第十二屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA12-553

作品名稱：田忌賽馬問題的研究與推廣

姓名：郭子翔

關鍵字：組合對局、遞迴式、排容原理

摘要

田忌、齊王兩人相約一同賽馬。雙方各有上、中、下三等馬，惟田忌每一等之馬皆稍弱於齊王，又田忌往往以其上馬對戰齊王上馬、中對中、下對下，所以屢戰屢敗，不管比了幾次結果都沒有改變。

孫臏仔細觀察雙方馬速間的關係後獻上一則妙計—「以上馬迎戰齊王中馬、中對下、下對上，即可取勝。」果真如其言，兩勝一敗獲得了勝利。

「如果雙方不是各出 3 匹馬而是 n 匹呢？田忌將有多少獲勝策略？」

說明書中解決了各種不同馬速配置下，其中一方的勝敗策略數之一般式。而內容主要分為幾個部分：

一、孫四周先生所提的問題(whc194)，稍後於動機介紹。

二、由於問題 whc194 中是雙人對決，且馬速交錯排列。我們將其擴展兩人以上且馬速遞增時，其中一人的勝敗策略數。

三、沿用問題 whc194 的背景設定，計算已知田忌某匹馬之對手之前提下，田忌的勝敗策略數之一般式。

壹、 研究動機

whc194, 田忌賽馬問題的推廣《孫四周，2008.10》

假設田忌和國王各有 $n(n>2)$ 匹馬，問田忌有多少種獲勝策略(用含 n 的解析式表示)？

簡說：田忌和國王各出 3 匹馬進行比賽，孫臏出奇策：「上對中，中對下，下對上」，最終贏得比賽。這是運籌學和對策論專著中，屢屢引用的經典案例，顯示中國人超乎尋常的智慧。但是，如果不是 3 匹馬，而是更多匹呢？

至今未見有人提及，更遑論解決了。我〈孫四周〉認為，不論從文化意義上，還是從學術意義上，這都是一個值得研究的好問題。

（中國初等數學研究, 楊學枝, 2011,page1）

「每一匹馬都須出戰一次，不得缺席也不重複出賽。」當其中一匹馬的對手不同時，會連帶影響其它匹馬的勝敗策略數。我們對於這類型的賽局十分有興趣，於是開始了這篇作品的研究。

貳、 研究目的

一、whc.194 問題

給定 2n 個實數符合$T_1 < Q_1 < T_2 < \cdots < T_n < Q_n$，我們稱由 1、2、⋯、$n$得到的一組排列$S_1, S_2, \cdots, S_n$為**策略**，集合$\left\{i \middle| T_{s_i} > Q_i\right\}$的元素個數為**勝利數**。令$A(n, x)$為所有勝利數為 x 的策略之數量，我們稱其為「n 戰 x 勝的策略數」。目標解出$A(n, x)$之一般式。

二、whc.194 問題之範圍延伸

若為s人競賽，那麼給定 sn 個實數符合(T_j^i表示第 i 個人的第 j 慢馬)

$$T_1^1 < T_1^2 < \cdots < T_1^s < T_2^1 < T_2^2 < \cdots < T_2^s < \cdots < T_n^1 < T_n^2 < \cdots < T_n^s$$

由 1、2、⋯、n 得到$s - 1$組排列$\left(S_q^2\right)$、$\left(S_q^3\right)$、⋯、$\left(S_q^s\right)$，我們稱每種陣列$\left[S_j^i\right]$為策略。而稱集合$\left\{i \middle| T_i^1 > T_{S_i^2}^2, T_{S_i^3}^3, \ldots, T_{S_i^s}^s\right\}$的元素個數為勝利數。在多人賽局中，我們的目的是找出勝利數為 x 的策略總數。

三、whc.194 對手問題之深入探討

若上述的 2n 個實數符合$T_1 < Q_1 < T_2 < \cdots < T_n < Q_n$，在已知$T_p$對手為$Q_q$的前提下，計算勝利數為 x 之策略數多寡。

參、 研究設備與器材

文書用品、電腦(Dev-C++,Excel)

肆、 研究方法與過程

名詞解釋與符號定義

1. 馬匹代號：

    我們用 2n 個實數來表示雙方的馬匹。分別為田忌的 n 匹馬$\{T_k\}$及齊王的 n 匹馬$\{Q_k\}$，且$T_1 < T_2 < \cdots < T_n$；$Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_n$。數字的大小代表馬匹的快慢，當兩匹馬相競賽時，較大者得勝。我們以馬速排列表示$\{T_k\}$及$\{Q_k\}$間的相對大小關係，例如 whc194 的馬速排列即符合$Q_{i-1} < T_i < Q_i$。

2. 策略及勝利數：

    策略表示由1、2、⋯ 、n得到的一組排列$S_1, S_2, \cdots, S_n$；當 T 方策略為$S_1, S_2, \cdots, S_n$時，其勝利數為集合$\left\{i \middle| T_{s_i} > Q_i\right\}$的元素個數，其中$T_{s_i}$的對手為$Q_i$。

3. 馬匹能力值：

    第 k 慢的馬T_k，其能力值為$\{i|T_k > Q_i\}$的元素個數，以t_k表示。

4. $A(n,x)$、$A_n(x)$：

    $A(n,x)$表示所有勝利數為 x 的策略數；而$A_n(x)$表示所有勝利數不小於 x 的策略數，其中$A_n(x) = \sum_{i=x}^{n} A(n,i)$。

一、 whc.194 問題：田忌賽馬問題的推廣

給定 2n 個實數符合$T_1 < Q_1 < T_2 < \cdots < T_n < Q_n$。我們稱由 1、2、⋯、$n$ 得到的一組排列S_1、S_2、⋯、S_n為策略；集合$\{i|T_{S_i} > Q_i\}$的元素個數為勝利數。所有勝利數為 x 的策略個數即為我們的目標答案$A(n,x)$。

只要將$n!$種策略都列出來便能得到$A(n,x)$，我們使用 c 語言寫了個能窮舉所有情形的程式，列出下表：

$n \backslash x$	0	1	2	3	4	5
1	1	0				
2	1	1	0			
3	1	4	1	0		
4	1	11	11	1	0	
5	1	26	66	26	1	0

設田忌n戰x勝以上的策略數為$A_n(x)$，則$A_n(x) = \sum_{i=x}^{n} A(n,i)$，並依此列出下表：

$n \backslash x$	0	1	2	3	4	4
1	1	0				
2	2	1	0			
3	6	5	1	0		
4	24	23	12	1	0	
5	120	119	93	27	1	0

再依照齊王n戰x勝以上的策略數$K_n(x)$，列出下表：

$n \backslash x$	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	2	2	1			
3	6	6	5	1		
4	24	24	23	12	1	
5	120	120	119	93	27	1

（一）、 $A_n(x)$之計數方式

從這三個表格能觀察到$A(n,x)$、$A_n(x)$、$K_n(x)$的諸多特性，不過我們先將焦點放在如何解得$A_n(x)$的一般式。

想要找出$A_n(x)$的一般式想必不能只用窮舉，我們打算使用排容原理來解題。

定義$|A|$代表A集合的元素個數。

令$A(T_p)$為所有使T_p得勝策略$S_1,S_2,\cdots,S_n$所形成之集合；

$A(T_pT_q)$為所有使T_p,T_q得勝策略所成之集合；以此類推。

定義**超算策略數**：

超算策略數$R_n(x)=\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_x\le n}\left|A(T_{p_1}T_{p_2}\cdots T_{p_x})\right|$

定義**修正係數**：

對於任意正整數n,x，可使$A_n(x)=\sum_{i=x}^{n}R_n(i)\cdot D(x,i)$成立

由於$R_n(x)$是滿足$1\le p_1<p_2<\cdots<p_x\le n$的$C_x^n$個集合$A(T_{p_1}T_{p_2}\cdots T_{p_x})$的策略數總和，所以集合與集合交集上的策略數會被重複計算到，所以我們稱之為超算策略數。假設 T 方某策略$S_1,S_2,\cdots,S_n$的勝利數為$x+k$，則此策略為C_x^n個集合$A(T_{p_1}T_{p_2}\cdots T_{p_x})$其中的$C_x^{x+k}$個集合的交集，共被$R_n(x)$計算了$C_x^{x+k}$遍。

這裡以$A_4(2)$示範：

當雙方出 4 匹馬進行 4 場比賽時，有些策略的勝利數為 0、1、2、3 或 4，我們要計算勝利數為 2 以上的策略總數—$A_4(2)$。

由於某個恰$x+k$勝的策略會被$R_n(x)$計算C_x^{x+k}遍，而在計算$A_4(2)$時，有可能為恰兩勝策略、恰三勝或四勝：

對於每個恰兩勝的策略，一共會被計算

$D(2,2)\cdot C_2^2+D(2,3)\cdot C_3^2+D(2,4)\cdot C_4^2=D(2,2)$遍，又恰兩勝策略

我們需恰算一遍，故$D(2,2)=1$。

對於每個恰三勝的策略，都會被計算

$D(2,2)\cdot C_2^3+D(2,3)\cdot C_3^3+D(2,4)\cdot C_4^3=D(2,2)\cdot 3+D(2,3)$遍，故

$D(2,3)=1-3=-2$

對於每個恰四勝的策略都會被計算

$D(2,2)\cdot C_2^4+D(2,3)\cdot C_3^4+D(2,4)\cdot C_4^4=D(2,2)\cdot 6+D(2,3)\cdot 4+D(2,4)$

遍，故$D(2,4)=1-(6\cdot 1+(-2)\cdot 4)=3$，於是得到

$$A_4(2)=R_4(2)-2\cdot R_4(3)+3\cdot R_4(4)$$

以下是$D(x,i)$的表格：

$x \backslash i$	1	2	3	4	5
1	1	-1	1	-1	1
2	0	1	-2	3	-4
3	0	0	1	-3	6
4	0	0	0	1	-4
5	0	0	0	0	1

我們猜測

$$A_n(x)=\sum_{i=x}^{n} R_n(i)\cdot C_{x-1}^{i-1}\cdot(-1)^{i-x}$$

證明：

$$A_n(x)=\sum_{i=x}^{n} R_n(i)\cdot C_{x-1}^{i-1}\cdot(-1)^{i-x}$$

對於每一個恰$x+k$勝的策略，會被$R_n(i)$計算到C_i^{x+k}次，所以這策略一共被計算了

$$\sum_{i=x}^{n} C_i^{x+k}\cdot C_{x-1}^{i-1}\cdot(-1)^{i-x}=\sum_{i=x}^{x+k} C_i^{x+k}\cdot C_{x-1}^{i-1}\cdot(-1)^{i-x}$$

只要證明其值為 1，就代表$\sum_{i=x}^{n} R_n(i)\cdot C_{x-1}^{i-1}\cdot(-1)^{i-x}$能將 x、x+1、⋯

、n 勝的策略數都恰好算了一遍，等同於所有勝利數不小於 x 的策略數，即為$A_n(x)$。

1. 當$k=0$時，

$$\sum_{i=x}^{x} C_i^x \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{i-x} = 1$$

2. 假設當$k=q$時成立，則當$k=q+1$時

$$\sum_{i=x}^{x+q+1} C_i^{x+q+1} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{i-x}$$

$$= \sum_{i=x}^{x+q+1} (C_i^{x+q} + C_{i-1}^{x+q}) \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{i-x}$$

$$= \sum_{i=x}^{x+q+1} C_i^{x+q} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{i-x} + \sum_{i=x}^{x+q+1} C_{i-1}^{x+q} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{i-x}$$

$$= \sum_{i=x}^{x+q} C_i^{x+q} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{i-x} + \sum_{i=x}^{x+q+1} C_{i-1}^{x+q} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{i-x}$$

$$= 1 + \sum_{i=x}^{x+q+1} C_{i-1}^{x+q} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{i-x}$$

$$= 1 + \sum_{i=x}^{x+q+1} \frac{(x+q)!}{(x+q-i+1)!\,(x-1)!\,(i-x)!} \cdot (-1)^{i-x}$$

$$= 1 + \frac{(x+q)!}{(x-1)!\,(q+1)!} \sum_{i=x}^{x+q+1} C_{i-x}^{q+1} \cdot (-1)^{i-x}$$

$$= 1 + \frac{(x+q)!}{(x-1)!\,(q+1)!} \sum_{i=0}^{q+1} C_i^{q+1} \cdot (-1)^{i} = 1$$

以數學歸納法得證

（二）、 超算策略數$R_n(x)$的表達式

$$A_n(x)=\sum_{i=x}^{n}R_n(i)\cdot C_{x-1}^{i-1}(-1)^{i-x}$$

若要解出$A_n(x)$的一般式，只要解出$R_n(x)$的一般式即可。

由於$R_n(x)=\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_x\le n}\left|A(T_{p_1}T_{p_2}\cdots T_{p_x})\right|$，所以先解$\left|A(T_{p_1}T_{p_2}\cdots T_{p_x})\right|$：

假如說是從T_{p_1}開始選擇對手、T_{p_2}、T_{p_3}、‧‧‧‧、T_{p_x}，接著再讓另外的$n-x$匹馬選擇對手。那麼T_{p_k}在選擇對手時，

T_{p_k}原本能從Q_1、Q_2、‧‧‧‧、Q_{p_k-1}等p_k-1匹馬中擇一做為對手，但T_{p_1}、T_{p_2}、‧‧‧‧、$T_{p_{k-1}}$所選的對手不能選，故T_{p_k}只能從$p_k-1-(k-1)=p_k-k$匹馬中擇一做為對手。

不含括在T_{p_1}、T_{p_2}、‧‧‧‧、T_{p_x}中的$n-x$匹馬是贏是輸都無所謂，所以能隨意排列，共有$(n-x)!$種排列方法。

根據乘法原理$\left|A\left(T_{p_1}T_{p_2}\cdots T_{p_x}\right)\right|=(n-x)!\prod_{i=1}^{x}(p_i-i)$。

有了$\left|A(T_{p_1}T_{p_2}\cdots T_{p_x})\right|$的值之後，我們將其代入$R_n(x)$的定義中：

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_x\le n}\left|A\left(T_{p_1}T_{p_2}\cdots T_{p_x}\right)\right|\\&=\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_x\le n}(n-x)!\prod\nolimits_{i=1}^{x}(p_i-i)\end{aligned}$$

依照p_x之值是否為 n 得到遞迴式：

$$\frac{R_n(x)}{(n-x)!}=\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_x\le n}\prod\nolimits_{i=1}^{x}(p_i-i)$$

$$=(n-x)\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_{x-1}\le n-1}\prod\nolimits_{i=1}^{x-1}(p_i-i)+\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_x\le n-1}\prod\nolimits_{i=1}^{x}(p_i-i)$$

$$=(n-x)\cdot\frac{R_{n-1}(x-1)}{(n-x)!}+\frac{R_{n-1}(x)}{(n-x-1)!}$$

關於$\dfrac{R_n(x)}{(n-x)!}$的表格：

*n-x**x*	0	1	2	3	4
1	1	1	1	1	1
2	1	3	7	15	31
3	1	6	25	90	301
4	1	10	65	350	1701

可以發現$\dfrac{R_n(n-1)}{1!}=\dfrac{R_n(0)}{n!}=1$，這裡稍微說明一下：

$$\frac{R_n(n-1)}{1!}=\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_{n-1}\le n}\prod_{i=1}^{n-1}(p_i-i)$$

當$p_1=1$時，

$$\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_{n-1}\le n}\prod_{i=1}^{n-1}(p_i-i)=\sum_{2\le p_2<\cdots<p_{n-1}\le n}0\cdot\prod_{i=2}^{n-1}(p_i-i)=0$$

所以$\dfrac{R_n(n-1)}{1!}$可以寫成

$$\frac{R_n(n-1)}{1!}=\sum_{2\le p_1<p_2<\cdots<p_{n-1}\le n}\prod_{i=1}^{n-1}(p_i-i)$$

由於 2 到 n 之間只有$n-1$個正整數，所以$p_k=k+1$。

$$\frac{R_n(n-1)}{1!}=\sum_{2\le p_1<p_2<\cdots<p_{n-1}\le n}\prod_{i=1}^{n-1}(i+1-i)=1$$

至於$\dfrac{R_n(0)}{n!}$，我們定義其值為 1

所以我們已經有足夠的起始條件及遞迴關係了，

$$\begin{cases}\dfrac{R_n(0)}{n!}=1\\ \dfrac{R_n(n-1)}{1!}=1\\ \dfrac{R_n(x)}{(n-x)!}=(n-x)\cdot\dfrac{R_{n-1}(x-1)}{(n-x)!}+\dfrac{R_{n-1}(x)}{(n-x-1)!}\end{cases}$$

我們造一個運算用的遞迴陣列 **B**：

$$\begin{cases} \mathbf{B}(1,\beta)=1 \\ \mathbf{B}(\alpha,0)=1 \\ \mathbf{B}(\alpha,\beta)=\alpha\cdot\mathbf{B}(\alpha,\beta-1)+\mathbf{B}(\alpha-1,\beta) \end{cases}$$

其中，$\mathbf{B}(\alpha,\beta)=\dfrac{R_{\alpha+\beta}(\beta)}{\alpha!}$

我們依次遞推$\alpha=1$、2、3、4 時的一般式：

$\mathbf{B}(1,\beta)=1$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(2,\beta)&=2\cdot\mathbf{B}(2,\beta-1)+\mathbf{B}(1,\beta)=2\cdot\mathbf{B}(2,\beta-1)+1\\&=2^{\beta}\cdot\mathbf{B}(2,0)+2^{\beta-1}+2^{\beta-2}+\cdots+2+1\\&=\frac{2^{\beta+1}-1}{2-1}=2^{\beta+1}-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(3,\beta)&=3\cdot\mathbf{B}(3,\beta-1)+\cdot\,\mathbf{B}(2,\beta)=3\cdot\mathbf{B}(3,\beta-1)+2^{\beta+1}-1\\&=\left(2^{\beta+1}-1\right)+3\cdot(2^{\beta}-1)+\cdots+3^{\beta-1}\cdot(2-1)+3^{\beta}\cdot\mathbf{B}(3,0)\\&=\frac{2^{\beta+1}\cdot(\left(\frac{3}{2}\right)^{\beta+1}-1)}{\frac{3}{2}-1}-\frac{3^{\beta+1}-1}{3-1}\\&=\frac{3^{\beta+2}-2\cdot2^{\beta+2}+1}{2}\end{aligned}$$

同理，$\mathbf{B}(4,\beta)=\dfrac{4^{\beta+3}-3\cdot3^{\beta+3}+3\cdot2^{\beta+3}-1}{6}$

最後，我們猜測

$$\mathbf{B}(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{\alpha}i^{\alpha+\beta-1}\cdot C_{i-1}^{\alpha-1}\cdot(-1)^{\alpha-i}/(\alpha-1)!$$

因為兩人賽局是多人賽局的一個特例，在多人賽局中有更一般的結果，所以上式到時將一併證明。

$$\frac{R_n(x)}{(n-x)!}=\mathbf{B}(n-x,x)\text{；}$$

$$R_n(x)=\mathbf{B}(n-x,x)(n-x)!=(n-x)\cdot\sum_{i=1}^{n-x}i^{n-1}\cdot C_{i-1}^{n-x-1}\cdot(-1)^{n-x-i}$$

(三)、 $A_n(x)$之一般式及化簡

引理證明：$\sum_{i=x}^{n} C_j^{n-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} = C_{j+x}^{n}$

1. 當 $n = x + j$ 時，$\sum_{i=x}^{x+j} C_j^{x+j-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} = \sum_{i=x}^{x} C_j^{x+j-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} = C_{j+x}^{x+j}$

2. 假設當$n = k$時，$\sum_{i=x}^{k-j} C_j^{k-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} = C_{j+x}^{k}$成立，

   則當$n = k + 1$時，

$$\sum_{i=x}^{n} C_j^{k+1-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} = \sum_{i=x}^{k+1} C_j^{k+1-i} \cdot C_{x-1}^{i-1}$$

$$= \sum_{i=x}^{k+1} \left(C_j^{k-i} + C_{j-1}^{k-i}\right) \cdot C_{x-1}^{i-1}$$

$$= \sum_{i=x}^{k+1} C_j^{k-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} + \sum_{i=x}^{k+1} C_{j-1}^{k-i} \cdot C_{x-1}^{i-1}$$

$$= \sum_{i=x}^{k} C_j^{k-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} + \sum_{i=x}^{k} C_{j-1}^{k-i} \cdot C_{x-1}^{i-1}$$

$$= C_{j+x}^{k} + C_{j+x-1}^{k} = C_{j+x}^{k+1}$$

以數學歸納法得證

證明：$A_n(x) = \sum_{j=1}^{n} j^n \cdot C_{j+x}^{n} \cdot (-1)^{n-j-x}$

$$A_n(x) = \sum_{i=x}^{n} R_n(i) \cdot C_{x-1}^{i-1} (-1)^{i-x}$$

$$= \sum_{i=x}^{n} R_n(i) \cdot C_{x-1}^{i-1} (-1)^{i-x}$$

$$= \sum_{i=x}^{n} (n-i) \sum_{j=1}^{n-i} j^{n-1} \cdot C_{j-1}^{n-i-1} \cdot (-1)^{n-i-j} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{i-x}$$

$$= \sum_{i=x}^{n} (n-i) \sum_{j=1}^{n-i} j^{n-1} \cdot C_{j-1}^{n-i-1} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{n-j-x}$$

$$= \sum_{i=x}^{n} \sum_{j=1}^{n-i} j^{n} \cdot C_j^{n-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{n-j-x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=x}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^n \cdot C_j^{n-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{n-j-x} \\
&\qquad - \sum_{i=x}^{n}\sum_{j=n-i+1}^{n} j^n \cdot \boldsymbol{C_j^{n-i}} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{n-j-x} \\
&= \sum_{i=x}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^n \cdot C_j^{n-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{n-j-x} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=x}^{n} j^n \cdot C_j^{n-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{n-j-x} \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^n \cdot (-1)^{n-j-x} \sum_{i=x}^{n} C_j^{n-i} \cdot C_{x-1}^{i-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^n \cdot C_{j+x}^{n} \cdot (-1)^{n-j-x} \ldots\ldots\ldots\ldots. \text{引理}
\end{aligned}
$$

所以我們得到田忌 n 戰 x 勝以上的策略數之一般式：

$$
\begin{aligned}
A_n(x) &= \sum_{j=1}^{n} j^n \cdot C_{j+x}^{n} \cdot (-1)^{n-j-x} \\
&= \sum_{j=1}^{n-x} j^n \cdot C_{j+x}^{n} \cdot (-1)^{n-j-x}
\end{aligned}
$$

恰 x 勝的策略數為 x 勝以上的策略數減去 $x+1$ 勝以上的策略數

$$
\begin{aligned}
A(n,x) &= A_n(x) - A_n(x+1) \\
&= \sum_{j=1}^{n-x} j^n \cdot C_{j+x+1}^{n+1} \cdot (-1)^{n-j-x}
\end{aligned}
$$

二、 whc.194 問題之範圍延伸

(一)、 多人賽局

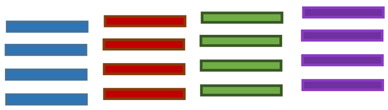
今有 s 個人一同競賽，每人各有 n 匹馬，且馬速逐一遞增。共比 n 場，每場比賽中每人各出一匹馬，只有最快的馬得勝。試問最不利的那一人 n 戰 x 以上的策略數為何。

由於有 s 個人，所以我們以$\{T_j^k\}$代表第 k 個人的馬匹所成之集合，並且此 s 人之馬速排列符合：

給定 sn 個實數$T_j^i, 1 \le i \le s, 1 \le j \le n$符合：

$$\begin{cases} T_j^{i+1} > T_j^i \\ T_{j+1}^1 > T_j^s \end{cases}$$

(圖一)



圖一中$s = 4, n = 4$

我們先假設第一人的出馬順序不變，則另外$s-1$人都分別有$n!$種不同的出馬順序，我們稱每一種不同的情況為一種策略，所以共有$(n!)^{s-1}$種策略。多人對局中策略的明確定義如下：

由 1、2、‧‧‧、n 得到的 s-1 組排列分別為(S_k^2)、(S_k^3)、⋯、(S_k^s)分別代表第二個人到第 s 個人的出馬順序(我們假設第一個人的出馬順序不變)，而我們稱陣列$[S_j^i]$為這整群人的一種策略，而稱集合$\left\{i \,\middle|\, T_i^1 > T_{S_i^2}^2, T_{S_i^3}^3, \cdots, T_{S_i^s}^s\right\}$的元素個數，我們稱為此策略下的第一人(最不利者)的勝利數，而目標找出勝利數為 x 的策略個數。這裡 n 戰 x 勝的策略數我們一樣命名為$A(n,x)$，超算策略數為$R_n(x)$。

$R_n(x) = \sum_{1 \le p_1 < p_2 < \cdots < p_x \le n} A(T_{p_1}^1 T_{p_2}^1 \cdots T_{p_x}^1)$，故先計算在多人賽局中 $A(T_{p_1}^1 T_{p_2}^1 \cdots T_{p_x}^1)$的值。

$T_{S_{p_1}^k}^k < T_{p_1}^1 (k > 1)$，所以$S_{p_1}^k$的值可能為 1、2、‧‧‧、$p_1 - 1$，對於任意正整數 k，$S_{p_1}^k$皆有$p_1 - 1$種可能，故$T_{p_1}^1$的對手總共有$(p_1 - 1)^{s-1}$總不同的情況。

$T_{S_{p_2}^k}^k < T_{p_2}^1 (k > 1)$，所以$S_{p_2}^k$的值可能為 1、2、‧‧‧、$p_2 - 1$，又$S_{p_2}^k \neq S_{p_1}^k$，故$S_{p_2}^k$有$p_2 - 2$種可能，對手則有$(p_2 - 2)^{s-1}$種情況。

以此類推，$T_{p_k}^1$的對手一共會有$(p_k - k)^{s-1}$種不同的情況，再乘上剩餘的$n - x$匹馬隨意排列，

$$\left|A(T_{p_1}^1, T_{p_2}^1, \cdots, T_{p_x}^1)\right| = (n - x)!^{s-1} \prod_{i=1}^{x} (p_i - i)^{s-1}$$

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{1 \le p_1 < p_2 < \cdots < p_x \le n} \left|A\left(T_{p_1}^1, T_{p_2}^1, \cdots, T_{p_x}^1\right)\right| \\ &= \sum_{1 \le p_1 < p_2 < \cdots < p_x \le n} (n - x)!^{s-1} \prod_{i=1}^{x} (p_i - i)^{s-1} \end{aligned}$$

依照p_x是否為 n 得到遞迴式：

$$\frac{R_n(x)}{(n - x)!^{s-1}} = \sum_{1 \le p_1 < p_2 < \cdots < p_x \le n} \prod_{i=1}^{x} (p_i - i)^{s-1}$$

$$= (n - x)^{s-1} \sum_{1 \le p_1 < p_2 < \cdots < p_{x-1} \le n-1} \prod_{i=1}^{x-1} (p_i - i)^{s-1} + \sum_{1 \le p_1 < p_2 < \cdots < p_x \le n-1} \prod_{i=1}^{x} (p_i - i)^{s-1}$$

$$= (n - x)^{s-1} \frac{R_{n-1}(x - 1)}{(n - x)!^{s-1}} + \frac{R_{n-1}(x)}{(n - x - 1)!^{s-1}}$$

在解$R_n(x)$一般式前，先解一個遞迴式。

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\alpha,\beta)=0, if\ \alpha=0 \\ \mathbf{B}(\alpha,0)=1, \alpha\neq 0 \\ \mathbf{B}(\alpha,\beta)=a_\alpha\mathbf{B}(\alpha,\beta-1)+\mathbf{B}(\alpha-1,\beta) \end{cases} \quad (a_i\neq a_j)$$

我們猜測

$$\mathbf{B}(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{{a_i}^{\alpha+\beta-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{\alpha}(a_i-a_j)}$$

證明：

1. $\mathbf{B}(0,\beta)=\sum_{i=1}^{0}\frac{{a_i}^{\alpha+\beta-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{0}(a_i-a_j)}=0$

2. 證明：$\mathbf{B}(\alpha,0)=\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{{a_i}^{\alpha-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{\alpha}(a_i-a_j)}=1$

(1) 當$\alpha=2$時，

$\sum_{i=1}^{2}\frac{{a_i}^{2-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{2}(a_i-a_j)}=\frac{a_1}{a_1-a_2}+\frac{a_2}{a_2-a_1}=1$成立

(2) 假設當$\alpha=k\geq 2$時

$\mathbf{B}(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{{a_i}^{\alpha+\beta-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{\alpha}(a_i-a_j)}$成立

則當$\alpha=k+1$時，

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{{a_i}^{k-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{k}(a_i-a_j)}=1\ldots(a)$$

$$\frac{a_i}{a_i-a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_{k+1}-a_i}=1\ldots(\mathrm{b})$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{{a_i}^{k-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{k}(a_i-a_j)}\cdot\left(\frac{a_i}{a_i-a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_{k+1}-a_i}\right)=1$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{{a_i}^{k-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{k}(a_i-a_j)}\cdot\frac{a_i}{a_i-a_{k+1}}+\sum_{i=1}^{k}\frac{{a_i}^{k-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{k}(a_i-a_j)}\cdot\frac{a_{k+1}}{a_{k+1}-a_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{{a_i}^{k}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{k+1}(a_i-a_j)}+\frac{a_{k+1}}{\prod_{l=1}^{k}(a_{k+1}-a_l)}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{{a_i}^{k-1}\cdot\prod_{l=1}^{k}(a_{k+1}-a_l)}{(a_{k+1}-a_i)\prod_{j=1\ j\neq i}^{k}\left(a_i-a_j\right)}\ldots(*)$$

其中，

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{{a_i}^{k-1}\cdot\prod_{l=1}^{k}(a_{k+1}-a_l)}{(a_{k+1}-a_i)\prod_{j=1\ j\neq i}^{k}(a_i-a_j)}={a_{k+1}}^{k-1}$$

證明如下：

令$f(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\prod_{l=1\ l\neq i}^{k}(x-a_l)}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{k}(a_i-a_j)}{a_i}^{k-1}$，則$f(x)$為 k-1 次多項式

而$f(a_i)={a_i}^{k-1}\ \forall i=1,2,\dots,k$；知$f(x)=x^{k-1}$

$$故f(a_{k+1})=\sum_{i=1}^{k}\frac{{a_i}^{k-1}\cdot\prod_{l=1}^{k}(a_{k+1}-a_l)}{(a_{k+1}-a_i)\prod_{j=1\ j\neq i}^{k}(a_i-a_j)}={a_{k+1}}^{k-1}$$

因此，

$$(*)=\sum_{i=1}^{k}\frac{{a_i}^{k}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{k+1}(a_i-a_j)}+\frac{{a_{k+1}}^{k}}{\prod_{l=1}^{k}(a_{k+1}-a_l)}$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{{a_i}^{k}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{k+1}(a_i-a_j)}=1$$

由數學歸納法得證

將$\frac{R_n(x)}{(\mathrm{n-x})!^{s-1}}$的遞迴式及起始條件列出來，發現這遞迴式含括在剛剛解出來的遞迴式中，$a_i=i^{s-1}$。

$$\begin{cases}\dfrac{R_n(n-1)}{1!^{s-1}}=1\\ \dfrac{R_n(0)}{n!^{s-1}}=1\\ \dfrac{R_n(x)}{(n-x)!^{s-1}}=(n-x)^{s-1}\dfrac{R_{n-1}(x-1)}{(n-x)!^{s-1}}+\dfrac{R_{n-1}(x)}{(n-x-1)!^{s-1}}\end{cases}$$

$$\frac{R_n(x)}{(n-x)!^{s-1}}=\sum_{i=1}^{n-x}\frac{i^{(n-1)(s-1)}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{n-x}(i^{s-1}-j^{s-1})}$$

故多人賽局中 n 戰 x 勝以上的策略數：

$$A_n(x)=\sum_{i=x}^{n}R_n(i)\cdot C_{x-1}^{i-1}(-1)^{i-x}=\sum_{i=x}^{n}\sum_{j=1}^{n-i}\frac{j^{(n-1)(s-1)}}{\prod_{k=1\ k\neq j}^{n-i}(j^{s-1}-k^{s-1})}\cdot C_{x-1}^{i-1}(-1)^{i-x}$$

第 11 頁曾提及$\mathbf{B}(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{\alpha} i^{\alpha+\beta-1}\cdot C_{i-1}^{\alpha-1}\cdot\frac{(-1)^{\alpha-i}}{(\alpha-1)!}$

其中，$\begin{cases} \mathbf{B}(1,\beta)=1 \\ \mathbf{B}(\alpha,0)=1 \\ \mathbf{B}(\alpha,\beta)=\alpha\cdot\mathbf{B}(\alpha,\beta-1)+\mathbf{B}(\alpha-1,\beta) \end{cases}$

套用公式我們知道

$$\mathbf{B}(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{{a_i}^{\alpha+\beta-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{\alpha}(a_i-a_j)}$$

而第 11 頁遞迴式中的$a_\alpha=\alpha$，所以

$$\mathbf{B}(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{i^{\alpha+\beta-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{\alpha}(i-j)}$$

$$=\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{i^{\alpha+\beta-1}\cdot(-1)^{\alpha-i}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{\alpha}|i-j|}$$

$$=\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{i^{\alpha+\beta-1}\cdot(-1)^{\alpha-i}}{(i-1)!\,(\alpha-i)!}$$

$$=\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{i^{\alpha+\beta-1}\cdot(-1)^{\alpha-i}}{(i-1)!\,(\alpha-i)!}$$

$$=\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{i^{\alpha+\beta-1}\cdot C_{i-1}^{\alpha-1}\cdot(-1)^{\alpha-i}}{(\alpha-1)!}$$

得證

有了前面兩個經驗，我們對這類賽局做個小整理。

定義：t_j^i為集合$\{p|T_j^1 > T_p^i\}$的元素個數，表示第一個人的第 j 慢馬在第 i 人的馬匹陣營$\{T_k^i\}$中的能力值。

s 人 n 匹馬，且對於任意正整數 k 皆符合$T_{n-1}^1 < T_n^k$的話，便能列出遞迴式。在此之前，先計算$\left|A(T_{p_1}^1 T_{p_2}^1 \cdots T_{p_x}^1)\right|$的值：

$T_{p_j}^1$若要獲勝，則

$T_{S_{p_k}^2}^i < T_{p_j}^1$，$S_{p_j}^i = 1,2,\dots,t_{p_j}^i$，但其對手不得與$T_{p_1}^1, T_{p_2}^1, \dots, T_{p_{j-1}}^1$的對手相同，故$S_{p_j}^i$有$t_{p_j}^i - (j-1)$種選擇。

另外$n-x$匹馬的對手能隨意排列，再乘上$(n-x)!^{s-1}$，所以

$$\left|A(T_{p_1}^1 T_{p_2}^1 \cdots T_{p_x}^1)\right| = (n-x)!^{s-1} \prod_{i=2}^{s} \prod_{j=1}^{x} (t_{p_j}^i - j + 1)$$

限制$T_{n-1}^1 < T_n^k$是為了避免t_j^i有時會隨著 n 值變化；但只要符合這個條件，t_j^i便為常數。在t_j^i為常數的情況下，我們便能依照p_x是否為 n 得到$R_n(x)$的遞迴式：

$$\frac{R_n(x)}{(n-x)!^{s-1}} = \sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_x\le n} \prod_{i=2}^{s} \prod_{j=1}^{x} (t_{p_j}^i - j + 1)$$

$$= \prod_{i=2}^{s} (t_n^i - x + 1) \sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_{x-1}\le n-1} \prod_{i=2}^{s} \prod_{j=1}^{x-1} (t_{p_j}^i - j + 1) + \sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_x\le n-1} \prod_{i=2}^{s} \prod_{j=1}^{x} (t_{p_j}^i - j + 1)$$

$$= \prod_{i=2}^{s} (t_n^i - x + 1) \cdot \frac{R_{n-1}(x-1)}{(n-x)!^{s-1}} + \frac{R_{n-1}(x)}{(n-x-1)!^{s-1}}$$

若$t_n^i - x + 1$只由$n-x$決定的話，則可由之前得到的遞迴式化簡。

(二)、 雙人差 k 個等級

如果兩人間的馬速排列符合$Q_{q+1} > T_{k+q} > Q_q$，那麼我們說他們之間差k等級。兩人對戰且雙方差 k 等級時，$\frac{R_n(x)}{(n-x)!}$間具遞迴關係：

若$p_x = n$，則$t_{p_x} - x + 1 = n - x - k + 1$，所以

$$\frac{R_n(x)}{(n-x)!} = (n-x-k+1) \cdot \frac{R_{n-1}(x-1)}{(n-x)!} + \frac{R_{n-1}(x)}{(n-x-1)!}$$

$$\begin{cases} \dfrac{R_n(x)}{(n-x)!} = a_{n-x} \dfrac{R_{n-1}(x-1)}{(n-x)!} + \dfrac{R_{n-1}(x)}{(n-x-1)!} & if\ n-x \geq k, a_{n-x} = n-x-k+1 \\ \dfrac{R_n(0)}{(n-x)!} = 1 & if\ n-x < k, a_{n-x} = 0 \\ \dfrac{R_n(x)}{(n-x)!} = 0\ if\ n-x = 0 & \end{cases}$$

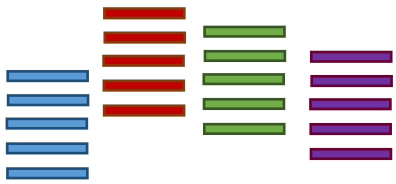
$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{(n-x)!} &= \sum_{i=1}^{n-x} \frac{{a_i}^{n-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{n-x}(a_i - a_j)} \\ &= \sum_{i=k}^{n-x} \frac{(i-k+1)^{n-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{n-x}[(i-k+1) - a_j]} \\ &= \sum_{i=k}^{n-x} \frac{(i-k+1)^{n-1}}{(i-k+1)^{k-1}\prod_{j=k\ j\neq i}^{n-x}[(i-k+1)-(j-k+1)]} \\ &= \sum_{i=k}^{n-x} \frac{(i-k+1)^{n-k}}{\prod_{j=k\ j\neq i}^{n-x}[(i-k+1)-(j-k+1)]} \\ &= \sum_{i=1}^{n-x-k+1} \frac{i^{n-k}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{n-x-k+1}(i-j)} \\ &= \sum_{i=1}^{n-x-k+1} \frac{i^{n-k} \cdot (-1)^{n-x-k+1-i}}{(n-x-k+1-i)!\,(i-1)!} \\ &= \sum_{i=1}^{n-x-k+1} \frac{i^{n-k} \cdot C_{i-1}^{n-x-k} \cdot (-1)^{n-x-k+1-i}}{(n-x-k)!} \end{aligned}$$

繼續化簡後可以得到差 k 等級時 n 戰 x 勝以上的策略數一般式

$$A_n(x) = \sum_{i=1}^{n-x-k+1} i^{n-k+1} \cdot C_{j+x+k-1}^{n} \cdot \frac{(j+k-1)!}{j!}$$

（三）、 多人差 k 個等級

$\{T_q^1\}$代表第一個人的 n 匹馬、$\{T_q^2\}$代表第二個人的 n 匹馬、…。如果第一個人分別差第二人、第三人、…、第 s 人，k_2、k_3、…k_s個等級。一場比賽中每人各出一匹馬，最快者得勝，那麼我們要計算第一個人獲勝策略數之一般式。

(圖二) 

如圖二的馬速排列中：

$$s = 4$$
$$k_2 = 3$$
$$k_3 = 2$$
$$k_4 = 1$$

令t_q^p為集合$\{i | t_q^1 > t_i^p\}$的元素個數，那麼

$$\frac{R_n(x)}{(n-x)!^{s-1}} = \sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_x\le n} \prod_{i=2}^{s} \prod_{j=1}^{x} (t_{p_j}^i - j + 1)$$

$$= \prod_{i=2}^{s} (t_n^i - x + 1) \sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_{x-1}\le n-1} \prod_{i=2}^{s} \prod_{j=1}^{x-1} (t_{p_j}^i - j + 1)$$

$$+ \sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_x\le n-1} \prod_{i=2}^{s} \prod_{j=1}^{x} (t_{p_j}^i - j + 1)$$

$$= \prod_{i=2}^{s} (t_n^i - x + 1) \cdot \frac{R_{n-1}(x-1)}{(n-x)!^{s-1}} + \frac{R_{n-1}(x)}{(n-x-1)!^{s-1}}$$

第一人與第 i 人間差k_i等級時，$t_n^i = n - k_i$，所以

$$\frac{R_n(x)}{(n-x)!^{s-1}} = \prod_{i=2}^{s} (n - k_i - x + 1) \cdot \frac{R_{n-1}(x-1)}{(n-x)!^{s-1}} + \frac{R_{n-1}(x)}{(n-x-1)!^{s-1}}$$

這樣便可利用之前解得的遞迴式導出一般式。

三、 限制對手問題

在解問題 whc.194 的過程中，我們發現一個有趣的性質：

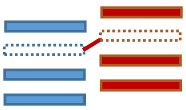
令$A(n,x)\Big|_{T_p,Q_q}^{p-q(mod\ n)}$代表在$T_p$以$Q_q$為對手的前提下，田忌 n 戰 x 勝的策略數。設$W \equiv p-q(mod\ n)n \geq W \geq 1$，我們發現當$W$值相同時，不論 p 的大小，n 戰 x 勝的策略數都完全相同。

為了證明這特別的性質，我們利用兩種不同的算法計算相同條件下的策略數，移項後得到遞迴式，進而利用數學歸納法證明此性質並解得一般式。

我們將情況分為五種，一一討論：

$p=q$、$p=q+1$、$p>q+1$、$p<q$且$q \neq n$、$p<q$且$q=n$

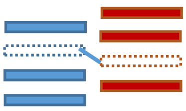
（一）、 $p=q$



（圖三）

如圖三，除了馬少一匹外馬速排列與原本相等，故$A(n,x)\Big|_{T_p,Q_q}^{n(mod\ n)}=A(n-1,x)$。

（二）、 $p=q+1$且$q \neq n$



（圖四）

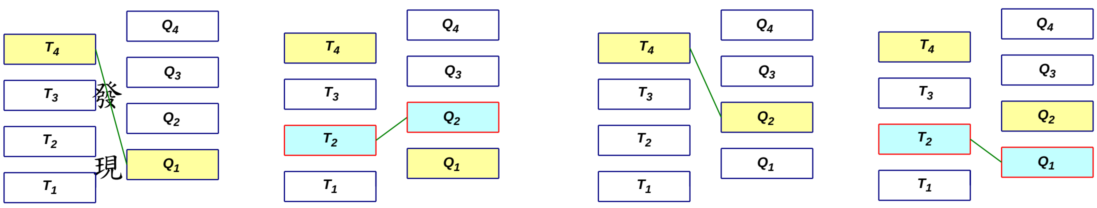
如圖四，此時的馬速排列亦與原本相等，但除了馬少一匹外，T_{q+1}以Q_q為對手會得勝，所以剩下的$n-1$匹馬只需贏$x-1$場，故

$A(n,x)\Big|_{T_p,Q_q}^{1(mod\ n)}=A(n-1,x)$。

（三）、 $p>q+1$

我們比較T_p以Q_q為對手的前提與T_p以Q_{q+1}為對手的前提，圖五：

（圖五）



這兩個前提的差異只有一個—左側前提下，T_{q+1}以Q_{q+1}為對手時會輸；右側前提下，T_{q+1}以Q_q為對手時會贏。所以T_p以Q_q為對手且T_{q+1}不以Q_{q+1}為對手的策略數，會與T_p以Q_{q+1}為對手且T_{q+1}不以Q_q為對手的策略數相等。

T_p以Q_q為對手且T_{q+1}不以Q_{q+1}為對手的策略數，即為T_p以Q_q為對手的策略數減去T_p以Q_q為對手且T_{q+1}以Q_{q+1}為對手的策略數；T_p以Q_{q+1}為對手且T_{q+1}不以Q_q為對手的策略數，即為T_p以Q_{q+1}為對手的策略數減去T_p以Q_{q+1}為對手且T_{q+1}以Q_q為對手的策略數。這裡先計算T_p以Q_q為對手且T_{q+1}以Q_{q+1}為對手的策略數：

> 當T_p以Q_q為對手且T_{q+1}以Q_{q+1}為對手時，我們先將T_{q+1}、Q_{q+1}移出我們的馬速排列中，即忽略藍色(圖五)的部分不看。那麼T_p是 T 方陣營剩下的$n-1$匹馬中第$p-1$慢的馬；Q_q依舊為 Q 方陣營剩下的$n-1$匹馬中第q慢的馬，所以此時的策略數為$A(n-1,x)\Big|_{T_{p-1},Q_q}^{p-q-1(mod\,n-1)}$。

接著計算T_p以Q_{q+1}為對手且T_{q+1}以Q_q為對手的策略數：

> 當T_p以Q_{q+1}為對手且T_{q+1}以Q_q為對手時，我們先將T_{q+1}、Q_q移出我們的馬速排列中，即忽略藍色的部分不看。那麼T_p是 T 方陣營剩下的$n-1$匹馬中第$p-1$慢的馬；Q_{q+1}為 Q 方陣營剩下的$n-1$匹馬中第q慢的馬。又當T_{q+1}以Q_q為對手時會得一勝，剩下的$n-1$匹馬須得恰$x-1$勝，所以此時的策略數為
> $A(n-1,x)\Big|_{T_{p-1},Q_q}^{p-q-1(mod\,n-1)}$。

由於以T_p以Q_q為對手且T_{q+1}不以Q_{q+1}為對手的策略數，會與T_p以Q_{q+1}為對手且T_{q+1}不以Q_q為對手的策略數相等，所以我們列出遞迴式：

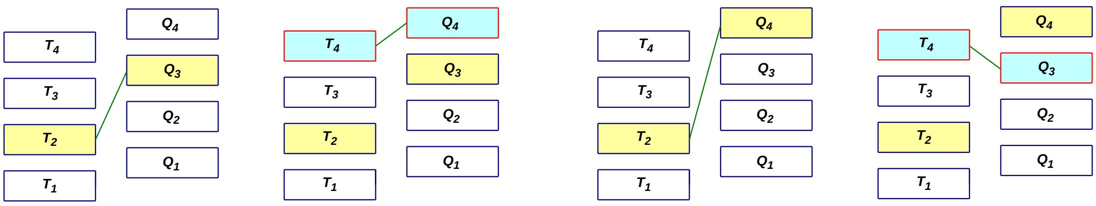
$$A(n,x)\Big|_{T_p,Q_q}^{p-q(mod\ n)} - A(n-1,x)\Big|_{T_{p-1},Q_q}^{p-q-1(mod\ n-1)}$$

$$= A(n,x)\Big|_{T_p,Q_{q+1}}^{p-q-1(mod\ n)} - A(n-1,x)\Big|_{T_{p-1},Q_q}^{p-q-1(mod\ n-1)}$$

（四）、$p < q$且$q \neq n$

一樣是比較T_p以Q_q為對手的前提與T_p以Q_{q+1}為對手的前提：

（圖六）



T_p以Q_q為對手且T_{q+1}不以Q_{q+1}為對手的策略數，會與T_p以Q_{q+1}為對手且T_{q+1}不以Q_q為對手的策略數相等。我們先計算T_p以Q_q為對手且T_{q+1}以Q_{q+1}為對手前提下的策略數為何：

T_p以Q_q為對手且T_{q+1}以Q_{q+1}為對手時，我們先忽略T_{q+1}、Q_{q+1}(圖六藍色部分)不看，則T_p為其陣營剩下的$n-1$匹馬中第p慢馬；Q_q為其陣營剩下的$n-1$匹馬中的第q慢馬，所以此時的策略數為$A(n-1,x)\Big|_{T_p,Q_q}^{p-q+(n-1)(mod\ n-1)}$

接著計算T_p以Q_{q+1}為對手且T_{q+1}以Q_q為對手的策略數：

T_p以Q_{q+1}為對手且T_{q+1}以Q_q為對手時，我們先忽略T_{q+1}、Q_q(藍色部分)不看，則T_p為其陣營剩下的$n-1$匹馬中第p慢馬；Q_{q+1}為其陣營剩下的$n-1$匹馬中的第q慢馬，又T_{q+1}以Q_q為對手會得一勝，所以此時的策略數為

$A(n-1,x)\Big|_{T_p,Q_q}^{p-q+(n-1)(mod\ n-1)}$

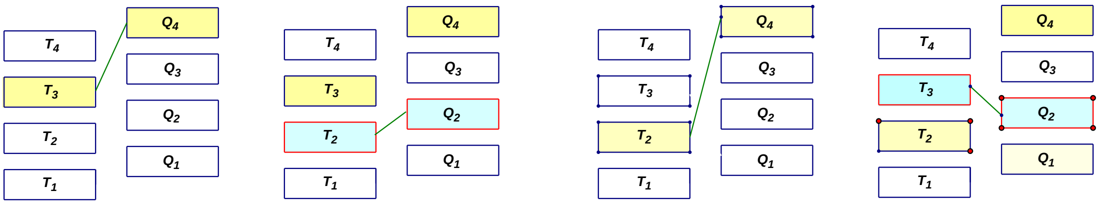
由於以T_p以Q_q為對手且T_{q+1}不以Q_{q+1}為對手的策略數，會與T_p以Q_{q+1}為對手且T_{q+1}不以Q_q為對手的策略數相等，所以列出遞迴式：

$$A(n,x)\Big|_{T_p,Q_q}^{p-q+n(mod\ n)} - A(n-1,x)\Big|_{T_p,Q_q}^{p-q+(n-1)(mod\ n-1)}$$

$$= A(n,x)\Big|_{T_p,Q_{q+1}}^{p-q-1+n(mod\ n)} - A(n-1,x)\Big|_{T_p,Q_q}^{p-q+(n-1)(mod\ n-1)}$$

（五）、 $p < q$且$q = n$

首先說明$p \neq 1$的情況：



此時我們比較T_p以Q_n為對手的前提與T_{p-1}以Q_n為對手的前提，發現差別只發生在左側前提下T_{p-1}與Q_{p-1}對戰會輸；右側前提下T_p與Q_{p-1}對戰會贏。所以T_p以Q_n為對手且T_{p-1}不以Q_{p-1}為對手的勝敗策略數會與T_{p-1}以Q_n為對手且T_p不以Q_{p-1}為對手的勝敗策略數相等。這裡一樣用扣的，所以先計算T_p以Q_n為對手且T_{p-1}以Q_{p-1}為對手的策略數：

由於T_{p-1}已以Q_{p-1}為對手了，所以先看另外的$n-1$匹馬。T_p成為剩下$n-1$匹馬中第$p-1$慢的馬；Q_q成為剩下$n-1$匹馬中第$q-1$慢的馬，所以此時的策略數會等同於$A(n-1,x)\Big|_{T_{p-1},Q_{q-1}}^{p-q+n-1(mod\ n-1)}$。

接著計算T_{p-1}以Q_n為對手且T_p以Q_{p-1}為對手的策略數：

由於T_p已以Q_{p-1}為對手了，所以先看另外的$n-1$匹馬。T_{p-1}為剩下$n-1$匹馬中第$p-1$慢的馬；Q_n成為剩下$n-1$匹馬中第$q-1$慢的馬。不過T_p以Q_{p-1}為對手時會得一勝，所以此時的策略數會等同於$A(n-1,x)\Big|_{T_{p-1},Q_{q-1}}^{p-q+n-1(mod\ n-1)}$。所以列出當$p < q$且$q = n, p \neq 1$的遞迴式：

$$A(n,x)\Bigg|_{T_p,Q_q}^{p-q+n(mod\,n)} - A(n-1,x)\Bigg|_{T_{p-1},Q_{q-1}}^{p-q+(n-1)(mod\,n-1)}$$
$$= A(n,x)\Bigg|_{T_{p-1},Q_q}^{p-q-1+n(mod\,n)} - A(n-1,x-1)\Bigg|_{T_{p-1},Q_{q-1}}^{p-q+(n-1)(mod\,n-1)}$$

接著說明$p=1$的情況：

現在比較兩組馬速排列分別為：

$$T_1 < Q_1 < T_2 < \cdots < T_n < Q_n$$

$$Q'_1 < T'_1 < Q'_2 < \cdots < Q'_n < T'_n$$

對於某個策略$S_1, S_2, \dots, S_n$，其勝利數分別為：

$$\left|i \middle| T_{S_i} > Q_i\right| = \left|i \middle| T_{S_i} > Q_i, i > 2\right|$$

$$\left|i \middle| T'_{S_i} > Q'_i\right| = \left|i \middle| T'_{S_i} > Q_i, i < n\right| + 1 = \left|i \middle| T_{S_i} > Q_i\right|$$

$$= \left|i \middle| T_{S_i} > Q_i, i > 2\right| + 1 = \left|i \middle| T_{S_i} > Q_i\right| + 1$$

所以第一列馬速排列下獲得x勝的策略數與第二列馬速排列下獲得$x-1$勝的策略數相等。

觀察T_1以Q_n為對手時剩下$n-1$匹馬的馬速排列，此時

$$Q_1 < T_2 < Q_2 \dots < Q_{n-1} < T_n$$

所以其策略數即為$A(n-1,x-1)$，加上情況(一)的結果，可以得知當$W \equiv 1(mod\,n)$時，

$$A(n,x)\Bigg|_{T_p,Q_q}^{1(mod\,n)} = A(n-1,x-1)$$

證明當$w_1 \equiv w_2 (mod\, n)$時，

$A(n,x)\Big|^{w_1(mod\, n)}_{T_{p_1},Q_{q_1}} = A(n,x)\Big|^{w_2(mod\, n)}_{T_{p_2},Q_{q_2}}$：

1. 當$w_1 \equiv w_2 \equiv 1(mod\, n)$時，

   $A(n,x)\Big|^{1(mod\, n)}_{T_{p_1},Q_{q_1}} = A(n,x)\Big|^{1(mod\, n)}_{T_{p_2},Q_{q_2}} = A(n-1,x-1)$

2. 假設當$w_1 \equiv w_2 \equiv k(mod\, n)$時，

   $A(n,x)\Big|^{k(mod\, n)}_{T_{p_1},Q_{q_1}} = A(n,x)\Big|^{k(mod\, n)}_{T_{p_2},Q_{q_2}}$恆成立，則當$w_1 \equiv w_2 \equiv k+1(mod\, n)$時，

   (a). $p_1 - q_1 \equiv k+1 \equiv n(mod\, n)$

   則$A(n,x)\Big|^{n(mod\, n)}_{T_{p_1},Q_{q_1}} = A(n,x)\Big|^{n(mod\, n)}_{T_{p_2},Q_{q_2}} = A(n-1,x)$

   根據情況(二)的結果。

   (b). $p_1 - q_1 \equiv k+1 \neq n(mod\, n)$

   由於不論 p,q 的值，$A(n,x)\Big|^{k(mod\, n)}_{T_p,Q_q}$之值都相等，所以我們令

$A(n,x)|k = A(n,x)\Big|^{k(mod\, n)}_{T_p,Q_q}$，那麼不論$p > q+1$、$p < q$都可列出一樣的遞迴式，於是

$$A(n,x)\Big|^{k+1(mod\, n)}_{T_p,Q_q} = A(n-1,x)|k + A(n,x)|k - A(n-1,x-1)|k$$

$$= A(n,x)\Big|^{k+1(mod\, n)}_{T_p,Q_q}$$

以數學歸納法得證

這樣便證明這特別的性質了。最後是它的一般式，只要從遞迴式著手並不難解，這裡僅列出結果

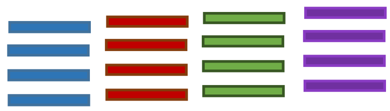
$$A(n,x)|k =$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i} A(n-i,x-j)\cdot C_j^i \cdot C_i^{k-1}\cdot(-1)^j$$

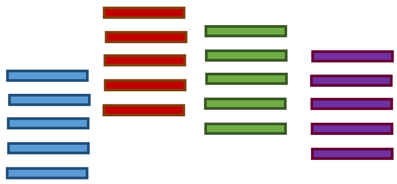
伍、 結論

我們解決了兩個很有意思的問題，分別為孫先生提的「田忌賽馬問題的推廣(2008)」以及「三角階層數 Triangle of central factorial numbers(2012)」，並且研究了些不同馬速排列下的勝敗策略數：

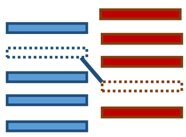
一、 雙人及多人賽局(馬速遞增)



二、 雙人及多人賽局(差 k 等級)



三、 雙人賽局(交錯排列且限制對手)



另外，還有計數方式

$$A_n(x) = \sum_{i=x}^{n} R_n(i) \cdot C_{x-1}^{i-1} \cdot (-1)^{i-x}$$

以及特定類型的遞迴陣列公式解

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\alpha,\beta) = 0, if\ \alpha = 0 \\ \mathbf{B}(\alpha,0) = 1, \alpha \neq 0 \\ \mathbf{B}(\alpha,\beta) = a_\alpha \mathbf{B}(\alpha,\beta-1) + \mathbf{B}(\alpha-1,\beta) \end{cases} \quad (a_i \neq a_j)$$

$$\mathbf{B}(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{{a_i}^{\alpha+\beta-1}}{\prod_{j=1\ j\neq i}^{\alpha}(a_i - a_j)}$$

可以幫助我們解決這類型的賽局問題，或是其他組合問題。

陸、 參考資料

1. 楊學枝(2011)。中國初等數學研究，第三期，第一頁。

2. 史濟懷(2001)。數學奧林匹亞輔導叢書組合恆等式，第二期，第六、七十頁。

3. 夏興國(1999)。數學歸納法縱橫談，75 頁~84 頁。

4. ALAYONT, F., MOGER-REISCHER, R. A. C. H. E. L., & SWIFT, R. ROOK NUMBER INTERPRETATIONS OF GENERALIZED CENTRAL FACTORIAL AND GENOCCHI NUMBERS.

5. Carlitz, L., Kurtz, D. C., Scoville, R., & Stackelberg, O. P. (1972). Asymptotic properties of Eulerian numbers. *Probability Theory and Related Fields*, *23*(1), 47-54.

6. Gould, H. W. (1978). Euler's formula nth Differences of Powers. *The American Mathematical Monthly*, *85*(6), 450-467.