第十二屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：*SA*12-583

作品名稱：垂心四邊形與外心四邊形

姓名：林宗穎

關鍵字：垂心、外心、尤拉線

壹、 研究動機

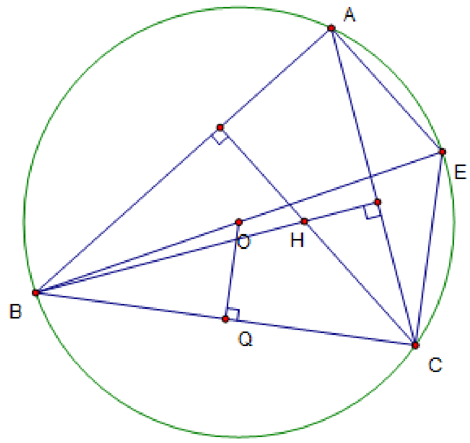
午後抱持快樂的心情寫數學時，看到了講義中有一題題目十分有趣：

> 平面上不共線但共圓四點A_1、A_2、A_3、A_4，今做三角形$\mathrm{A_2A_3A_4}$之垂心H_1，同理做出H_2、H_3、H_4，試證明H_1、H_2、H_3、H_4四點共圓

【引理】

若$\triangle ABC$之外心為O，

則$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$



【引理證明】

作$\overleftrightarrow{BO}$交$\triangle ABC$外接圓於E

$\overline{EC}\perp\overline{BC}$($\overline{BE}$是直徑)$\overline{AH}\perp\overline{BC}$(垂心)

所以$\overline{EC}//\overline{AH}$

又$\overline{AE}\perp\overline{AB}$($\overline{BE}$是直徑) $\overline{CH}\perp\overline{AB}$(垂心)

所以$\overline{AE}//\overline{CH}$

$\therefore AHCE$是平行四邊形

$\Longrightarrow \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{OM}$

$\Longrightarrow$ 展開$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=2\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\right]$

$\Longrightarrow \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

【證明】

$\therefore$ 由引理得知$\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}$

令$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\overrightarrow{OK}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA_1}\quad\Longrightarrow \overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{H_1K}$

$\therefore \left|\overrightarrow{OA_1}\right|=\left|\overrightarrow{KH_1}\right|=R$

同理$\left|\overrightarrow{OA_2}\right|=\left|\overrightarrow{KH_2}\right|=R,\left|\overrightarrow{OA_2}\right|=\left|\overrightarrow{KH_3}\right|=R,\left|\overrightarrow{OA_4}\right|=\left|\overrightarrow{KH_4}\right|=R$

$\because H_1$、H_2、H_3、H_4到K的距離都是R

$\therefore H_1$、H_2、H_3、H_4四點共圓，圓心為K，半徑為$\left|\overrightarrow{OA_1}\right|$，得證

由此激發出了我對”垂心四邊形”的熱情。從題目中我知道圓內接四邊形的垂心四邊形會四點共圓，既然圓內接四邊形有這樣的性質，那麼其他的四邊形會是如何呢?甚至作 n 階垂心四邊形又會是什麼狀況呢?這引領了我繼續探索這個未知的世界。

貳、 研究目的及研究問題

一、垂心、外心、尤拉線四邊形的定義與存在唯一性

二、垂心四邊形的基本性質(面積、雙曲線、凹凸性)

三、外心四邊形的基本性質(面積比、凹凸性、順逆序、位似變換)

四、尤拉線四邊形(定義、面積比、退化性)

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GSP(The Geometer's Sketchpad ver.4.06)、Microsoft Office Word

肆、研究過程或方法

一、定義

(一) 四邊形：

1. 定義平面上任意不共線四點所構成的集合稱為$S=\{A,B,C,D\}$
2. 記$S_{\overline{AC}\perp\overline{BD}}$或$S_{\perp}$為對角線互相垂直的四邊形

(二) 垂心四邊形：

1. 平面上任意不共線四點S，任三點作垂心，得到四個垂心，稱為垂心四邊形$H(S)$定義$H_0(S)$為原四邊形S、$H(H(S))$為二階垂心四邊形，記為$H^2(S)$。
2. 定義：S、$H^i(S)$ ，$i=1,2,3,\dots,n$，這些點落在唯一的等軸雙曲線，稱為Γ。特別規定相交兩直線為Γ的一種特例。

(三) 外心四邊形：平面上任意不共線四點S，任三點作外心，得到四個外心，稱為外心四邊形$O(S)$，定義$O_0(S)$為原四邊形S、$O(O(S))$為二階垂心四邊形，記為$O^2(S)$。

(四) 尤拉線四邊形：平面上任意不共線四點S，作$O(S)$與$H(S)$的同比例內外分點，得到尤拉線四邊形$E_e(S)$，其中比例e滿足$\overrightarrow{O_D E_D}=e\cdot\overrightarrow{O_d H_D}$

二、垂心四邊形

(一) $H(S)$的存在性與唯一性

1. 對於所有S，$H(S)$存在

【證明】

因三角形必有垂心，因此只要證明$H(S)$中任兩點不重合即可。

反證$H(S)$中兩點H_A、H_B重合，由定義H_A是三角形BCD的垂心，H_B是三角形ACD的垂心。由垂心組的性質知道A是三角形CDH_A的垂心，B 是CDH_B的垂心，由反證假設H_A、H_B重合，由此可知CDH_A、CDH_B重合，A、B重合，矛盾。

2. 由初等幾何我知道任三點必可形成唯一垂心，故S'唯一。

（二）$\Gamma(S)$存在性的構造

1. S不為$S_\perp$

【引理】ABC三點在Γ上，若且唯若其垂心亦在Γ上

【引理證明】

設有一雙曲線$xy=k$，雙曲線上有任意三點$A\left(a_1,\dfrac{k}{a_1}\right),B\left(a_2,\dfrac{k}{a_2}\right),C\left(a_3,\dfrac{k}{a_3}\right)$

由垂心定義易知$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BO}=(x-a_1)(a_3-a_2)+\left(y-\frac{k}{a_1}\right)\left(\frac{k}{a_3}-\frac{k}{a_2}\right)=0$

$$\Rightarrow (x-a_1)+\left(y-\frac{k}{a_1}\right)\left(\frac{-k}{a_2a_3}\right)=0\cdots\cdots(equation\ 1)$$

同理 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\ \Rightarrow (x-a_2)+\left(y-\dfrac{k}{a_2}\right)\left(\dfrac{-k}{a_3a_1}\right)=0\cdots\cdots(equaiton\ 2)$

$$[(equaiton\ 2)-(equation\ 1)]\Rightarrow (a_2-a_1)+(a_1y-k)\left(\frac{-k}{a_1a_2a_3}\right)=0$$

$$(a_2-a_1)+\left(\frac{-k}{a_1a_2a_3}\right)(a_1-a_2)y=0$$

$$y=\frac{a_1a_2a_3}{-k}\ \text{代回}(equation\ 2)$$

$$x=a_1-\left(\frac{a_1a_2a_3}{-k}-\frac{k}{a_1}\right)\left(\frac{-k}{a_2a_3}\right)=a_1-\left(a_1+\frac{k^2}{a_1a_2a_3}\right)=\frac{-k^2}{a_1a_2a_3}$$

$$\therefore xy=k\text{符合方程式}$$

【證明】利用構造法，取S中四點與$H(S)$中任一點，以這五點作圓錐曲線，由於這條曲線滿足某三點的垂心亦在這條曲線上，故該曲線為等軸雙曲線。

2. 對角線互相垂直的$S_\perp$

【證明】兩對角線即為Γ

（三）$\Gamma(S)$的唯一性

1. S不為$S_\perp$

【證明】假設有相異兩等軸雙曲線Γ、Γ'分別過S、H_A，S、H_B。

即Γ不過H_B，但取在Γ上的S中的三點ACD，由垂心四邊形的定義，這三點的垂心為H_B，再由題設H_B不在Γ上，但這與雙曲線定理矛盾。因此得到Γ與Γ'相同，唯一性得證。

2. $S_\perp$的情形

兩對角線已經直接確立雙曲線的唯一性。

（四） 座標表示

由上文引理證明可看出$A\left(a_1,\frac{k}{a_1}\right),B\left(a_2,\frac{k}{a_2}\right),C\left(a_3,\frac{k}{a_3}\right)$的垂心位於

$$\left(\frac{-k^2}{a_1a_2a_3},\frac{a_1a_2a_3}{-k}\right)$$

（五） 逆變換的構造

可否找到一種變換關係H^{-1}，使得$H^{-1}\big(H(S)\big)=S$

因為我發現$H^n(S)$會在Γ上，故推測$H^{-1}(S)$在Γ上

【證明】

假設有S'在Γ'上，而有$H(S')=S$

因為S'在Γ'上，其垂心四邊形S也應在Γ'上，但由題設S在Γ上，矛盾！

因此S'必在Γ上

設$S=\{A,B,C,D\}$，其中$A=(a,\frac{k}{a})$以此類推

考慮集合$S'=\{E,F,G,I\}$，其中$E=(e,\frac{k}{e})$以此類推

作EFG的垂心$H(I)=(-\frac{k^2}{efg},\frac{efg}{-k^2})$以此類推

令$H(S')=S$

得到

$$-\frac{k^2}{fgh}=a$$

$$-\frac{k^2}{egh}=b$$

$$-\frac{k^2}{efh}=c$$

$$-\frac{k^2}{efg}=d$$

四式相乘得到

$$abcd=\frac{k^8}{(efgh)^3}$$

$$efgh=\sqrt[3]{\frac{k^8}{abcd}}$$

與以上四式分相乘可得到

$$-k^2e=a\sqrt[3]{\frac{k^8}{abcd}}$$

$$e = a\sqrt[3]{\frac{k^2}{abcd}}$$

類似構造出f、g、h，我可驗證$H(S') = S$

所以我找到一組在雙曲線上的解S'，滿足$H(S') = S$

而a、b、c、d、k皆唯一，故e、f、g、h唯一，即S'唯一

我定義$S' = H^{-1}(S)$為S的逆變換

（六） 變換關係

對於平面上所有S可找到$H(S)$，故$H(S)$為嵌射，且亦可找到$H^{-1}(S)$，故為$H(S)$為蓋射，因此，$H(S)$為一一對應的變換關係。

（七） 基本性質與定理

1. 垂直定理

$$\overline{H_A B} \perp \overline{CD}$$

【證明】

由定義H_A為ΔBCD的垂心，故$\overline{H_A B}$為其中一垂線垂直於$\overline{CD}$

2. 面積定理

S與$H(S)$的面積必相等

【證明】

由前之討論得知，任S與$H(S)$必在唯一之Γ上，假設其經平移旋轉後Γ為$xy = k$，

$$\text{四點座標為} A\left(a,\frac{k}{a}\right), B\left(b,\frac{k}{b}\right), C\left(c,\frac{k}{c}\right), D\left(d,\frac{k}{d}\right)$$

$$\text{可得到} H(S)\text{，四點座標分別為} A_1\left(\frac{-k^2a}{abcd},\frac{-abcd}{ka}\right)$$

$$B_1\left(\frac{-k^2b}{abcd},\frac{-abcd}{kb}\right), C_1\left(\frac{-k^2c}{abcd},\frac{-abcd}{kc}\right), D_1\left(\frac{-k^2d}{abcd},\frac{-abcd}{kd}\right)$$

$$\text{其中} S(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & \frac{k}{a} & 1 \\ b & \frac{k}{b} & 1 \\ c & \frac{k}{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}k\begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1 \\ b & \frac{1}{b} & 1 \\ c & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix}$$

$$S(B_1B_2B_3)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{-k^2a}{abcd} & \frac{-abcd}{ka} & 1\\ \frac{-k^2b}{abcd} & \frac{-abcd}{kb} & 1\\ \frac{-k^2c}{abcd} & \frac{-abcd}{kc} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{k}\cdot\frac{1}{abcd}\cdot abcd\cdot\begin{vmatrix}a & \frac{1}{a} & 1\\ b & \frac{1}{b} & 1\\ c & \frac{1}{c} & 1\end{vmatrix}$$

$$=S(A_1A_2A_3)$$

（八） 凹凸四邊形定理

1. 分布情形的定義

由S與$H(S)$所定義的Γ上有兩支，我定義(m,n)分布為有m個點落在其中一支，有n個點落在另一支的狀況。

2. 討論分布情形與凹凸性的關係

$$\because f''(x)=\left(\frac{k}{x}\right)''=\frac{2k}{x^3}>0\therefore f(x)=\frac{k}{x}\text{是凸函數}$$

$$\text{所以}\frac{mf(x)+nf(y)}{m+n}>f\left(\frac{mx+ny}{m+n}\right)$$

(1)(4,0)分布時，四點必形成凸四邊形

【證明】

設$A\left(a,\frac{k}{a}\right),B\left(b,\frac{k}{b}\right),C\left(c,\frac{k}{c}\right)\ D\left(d,\frac{k}{d}\right)$是(1,0)分布的四點

不失一般性設 $0<a<b<c<d$

$\overline{AB}$上任取一點$M(x_1,y_1)$，作 $x=x_1$ 交 $xy=k$ 於 $M'(x_1',y_1')$

因為 $xy=k$ 是凸函數，所以 $y_1>y_1'$

$\overleftrightarrow{BC}$上、$\overleftrightarrow{CA}$上的點也有相同的結果，

所以在 $xy=k$ 上不可能存在$N(x_0,y_0)$，使該點落在$\triangle ABC$內。

所以 $xy=k$ 上任一點 $N(x_0,y_0)$ 皆會落在 $\triangle ABC$ 外，因此我得到D在$\triangle ABC$外，A在$\triangle BCD$外、B在$\triangle ACD$外、C在$\triangle ABD$外，

故$ABCD$為凸四邊形

(2) (1,3)分布⇔凹四邊形

【證明】

設$A\left(a,\frac{k}{a}\right)$在一半支，$B\left(b,\frac{k}{b}\right),C\left(c,\frac{k}{c}\right)\ D\left(d,\frac{k}{d}\right)$是另一半支上的三點，

不失一般性設$a<0<b<c<d$

因為$xy=k$是凸函數，所以C點在$\overleftrightarrow{BD}$下方，

$$\text{又}\frac{k}{c}>\frac{k}{d}>0>\frac{k}{a}\text{，}$$

所以C在$\overleftrightarrow{AD}$上方、$a<0<b<c$，所以C在$\overleftrightarrow{AB}$右方，

故C 在$\triangle ABD$內，四邊形$ABCD$為凹四邊形

$\Leftarrow$

假設A、B、C、D在雙曲線上，且D在$\triangle ABC$之內

已知若A、B、C落在同一半支，則$\triangle ABC$內沒有任何一點落在雙曲線上

所以A、B、C中至少有一點位於不同支

假設$a < 0 < b < c$，D點在$\overleftrightarrow{AC}$左上、$\overleftrightarrow{BC}$左下、$\overleftrightarrow{AB}$右下

$\overleftrightarrow{AC}$左上$0 < x < c$ or $x < a$

$\overleftrightarrow{BC}$左下$b < x < c$ or $x < 0$

$\overleftrightarrow{AB}$右下 $a < x < 0$ or $x > b$

$x \in [(0,c) \cup (-\infty,a)] \cap \left[(b,c) \cup (-\infty,0]\right] \cap [(a,0) \cup (b,\infty)] = (b,c)$

三式取交集得$b < x < c$，此時$x > 0$，B、C、D位於同一支

(3)(2,2)分布為凸四邊形

【證明】

設$A\left(a,\frac{k}{a}\right)$、$B\left(b,\frac{k}{b}\right)$在一半支，$C\left(c,\frac{k}{c}\right)$、$D\left(d,\frac{k}{d}\right)$是另一支上的兩點，不失一般性設$a < b < 0 < c < d$，則由前一推論$ABCD$必不為凹四邊形，故$ABCD$為凸四邊形

3. 討論作垂心四邊形後是否改變分布情形

由等軸雙曲線公式：若有四點

$$A\left(a,\frac{k}{a}\right), B\left(b,\frac{k}{b}\right), C\left(c,\frac{k}{c}\right), D\left(d,\frac{k}{d}\right)$$

$$\text{可得到其垂心}H_A\left(\frac{-k^2}{bcd},\frac{-bcd}{k}\right)$$

記(1,0)分布為$+1$，(0,1)分布為-1，故H_A的分布情形等同於B、C、D的分布情形相乘取負號。

若B、C、D各為(1,0)分布，H_A則為$-(+1)\,(+1)\,(+1) = -1$位於(0,1)

若B、C為(1,0)分布；D為(0,1)分布，

H_A則為$-(+1)\,(+1)\,(-1) = +1$ 位於(1,0)

所以

(1)(4,0)分布情形中任取三點形成三角形必為(3,0)分布，其垂心皆為(0,1)，故其垂心四邊形為(0,4)分布

(2)(3,1)分布情形中任取三點形成三角形有三種(2,1)分布，一種(3,0)分布，因此其垂心四邊形的四個頂點有三個點落在(1,0)，一個點落在(0,1)，故其垂心四邊形為(3,1)分布

(3)(2,2)分布情形中任取三點形成三角形有兩種(2,1)分布，兩種(1,2)分布，

因此其垂心四邊形的四個頂點有兩個落在(1,0)，另外兩個點位於(0,1)，即(2,2)分布。

由上述證明知道四邊形經垂心四邊形變換後不影響分布情形，又已知分布情形一一對應到凹、凸四邊形的其中一種，因此得證凸凹四邊形作垂心四邊形後依然保有其凹凸性。

三、外心四邊形

（一） $O(S)$的存在性與唯一性

由初等幾何知任意不共線三點決定唯一外心，故只要說明$O(S)$中四點皆相異即可。以下進行討論：

【討論】

1. 存在性：存在$O(S)$，使$O:S \to O(S)$

   顯然若S為圓內接四邊形，記為S_C，則$O(S)$退化為一點

   假設$S \notin S_C$而有O_A、O_B重合

   則ΔBCD、ΔACD的外接圓重合，即A、B、C、D四點共圓，矛盾！

   若$O(S)$中，S中任三點不共線，而$O(S)$有O_A、O_B、O_C共線

   則$\overline{O_AO_B} \perp \overline{CD}$、$\overline{O_CO_B} \perp \overline{AD}$，但$\overline{O_AO_B} \parallel \overline{O_CO_B}$，故$\overline{CD} \perp \overline{AD}$。矛盾！

   故得到$O(S)$的存在性。

2. 唯一性：由初等幾何知任意不共線三點決定唯一外心，又已知$O(S)$必存在，故$O(S)$必唯一。

3. 逆變換：對於所有S，存在唯一$O(S)$，使$O:S \to O(S)$

   那是否對於所有S，存在$O^{-1}(S)$，使$O:O^{-1}(S) \to S$，這個問題我在下文另外作討論。

（二） 基本性質

1. 垂直性質：$\overleftrightarrow{O_AO_B} \perp \overleftrightarrow{CD}$

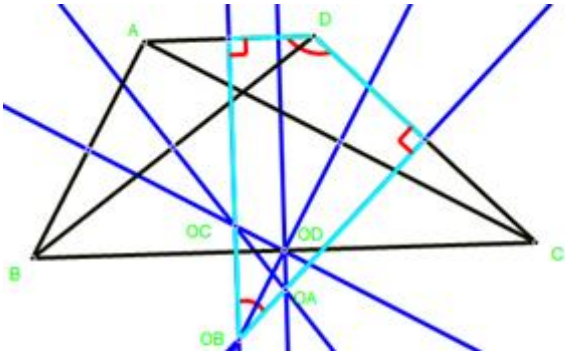
   【證明】由定義，O_A為ΔBCD的外心，故$\overleftrightarrow{O_AM_{CD}} \perp \overleftrightarrow{CD}$。

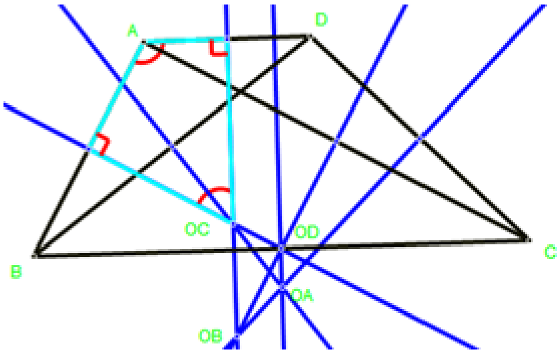
   同理$\overleftrightarrow{O_BM_{CD}} \perp \overleftrightarrow{CD}$，故$\overleftrightarrow{O_AO_B}$垂直$\overleftrightarrow{CD}$

2. 角度性質：$\angle ABC + \angle O_CO_DO_A = \pi$

   【證明】

   依圖：





因淺藍色的四邊形中，兩直角和為對角和$=\pi$，因此另兩角的和亦$=\pi$，即

$$\angle BAD+\angle O_DO_CO_B=\pi$$

同理

$$\angle ABC\ +\angle O_CO_DO_A=\pi$$
$$\angle BCD\ +\angle O_DO_AO_B=\pi$$
$$\angle ADC\ +\angle O_CO_BO_A=\pi$$

再對其一階、二階外心四邊形使用角度定理，因此

$$\angle ABC\ +\angle O_CO_DO_A=\pi$$
$$\angle O_CO_DO_A+\angle O_{2A}O_{2B}O_{2C}\ =\pi$$

故

$$\angle ABC=\angle O_{2A}O_{2B}O_{2C}$$

其他邊同理，因此我得到原四邊形對應角和二階外心四邊形的對應角相等。

3. 長度性質：$\overline{O_AO_B}:\overline{O_DO_C}=sin\angle ABD:sin\angle DBC$

【證明】

由角度性質$\angle ABC+\angle O_CO_DO_A=\pi$，即$\angle ABC=\pi-\angle O_CO_DO_A$

$$sin\angle ABC=sin\angle O_CO_DO_A$$

故$\overline{O_AO_B}:\overline{O_DO_C}=sin\angle ABD:sin\angle DBC$

4. 順逆序性質

S與$O(S)$的順反序排列相反

設有$S=A$、B、C、D，其中A、B、C、D為逆序排列

若我所取的角度皆為有向角

則$\angle ABC$、$\angle BCD$、$\angle CDA$、$\angle DAB$皆為負角

我作A、B中垂線L_{AB}過AB中點M_{AB}，其中則O_C、O_D必在L_{AB}上

視B為旋轉中心，而將A順時針旋轉至C

又$\overline{BC}\perp\overline{O_AO_D}$

因此$\overline{O_AO_D}$與$\overline{O_CO_D}$的交角即為$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{AB}$的交角

因此$|\angle ABC|=|\angle O_AO_DO_C|$，或其補角，差別在於$S$與$O(S)$的順反序問題，

於是我對順反序作討論，以驗證

$|\angle ABC| = |\angle O_A O_D O_C|$

定義M_{AB}為A、B中點，L_{AB}為A、B的中垂線

視B、C為將A沿B順時針旋轉後再行縮放的結果

一開始我將問題簡單化，即不考慮縮放

討論$\overline{AB} = \overline{DB} = \overline{CB}$時的情形

依題設順序，$|\angle ABC| > |\angle O_D O_B O_A|$

$M_{\overline{AB}}$、$M_{\overline{DB}}$、$M_{\overline{CB}}$落在以B為圓心以$\frac{1}{2}\ (\overline{AB})$為半徑的圓$O$上

L_{BC}即為O的切線，交L_{BD}於O_A，交L_{BA}於O_D

顯然$\overline{M_{AB}O_D} > \overline{M_{AB}O_C}$，$\overline{M_{BC}O_D} > \overline{M_{BC}O_A}$

即O_C在$\overline{M_{AB}O_D}$內，O_A在$\overline{M_{BC}O_D}$內

所以$\angle O_C O_D O_A$為正角，故$O(S)$為順序

① 當$\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{BD}$時

(I) $\overline{BD} > \overline{AB}$

作$\overline{BD} = \overline{AB}$後，將$D$逐漸延長，則$L_{BC}$沿$\overline{BD}$的方向平移$\Delta X$

即$\overline{O_C O_A}$延$\overline{BO_D}$方向平移，設$\Delta X = \Delta X_1$時L_{BD}過O_D，則O_A、O_C、O_D共點

此時S為圓內接四邊形

若$\Delta X < \Delta X_1$，顯然$\angle O_C O_D O_A$仍為正角，保有順反序性

$\Delta X = \Delta X_1$，S為無順反序性問題

$\Delta X > \Delta X_1$時，$\angle O_C O_D O_A$仍為正角，保有順反序性

(II) $\overline{BD} < \overline{AB}$

討論類似於(I)，同理保有順反序性

我已證當$\overline{BA} = \overline{BD}$時，$\overline{BD}$的取值無關於順反序($\overline{BD} \neq 0$)

所以接著討論$\overline{AB}$與$\overline{BD}$大小的影響：

不失一般性設$\overline{BC} = \overline{AB} + \Delta X$

設$\Delta X = \Delta X_1$時，O_C、O_D、O_A重合為一點，此時S為圓內接四邊形

與上述證明類似，可得到$\angle O_C O_D O_A$仍為正角，保有順反序性。

因此得到S與$O(S)$的順反序是相反的

（五） 凹凸四邊形

設凹四邊形S中，$\angle ABC > \pi$

由角度定理：$\angle ABC + \angle O_C O_D O_A = \pi$

$$\angle O_C O_D O_A < 0 \Rightarrow S\text{為凹四邊形}$$

（六） 面積比定理

1. 同四邊形內的對應三角形有相同面積比

設有S與$O(S)$

考慮ΔABD與ΔDBC的面積比

$$\frac{area(ABD)}{area(DBC)}=\frac{\overline{AB}sin\angle ABD}{\overline{BC}sin\angle CBD}$$

$$\therefore\frac{\overline{O_AO_D}}{\overline{O_DO_C}}=\frac{sin\angle ABD}{sin\angle DBC}$$

再考慮$O_AO_BO_D$與$O_CO_BO_D$的面積比

由角度定理，$\angle O_BO_DO_A=\angle CBA$；$\angle O_CO_DO_B=\angle CAB$

由長度比定理：$\dfrac{\overline{O_AO_D}}{\overline{O_DO_C}}=\dfrac{sin\angle ABD}{sin\angle DBC}$

再由正弦定理$sin\angle ACB：sin\angle CAB=\overline{AB}：\overline{BC}$

$$\frac{area(O_AO_BO_D)}{area(O_CO_BO_D)}=\frac{\overline{O_AO_D}sin\angle O_AO_DO_B}{\overline{O_CO_D}sin\angle \mathrm{O_CO_DO_B}}=\frac{\overline{O_AO_D}sin\angle ACB}{\overline{O_CO_D}sin\angle CAB}=\frac{sin\angle ABD\cdot sin\angle ACB}{sin\angle DBC\cdot sin\angle CAB}$$

$$=\frac{sin\angle ABD\cdot\overline{AB}}{sin\angle DBC\cdot\overline{BC}}=\frac{area(ABD)}{area(CBD)}$$

可發現

$$\frac{area(O_AO_BO_D)}{area(ABD)}=\frac{area(O_CO_BO_D)}{area(CBD)}$$

將四條等式列出，再利用合分比定律得到

$$\frac{area(O_AO_BO_CO_D)}{area(ABCD)}=\frac{area(O(S))}{area(S)}$$

2. 不同階數四邊形的對應三角形有相同面積比

【證明】

若有一四邊形$ABCD$

$A(2a,2h),B(2b,2h),C(2c,0),D(2d,0)$

原面積 $\Rightarrow 2(b-a)(c-d)h$

$$area(O(S))\ =\frac{1}{2}(B-A)(C-D)h'=\frac{-1}{2}(b'-a')(c'-d')(a+b-c-d)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{h}(c-b)(a-c)-(d-b)(a-d)\right]\left[\frac{1}{h}(d-b)(c-b-(d-a)(c-a)\right](a+b-c-d)$$

$$=\frac{1}{2h^2}(ca-ba-c^2+bc-da+ab-bd+d^2)(dc-bc+b^2-bd-dc+ac-a^2+ad)=\frac{1}{2h^2}(a-b)(c-d)(a+b-c-d)^3$$

令K_{mn}為第n階與第m階外心四邊形的面積比

$$K_{12}=\frac{\frac{1}{2h^2}(a-b)(c-d)(a+b-c-d)^3}{2(b-a)(c-d)h}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(a+b-c-d)^3}{h^3}$$

$$K_{12}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(a'+b'-c'-d')^3}{(a+b-c-d)^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{[\frac{1}{h}(a+b-c-d)^2]^3}{(a+b-c-d)^3}=\frac{(a+b-c-d)^3}{4h^3}$$

$$=K_{01}$$

$\because a'+b'-c'-d'$

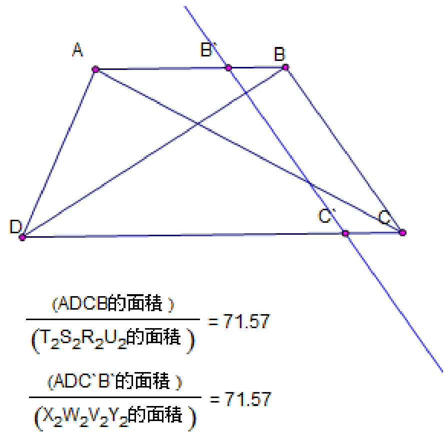
$$=\frac{1}{h}[(c-b)(a-c)+(d-b)(a-d)-(d-b)(c-b)-(d-a)(c-a)]$$

$$=\frac{1}{h}[-a^2-b^2-c^2-d^2-2ab-2cd+2ac+2bc+2bd+2ad$$

$$-(a+b)^2-(c+d)^2+2(a+b)(c+d)]=-\frac{1}{h}(a+b-c-d)^2$$

3. 定三角形圖形與次擺線

將於下文圓內次擺線中討論



4. 平行邊截相同面積比

【證明】

若$\overleftrightarrow{AB}$上有一點B',$\overleftrightarrow{CD}$上有一點C'，使$\overleftrightarrow{BC}//\overleftrightarrow{B'C'}$，則$ABCD$的面積比 $=A'B'C'D'$的面積比

原面積比$k=\dfrac{(a+b-c-d)^3}{4h^3}$

後面積比 $k'=\dfrac{(a+b'-c'-d)^3}{4h^3}$

$\because \overleftrightarrow{B'C'}//\overleftrightarrow{BC}$， $\therefore$ 令$B'(2b+l,2h)$, $C'(2c+l,2h)$

$$\Rightarrow k'=\frac{(a+b'-c'-d)^3}{4h^3}=\frac{\left[a+b+\frac{l}{2}-\left(c+\frac{l}{2}\right)-d\right]^3}{4h^3}=\frac{(a+b-c-d)^3}{4h^3}=k$$

若$\overleftrightarrow{AD}$上有一點A',$\overleftrightarrow{BC}$上有一點B',使$\overleftrightarrow{A'B'}//\overleftrightarrow{AB}$

令$\overline{AA'}:\overline{AD}=q:p$

則$A'\left(\frac{pa+qd}{p+q},\frac{ph}{p+q}\right),B'\left(\frac{pb+qc}{p+q},\frac{ph}{p+q}\right)$

$$則k'=\frac{\left(\frac{pa+qd}{p+q}+\frac{pb+qc}{p+q}-c-d\right)^3}{4\left(\frac{p}{p+q}\cdot h\right)^3}=\frac{(pa+pb-pc-pd)^3}{4(ph)^3}$$

$$=\frac{(a+b-c-d)^3}{4h^3}=k$$

故得證，若$ABCD$與$A'B'C'D'$對應邊平行，則有相同四邊形面積比

（七） 二階位似

1. 即$S\sim O^2(S)$

【證明】

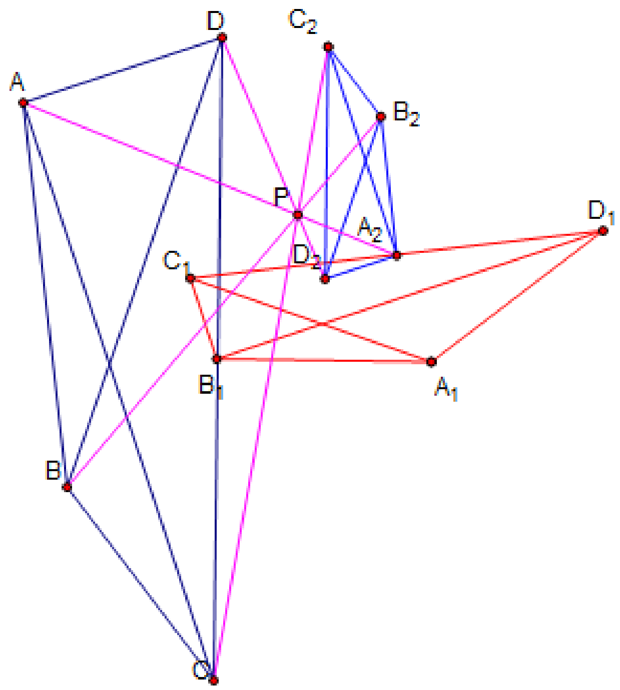
設$ABCD$為任意的非圓內接四邊形

由角度定理：

$$\angle BAD=\angle O_{2B}O_{2A}O_{2D}$$
$$\angle ABC=\angle O_{2A}O_{2B}O_{2C}$$

我知道原四邊形與二階外心四邊形相對應角度相等，於是兩四邊形相似

2. 將外心四邊形與其二階外心四邊形的相對應頂點連線會共點



我先證原四邊形及其二階外心四邊形的對應線段互相平行：

已知ABC的外心為O_D、$\triangle BCD$的外心為O_A，令$\overline{BC}$中點為M

則易知M、O_A、O_D三點共線，即$\overline{BC}$的中垂線

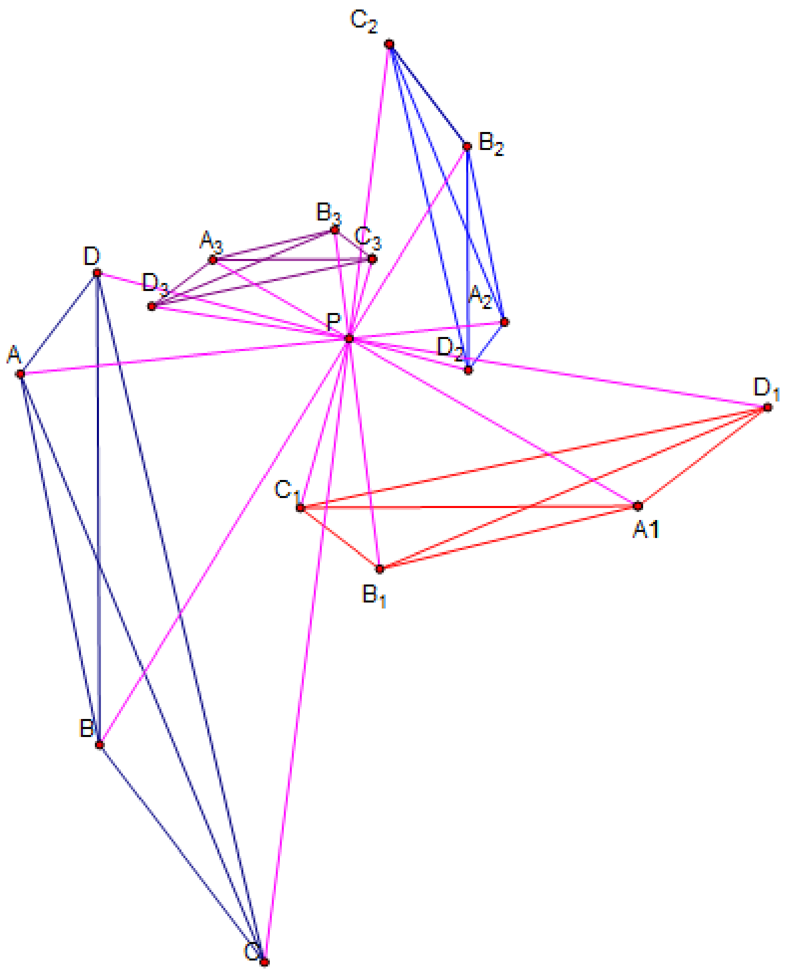
故$\overline{O_AO_D} \perp \overline{BC}$

二階同理得到$\overline{O_{2B}O_{2C}} \perp \overline{O_AO_D}$

故$\overline{BC}//\overline{O_{2B}O_{2C}}$

原四邊形及其二階外心四邊形的角度相等，且互相平行，故由笛沙格定理知道其相對應頂點連線會共點 P

3. 設n階外心四邊形與第$(n+2)$階外心四邊形的相對應頂點連線共點於P_n，則P_1、P_2、 … 、P_n重合。



（八） 逆變換構造

因為O與O^2(S)的位似中心會與$O(S)$及O^{-1}(S)的位似中心重合，因此我對於一般的S，找到其$O(S)$及P，並利用$O(S)$及O^{-1}(S)的面積比關係找到$O^{-1}(S)$的位置，而這種構造方式可以由下一階外心四邊形的存在、唯一性確定下來。

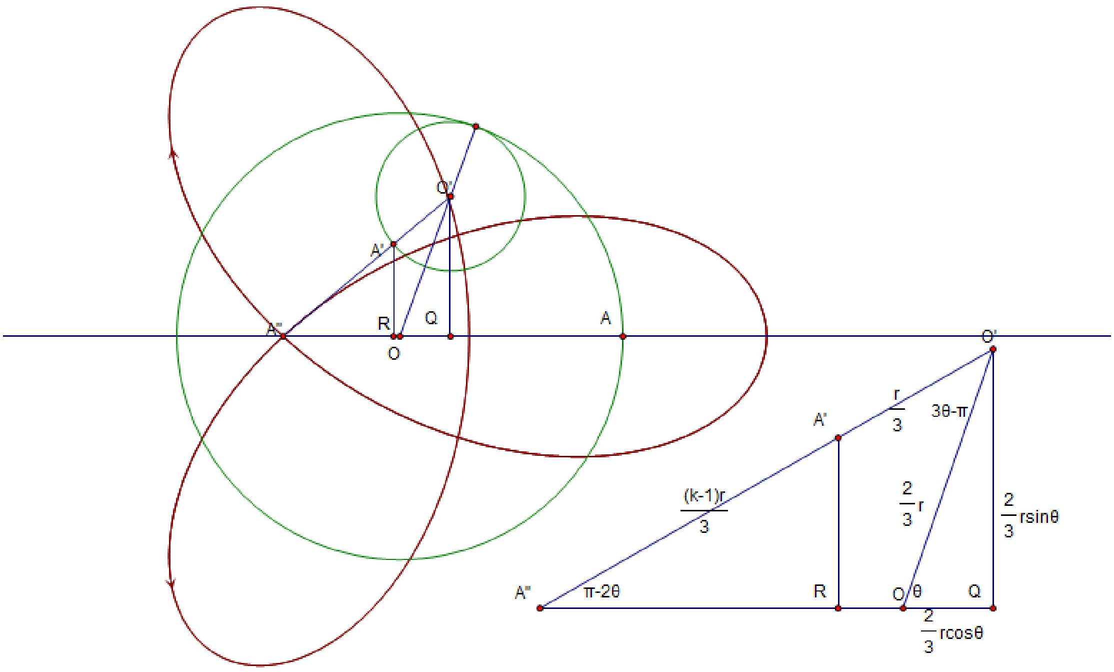
四、圓內次擺線

（一）定義與基本性質

1. 定義：

平面上有一小圓內切於一大圓，當小圓在大圓內滾動時小圓內部或外部的一點所形成的軌跡即為圓內次擺線，該點到小圓圓心與小圓半徑的比值為c

2. 當小圓外部的點落在擺線自相交的點時，大圓滾動的角度$\theta = cos^{-1}\frac{1}{c}$



【證明】

圓內次擺線的比值若為c，$(|c| > 1$，即曲線自相交於三點，則令$\angle A''OA = \theta$

若O'、A'在x軸上之投影點分別為Q、R

由原始比值為 c，即$\overline{O'A'}:\overline{O'A''} = c:1$

則角度θ滿足$cos\theta = \frac{1}{c}$，證明如下

$$sin(\pi - 2\theta) = \frac{\frac{2}{3}r \cdot sin\theta}{\frac{1}{3}c \cdot r}$$

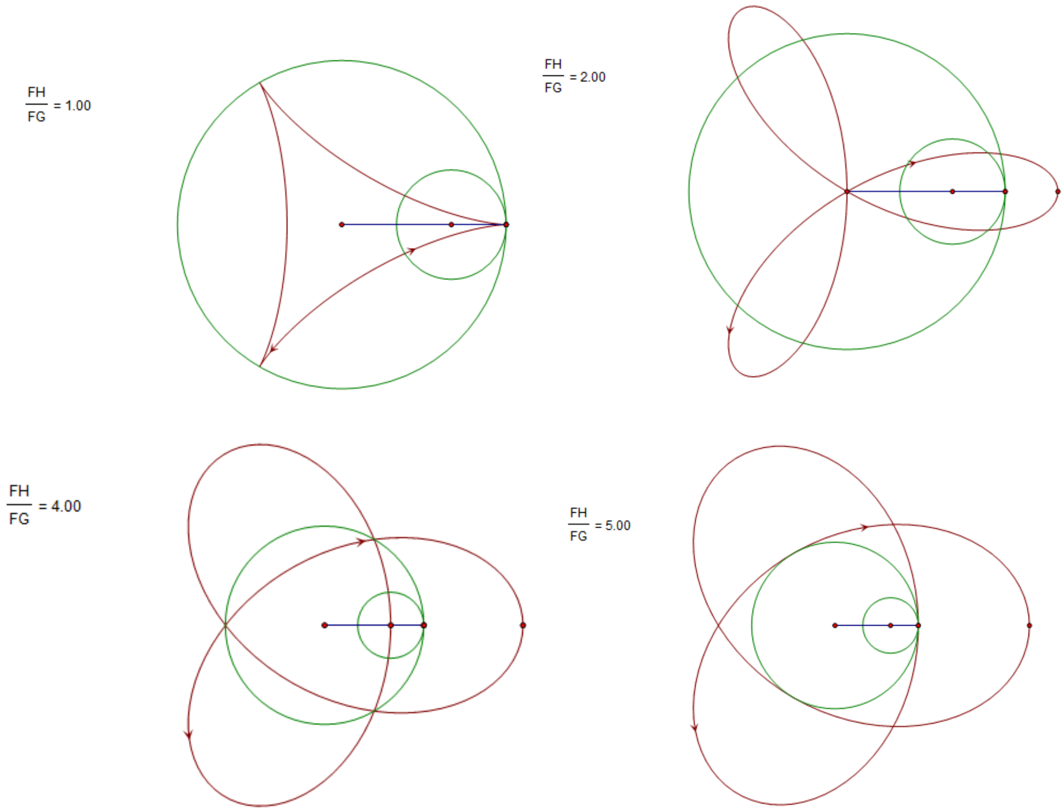
$$sin2\theta = 2 \cdot \frac{1}{c} \cdot sin\theta$$

$$\Rightarrow 2sin\theta \cdot cos\theta = 2 \cdot \frac{1}{c} \cdot sin\theta$$

$$\therefore cos\theta = \frac{1}{c} \;\; \Rightarrow \theta = cos^{-1}\frac{1}{c}$$

3. 當$c = 0$時圖形為一圓，$c = 1$時圖形為圓內擺線，$c = 2$為玫瑰線，$c = 4$

時圖形內自相交的點會落在大圓上，$c = 5$時圖形與外切於大圓



（二）外心四邊形等面積定理

擺線中自相交的三點及擺線上任意其他點所構成的四邊形，其外心四邊形與原四邊形的面積比為定值

（三）尤拉線四邊形等面積定理

擺線中自相交的三點及擺線上任意其他點所構成的四邊形，其e尤拉線四邊形與原四邊形的面積比為定值

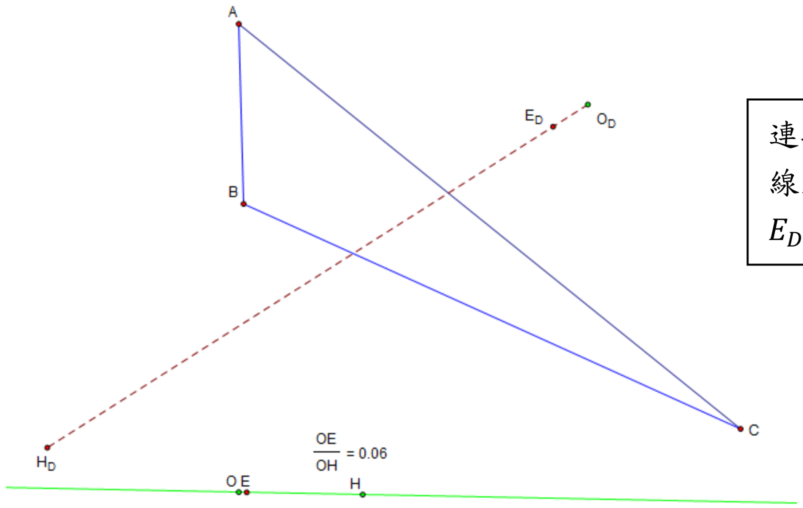
一、尤拉線四邊形

（一） 定義：

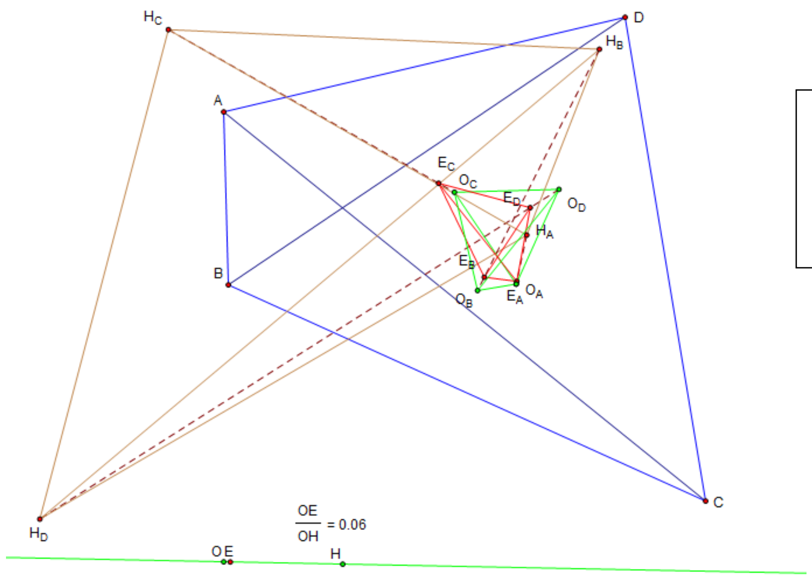
設有四邊形$ABCD$，其中ABC的外心為O_D垂心為H_D，

則作一點E_D使$\overrightarrow{O_DE_D} = e \cdot \overrightarrow{O_dH_D}$，同理作出$E_AE_BE_CE_D$，

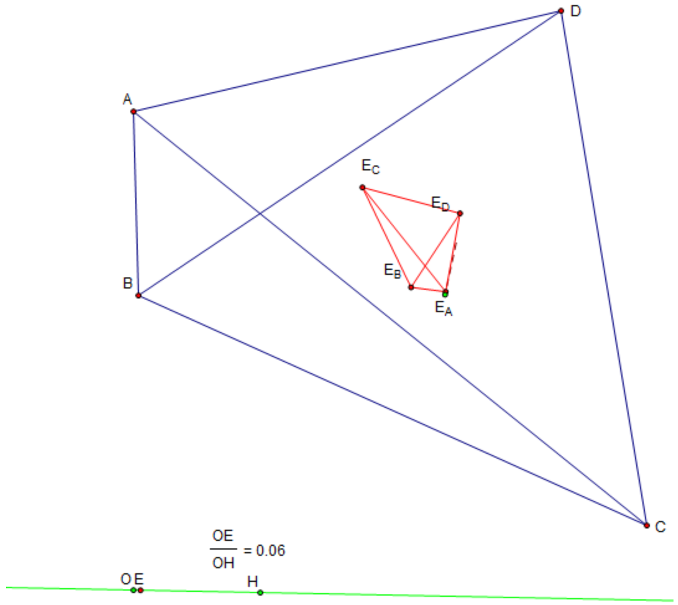
我就定義四邊形$E_AE_BE_CE_D$為四邊形$ABCD$的e尤拉線四邊形。



連接ΔABC垂心與外心，取直線上比例為e的分點，此點為E_D。



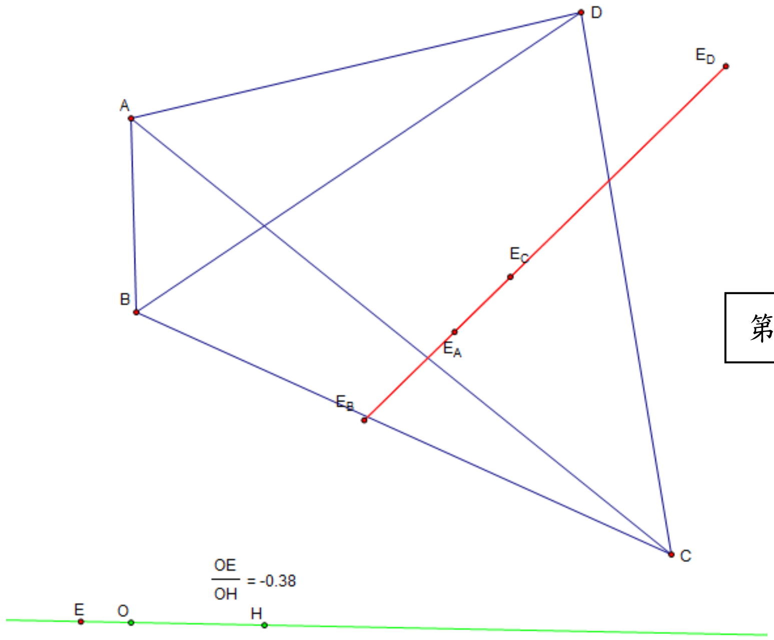
用同樣的比例同理作出E_A、E_B、E_C，於是得到尤拉線四邊形$E_AE_BE_CE_D$



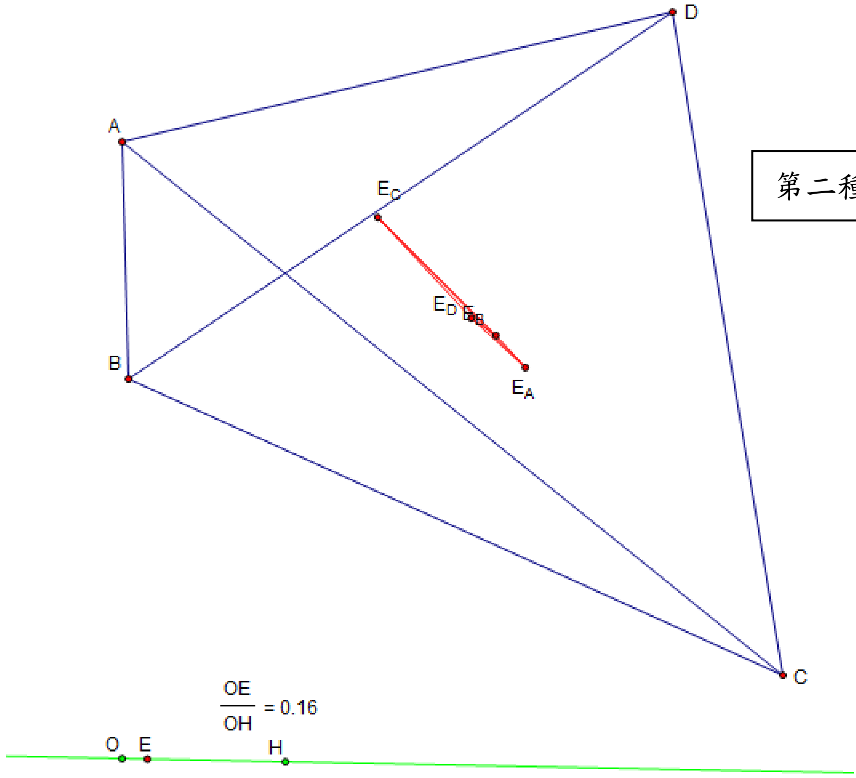
對於任一四邊形，當取不同的尤拉線比e時，會有不同的四邊形

1. 退化情形：

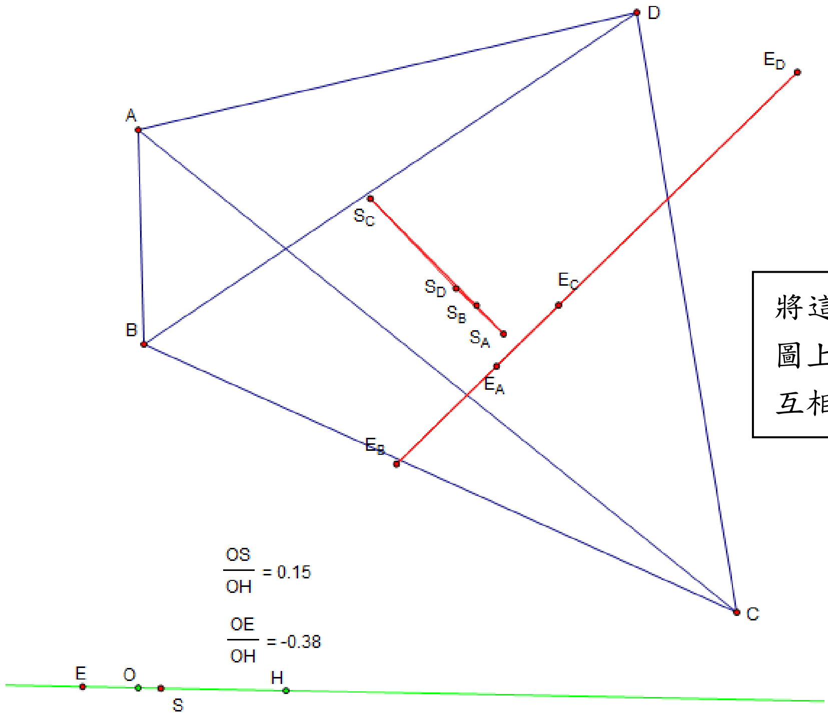
在非圓內接四邊形的情況中，存在兩個e，使得作出的尤拉線四邊形面積比 $= 0$



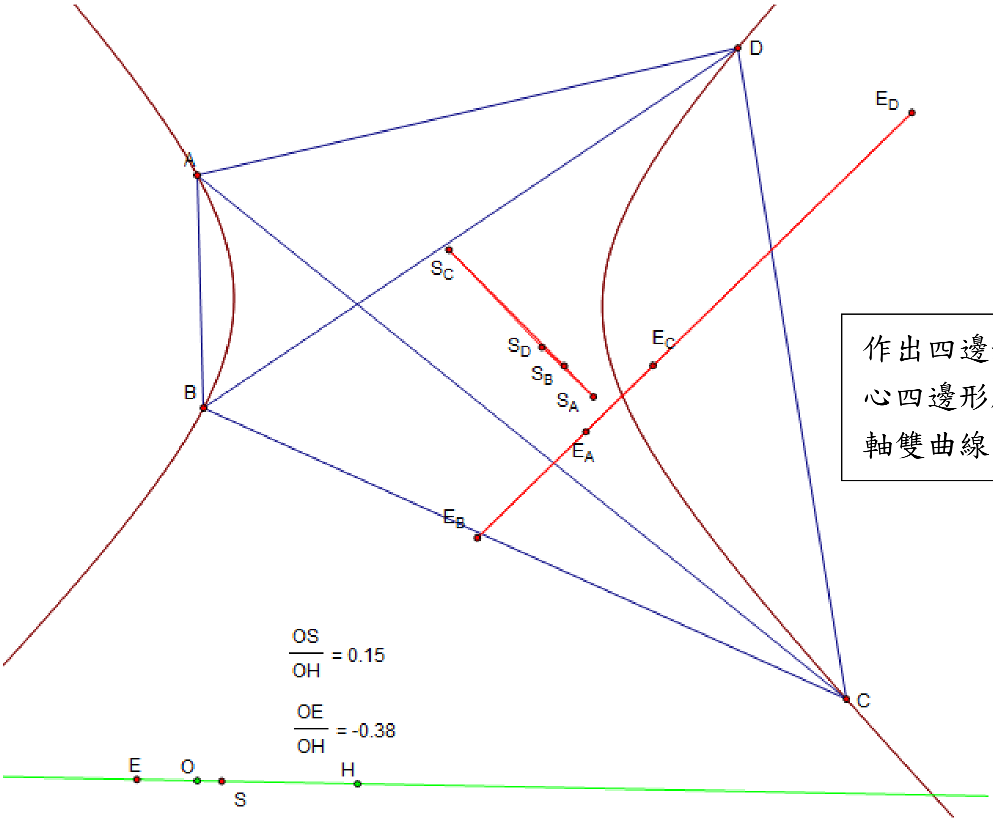
第一種情形，此時$e = -0.38$



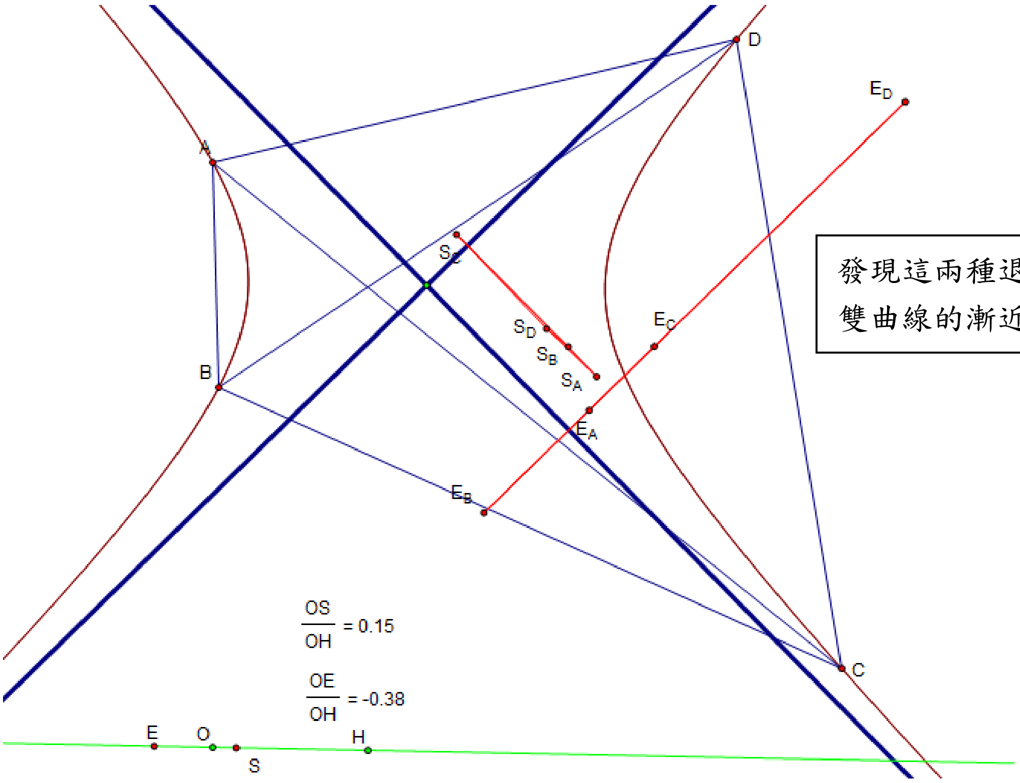
第二種情形，此時$e = 0.16$



將這兩種情形疊合在同一張圖上，我發現這兩種退化情形互相垂直。

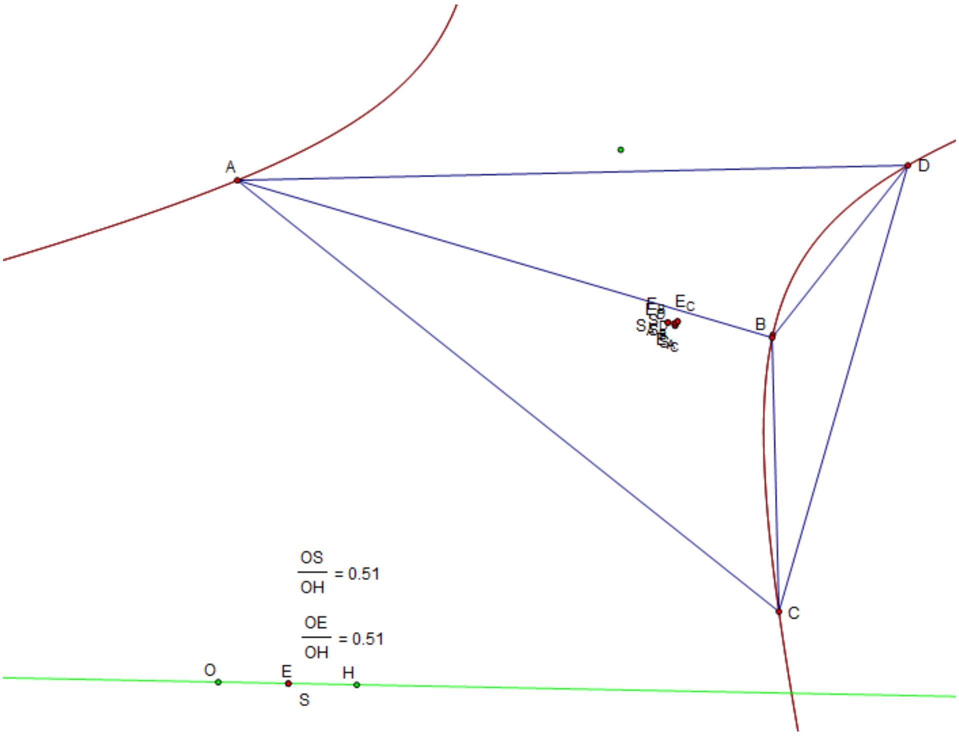


作出四邊形及其垂心四邊形所在的等軸雙曲線



發現這兩種退化情形和等軸雙曲線的漸近線平行

2. 發現若取一垂心組作其尤拉線四邊形，則存在一e，使得尤拉線四邊形退化為一點



伍、研究結果

（一） 垂心四邊形

1. 等軸雙曲線定理：四邊形及其垂心四邊形必會落在唯一的等軸雙曲線上
2. 面積相等定理：四邊形及其垂心四邊形的面積相等
3. 凹凸四邊形定理：凹四邊形的垂心四邊形亦為凹四邊形；凸四邊形的垂心四邊形亦為凸四邊形。

（二） 外心四邊形

1. 面積比相等定理：四邊形及其下一階外心四邊形的面積比相等
2. 位似變換定理：偶數階外心四邊形、奇數階外心四邊形彼此呈位似變換關係，且此兩種情形有相同的位似中心
3. 角度定理：

$$\angle ABC + \angle O_C O_D O_A = \pi$$

（三）圓內次擺線

1. 外心四邊形等面積定理：圓內次擺線自相交的三點及圓內次擺線的任意點可構成一個四邊形，作其外心四邊形，則這些四邊形的面積比都是相同的
2. 尤拉線四邊形等面積定理：圓內次擺線自相交的三點及圓內次擺線的任意點可構成一個四邊形，作其尤拉線四邊形，則這些四邊形的面積比都是相同的

（四） 尤拉線四邊形

1. 退化情形：一般的四邊形有兩種退化情形
2. 面積比：A、C、e、x、r、θ的關係

$$cos\theta = \frac{1}{C}$$

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{3}r(\frac{c}{2} - \frac{2}{c})$$

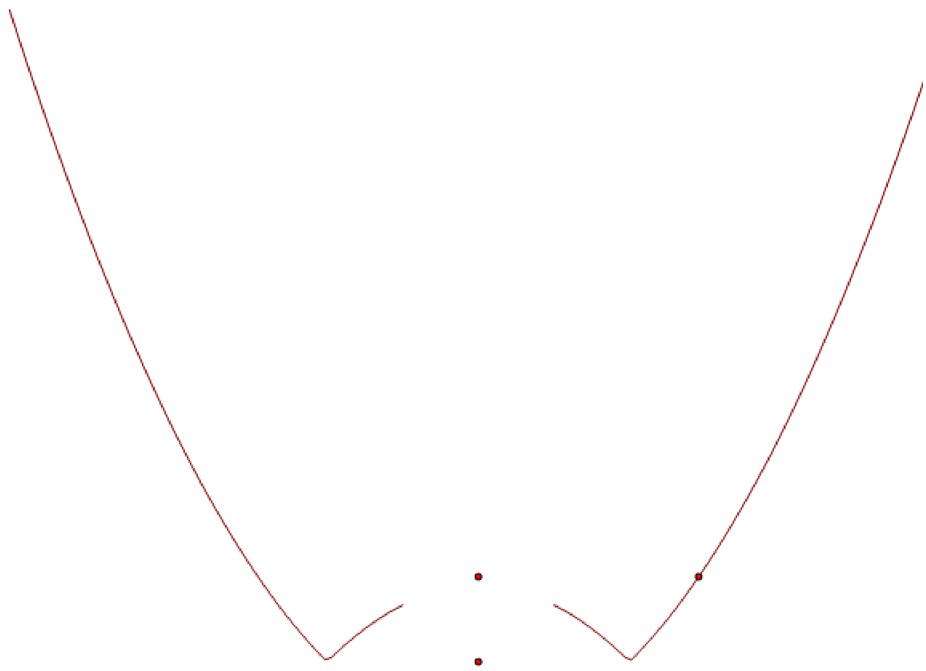
陸、討論與結論

垂心四邊形的部份，我透過等軸雙曲線的協助發現以及證明了許多有趣的性質，而在外心四邊形的部份，我也利用了垂直性質、角度性質以及長度比性質解決了許多的問題。但在尤拉線四邊形的部份，由於沒有較明顯的基本性質，因此我在證明的方面遇到了許多困難。雖然如此，我仍然對於尤拉線四邊形及圓內次擺線的關係有進一步的推論。

面積比的部份，我透過 gsp 軟體得到一些結果如下：

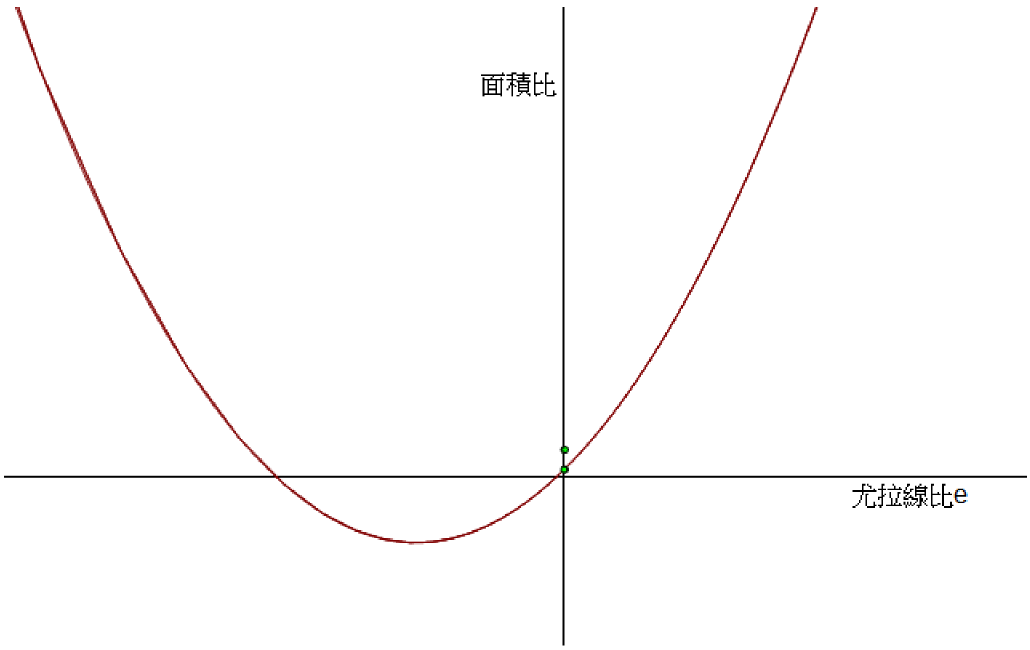
(一)發現若擺線比變動時，面積比a的倒數與擺線比c的關係為$\frac{1}{a}=\frac{1}{4}c^2-1$(當

$|c|>2$，而當$1<|c|<2$時$\frac{1}{a}=-\frac{1}{4}c^2+1$



(二)將面積比對尤拉線四邊形作推廣：我定義面積比為下一階四邊形與上一階四邊形的面積比例，不同的是，我這次取的是有向面積。

將面積比對尤拉線比e作圖，我得到以下的圖形：



當$e=1$時，為垂心四邊形，其面積比恆=1

當$e=\frac{1}{3}$時，為重心四邊形，其面積比恆$=\frac{1}{3}$

而其他的 e 所對應的面積比所形成的圖形為類似此種情形的拋物線

捌、參考資料及其他

1. http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
2. http://scimonth.blogspot.tw/2009/08/blog-post_5737.html
3. 李虎雄等，普通高級中學數學第三冊，康熹文化，初版，2012 年。
4. 林福來等，普通高級中學數學第四冊，南一書局，初版，2012 年。
5. 黃家禮，幾何明珠，九章出版社，2000 年 10 月 23 日