x \sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2x) = l_1 + l_2$ 的解令為 sol2 ，而我們利用下列三個步驟確定 B 點的坐標。

步驟一：利用滾動時的切點坐標 P 、弧長積分，先確定 $\triangle ABC$ 中 C 點的坐標。

步驟二：找出 \overrightarrow{PC} 方向上的單位向量，利用旋轉矩陣 T 旋轉 $\pi - \angle C$ 後再延伸該向量使其長度

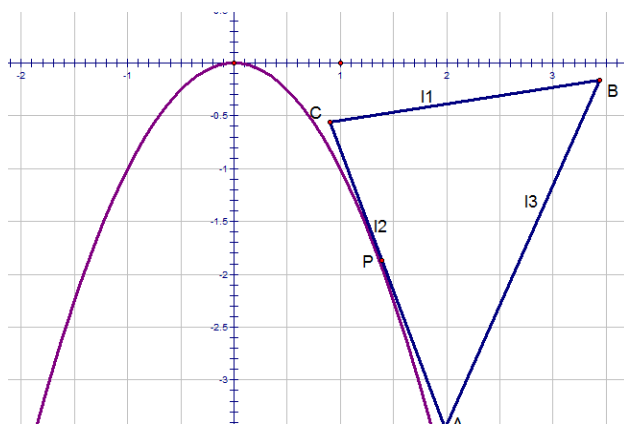


圖(八)

為 \vec{l}_1 ，令該向量為 \vec{CB} 。

步驟三： $\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$

如圖九示，我們依三個步驟分段討論 B 點的軌跡。



圖(九)

步驟一：

設 P 點的座標為 $(t, -t^2)$ ，則依前述討論知 \vec{PC} 方向上的

(1) 單位向量為 $\left(\frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$ ，

(2) \overline{PC} 長為 $\int_{\text{sol1}}^t \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{2}(t - \text{sol1})\sqrt{1+4(t - \text{sol1})^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(t - \text{sol1}))$ ，

由(1)、(2)知 $\vec{PC} = (x_t, y_t)$

$$x_t = \frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}} \left(\frac{1}{2}(t - \text{sol1})\sqrt{1+4(t - \text{sol1})^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(t - \text{sol1})) \right)$$

$$y_t = \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \left(\frac{1}{2}(t - \text{sol1})\sqrt{1+4(t - \text{sol1})^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(t - \text{sol1})) \right), t = \text{sol1}.. \text{sol2}$$

所以 C 點坐標為 $(t + x_t, -t^2 + y_t)$ 。

步驟二：

由前述討論知 \vec{PC} 方向上的單位向量為 $\left(\frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$ ，而 \vec{CB} 與 \vec{PC} 向量夾角為

$\pi - \angle C$ ，故利用旋轉矩陣將 \vec{PC} 旋轉求得 \vec{CB} ，以下為計算過程：

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\pi - \angle C) & -\sin(\pi - \angle C) \\ \sin(\pi - \angle C) & \cos(\pi - \angle C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos C}{\sqrt{1+4t^2}} + \frac{2t \sin C}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{\sin C}{\sqrt{1+4t^2}} - \frac{2t \cos C}{\sqrt{1+4t^2}} \end{bmatrix}$$

，即得 \vec{CB} 上的單位向量為 $\left(\frac{\cos C}{\sqrt{1+4t^2}} + \frac{2t \sin C}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{\sin C}{\sqrt{1+4t^2}} - \frac{2t \cos C}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$ ，因 $\left| \vec{CB} \right| = l_1$ ，所

$$\text{以 } \vec{CB} = l_1 \cdot \left(\frac{\cos C}{\sqrt{1+4t^2}} + \frac{2t \sin C}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{\sin C}{\sqrt{1+4t^2}} - \frac{2t \cos C}{\sqrt{1+4t^2}} \right)$$

$$= \left(\frac{l_1 \cos C}{\sqrt{1+4t^2}} + \frac{2t l_1 \sin C}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{l_1 \sin C}{\sqrt{1+4t^2}} - \frac{2t l_1 \cos C}{\sqrt{1+4t^2}} \right)$$

步驟三：

結合步驟一、步驟二得

$$\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB} = \left(t + x_t + \frac{l_1 \cos C}{\sqrt{1+4t^2}} + \frac{2tl_1 \sin C}{\sqrt{1+4t^2}}, -t^2 + y_t + \frac{l_1 \sin C}{\sqrt{1+4t^2}} - \frac{2tl_1 \cos C}{\sqrt{1+4t^2}} \right),$$

$$t = \text{sol1} \cdot \text{sol2}$$

$$x_t = \frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}} \left(\frac{1}{2} (t - \text{sol1}) \sqrt{1+4(t - \text{sol1})^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(t - \text{sol1})) \right),$$

$$y_t = \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \left(\frac{1}{2} (t - \text{sol1}) \sqrt{1+4(t - \text{sol1})^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(t - \text{sol1})) \right)$$

(四)、第四段軌跡：以 $(\text{sol2}, -\text{sol2}^2)$ 為旋轉點的旋轉軌跡

由第三段軌跡的討論知 $\triangle ABC$ 沿邊 \overline{CA} 切拋物線滾動後B點的座標為 (x_{3e}, y_{3e}) ，

$$x_{3e} = \text{sol2} + \frac{-1}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}} \left(\frac{1}{2} (\text{sol2} - \text{sol1}) \sqrt{1+4(\text{sol2} - \text{sol1})^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(\text{sol2} - \text{sol1})) \right) +$$

$$\frac{l_1 \cos C}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}} + \frac{2\text{sol2}l_1 \sin C}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}}$$

$$y_{3e} = -\text{sol2}^2 + \frac{2\text{sol2}}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}} \left(\frac{1}{2} (\text{sol2} - \text{sol1}) \sqrt{1+4(\text{sol2} - \text{sol1})^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(\text{sol2} - \text{sol1})) \right)$$

$$+ \frac{l_1 \sin C}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}} - \frac{2\text{sol2}l_1 \cos C}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}}.$$

因旋轉點為 $(\text{sol2}, -\text{sol2}^2)$ ，故可得待旋轉向量為 $V_4 = (x_{3e} - \text{sol2}, y_{3e} + \text{sol2}^2)$ ，將 V_4

表現為矩陣形式，與旋轉矩陣T相乘後再加上矩陣 $\begin{bmatrix} \text{sol2} & -\text{sol2}^2 \end{bmatrix}$ ，即可得第二段的軌跡，

下列即為旋轉軌跡中各點的x分量及y分量的參數式

$$x_4 = \text{sol2} + \left(\frac{-1}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}} \left(\frac{1}{2} (\text{sol2} - \text{sol1}) \sqrt{1+4(\text{sol2} - \text{sol1})^2} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2\text{sol2} - 2\text{sol1}) + \frac{l_1 \cos C}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}} + \frac{2\text{sol2}l_1 \sin C}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}} \right) \cdot \cos(t) +$$

$$\left(\frac{2\text{sol2}}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}} \left(\frac{1}{2} (\text{sol2} - \text{sol1}) \sqrt{1+4(\text{sol2} - \text{sol1})^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2\text{sol2} - 2\text{sol1}) \right)$$

$$+ \frac{l_1 \sin C}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}} - \frac{2\text{sol2}l_1 \cos C}{\sqrt{1+4\text{sol2}^2}} \right) \cdot \sin(t)$$

$$y_4 = -sol2^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{1+4sol2^2}} \left(\frac{1}{2}(sol2 - sol1)\sqrt{1+4(sol2 - sol1)^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2sol2 - 2sol1)\right) + \frac{l_1 \cos C}{\sqrt{1+4sol2^2}} + \frac{2sol2l_1 \sin C}{\sqrt{1+4sol2^2}}\right) \cdot (-\sin(t)) + \left(\frac{2sol2}{\sqrt{1+4sol2^2}} \left(\frac{1}{2}(sol2 - sol1)\sqrt{1+4(sol2 - sol1)^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2sol2 - 2sol1)\right) + \frac{l_1 \sin C}{\sqrt{1+4sol2^2}} - \frac{2sol2l_1 \cos C}{\sqrt{1+4sol2^2}}\right) \cdot \cos(t)$$

$$t = 0.. \pi - \angle A$$

(五)、第五段軌跡：沿邊 \overline{AB} 切拋物線滾動的軌跡

在討論第五段B點的軌跡中，我們利用滾動過程中，A點的軌跡推論B點的軌跡，首先我們求滾動後B點位於拋物線上的坐標，即利用弧長積分後需解下列方程式

$$\frac{1}{2} x \sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2x) = l_1 + l_2 + l_3,$$

設所得的解為 sol3。

設邊 \overline{AB} 切拋物線於 $P(t, -t^2)$ ，由前述討論知

$\dot{\uparrow}$ PA 方向上的

1、單位向量為 $\left(\frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$ ，

2、向量長 $\left|\dot{\uparrow} PA\right| = \int_{sol2}^t \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} (t - sol2)\sqrt{1+4(t - sol2)^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(t - sol2))$ ，

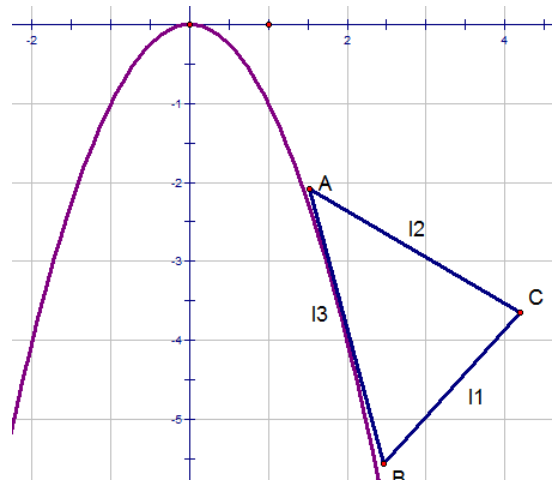
所以

$$\dot{\uparrow} PA = \left(\frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}} \left(\frac{1}{2} (t - sol2)\sqrt{1+4(t - sol2)^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(t - sol2))\right), \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \left(\frac{1}{2} (t - sol2)\sqrt{1+4(t - sol2)^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(t - sol2))\right)\right)$$

再配合P點坐標 $(t, -t^2)$ 可得A點在滾動的過程軌跡為 $\overset{?}{OA} = \overset{?}{OP} + \dot{\uparrow} PA$ ，即 $\overset{?}{OA} = (x_{5A}, y_{5A})$

$$x_{5A} = t + \frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}} \left(\frac{1}{2} (t - sol2)\sqrt{1+4(t - sol2)^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(t - sol2))\right)$$

$$y_{5A} = -t^2 + \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \left(\frac{1}{2} (t - sol2)\sqrt{1+4(t - sol2)^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2(t - sol2))\right), t=0.. sol3$$



圖(十)

而 \vec{PB} 方向上的

1、單位向量為 $(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{-2t}{\sqrt{1+4t^2}})$ ，

2、 $|\vec{AB}| = l_3$ ，所以此時 $\vec{AB} = (\frac{l_3}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{-2tl_3}{\sqrt{1+4t^2}})$ ，

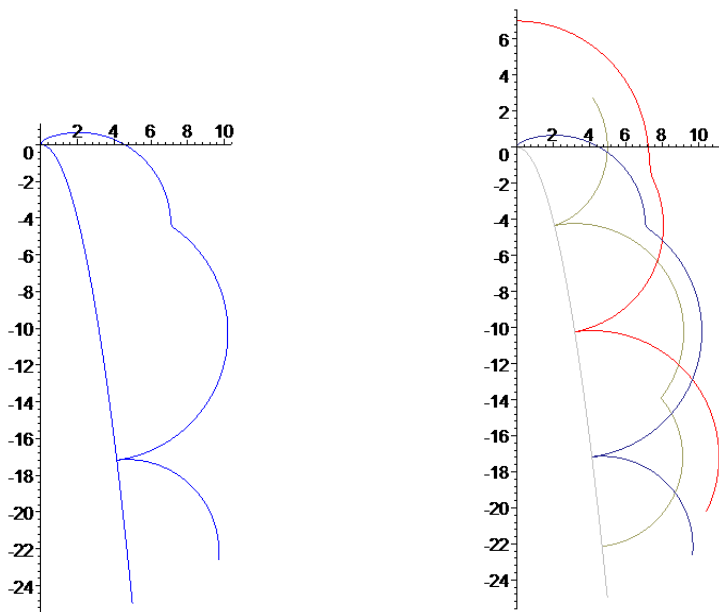
利用前述 A 點坐標可得 $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = (x_5, y_5)$ ，

$$x_5 = t + \frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}} (\frac{1}{2}(t - \text{sol2})\sqrt{1+4(t - \text{sol2})^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2t - 2\text{sol2})) + \frac{l_3}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$y_5 = -t^2 + \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} (\frac{1}{2}(t - \text{sol2})\sqrt{1+4(t - \text{sol2})^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2t - 2\text{sol2})) + \frac{-2tl_3}{\sqrt{1+4t^2}}$$

結合五段軌跡的討論可得下列圖形

重覆上述過程即可得所有的擺線圖形。



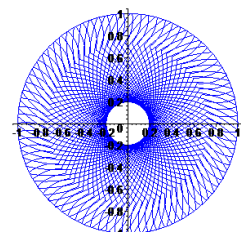
• 左圖為 B 點為軌跡點時擺線圖形，我們重複類推 B 點擺線討論 A、C 軌跡(此時設三角形 \overline{AB} 原切於 +y 軸。B 起始點不變。)可得到右圖。(藍—B，紅—A，金—C。)

伍、研究結果：

一、三角形繞圓內形成的擺線

(一)、與初始位置重合的條件為 $(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \cdot m = 2\pi \cdot n$

(二)、擺線軌跡方程式 (附錄一)，並得到擺線圖 (圖甲)



圖甲—圓內擺線

二、三角形繞圓外形成的擺線

(一)、與初始位置重合的條件為

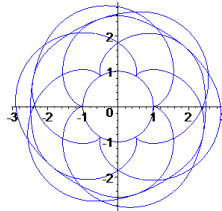
$$n(rq_1 + rq_2 + rq_3) = m \cdot 2pr, \text{ 即 } \frac{q_1 + q_2 + q_3}{2p} = \frac{m}{n} \text{ (m, n 為正整數)}$$

(二)、擺線軌跡方程式 (附錄二), 並得到擺線圖 (圖乙)

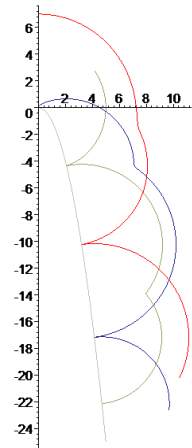
三、三角形沿拋物線外旋轉擺線圖形

(一)、擺線軌跡方程式 (附錄三)

(二)、三角形三點軌跡圖 (圖丙)



圖乙-圓外擺線



圖丙-拋物線外擺線

陸、討論：

剛開始我們設三角形三邊長，土法煉鋼在紙上模擬圓內軌跡的移動，並將實際數字代進 Maple，完成第一個三角形的擺線圖，之後我們開始討論下一組三角形圓心角所對的邊長，卻發現 Maple 中方程式需重頭一行行修改，為此我們必須假定邊長(即對應的圓心角)為一未知數，已減化 Maple 計算的過程。

而拋物線由於切線斜率不斷改變，無法找出週期性的繞行軌跡。不過我們也發現當切線斜率絕對值越大時，三角形一邊切拋物線繞行出的擺線長越短，如第一三五段軌跡，當然三角形邊長也是影響因素之一。

由此，我也希望未來不只推廣到空間中物體繞行軌跡，也希望能擴展到各個圖形的擺線長度。

柒、結論：

我們在 Maple 中一開始的假設是 θ_n 、 A_n 等未知數，而非實際數字，這麼一來我們只需要回頭定義這些未知數值，就可以直接 Enter 跑出圖形。而不管內、外擺線，三角形邊長對應圓心角或弧長對應的邊長「總和」不同，會得到不同種類的圖形。

捌、參考資料：

- 1、洪維恩著-數學魔法師 Maple 6。基峯出版社
- 2、高中基礎數學龍騰版第三、四冊
- 3、第 50 屆中小學科展作品——多邊行繞圓內擺線的研究
- 4、積分參考網站-http://www.stat.nuk.edu.tw/cbme/math/calculus/cal2/c2_3/bud.h

附錄一

圓內繞三角形擺線程式：

```
[>restart;
[>with(linalg);
[>theta[1];
[>theta[2];
[>theta[3];
[>Pi/(theta[1]+theta[2]+theta[3]);
[>evalf(sin(theta[1]/2)+sin(theta[2]/2)-sin(theta[3]/2));
[>evalf((sin(theta[1]/2))^2+(sin(theta[2]/2))^2-(sin(theta[3]/2))^2);
[>
  A1:=matrix(1, 2, [cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])), sin(n*(theta[1]+theta[2]+
  theta[3]))]);
[>R1:=matrix(1, 2, [cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]),
  sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1])]);
[>T:=matrix(2, 2, [cos(t), -sin(t), sin(t), cos(t)]);
[>L1:=matadd(multiply(matadd(A1, -1*R1), T), R1);
[>L1[1, 1];
[>
x1:=n->(cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+t
heta[1]))*cos(t)
+(sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1
]))*sin(t)
+cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]);
[>L1[1, 2];
[>
y1:=n->-(cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+
theta[1]))*sin(t)
+(sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1
]))*cos(t)
+sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]);
[>t1:=Pi-(theta[1]+theta[2])/2
-arccos(((sin(theta[1]/2))^2+(sin(theta[3]/2))^2-(sin(theta[2]/2))^2)/(2*sin(the
ta[1]/2)*sin(theta[3]/2)));
[>
x1E:=(cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+the
ta[1]))*cos(t1)
+(sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1
```



```

]))*sin(t1)
+cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]));
[ >
y1E:=-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+th
eta[1]))*sin(t1)
+(sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1
]))*cos(t1)
+sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]));
[ > A2:=matrix(1, 2, [x1E, y1E]);
[ > R2:=matrix(1, 2, [cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]+theta[3]),
sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]+theta[3])]);
[ > L2:=matadd(multiply(matadd(A2, -1*R2), T), R2);
[ > L2[1, 1];
[ > x2:=n->
(-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1
]))*cos(1/2*theta[1]+1/2*theta[2]+arccos(1/2*(sin(1/2*theta[1])^2+sin(1/2*theta
[3])^2-sin(1/2*theta[2])^2)/(sin(1/2*theta[1])*sin(1/2*theta[3]))))+(sin(n*(thet
a[1]+theta[2]+theta[3]))-sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]))*sin(1/2*t
heta[1]+1/2*theta[2]+arccos(1/2*(sin(1/2*theta[1])^2+sin(1/2*theta[3])^2-sin(1/2
*theta[2])^2)/(sin(1/2*theta[1])*sin(1/2*theta[3]))))+cos(n*(theta[1]+theta[2]+t
heta[3])+theta[1])-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]+theta[3]))*cos(t)
+(-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta
[1]))*sin(1/2*theta[1]+1/2*theta[2]+arccos(1/2*(sin(1/2*theta[1])^2+sin(1/2*thet
a[3])^2-sin(1/2*theta[2])^2)/(sin(1/2*theta[1])*sin(1/2*theta[3])))-(sin(n*(the
ta[1]+theta[2]+theta[3]))-sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]))*cos(1/2*
theta[1]+1/2*theta[2]+arccos(1/2*(sin(1/2*theta[1])^2+sin(1/2*theta[3])^2-sin(1/
2*theta[2])^2)/(sin(1/2*theta[1])*sin(1/2*theta[3]))))+sin(n*(theta[1]+theta[2]+
theta[3])+theta[1])-sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]+theta[3]))*sin(t
)+cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]+theta[3]));
[ > L2[1, 2];
[ > y2:=n->
-(-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta
[1]))*cos(1/2*theta[1]+1/2*theta[2]+arccos(1/2*(sin(1/2*theta[1])^2+sin(1/2*thet
a[3])^2-sin(1/2*theta[2])^2)/(sin(1/2*theta[1])*sin(1/2*theta[3]))))+(sin(n*(the
ta[1]+theta[2]+theta[3]))-sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]))*sin(1/2*
theta[1]+1/2*theta[2]+arccos(1/2*(sin(1/2*theta[1])^2+sin(1/2*theta[3])^2-sin(1/
2*theta[2])^2)/(sin(1/2*theta[1])*sin(1/2*theta[3]))))+cos(n*(theta[1]+theta[2]+
theta[3])+theta[1])-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]+theta[3]))*sin(t)
+(-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]))-cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+thet
a[1]))*sin(1/2*theta[1]+1/2*theta[2]+arccos(1/2*(sin(1/2*theta[1])^2+sin(1/2*the

```

```

ta[3]]^2-sin(1/2*theta[2])^2)/(sin(1/2*theta[1])*sin(1/2*theta[3])))-(sin(n*(th
eta[1]+theta[2]+theta[3]))-sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]))*cos(1/2
*theta[1]+1/2*theta[2]+arccos(1/2*(sin(1/2*theta[1])^2+sin(1/2*theta[3])^2-sin(1
/2*theta[2])^2)/(sin(1/2*theta[1])*sin(1/2*theta[3]))))+sin(n*(theta[1]+theta[2]
+theta[3])+theta[1]))-sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]+theta[3]))*cos(
t)+sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[1]+theta[3]));

```

```
[>
```

```

t2:=Pi-(theta[2]+theta[3])/2-arccos((((sin(theta[2]/2))^2+(sin(theta[3]/2))^2-(si
n(theta[1]/2))^2)
/(2*sin(theta[2]/2)*sin(theta[3]/2))));

```

```
[>plot([
```

```
[cos(t), sin(t), t=0..2*Pi],
```

```
[x1(0), y1(0), t=0..t1], [x1(1), y1(1), t=0..t1], [x1(2), y1(2), t=0..t1],
```

```
[x1(3), y1(3), t=0..t1], [x1(4), y1(4), t=0..t1], [x1(5), y1(5), t=0..t1],
```

```
[x1(6), y1(6), t=0..t1], [x1(7), y1(7), t=0..t1], [x1(8), y1(8), t=0..t1],
```

```
[x1(9), y1(9), t=0..t1], [x1(10), y1(10), t=0..t1], [x1(11), y1(11), t=0..t1],
```

```
[x2(0), y2(0), t=0..t2], [x2(1), y2(1), t=0..t2], [x2(2), y2(2), t=0..t2],
```

```
[x2(3), y2(3), t=0..t2], [x2(4), y2(4), t=0..t2], [x2(5), y2(5), t=0..t2],
```

```
[x2(6), y2(6), t=0..t2], [x2(7), y2(7), t=0..t2], [x2(8), y2(8), t=0..t2],
```

```
[x2(9), y2(9), t=0..t2], [x2(10), y2(10), t=0..t2], [x2(11), y2(11), t=0..t2]
```

```
], color=blue);
```

附錄二

圓外繞三角形擺線程式：

```
[>restart;
[>with(linalg);
[>theta[1];
[>theta[2];
[>theta[3];
[>evalf(theta[1]+theta[2]-theta[3]);
[>
x11:=n->cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+t)+t*sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]
])+t);
[>
y11:=n->sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+t)-t*cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3]
])+t);
[>A1:=arccos(((theta[2])^2+(theta[3])^2-(theta[1])^2)/(2*theta[2]*theta[3]));
[>P1:=matrix(1,2,[theta[3]*sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]),
-theta[3]*cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3])]);
[>T:=matrix(2,2,[cos(t),-sin(t),sin(t),cos(t)]);
[>Q1:=matrix(1,2,[cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]),
sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3])]);
[>L1:=matadd(multiply(P1,T),Q1);
[>L1[1,1];
[>L1[1,2];
[>x12:=n->theta[3]*sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3])*cos(t)
-theta[3]*cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3])*sin(t)
+cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]);
[>y12:=n->-theta[3]*sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3])*sin(t)
-theta[3]*cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3])*cos(t)
+sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]);
[>k2:=n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+t+arcsin(cos(A1));
[>x21:=n->cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+t)
+t*sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+t)+theta[3]*cos(n*(theta[1]+t
heta[2]+theta[3])+theta[3]+t+arcsin(cos(A1)));
[>y21:=n->sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+t)
-t*cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+t)+theta[3]*sin(n*(theta[1]+t
heta[2]+theta[3])
+theta[3]+t+arcsin(cos(A1)));
[>A3:=arccos(((theta[1])^2+(theta[2])^2-(theta[3])^2)/(2*theta[1]*theta[2]));
```

```

[ >
P2:=matrix(1, 2, [theta[1]*cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+theta[2]-ar
csin(cos(A3))),
theta[1]*sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+theta[2]-arcsin(cos(A3)
))]);
[ > Q2:=matrix(1, 2, [cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+theta[2]),
sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+theta[2])]);
[ > L2:=matadd(multiply(P2, T), Q2);
[ > L2[1, 1];
[ > L2[1, 2];
[ > x22:=n->
theta[1]*cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+theta[2]-arcsin(1/2*(theta[
1]^2+theta[2]^2-theta[3]^2)/(theta[1]*theta[2]))) *cos(t)+theta[1]*sin(n*(theta[1
]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+theta[2]-arcsin(1/2*(theta[1]^2+theta[2]^2-theta[3
]^2)/(theta[1]*theta[2]))) *sin(t)+cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+th
eta[2]);
[ > y22:=n->
-theta[1]*cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+theta[2]-arcsin(1/2*(theta
[1]^2+theta[2]^2-theta[3]^2)/(theta[1]*theta[2]))) *sin(t)+theta[1]*sin(n*(theta[
1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+theta[2]-arcsin(1/2*(theta[1]^2+theta[2]^2-theta[
3]^2)/(theta[1]*theta[2]))) *cos(t)+sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+t
heta[2]);
[ > x31:=cos(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+theta[2]+t)
+(-theta[1]+t)*sin(n*(theta[1]+theta[2]+theta[3])+theta[3]+theta[2]+t);
[ > plot([[cos(t), sin(t), t=0..2*Pi],
[x11(0), y11(0), t=0..theta[3]], [x11(1), y11(1), t=0..theta[3]], [x11(2), y11(2), t=0..
theta[3]],
[x11(3), y11(3), t=0..theta[3]], [x11(4), y11(4), t=0..theta[3]], [x11(5), y11(5), t=0..
theta[3]],
[x11(6), y11(6), t=0..theta[3]], [x11(7), y11(7), t=0..theta[3]], [x11(8), y11(8), t=0..
theta[3]],
[x11(9), y11(9), t=0..theta[3]], [x11(10), y11(10), t=0..theta[3]], [x11(11), y11(11), t
=0..theta[3]],
[x12(0), y12(0), t=0..A1-Pi], [x12(1), y12(1), t=0..A1-Pi], [x12(2), y12(2), t=0..A1-Pi]
,
[x12(3), y12(3), t=0..A1-Pi], [x12(4), y12(4), t=0..A1-Pi], [x12(5), y12(5), t=0..A1-Pi]
,
[x12(6), y12(6), t=0..A1-Pi], [x12(7), y12(7), t=0..A1-Pi], [x12(8), y12(8), t=0..A1-Pi]
,
[x12(9), y12(9), t=0..A1-Pi], [x12(10), y12(10), t=0..A1-Pi], [x12(11), y12(11), t=0..A1

```

```

-Pi],
[x21(0), y21(0), t=0..theta[2]], [x21(1), y21(1), t=0..theta[2]], [x21(2), y21(2), t=0..
theta[2]],
[x21(3), y21(3), t=0..theta[2]], [x21(4), y21(4), t=0..theta[2]], [x21(5), y21(5), t=0..
theta[2]],
[x21(6), y21(6), t=0..theta[2]], [x21(7), y21(7), t=0..theta[2]], [x21(8), y21(8), t=0..
theta[2]],
[x21(9), y21(9), t=0..theta[2]], [x21(10), y21(10), t=0..theta[2]], [x21(11), y21(11), t
=0..theta[2]],
[x22(0), y22(0), t=0..A3-Pi], [x22(1), y22(1), t=0..A3-Pi], [x22(2), y22(2), t=0..A3-Pi]
,
[x22(3), y22(3), t=0..A3-Pi], [x22(4), y22(4), t=0..A3-Pi], [x22(5), y22(5), t=0..A3-Pi]
,
[x22(6), y22(6), t=0..A3-Pi], [x22(7), y22(7), t=0..A3-Pi], [x22(8), y22(8), t=0..A3-Pi]
,
[x22(9), y22(9), t=0..A3-Pi], [x22(10), y22(10), t=0..A3-Pi], [x22(11), y22(11), t=0..A3
-Pi],
[x31(0), y31(0), t=0..theta[1]], [x31(1), y31(1), t=0..theta[1]], [x31(2), y31(2), t=0..
theta[1]],
[x31(3), y31(3), t=0..theta[1]], [x31(4), y31(4), t=0..theta[1]], [x31(5), y31(5), t=0..
theta[1]],
[x31(6), y31(6), t=0..theta[1]], [x31(7), y31(7), t=0..theta[1]], [x31(8), y31(8), t=0..
theta[1]],
[x31(9), y31(9), t=0..theta[1]], [x31(10), y31(10), t=0..theta[1]], [x31(11), y31(11), t
=0..theta[1]]
], color=blue);

```

附錄三：

```
[> with(linalg);
[> l1:=5;
[> l2:=6;
[> l3:=7;
[> int(sqrt(1+4*t^2), t);
[> sol1:=solve(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)=l1, t);
[> sol12:=solve(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)=l1+l2, t);
[> sol123:=solve(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)=l1+l2+l3, t);
[> sol4:=solve(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)=2*l1+l2+l3, t);
[> sol5:=solve(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)=2*l1+2*l2+l3, t);
[> sol6:=solve(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)=2*l1+2*l2+2*l3, t);
[> T:=matrix(2, 2, [cos(t), -sin(t), sin(t), cos(t)]);
[> theta1:=arccos((l2^2+l3^2-l1^2)/(2*l2*l3));
[> theta2:=arccos((l1^2+l3^2-l2^2)/(2*l1*l3));
[> theta3:=arccos((l1^2+l2^2-l3^2)/(2*l1*l2));
[> VL:=matrix(1, 2, [-1/sqrt(1+4*t^2), 2*t/sqrt(1+4*t^2)]);
[> VR:=matrix(1, 2, [1/sqrt(1+4*t^2), -2*t/sqrt(1+4*t^2)]);
[> x1:=t-1/(sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t));
```

```

[> y1:=-t^2+2*t/(sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t));
[> x1e:=eval(x1, t=sol1);
[> y1e:=eval(y1, t=sol1);
[> x1ev:=x1e-sol1;
[> y1ev:=y1e+sol1^2;
[> A2:=matrix(1, 2, [x1ev, y1ev]);
[> B2:=matrix(1, 2, [sol1, -sol1^2]);
[> C2:=matadd(multiply(A2, T), B2);
[> x2:=C2[1, 1];
[> y2:=C2[1, 2];
[> x2e:=eval(x2, t=Pi-theta3);
[> y2e:=eval(y2, t=Pi-theta3);
[> C2X:=
t-1/sqrt(1+4*t^2)*((1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t))-(1/2*sol1*sqrt(1+4*sol
1^2)+1/4*arcsinh(2*sol1)));
[> C2Y:=
-t^2+2*t/sqrt(1+4*t^2)*((1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t))-(1/2*sol1*sqrt(1+
4*sol1^2)+1/4*arcsinh(2*sol1)));
[>
T2:=matrix(2, 2, [cos(Pi-theta3), -sin(Pi-theta3), sin(Pi-theta3), cos(Pi-theta3)]);
[> C2:=multiply(VL, T2);
[> x3:=C2[1, 1]*11+C2X;
[> y3:=C2[1, 2]*11+C2Y;
[> x3e:=eval(x3, t=sol12);
[> y3e:=eval(y3, t=sol12);
[> x3ev:=x3e-sol12; [
[> y3ev:=y3e+sol12^2;
[> A4:=matrix(1, 2, [x3ev, y3ev]);
[> B4:=matrix(1, 2, [sol12, -sol12^2]);
[> C4:=matadd(multiply(A4, T), B4);
[> x4:=C4[1, 1];
[> y4:=C4[1, 2];
[>
A5X:=t-1/sqrt(1+4*t^2)*((1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t))-(1/2*sol12*sqrt(1
+4*sol12^2)+1/4*arcsinh(2*sol12)));
[>
A5Y:=-t^2+2*t/sqrt(1+4*t^2)*((1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t))-(1/2*sol12*s
qrt(1+4*sol12^2)+1/4*arcsinh(2*sol12)));
[> x5:=A5X+13*(1/sqrt(1+4*t^2));
[> y5:=A5Y+13*(-2*t/sqrt(1+4*t^2));

```

```

[>
x6:=-t-1/sqrt(1+4*t^2)*((1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t))-(1/2*sol123*sqrt(1
+4*sol123^2)+1/4*arcsinh(2*sol123)));
[>
y6:=-t^2+2*t/sqrt(1+4*t^2)*((1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t))-(1/2*sol123*s
qrt(1+4*sol123^2)+1/4*arcsinh(2*sol123)));
[> x6e:=eval(x6, t=sol4);
[> y6e:=eval(y6, t=sol4);
[> x6ev:=x6e-sol4;
[> y6ev:=y6e+sol4^2;
[> A7:=matrix(1, 2, [x6ev, y6ev]);
[> B7:=matrix(1, 2, [sol4, -sol4^2]);
[> C7:=matadd(multiply(A7, T), B7);
[> x7:=C7[1, 1]; [
[> y7:=C7[1, 2];
[
[> A0:=matrix(1, 2, [0, 1]);
[> A10:=multiply(A0, T); [
[> x0A:=A10[1, 1]*13;
[> y0A:=A10[1, 2]*13;
[>
T3:=matrix(2, 2, [cos(Pi-theta2), -sin(Pi-theta2), sin(Pi-theta2), cos(Pi-theta2)]);
[> bly:=-t^2+2*t/sqrt(1+4*t^2)*((1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t))-0);
[> A11:=multiply(VL, T3);
[> x1A:=A11[1, 1]*13+b1x;
[> y1A:=A11[1, 2]*13+b1y; [
[> x1Ae:=eval(x1A, t=sol1); [
[> y1Ae:=eval(y1A, t=sol1); [
[> x1Aev:=x1Ae-sol1;
[> y1Aev:=y1Ae+sol1^2;
[> A21:=matrix(1, 2, [x1Aev, y1Aev]);
[> A12:=matadd(multiply(A21, T), B2);
[> x2A:=A12[1, 1];
[> y2A:=A12[1, 2];
[>
x3A:=-t-1/(sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)-(1/2*sol12*sqrt(1
+4*sol12^2)+1/4*arcsinh(2*sol12)));
[>
y3A:=-t^2+2*t/(sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)-(1/2*sol12*s
qrt(1+4*sol12^2)+1/4*arcsinh(2*sol12)));

```



```

[>
x4A:=t+(-1/sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)-(1/2*sol12*sqrt(
1+4*sol12^2)+1/4*arcsinh(2*sol12)));
[>
y4A:=-t^2+(2*t/sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)-(1/2*sol12*s
qrt(1+4*sol12^2)+1/4*arcsinh(2*sol12)));
[> x4Ae:=eval(x4A, t=sol123);
[> y4Ae:=eval(y4A, t=sol123);
[> x4Aev:=x4Ae-sol123;
[> y4Aev:=y4Ae+sol123^2;
[> A15:=matrix(1, 2, [x4Aev, y4Aev]);
[> A51:=multiply(A15, T);
[> x5A:=A51[1, 1]+sol123;
[> y5A:=A51[1, 2]-sol123^2;
[>
A6x:=t-1/sqrt(1+4*t^2)*((1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t))-(1/2*sol123*sqrt(
1+4*sol123^2)+1/4*arcsinh(2*sol123)));
[>
A6y:=-t^2+2*t/sqrt(1+4*t^2)*((1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t))-(1/2*sol123*
sqrt(1+4*sol123^2)+1/4*arcsinh(2*sol123)));
[> A61:=multiply(VL, T3);
[> x6A:=A61[1, 1]+A6x;
[> y6A:=A61[1, 2]+A6x;
[
[> C0:=matrix(1, 2, [cos(Pi/2-theta2), sin(Pi/2-theta2)]);
[> C10:=multiply(C0, T);
[> x0C:=C10[1, 1]*11;
[> y0C:=C10[1, 2]*11;
[> C1x:=t+(-1/sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t));
[> C1y:=-t^2+(2*t/sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t));
[> x1C:=C1x+11*(1/sqrt(1+4*t^2));
[> y1C:=C1y+11*(-2*t/sqrt(1+4*t^2));
[>
x2C:=t+(-1/sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)-(1/2*sol1*sqrt(1
+4*sol1^2)+1/4*arcsinh(2*sol1)));
[>
y2C:=-t^2+(2*t/sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)-(1/2*sol1*sq
rt(1+4*sol1^2)+1/4*arcsinh(2*sol1)));
[> x2Ce:=eval(x2C, t=sol12);
[> y2Ce:=eval(y2C, t=sol12);

```

```

[> x2Cev:=x2Ce-sol12;
[> y2Cev:=y2Ce+sol12^2;
[> C13:=matrix(1, 2, [x2Cev, y2Cev]);
[> Ca:=matrix(1, 2, [sol12, -sol12^2]);
[> C3:=matadd(multiply(C13, T), Ca);
[> x3C:=C3[1, 1];
[> y3C:=C3[1, 2];
[>
Tc:=matrix(2, 2, [cos(Pi-theta1), -sin(Pi-theta1), sin(Pi-theta1), cos(Pi-theta1)]);
[> C14:=multiply(VL, Tc);
[>
C4x:=t+(-1/sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)-(1/2*sol12*sqrt(
1+4*sol12^2)+1/4*arcsinh(2*sol12)));
[>
C4y:=-t^2+(2*t/sqrt(1+4*t^2))*(1/2*t*sqrt(1+4*t^2)+1/4*arcsinh(2*t)-(1/2*sol12*s
qrt(1+4*sol12^2)+1/4*arcsinh(2*sol12)));
[> x4C:=C4x+C14[1, 1]*12;
[> y4C:=C4y+C14[1, 2]*12;
[> x4Ce:=eval(x4C, t=sol123);
[> y4Ce:=eval(y4C, t=sol123);
[> x4Cev:=x4Ce-sol123;
[> y4Cev:=y4Ce+sol123^2;
[> C20:=matrix(1, 2, [x4Cev, y4Cev]);
[> C21:=matrix(1, 2, [sol123, -sol123^2]);
[> C02:=matadd(multiply(C20, T), C21);
[> x5C:=C02[1, 1];
[> y5C:=C02[1, 2];
[> plot([
>
[t, -t^2, t=0..5], [x1, y1, t=0..sol1], [x2, y2, t=0..Pi-theta3], [x3, y3, t=sol1..sol12], [
x4, y4, t=0..Pi-theta1], [x5, y5, t=sol12..sol123]
> , [x6, y6, t=sol123..sol14], [x7, y7, t=0..Pi-theta3]
> , [x0A, y0A, t=0..Pi/2-theta2], [x1A, y1A, t=0..sol1], [x2A, y2A, t=0..Pi-theta3], [x3A,
y3A, t=sol1..sol12], [x4A, y4A, t=sol12..sol123], [x5A, y5A, t=0..Pi-theta2], [x6A, y6A, t
=sol123..sol14]
> , [x0C, y0C, t=0..Pi/2-theta2], [x1C, y1C, t=0..sol1], [x2C, y2C, t=sol1..sol12], [x3C, y
3C, t=0..Pi-theta1], [x4C, y4C, t=sol12..sol123], [x5C, y5C, t=0..Pi-theta2]
> ], color=[gray, navy, navy, navy, navy, navy, navy, navy, red, red, red, red, red, red, red, k
haki, khaki, khaki, khaki, khaki]);

```