

第十三屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA13-203

作品名稱：動態追逐

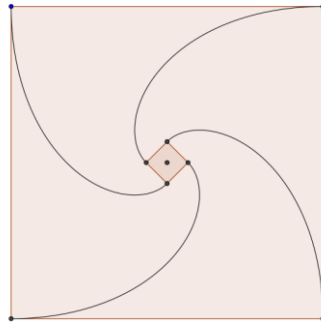
姓名：李堂愷

關鍵字：動態追逐、單向追逐、圓形追逐

一、研究動機

我自學微積分，也學人生^[1]書中看到以下討論。

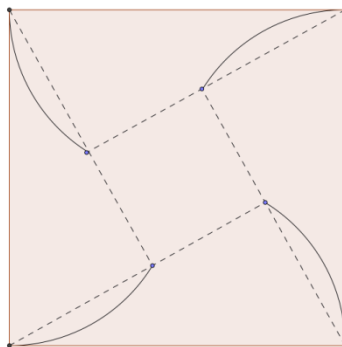
一邊長為 l 的正方形，四隻狗位於四頂點，每一隻狗以往其逆時針方向的下一隻狗的方向等速率前進，方向無時無刻都朝著下一隻狗，最後會停在中心。每隻狗移動的軌跡為角度為 $\frac{\pi}{4}$ 的等角螺旋(對數螺旋)，所經路徑長以微分方程及線積分計算後為 l 。其追逐路徑如下圖。



除此之外，經由文獻[1]、[2]、[3]之探討，了解還有類似的追逐問題，整理較常見的幾個追逐問題如下。

1. 四質點(四隻狗)位於正方形四頂點互相追逐
2. 一質點追逐另一以等速度運動之質點
3. 一質點追逐另一以等速率做圓周運動之質點

從文獻中可以得知，其探討追逐問題的方法均是以微分方程的方式來討論。我們為避免掉複雜的微積分計算，因此將前述質點追逐之方式重新定義為：每質點的總位移方向均指向向其逆時針方向的下一個質點且每質點均保持等速率，換言之，出發點、質點及目標點三點恆在一直線上。其追逐路徑如下圖，



我以此新的定義為基礎做新追逐問題的推廣。首先，為了方便探討，先給幾個定義。

定義 1 目標點

多邊形中一質點 A 往其逆時針方向的下一個質點 B ，稱 B 為質點 A 的目標點。

定義 2 正 n 邊形動態追逐

n 個質點自正 n 邊形的 n 個頂點開始運動，每質點的總位移方向均指向其目標點且每質點均保持等速率，稱 n 個點作正 n 邊形動態追逐。

定義 3 n 邊形動態追逐

n 個質點自凸 n 邊形的 n 個頂點開始運動，每質點的總位移方向均指向其目標點且 n 質點保持之

n 邊形的各外角總是和原 n 邊形的相等，稱 n 個點作 n 邊形動態追逐。若在期間有 k 個質點先相遇，則轉變成 $(n - k + 1)$ 邊形動態追逐。

定義 4 單向追逐

一質點 B 以等速度運動，另一質點 A 總位移之方向均朝向 B 且兩質點的位移大小總是成固定比例，稱 A 對 B 做單向追逐。

定義 5 圓形追逐

一質點 B 做等速率圓周運動，另一質點 A 從圓心出發，其總位移之方向均朝向 B 且 A 點之位移大小和 B 點所走的路徑長總是成固定比例，稱 A 對 B 做圓形追逐。

二、研究目的

我以解析幾何、向量、三角函數、畢式定理、正弦定理以及參數式等等，來解決下列追逐問題。

1. 質點做正 n 邊形動態追逐
2. 正 n 邊形動態追逐中質點間的相對軌跡
3. 正 n 邊形動態追逐結果與經典的正 n 邊形追逐問題的比較
4. 質點做任意凸 n 邊形動態追逐
5. 質點 A 對質點 B 做單向追逐
6. 單向追逐結果與經典的追逐問題的比較
7. 質點 A 對質點 B 做圓形追逐

經過以上討論，我將繼續研究下列議題:

1. 質點做任意多邊形動態追逐時，在什麼情況下 n 個質點能同時匯集於一點
2. 將單向追逐中的直線換成其他曲線，諸如拋物線、橢圓、雙曲線等等
3. 在三維空間中，討論正 n 面體動態追逐，例如，若4質點位於一正四面體四頂點做動態追逐，猜測每個質點軌跡為球面上的部分圓弧
4. 進一步討論追逐空間中任意曲線的單向追逐軌跡。

而由以上所有討論可知，典型的追逐問題均可依照我重新定義的「動態追逐」新方法，形成另一大類的「新追逐問題」，只是這些問題的結果還未整理完備，尚在討論階段，希望能更深入的探討，並將所有問題解決。

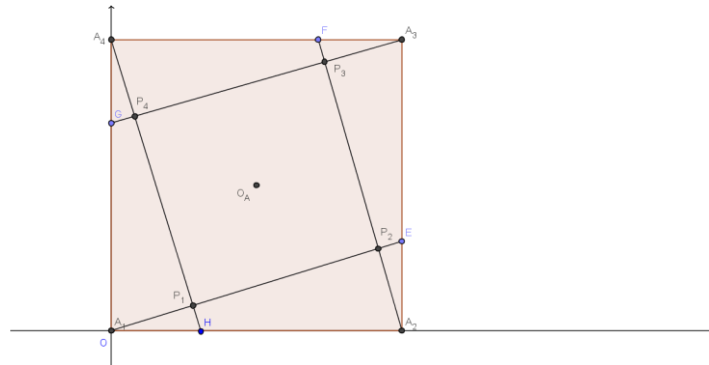
以下我以 *Geogebra 4.2* 動態幾何軟體來輔助研究。

三、研究方法

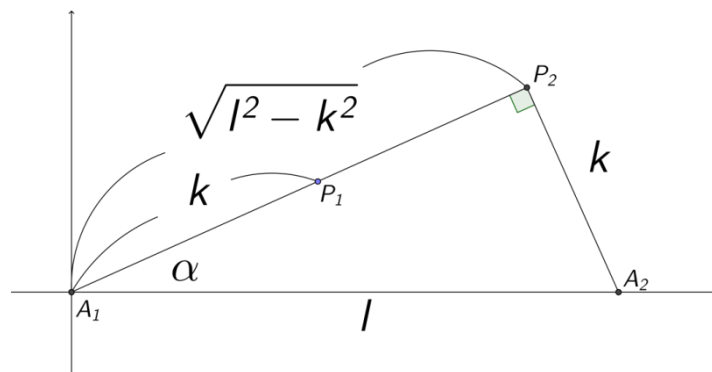
1. 質點做正 n 邊形動態追逐
- 1-1. 4 質點做正方形動態追逐

一正方形，四質點做正方形動態追逐，因為四質點相對位置的對稱性可知四質點會一直保持正方形，最後會停在中心。

將圖形坐標化如下圖，以正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 中的 A_1 為原點 O ， $\overrightarrow{A_1A_2}$ 為 x 軸正向，四質點 $P_1P_2P_3P_4$ 作正方形動態追逐，分別位移 k 後到達現在的位置。



令 $\angle P_2A_1A_2 = \alpha$ ，正方形邊長為 l 。先獨立探討 $\Delta P_2A_1A_2$ 如下，



則可得 P_1 參數式

$$\begin{cases} x = k \cos \alpha = \frac{k\sqrt{l^2 - k^2}}{l} \\ y = k \sin \alpha = \frac{k^2}{l} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k^2 = yl \dots (1) \\ x^2 = \frac{k^2(l^2 - k^2)}{l^2} \dots (2) \end{cases}$$

將(1)代入(2)，得

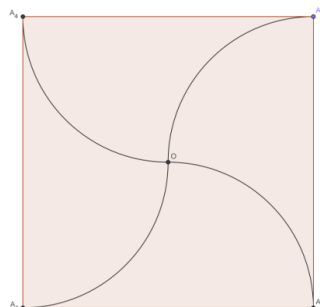
$$x^2 = \frac{yl(l^2 - yl)}{l^2}$$

$$\rightarrow x^2 + (y - \frac{l}{2})^2 = (\frac{l}{2})^2$$

為圓方程式，且以上方程式通過正方形中心 $(\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ 。

□

下圖為 $P_1P_2P_3P_4$ 作正方形動態追逐時的軌跡圖形。



整理以上的討論，得到推論 1。

推論 1 一邊長 l 的正方形 $A_1A_2A_3A_4$ ，四質點 $P_1P_2P_3P_4$ 做正方形動態追逐，以 A_i 為原點， $\overline{A_iA_{i+1}}$ 為 x 軸正向，可得動點 P_i 的軌跡方程式

$$x^2 + (y - \frac{l}{2})^2 = (\frac{l}{2})^2$$

且四質點最後匯集於中心，其中 $i = 1,2,3,4$ 且令 $A_5 = A_1$ 。

1-2. 3 質點做正三角形動態追逐

先前由我自行想出的方法，我得到正方形動態追逐的結果，所以我試著再推廣到正三角形，得到推論 2。

推論 2 一邊長 l 的正三角形 $A_1A_2A_3$ ，三質點 $P_1P_2P_3$ 做正 3 角形動態追逐，以 A_i 為原點， $\overline{A_iA_{i+1}}$ 為 x 軸正向，可得動點 P_i 的軌跡方程式

$$x^2 + (y - \frac{l}{\sqrt{3}})^2 = (\frac{l}{\sqrt{3}})^2$$

且三質點最後匯集於中心，其中 $i = 1,2,3$ 且令 $A_4 = A_1$ 。

推論 2 證明詳見附錄 1。

由前兩個討論中發現：

正方形中質點軌跡之半徑： $\frac{l}{2} = \frac{l}{2} \times \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}}$

正三角形中質點軌跡之半徑： $\frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{l}{2} \times \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}$

1-3. n 質點做正 n 邊形動態追逐

將前兩個推論推廣後得定理 1。

定理 1 邊長為 l 的正 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ ，一內角量值為 θ ， n 個質點 $P_1P_2 \dots P_n$ 做正 n 邊形動態追逐，以 A_i 為原點， $\overline{A_iA_{i+1}}$ 為 x 軸正向，可得動點 P_i 的軌跡方程式

$$x^2 + (y - \frac{l}{2 \sin \theta})^2 = (\frac{l}{2 \sin \theta})^2$$

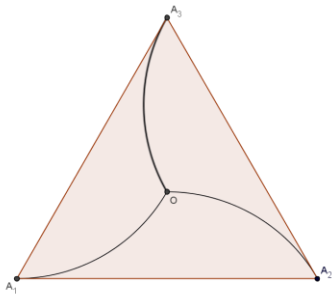
且 n 個質點最後匯集於中心。而質點 P_i 對其圓心 $(0, \frac{l}{2 \sin \theta})$ 所轉的角度量值為 θ 且其路徑長為

$\frac{l\theta}{2 \sin \theta}$ 。而其中 $i = 1,2, \dots n$ 且令 $A_{n+1} = A_1$ 。

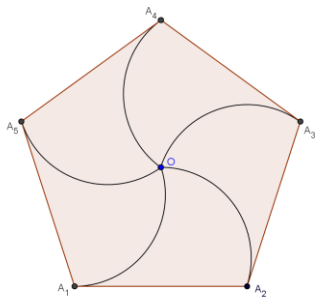
定理 1 證明詳見附錄 1。

下頁為 $n = 3,5,6$ 時， n 個質點做正 n 邊形動態追逐之圖形，

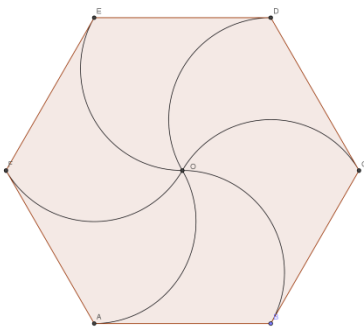
$n = 3$



$n = 5$



$n = 6$

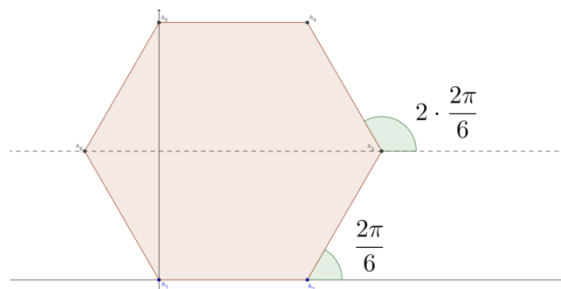


接下來我討論質點做正 n 邊形動態追逐時，每個質點對於某個特定的點是否會有特殊的軌跡。

2. 正 n 邊形動態追逐中質點間的相對軌跡

一邊長為 l 的正 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ ，其中頂點 A_1 位於座標軸原點， A_2 位於 x 軸正向，我先試著表示出每個點的座標。

因為每個頂點兩兩皆由一個邊相連，所以我們試著用邊長 l 來表示 A_k ，我以正六邊形為例討論，如下圖，



從圖中的例子可以看出， $\overline{A_j A_{j+1}}$ 和一條過 A_j 且與 x 軸平行的直線的夾角為 $(j-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$ ，因此現在便可以邊長和夾角來表示出 A_k 。此時我考慮 A_k ， $2 \leq k \leq n$ ，則由各條邊在 x 方向和 y 方向的累積，可知，

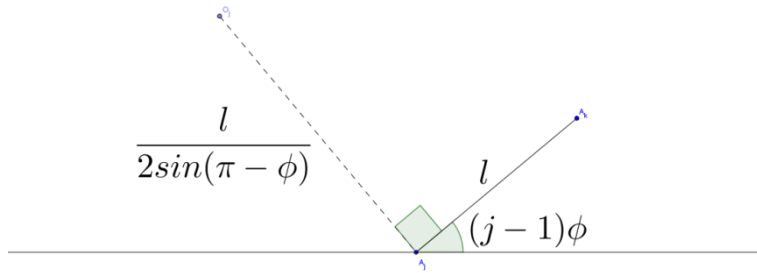
$$A_k(l \cos \phi + l \cos 2\phi + \dots + l \cos(k-2)\phi, l \sin \phi + l \sin 2\phi + \dots + l \sin(k-2)\phi)$$

即

$$A_k(l \sum_{j=0}^{k-2} \cos j\phi, l \sum_{j=0}^{k-2} \sin j\phi)$$

我令 $x_k = l \sum_{j=0}^{k-2} \cos j\phi$ ， $y_k = l \sum_{j=0}^{k-2} \sin j\phi$ ，其中 ϕ 為正 n 邊形的一個外角，量值為 $\frac{2\pi}{n}$ 。

而得到 A_k 的座標後，再嘗試找出 P_k 所對的圓心 O_k ，類似前面的方法，已知 $\overline{A_j A_{j+1}}$ 垂直 $\overline{A_j O_j}$ ，又從 $\overline{A_1 A_2}$ 旋轉到 $\overline{A_j A_{j+1}}$ 轉了 $(j-1)\phi$ ，如下圖，



因此可知 O_k 的座標為 $(x_k + \frac{l \cos(\frac{\pi}{2} + (k-1)\phi)}{2 \sin(\pi - \phi)}, y_k + \frac{l \sin(\frac{\pi}{2} + (k-1)\phi)}{2 \sin(\pi - \phi)})$ ，其中 $\frac{l}{2 \sin(\pi - \phi)}$ 為先前我

由定理 3 得到質點做正 n 邊形動態追逐的繞轉半徑，我令 $x'_k = x_k + \frac{l \cos(\frac{\pi}{2} + (k-1)\phi)}{2 \sin \phi}$ ，

$y'_k = y_k + \frac{l \sin(\frac{\pi}{2} + (k-1)\phi)}{2 \sin \phi}$ 。而當 P_1 對其圓心 O_1 角位移了 α 時，同理，此時 $\overline{O_k P_k}$ 和 $\overline{O_1 P_1}$ 的夾角

量值為 $\alpha + (k-1)\phi$ ，而又原本 P_1 有初始角位置 $-\frac{\pi}{2}$ (A_1 從 O_1 的正下方開始運動)，因此我們比

對 P_1 和 P_k 如下，

$$P_1\left(\frac{l \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{2 \sin \phi}, \frac{l}{2 \sin \phi} + \frac{l \sin(\alpha - \frac{\pi}{2})}{2 \sin \phi}\right)$$

$$P_k\left(x'_k + \frac{l \cos\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + (k-1)\phi\right)}{2 \sin \phi}, y'_k + \frac{l \sin\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + (k-1)\phi\right)}{2 \sin \phi}\right)$$

若我們設定原點時時刻刻皆為 P_1 ，則得到 P_k 的參數式

$$\begin{cases} x = x'_k + \frac{l \cos\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + (k-1)\phi\right)}{2 \sin \phi} - \frac{l \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{2 \sin \phi} \\ y = y'_k + \frac{l \sin\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + (k-1)\phi\right)}{2 \sin \phi} - \left(\frac{l}{2 \sin \phi} + \frac{l \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{2 \sin \phi}\right) \end{cases}$$

移項得

$$\begin{cases} x - x'_k = \frac{l}{2 \sin \phi} \left(\cos\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + (k-1)\phi\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ y - y'_k + \frac{l}{2 \sin \phi} = \frac{l}{2 \sin \phi} \left(\sin\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + (k-1)\phi\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right) \end{cases}$$

再由和差化積可得

$$\begin{cases} x - x'_k = \frac{l}{2 \sin \phi} \cdot (-2) \sin\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{k-1}{2}\phi\right) \sin \frac{k-1}{2}\phi \\ y - y'_k + \frac{l}{2 \sin \phi} = \frac{l}{2 \sin \phi} \cdot 2 \cos\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{k-1}{2}\phi\right) \sin \frac{k-1}{2}\phi \end{cases}$$

將有關 α 的式子留在右邊

$$\begin{cases} \frac{-\sin \phi (x - x'_k)}{l \sin \frac{k-1}{2}\phi} = \sin\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{k-1}{2}\phi\right) \\ \frac{\sin \phi \left(y - y'_k + \frac{l}{2 \sin \phi}\right)}{l \sin \frac{k-1}{2}\phi} = \cos\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{k-1}{2}\phi\right) \end{cases}$$

最後根據 $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ ，可得

$$\left(\frac{-\sin \phi (x - x'_k)}{l \sin \frac{k-1}{2}\phi} \right)^2 + \left(\frac{\sin \phi \left(y - y'_k + \frac{l}{2 \sin \phi}\right)}{l \sin \frac{k-1}{2}\phi} \right)^2 = 1$$

因此我們得到

$$(x - x'_k)^2 + \left(y - y'_k + \frac{l}{2 \sin \phi}\right)^2 = \left(\frac{l \sin \frac{k-1}{2}\phi}{\sin \phi}\right)^2$$

而這也就表示，當 P_1 在移動時，看到 P_k 的移動情形為， P_k 繞著圓弧在接近 P_1 自己。 \square

由以上結果及前面對變數的假設，得到定理 2。

定理 2 正 n 邊形動態追逐中質點間的相對軌跡

一邊長為 l 的正 n 邊形 $A_1 A_2 \dots A_n$ ，頂點 A_1 位於座標軸原點， A_2 位於 x 軸正向， n 個質點 $P_1 P_2 \dots P_n$ 做正 n 邊形動態追逐，則若將 P_1 的位置始終設為原點，則其中一點 P_k ($2 \leq k \leq n$) 的軌跡，即 P_k 相對於 P_1 的軌跡方程式為

$$(x - x_k)^2 + \left(y - y_k + \frac{l}{2 \sin \phi}\right)^2 = \left(\frac{l \sin \frac{k-1}{2}\phi}{\sin \phi}\right)^2$$

其中 $\theta = \frac{2\pi}{n}$, $x_k = l \sum_{j=0}^{k-2} \cos j\theta + \frac{l \cos(\frac{\pi}{2} + (k-1)\theta)}{2 \sin \theta}$, $y_k = l \sum_{j=0}^{k-2} \sin j\theta + \frac{l \sin(\frac{\pi}{2} + (k-1)\theta)}{2 \sin \theta}$ 。

定理 2 的證明如前文所述。

我以正方形的一個點舉例。正方形 $A_1A_2A_3A_4$, A_1 位於坐標軸原點, A_2 在 x 軸正向, 計算 P_2 相對於 P_1 的相對軌跡。

$$A_2(l \sum_{j=0}^0 \cos \frac{j\pi}{2}, l \sum_{j=0}^0 \sin \frac{j\pi}{2}) = (l, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (l + \frac{l \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})}{2 \sin \frac{\pi}{2}}, 0 + \frac{l \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})}{2 \sin \frac{\pi}{2}}) = (\frac{l}{2}, 0)$$

因此 P_2 相對於 P_1 的軌跡方程式即為

$$(x - \frac{l}{2})^2 + (y + \frac{l}{2})^2 = (\frac{l}{\sqrt{2}})^2$$

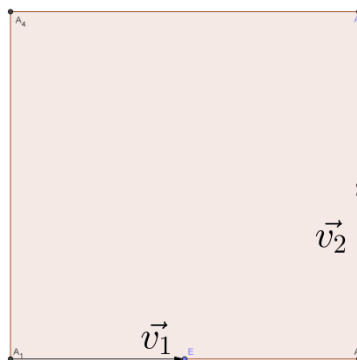
3. 正 n 邊形動態追逐結果與等角螺線的比較

| 文獻[1]的題目 | 動態追逐 |
|--|---|
| 瞬時速度方向指向目標點 | 平均速度方向指向目標點 |
| 軌跡:等角螺線 | 軌跡:圓弧 |
| 一質點總路徑長 $d_1 = \frac{l}{2} \csc^2 \frac{\pi}{n}$ | 一質點總路徑長 $d_2 = \frac{l\theta}{2 \sin \theta}$ |

3-1. 利用非微積分的方式計算等角螺線路徑長

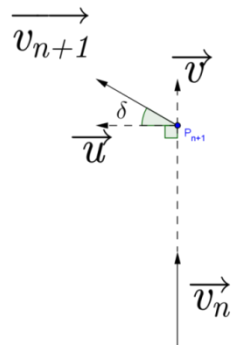
文獻[1]的題目結果對數螺旋(等角螺線)的路徑長是出自書中作者利用微積分所算出, 但除此法外, 我們也可利用其他技巧避免使用微積分計算, 我的做法如下。

首先當正 n 邊形為正方形時兩質點的相對情況如下圖,



當 P_1 往 P_2 前進時, P_2 正往 P_3 前進, 所以此時 P_2 的速度 \vec{v}_2 是垂直 P_1 的速度 \vec{v}_1 的, 也因此 P_2 每一時刻的位移都對於減小 P_1 、 P_2 兩質點間的距離毫無幫助, 所以 P_1 要追上 P_2 得完完全全移動了原本兩人的距離: l 。

以此，可推廣至內角為 θ 的正 n 邊形如下，



當質點 P_n 朝向 P_{n+1} 前進時，把 P_{n+1} 的速度 $\overrightarrow{v_{n+1}}$ 分解成垂直和平行 P_n 的速度 $\overrightarrow{v_n}$ 的兩分量 \overrightarrow{u} 和 \overrightarrow{v} ，此時因為 \overrightarrow{u} 和 \overrightarrow{v} 垂直，因此 \overrightarrow{u} 和 $\overrightarrow{v_{n+1}}$ 的夾角 δ 即等於 $\theta - \frac{\pi}{2}$ ，由前面討論可知，會影響兩質點路徑長的為平行於 $\overrightarrow{v_n}$ 的速度分量 \overrightarrow{v} ，此時已可求出 $|\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{v_{n+1}}| \sin \delta$ ，在此，為求方便，假設每個質點的速率皆為 w ，即 $v_n = v_{n+1} = w$ ，因此在假設總時間為 t 的前提下可作以下討論。

照著路徑走完，質點路徑長 $k = wt \dots (7)$ ，其中 k 即為所求之路徑長。

而每個時刻 P_n 可接近 P_{n+1} ($w - w \sin \delta$) 的距離，且因為時間 t 過去後兩質點即會相遇，所以可知: $l = (w - w \sin \delta)t \dots (8)$ 。

由(7)、(8)兩式可知

$$k = \frac{lw}{w - w \sin \delta}$$

其中 $\sin \delta = \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos \theta$ 且由正多邊形內角和邊的關係可知: $\theta = \pi - \frac{2\pi}{n}$ ，代入 k 得

$$\begin{aligned} k &= \frac{l}{1 + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{l}{1 - (1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right))} \\ &= \frac{l}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{l}{2} \csc^2 \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

可得到文獻[1]用微積分計算而得到的結果相同的結果。 □

3-2. 文獻[1]的題目和研究題目路徑長的比較

定理 3 文獻[1]的題目路徑長 $d_1 = \frac{l}{1 + \cos \theta}$ ，動態追逐路徑長 $d_2 = \frac{l\theta}{2 \sin \theta}$ ， $d_1 > d_2$ 恆成立，

其中 $l > 0$ ， $\theta = \pi - \frac{2\pi}{n}$ 且 $n \in N$ ， $n \geq 3$ 。

定理 3 證明如下。

文獻[1]的題目路徑長為

$$d_1 = \frac{l}{2} \csc^2 \frac{\pi}{n} = \frac{l}{1 + \cos \theta}$$

研究題目路徑長為

$$d_2 = \frac{l\theta}{2 \sin \theta}, \theta = \pi - \frac{2\pi}{n}$$

以 θ 作為自變數並改用 x 表示 θ ，令 $f(x) = \frac{d_1}{d_2}$ ，則

$$f(x) = \frac{\frac{l}{1 + \cos x}}{\frac{l x}{2 \sin x}} = \frac{2 \sin x}{x(1 + \cos x)}$$

其中 x 之範圍為

$$\frac{\pi}{3} \leq x < \pi$$

下限 $\frac{\pi}{3}$ 來自正三角形之內角，上限 π 來自 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\pi - \frac{2\pi}{n})$ 。

當 $n = 3$ 時， $x = \frac{\pi}{3}$ ，則

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3} \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right)} \\ &\approx \frac{1.732}{1.047 \times 1.5} \approx 1.103 > 1 \end{aligned}$$

因此可知，當 $n = 3$ ，即 $x = \frac{\pi}{3}$ 時， $d_1 > d_2$ 。

將 $f(x)$ 微分，得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \cos x \cdot x(1 + \cos x) - 2 \sin x(1 + \cos x + x(-\sin x))}{x^2(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{2x \cos x + 2x \cos^2 x - 2 \sin x - 2 \sin x \cos x + 2x \sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{2(x - \sin x)}{x^2(1 + \cos x)} \end{aligned}$$

當 $\frac{\pi}{3} \leq x < \pi$ ， $x^2(1 + \cos x) > 0$ 成立，又 $\sin x \leq 1$ 且 $x \geq \frac{\pi}{3} \approx 1.047 > 1$ ，因此 $2(x - \sin x) > 0$

在 $[\frac{\pi}{3}, \pi)$ 成立，所以 $f'(x)$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \pi)$ 恆正，因此 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \pi)$ 嚴格遞增，又在前文已知 $f(\frac{\pi}{3}) > 1$ ，

因此可知 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \pi)$ 恆大於 1，所以在 $n \geq 3$ 時， $\frac{d_1}{d_2} > 1$ 恆成立，因此 $d_1 > d_2$ 恆成立。□

4. 質點做n邊形動態追逐

4-1. 4 質點做長方形動態追逐

接著我探討長方形動態追逐，利用先前的經驗，我找出質點在各時刻位移對於參數的關係，得到推論 3。

推論 3 一長方形 $A_1A_2A_3A_4$ ，其中 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_3A_4} = a$ ， $\overline{A_2A_3} = \overline{A_4A_1} = b$ ，四質點 $P_1P_2P_3P_4$ 做 4 邊形動態追逐且四質點速率比為 $b:a:b:a$ ，以 A_i 為原點， $\overline{A_iA_{i+1}}$ 為x軸正向，可得動點 P_i 的軌跡方程式

$$x^2 + \left(y - \frac{a_{i-1}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_{i-1}}{2}\right)^2$$

其中 $a_1 = a_3 = a$ ， $a_2 = a_4 = b$ ， $i = 1,2,3,4$ 且令 $A_5 = A_1$ ， $a_0 = a_4$ 。

而在 P_1 和 P_2 相遇以及 P_3 和 P_4 相遇後 P_1 和 P_3 就分別跟著 P_2 和 P_4 往對方靠近直到四質點匯集於中心。

推論 3 證明詳見附錄 1。

4-2. 3 質點做三角形動態追逐

接著推廣到任意三角形，

推論 4 $\Delta A_1A_2A_3$ ，3 個內角 $\theta_1\theta_2\theta_3$ ，其中 $\overline{A_1A_2} = a_1$ ， $\overline{A_2A_3} = a_2$ ， $\overline{A_3A_1} = a_3$ ，三質點 $P_1P_2P_3$ 做 3 角形動態追逐且三點速率比為 $\frac{a_3}{a_2} : \frac{a_1}{a_3} : \frac{a_2}{a_1}$ ，以 A_i 為原點， $\overline{A_iA_{i+1}}$ 為x軸正向，可得動點 P_i 的軌跡方程式

$$x^2 + \left(y - \frac{a_{i-1}R}{a_{i+1}}\right)^2 = \left(\frac{a_{i-1}R}{a_{i+1}}\right)^2$$

且 $P_1P_2P_3$ 最後匯集於 $\Delta A_1A_2A_3$ 的 *Brocard Point*，其中 R 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外接圓半徑， $i = 1,2,3$ 且令 $a_0 = a_3$ ， $a_4 = a_1$ ， $A_4 = A_1$ 。

推論 4 證明詳見附錄 1。

4-3. n質點做n邊形動態追逐

最後我們將前述推論推廣得到定理 4。

定理 4 一凸多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ ， n 個內角 $\theta_1\theta_2 \dots \theta_n$ ，其中 $\overline{A_1A_2} = a_1$ ， $\overline{A_2A_3} = a_2$ ，...， $\overline{A_nA_1} = a_n$ ， n 個質點 $P_1P_2 \dots P_n$ 做 n 邊形動態追逐且速率比為 $\frac{a_n}{\sin\theta_1} : \frac{a_1}{\sin\theta_2} : \dots : \frac{a_{n-1}}{\sin\theta_n}$ ，以 A_i 為原點， $\overline{A_iA_{i+1}}$ 為x軸正向，可得動點 P_i 的軌跡方程式

$$x^2 + \left(y - \frac{a_{i-1}}{2\sin\theta_i}\right)^2 = \left(\frac{a_{i-1}}{2\sin\theta_i}\right)^2$$

其中 $i = 1,2, \dots, n$ 且令 $a_0 = a_n$ ， $A_{n+1} = A_1$ 。

定理 4 證明詳見附錄 1。

而質點在做任意 n 邊形動態追逐時，若有質點先相遇，則可以前述在長方形做四邊形動態追逐(1.)的方式逐一討論之，每有兩點(或更多點同時)相遇，後續情況就會從 n 邊形動態追逐轉變成 $(n-1)$ 邊形(或更少的邊)動態追逐。我將此過程以演算法呈現。

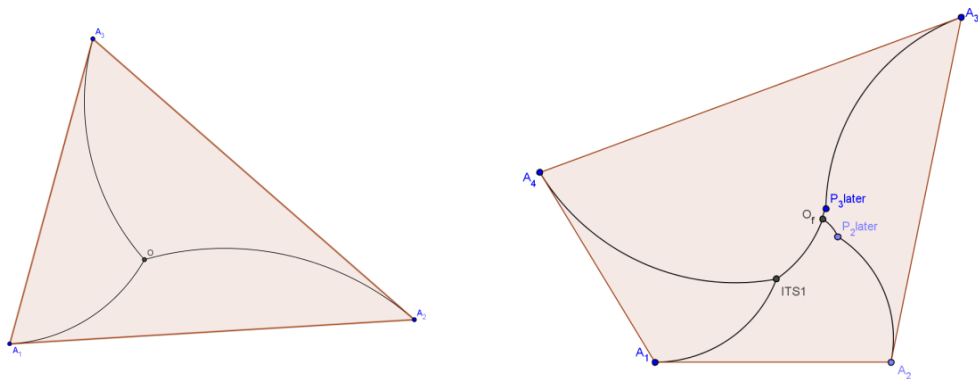
Step 1.將各質點的完整軌跡畫出。

Step 2.利用角度算出先相遇的點，相遇追逐點與目標點合成一點，此時點數變為 $(n-1)$ 個

或更少。

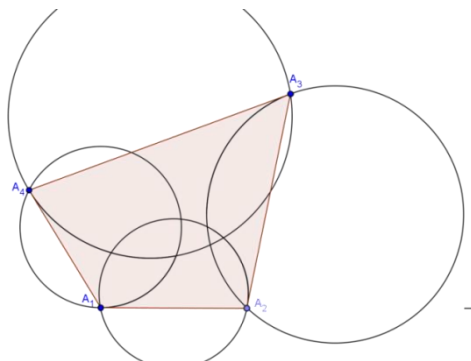
Step 3.若質點數超過 1，則回到**Step 1**；若質點數等於 1，則結束。

以下為質點作三角形以及任意四邊形動態追逐的一個例子。

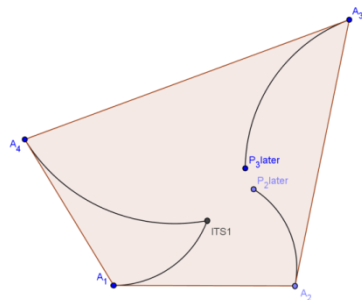


我以右上圖四邊形動態追逐為例說明

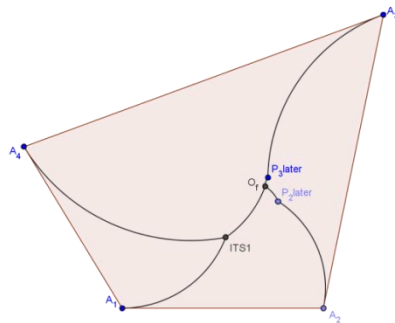
Step 1. 我把四質點一開始所做完整的圓畫出。



Step 2. 利用角度算出 P_1 和 P_4 先行相遇，剩下 $P_1(P_4)$ 、 P_2 及 P_3 ，三點即做三角形動態追逐。



Step 3. 繼續從**Step 1**操作，三質點在一點相遇。



我試著找出質點作一般多邊形動態追逐時是否會在特定條件下能和三角形一樣同時相遇於一

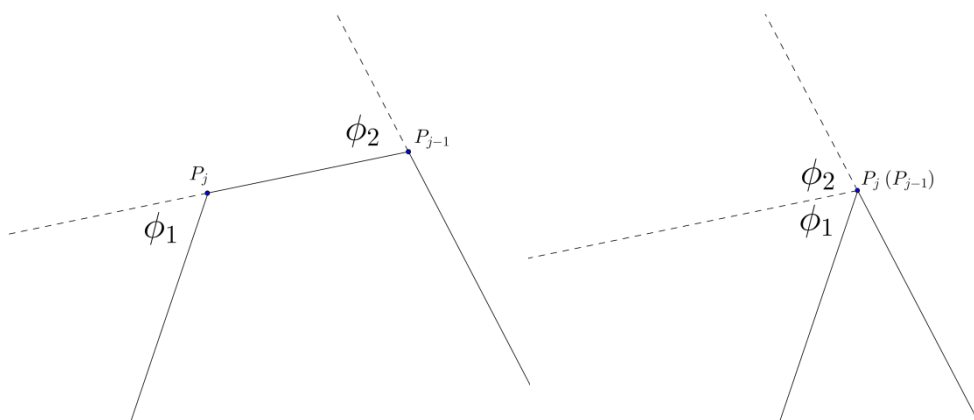
點，但此充要條件在一般多邊形下非常難找，但我還是有得到一個特殊的結論，以下為推論 5。

推論 5 四質點在調和四邊形上做四邊形動態追逐，則四質點會同時交會於一點。其中調和四邊形的定義是符合 $\overline{AB} \times \overline{CD} = \overline{AD} \times \overline{BC}$ 的圓內接四邊形 $ABCD$ 。

以下證明推論 5。

推論 5 證明詳見附錄 1。

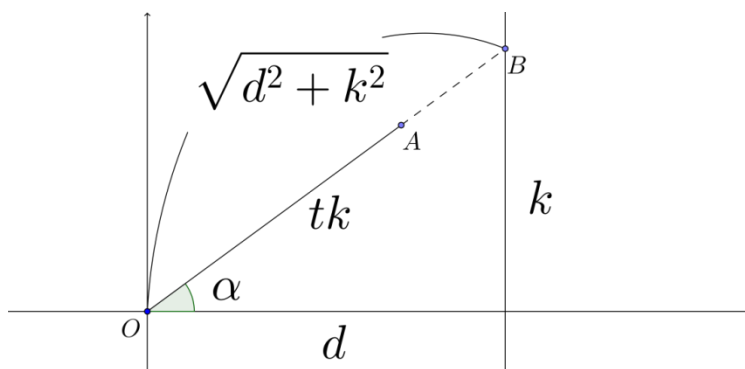
而我在定義 n 邊形動態追逐時，是規定各外角守恆而不是比較直觀的各內角守恆是因為，在有質點相遇時，新形成質點的外角剛好等於先前兩質點的外角和，如下頁所示，左圖是質點 P_{j-1} 和 P_j 還未相遇時，右圖則是 P_{j-1} 追上 P_j 後的情況。



而內角則較原兩質點內角和少了 π ，因此我以外角作為定義。

5. 質點 A 對質點 B 做單向追逐

一質點 A 在坐標軸原點上，質點 B 位於 $(d, 0)$ ，質點 A 對質點 B 做單向追逐，質點 B 保持等速度 v ，質點 B 的位移大小為 k ，質點 A 的位移大小總是質點 B 的 t 倍，即 tk ，略做簡圖如下圖，



其中假設 \overline{OA} 和 x 軸夾角的量值為 α ，因此可得 A 點參數式如下

$$\begin{cases} x = tk \cos \alpha = \frac{tkd}{\sqrt{d^2 + k^2}} \\ y = tk \sin \alpha = \frac{tk^2}{\sqrt{d^2 + k^2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{t^2 k^2 d^2}{d^2 + k^2} \dots (28) \\ y^2 = \frac{t^2 k^4}{d^2 + k^2} \dots (29) \end{cases}$$

由(28)可得

$$x^2d^2 + x^2k^2 = t^2k^2d^2 \rightarrow k^2 = \frac{x^2d^2}{t^2d^2 - x^2}$$

將上式代入(29)，可得

$$y^2 = \frac{\frac{t^2x^4d^4}{(t^2d^2 - x^2)^2}}{d^2 + \frac{x^2d^2}{t^2d^2 - x^2}} = \frac{x^4}{t^2d^2 - x^2}$$

$$\rightarrow y = \sqrt{\frac{x^4}{t^2d^2 - x^2}}$$

令 $f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{t^2d^2 - x^2}}$ ，我想知道此時 $y = f(x)$ 和 $x = d$ 是否有交點，意即 A 點和 B 點是否會相遇，因此將 $x = d$ 代入 $f(x)$ 如下，

$$f(d) = \sqrt{\frac{d^4}{t^2d^2 - d^2}} = \frac{d}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

以下討論 t 在不同範圍時軌跡圖的情形。

當 $t > 1$ ， $y = f(x)$ 和 $x = d$ 交於 $(d, \frac{d}{\sqrt{t^2 - 1}})$ ，意即 A 點能追上 B 點。

當 $t \leq 1$ ，因為 $\frac{d}{\sqrt{t^2 - 1}}$ 不存在或不為實數，因此 $y = f(x)$ 和 $x = d$ 無交點，意即 A 點無法追上 B 點，

並且由 $\lim_{x \rightarrow td} |f(x)|$ 發散，可以知道 $y = f(x)$ 有一條鉛直漸近線 $x = td$ 。 □

總結以上，得到定理 5。

定理 5 質點 A 位於坐標軸原點，質點 B 位於 $(d, 0)$ ， A 點對 B 點做單向追逐且 A 點的位移大小

總是為 B 點的 t 倍，則 A 點運動的軌跡方程式為 $y = f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{t^2d^2 - x^2}}$ ，其中 t 決定了 A 、 B 兩

點相遇情況，稱為單向追逐因子，並依其範圍分為兩種情形，

當 $t > 1$ ， $y = f(x)$ 和 $x = d$ 交於 $(d, \frac{d}{\sqrt{t^2 - 1}})$ ，意即 A 點能追上 B 點。

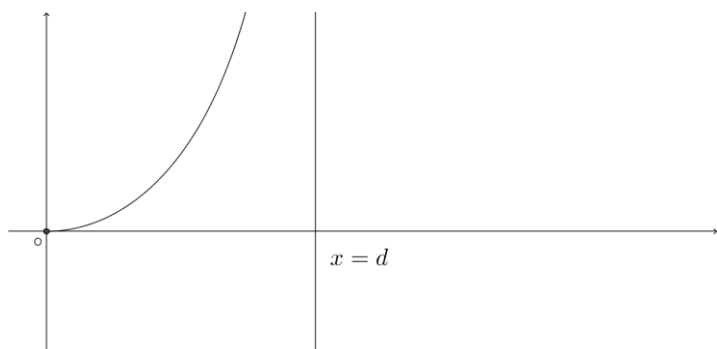
當 $t \leq 1$ ， $y = f(x)$ 和 $x = d$ 無交點，意即 A 點無法追上 B 點，且 $y = f(x)$ 有一條鉛直漸近線 $x = td$ 。

定理 5 的證明如前文所述。

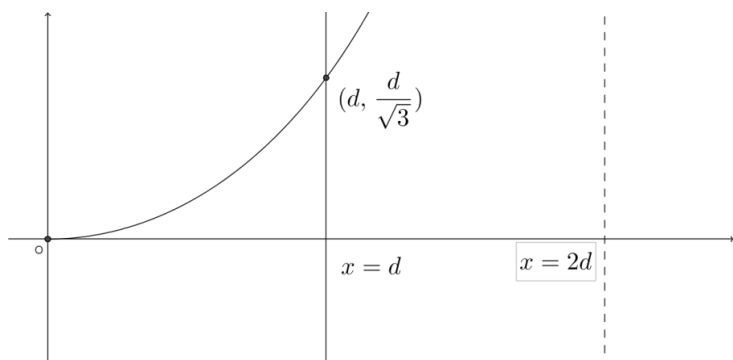
(其實當 $t > 1$ 時， $\lim_{x \rightarrow td} |f(x)|$ 亦發散，因此此時 $y = f(x)$ 亦有一條鉛直漸近線 $x = td$ ，但因為當 $x = td > d$ 時， A 點和 B 點早已相遇，因此不作討論。)

下頁為 $t = 1$ 、 $t = 2$ 及 $t = 0.5$ 時， A 對 B 做單向追逐的軌跡圖。

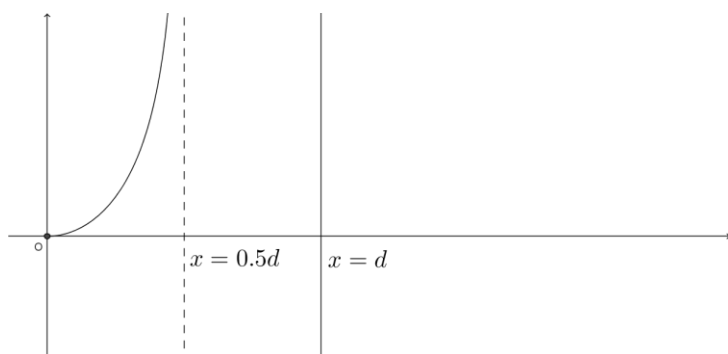
$t = 1$



$t = 2$



$t = 0.5$



根據先前的定理 3，可以得知以我所新定義的追逐方式質點所經的路徑長，會比傳統直覺地追逐方式還來的短，因此我猜測此情況也可能發生於單向追逐:傳統的攔截飛彈系統都是利用任何時刻的瞬間速度方向指向目標物的方式，我將這種傳統的方式稱做**經典單向追逐**，若以上的猜測成立的話，那可將我的單向追逐的概念套用到攔截飛彈的系統上，因此我試著做出證明，但因單向追逐以及經典單向追逐問題地曲線路徑長經積分後都無法以初等函數表是，故我只能以資料及圖片呈現我的猜測結果，得到猜想 1。

猜想 1 質點A對質點B做單向追逐，A點的追逐軌跡為

$$y = \sqrt{\frac{x^4}{t^2 d^2 - x^2}}$$

其中 $(d, 0)$ 為B點初始位置， t 為A、B兩點總位移比值。

質點A對質點B做經典單向追逐，A點的追逐軌跡為

$$y = \frac{1}{2}(d-x) \left(\frac{(1-\frac{x}{d})^n}{1+n} - \frac{(1-\frac{x}{d})^{-n}}{1-n} \right) + \frac{nd}{1-n^2}$$

其中 $(d, 0)$ 為 B 點初始位置， n 為 B 、 A 兩點速率比值。

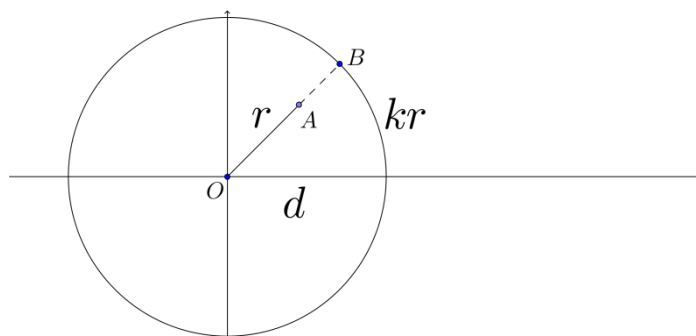
在兩項追逐中，若 B 點初始位置相同， $t^{-1} = n$ ，則 A 點做單向追逐的路徑長小於 A 點做經典單向追逐的路徑長。

猜想 1 想法詳見附錄 2。

此猜想若可經更嚴謹的證明，則就可以確定，單向追逐在應用上比傳統單向追逐更具優勢，因其所花路徑長較短。

6. 質點 A 對質點 B 做圓形追逐

質點 A 在坐標軸原點上，質點 B 以 $(d, 0)$ 為始點，以原點為圓心，作半徑為 d 的等速率圓周運動，質點 A 對質點 B 做圓形追逐且其位移大小為 r ，質點 B 的路徑長總是質點 A 位移的 k 倍，略做簡圖如下圖，



接下來我們以極坐標來討論 A 點做圓形追逐的軌跡。照我們的定義， \overline{OB} 和 x 軸的夾角 θ 顯然可表為

$$\theta = \frac{kr}{d} \rightarrow r = \frac{d}{k} \cdot \theta$$

因此 A 點做圓形追逐的極坐標軌跡方程式即為

$$r = \frac{d}{k} \cdot \theta$$

此為阿基米德螺線的一般形式($r = a\theta$)，其實阿基米德螺線的定義和我們所定義的圓形追逐極為類似，以下為阿基米德螺線的定義。

阿基米德螺線 當一點 P 沿動射線 \overline{OP} 以等速率運動的同時，這射線又以等角速度繞點 O 旋轉，點 P 的軌跡稱為「阿基米德螺線」。它的極坐標方程為 $r = a\theta$ ，其中 a 為常數。

而我們可以 $r = \frac{d}{k} \cdot \theta$ 中 k 的大小決定 A 、 B 兩點何時相遇，分析如下。

若希望 A 、 B 兩點在 B 點角位移 $\Delta\theta$ 後相遇，則當 B 點走了全程路徑長 $d\Delta\theta$ 後， A 點位移量值為半

徑 d ，因此可知 A 點的極坐標軌跡方程式 $r = \frac{d}{k} \cdot \theta$ 中的 k 量值即為 $\Delta\theta$ ，所以我們就可寫出當 A 點

做圓形追逐的極坐標軌跡方程式為

$$r = \frac{d}{k} \cdot \theta = \frac{d}{\Delta\theta} \cdot \theta$$

而因為當 B 點角位移 $\Delta\theta$ 後兩點即相遇，追逐也告結束，因此 θ 的限制條件為 $0 \leq \theta \leq \Delta\theta = k$ 。□
總結以上，得到定理 6。

定理 6 質點 A 位於坐標軸原點，質點 B 以 $(d, 0)$ 為始點，以原點為圓心，作半徑為 d 的等速率圓周運動，質點 A 對質點 B 做圓形追逐，質點 B 的路徑長總是質點 A 位移的 k 倍，則 A 點的運動軌跡為阿基米德螺線，其極坐標方程式可表為

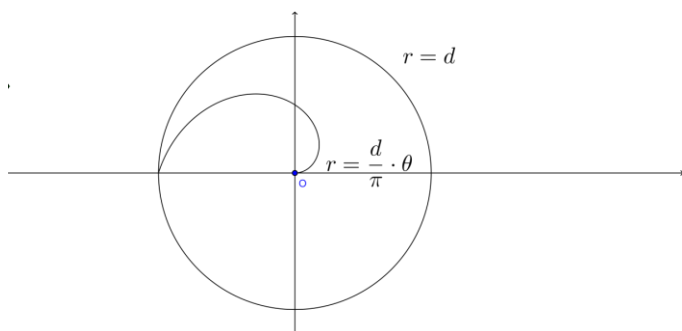
$$r = \frac{d}{k} \cdot \theta, 0 \leq \theta \leq k$$

其中 d 為 B 點作等速率圓周運動的半徑。

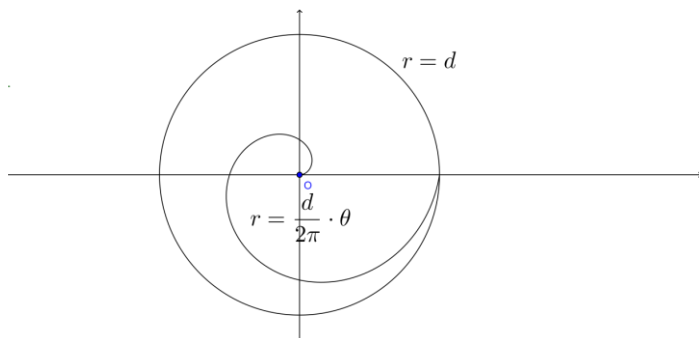
定理 6 的證明如前文所述。

以下作 k 為 π 、 2π 和 4π 的圓形追逐軌跡圖。

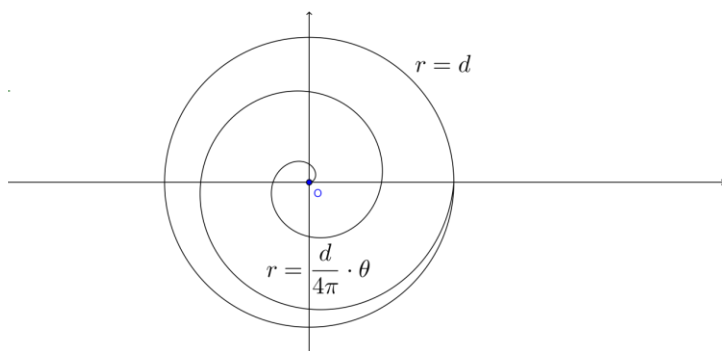
$k = \pi$



$k = 2\pi$



$k = 4\pi$



四、參考資料

一、單行本

[1]Steven Strogatz 著。葉承志 譯。學微積分，也學人生。初版，台北市，遠流出版事業股份有限公司 出版，238 頁，2011.10。

[2]Paul J.Nahin 著。Chases and escapes:the mathematics of pursuit and evasion. Princeton,New Jersey. Princeton University Press. 250 pages. 2007.

二、網路資源

[3] Katy Steiner, Jonah Franchi (2011.5). Pursuit Curves

取自

http://home2.fvcc.edu/~dhicketh/DiffEqns/Spring11projects/Jonah_Franchi_Katy_Steiner/Diff%20EQ%20Project.pdf

[4]趙文敏(1989.9)。等角螺線及其他。

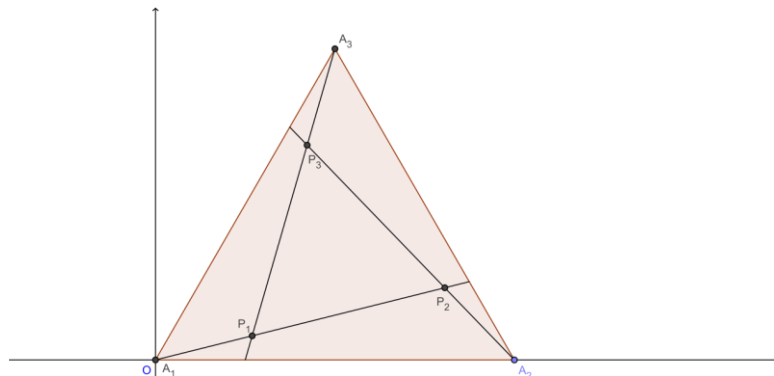
取自

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_20_09_1/

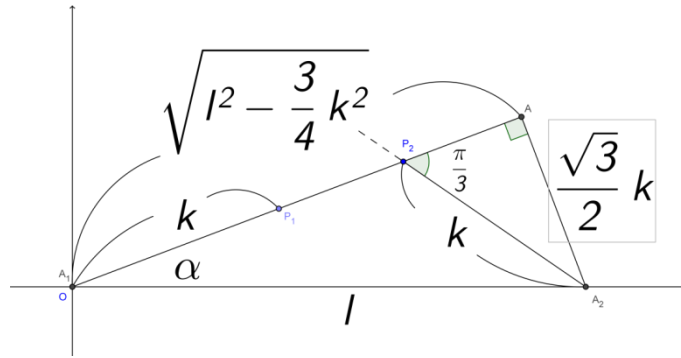
附錄 1

推論 2 證明。

設三質點 $A_1A_2A_3$ 形成一正三角形， A_1 為原點 O ， $\overrightarrow{A_1A_2}$ 為 x 軸正向，三質點 $P_1P_2P_3$ 做正三角形動態追逐，分別位移 k 後到達現在的位置，略作簡圖如下，



令 $\angle P_2A_1A_2=\alpha$ ，正三角形邊長 l ，作 $\overrightarrow{A_2A}$ 垂直 $\overrightarrow{P_2A_1}$ 於 A ，獨立探討 ΔAA_1A_2 如下頁，



其中因為 $\angle A_2P_2A$ 大小等於正三角形一內角(對頂角)，因此 $\angle A_2P_2A = \frac{\pi}{3}$ ，所以即可推得動點 P_1 的參數式

$$\begin{cases} x = k\cos\alpha = \frac{k\sqrt{l^2 - \frac{3}{4}k^2}}{l} \\ y = k\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}k^2/l \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k^2 = \frac{2yl}{\sqrt{3}} \dots (3) \\ x^2 = \frac{k^2(l^2 - \frac{3}{4}k^2)}{l^2} \dots (4) \end{cases}$$

將(3)代入(4)，得

$$x^2 = \frac{\frac{2yl}{\sqrt{3}}(l^2 - \frac{3}{4} \times \frac{2yl}{\sqrt{3}})}{l^2}$$

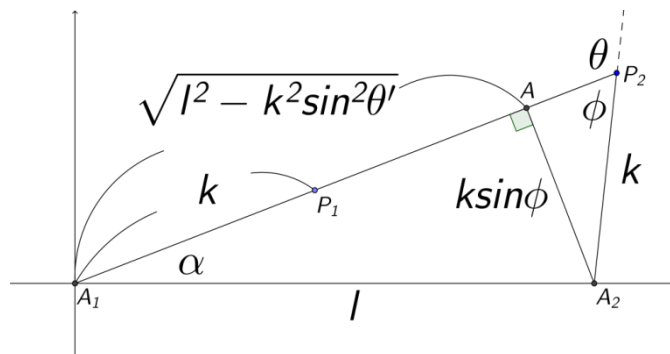
$$\rightarrow x^2 + (y - \frac{l}{\sqrt{3}})^2 = (\frac{l}{\sqrt{3}})^2$$

且以上方程式通過正三角形中心 $(\frac{l}{2}, \frac{l}{2\sqrt{3}})$ 。

□

定理 1 證明。

一邊長為 l 的正 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ ，令其一內角 θ ， $P_1P_2 \dots P_n$ 做正 n 邊形動態追逐，分別位移 k 後移至現在的位置，則可獨立探討 $\Delta A_1A_2P_2$ 如下，



令 $\angle A_1P_2A_2 = \phi$ (即此多邊形外角)， $\angle P_2A_1A_2 = \alpha$ ，作 $\overline{AA_2}$ 使得 $\overline{AA_2}$ 垂直 $\overline{A_1P_2}$ 於 A ，得 P_1 參數式

$$\begin{cases} x = k\cos\alpha = \frac{k\sqrt{l^2 - k^2\sin^2\phi}}{l} \\ y = k\sin\alpha = \frac{k^2\sin\phi}{l} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k^2 = \frac{yl}{\sin\phi} \dots (5) \\ x^2 = \frac{k^2(l^2 - k^2\sin^2\phi)}{l^2} \dots (6) \end{cases}$$

將(5)代入(6)，得

$$x^2 = \frac{\frac{yl}{\sin\phi}(l^2 - \frac{yl\sin^2\phi}{\sin\phi})}{l^2}$$

$$\rightarrow x^2 + (y - \frac{l}{2\sin\phi})^2 = (\frac{l}{2\sin\phi})^2$$

其中因為 $\phi+\theta=\pi$ ，因此 $\sin\phi = \sin\theta$ ，故 n 質點在邊長為 l 的正 n 邊形做動態追逐，其一點軌跡為

$$x^2 + (y - \frac{l}{2\sin\theta})^2 = (\frac{l}{2\sin\theta})^2$$

接下來證明質點 P_i 最後全部會會集於正 n 邊形中心 G 。

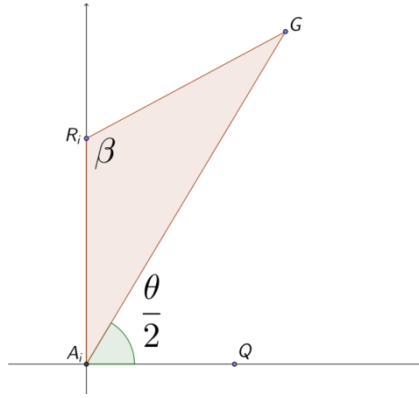
考慮三角形 A_1A_2G ，得 G 之座標為 $(\frac{l}{2}, \frac{l\tan\frac{\theta}{2}}{2})$ ，將此座標代入所計算出之方程式，得：

$$\begin{aligned} \text{左式} &= (\frac{l}{2})^2 + (\frac{l\tan\frac{\theta}{2}}{2} - \frac{l}{2\sin\theta})^2 \\ &= (\frac{l}{2})^2 (1 + (\tan\frac{\theta}{2} - \csc\theta)^2) \\ &= (\frac{l}{2})^2 (1 + (\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}})^2) \\ &= (\frac{l}{2})^2 (1 + (\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2} - 1}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}})^2) \\ &= (\frac{l}{2})^2 (1 + (\frac{-\cos\theta}{\sin\theta})^2) \\ &= (\frac{l}{2})^2 (1 + (\cot\theta)^2) \\ &= (\frac{l}{2\sin\theta})^2 = \text{右式} \end{aligned}$$

故質點 P_i 最後全部會會集於正 n 邊形中心 G 。

接下來證明質點 P_i 對其圓心 $(0, \frac{l}{2\sin\theta})$ 所轉的角度量值即為 θ 以及其路徑長為 $\frac{l\theta}{2\sin\theta}$ 。

考慮正 n 邊形其中一質點 P_i 之起點和終點如下頁之圖，



令質點 P_i 自其起點 A_i 對其繞轉圓心 R_i ($0, \frac{l}{2 \sin \theta}$)轉了角度 β ，且因為 $\Delta R_i A_i G$ 兩邊 $\overline{R_i A_i}$ 及 $\overline{R_i G}$ 量值皆為圓弧半徑 $\frac{l}{2 \sin \theta}$ ，因此 $\Delta R_i A_i G$ 為等腰 Δ ，其中 G 為此正 n 邊形之中心，所以 $\angle R_i A_i G$ 量值為 $\frac{\pi - \beta}{2}$ ，又因為此正 n 邊形一內角 θ 且一頂點 A_i 對 G 之連線段 $\overline{A_i G}$ 平分其一內角，因此 $\angle G A_i Q$ 量值為 $\frac{\theta}{2}$ ，其中 Q 為位於 x 軸正向上之一點。

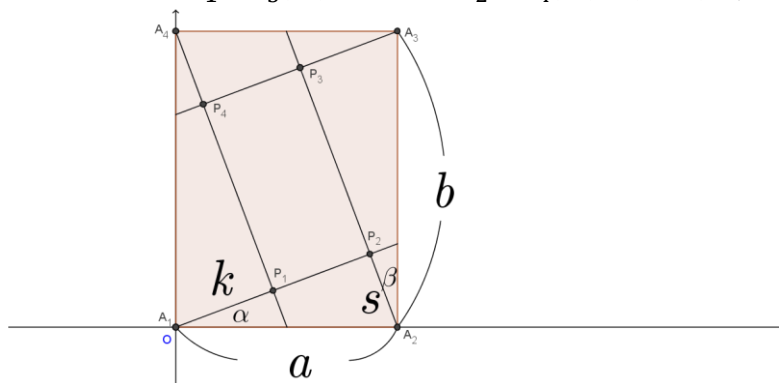
由 $\angle R_i A_i G + \angle G A_i Q = \frac{\pi}{2}$ ，可得

$$\begin{aligned} \frac{\pi - \beta}{2} + \frac{\theta}{2} &= \frac{\pi}{2} \\ \rightarrow \beta &= \theta \end{aligned}$$

而質點 P_i 之繞轉半徑及繞轉角度已證得為 $\frac{l}{2 \sin \theta}$ 及 θ ，因此質點 P_i 之路徑長即為 $\frac{l\theta}{2 \sin \theta}$ 。□

推論 3 證明。

四質點 $P_1 P_2 P_3 P_4$ 做 4 邊形動態追逐，令長方形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 中， $\overline{A_1 A_2}$ 、 $\overline{A_3 A_4}$ 量值為 a ， $\overline{A_2 A_3}$ 、 $\overline{A_4 A_1}$ 量值為 $b=ta$ ，質點 P_1 、 P_3 位移 k ，質點 P_2 、 P_4 位移 s 後，情形如下圖，



以 A_1 為原點， $\overline{A_1 A_2}$ 為 x 軸正向，令 $\angle P_2 A_1 A_2 = \alpha$ ，可得 P_1 參數式

$$\begin{cases} x = k \cos \alpha = \frac{k \sqrt{a^2 - s^2}}{a} \dots (9) \\ y = k \sin \alpha = \frac{ks}{a} \dots (10) \end{cases}$$

由(10)知

$$s = a \sin \alpha \dots (11)$$

而由 A_2 點出發之質點 P_2 ，以 A_2 為原點， $\overrightarrow{A_2A_3}$ 為 x 軸正向， $\angle P_3A_2A_3 = \beta$ ，假設其位移為 A_1 點的 u 倍，可得 P_2 參數式

$$\begin{cases} x' = ux = s \cos \beta = \frac{s \sqrt{b^2 - k^2}}{b} \dots (12) \\ y' = uy = s \sin \beta = \frac{sk}{b} \dots (13) \end{cases}$$

由(13)知

$$k = b \sin \beta \dots (14)$$

將(14)除以(11)得

$$\frac{k}{s} = \frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha}$$

由前一頁之圖中可知，因為 $\overrightarrow{P_1P_2} // \overrightarrow{P_3P_4}$ 且 $\overrightarrow{P_2P_3} // \overrightarrow{P_4P_1}$ ，所以 $\alpha = \beta$ ，因此

$$\frac{k}{s} = \frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha} = \frac{b}{a}$$

由此可知： P_1 的位移 k 總是 P_2 的位移 s 的 t 倍，因此兩質點之速率比值也是 t ，正是其兩邊 b 和 a 之比值，而將 $k = st$ 代入(7)和(8)，可得

$$\begin{cases} x = k \cos \alpha = \frac{st \sqrt{a^2 - s^2}}{a} \\ y = k \sin \alpha = \frac{s^2 t}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s^2 = \frac{ya}{t} \dots (15) \\ x^2 = \frac{s^2 t^2 (a^2 - s^2)}{a^2} \dots (16) \end{cases}$$

將(15)代入(16)，得

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{yat(a^2 - \frac{ya}{t})}{a^2} \\ \rightarrow x^2 + (y - \frac{b}{2})^2 &= (\frac{b}{2})^2 \end{aligned}$$

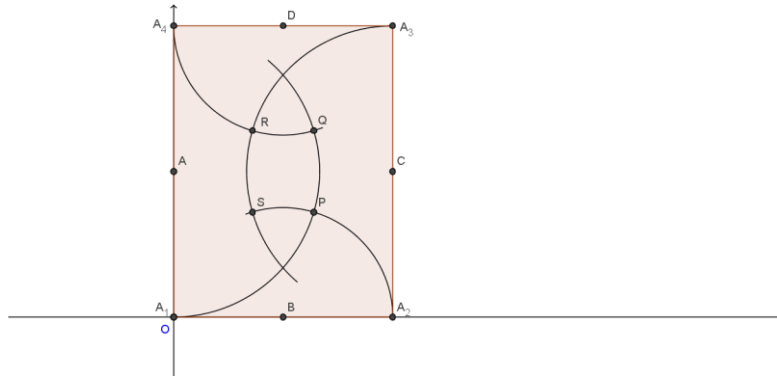
(以 A_1 為原點， $\overrightarrow{A_1A_2}$ 為 x 軸正向)

同理可整理質點 P_2 的軌跡方程式得

$$x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2$$

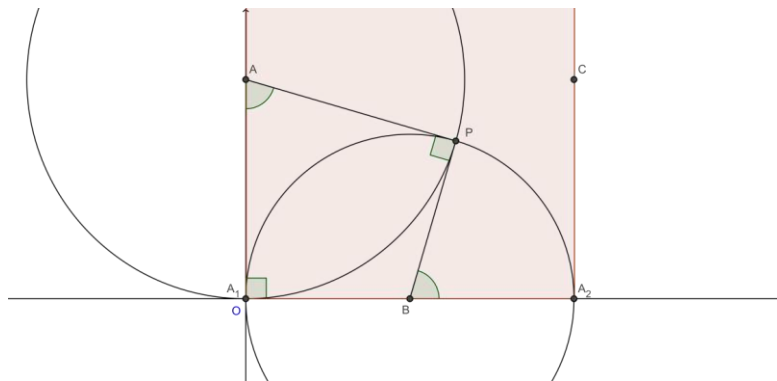
(以 A_2 為原點， $\overrightarrow{A_2A_3}$ 為 x 軸正向)

前述得到之方程式仍為圓弧，我們將其軌跡畫出如下頁之圖，

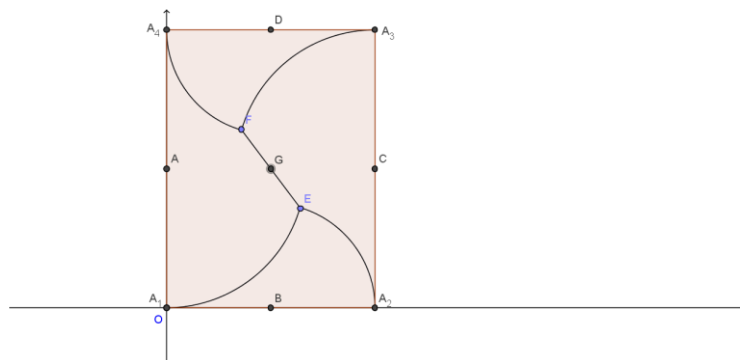


顯然，有四個交點，四個質點有四次相交之機會，但在 P_2 和 P_3 交會於 S 及 P_4 和 P_1 交會於 Q 之前， P_1 和 P_2 及 P_3 和 P_4 會先分別交會於 P 和 R ，且 P_1 和 P_2 及 P_3 和 P_4 會同時交會是可以證明的，其證明過程如下。

將 P_1 和 P_2 的整個圓軌跡畫出，圓 A 和圓 B (A 和 B 分別為 $\overline{A_1A_4}$ 及 $\overline{A_1A_2}$ 的中點)會交於原點 O 和點 P ，如下圖，



其中四邊形 A_1BPA 是箏形(因為兩圓半徑各自相等)且 $\angle AA_1B$ 是直角，因此 $\angle APB$ 也是直角，所以箏形 A_1BPA 中剩下的兩個內角 $\angle A_1AP$ 和 $\angle A_1BP$ 互補，又 $\angle A_2BP$ 和 $\angle A_1BP$ 也互補，因此 $\angle A_1AP$ 和 $\angle A_2BP$ 相等，又由前面假設可知兩質點分別對 A 和 B 的角速度相同，因此兩質點所花時間必須相同。由以上討論可知， P_1 和 P_2 及 P_3 和 P_4 會在 P, R 分別先交會，之後，因為 P_2 和 P_4 還要分別繼續追逐 P_3 和 P_1 ，但 P_3 和 P_1 已分別和 P_4 和 P_2 重合，因此兩質點 P_4 和 P_2 便會彼此前進，而 P_3 和 P_1 就分別跟著 P_4 和 P_2 前進，因此，總軌跡圖可作為下圖，

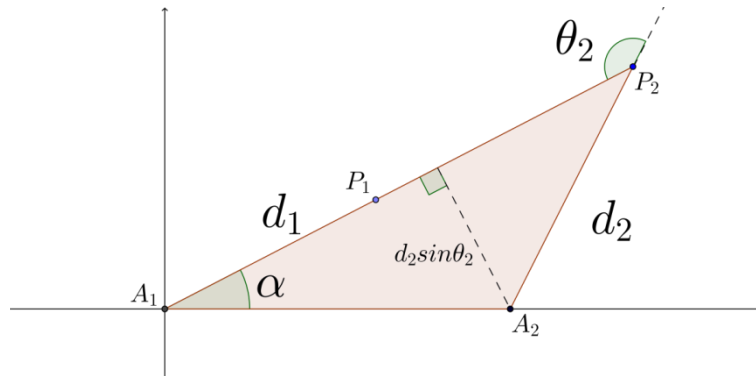


在此我們假設在動態追逐中，若有兩質點相遇，兩點中必有一點 A 為另一點 B 的目標點，我們規定 B 點在相遇後速度變為和 A 點一樣。最後四質點於中心 G 交會。□

整理以上結論，即可得推論 3。

推論 4 證明。

假設 $\Delta A_1A_2A_3$ ，3 個內角 $\theta_1\theta_2\theta_3$ ，其中 $\overline{A_1A_2} = a_1$ ， $\overline{A_2A_3} = a_2$ ， $\overline{A_3A_1} = a_3$ ，3 個質點 $P_1P_2P_3$ 做 3 角形動態追逐，各位移了 $d_1d_2d_3$ 。以 A_1 為原點， $\overline{A_1A_2}$ 為 x 軸正向，令 $\angle P_2A_1A_2 = \alpha$ ，獨立探討 $\Delta P_2A_1A_2$ 如下，



可得 P_1 的參數式

$$\begin{cases} x = d_1 \cos \alpha = \frac{d_1 \sqrt{a_1^2 - d_2^2 \sin^2 \theta_2}}{a_1} \dots (17) \\ y = d_1 \sin \alpha = \frac{d_1 d_2 \sin \theta_2}{a_1} \dots (18) \end{cases}$$

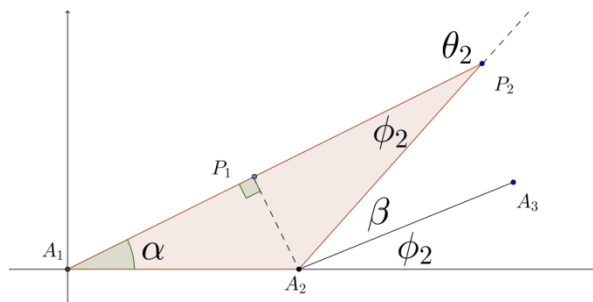
由(18)知

$$d_2 = \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin \theta_2}$$

同理可知，質點 $P_1P_2P_3$ 的位移比 $d_1:d_2:d_3$ 即為

$$\frac{a_3 \sin \gamma}{\sin \theta_1} : \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin \theta_2} : \frac{a_2 \sin \beta}{\sin \theta_3}$$

其中 β 和 γ 為 A_2P_2 和 A_2A_3 的夾角以及 A_3P_3 和 A_3A_1 的夾角，我以下圖呈現 α 和 β 的關係。



$\angle P_1P_2A_2$ 為 θ_2 的補角因此其量值即為原三角形 A_2 的外角 ϕ_2 ，此時由外角定理可知： $\alpha + \phi_2 = \beta + \phi_2$ ，因此可知 $\alpha = \beta$ 。同理可知， $\alpha = \beta = \gamma$ 。

因此 $d_1:d_2:d_3$ 即為

$$\frac{a_3}{\sin \theta_1} : \frac{a_1}{\sin \theta_2} : \frac{a_2}{\sin \theta_3}$$

又由正弦定理

$$\frac{a_1}{\sin\theta_3} = \frac{a_2}{\sin\theta_1} = \frac{a_3}{\sin\theta_2}$$

可得

$$d_1:d_2:d_3 = \frac{a_3}{\sin\theta_1}:\frac{a_1}{\sin\theta_2}:\frac{a_2}{\sin\theta_3} = \frac{a_3}{a_2}:\frac{a_1}{a_3}:\frac{a_2}{a_1}$$

由上式可知

$$d_2 = \frac{a_2 a_1 d_1}{a_3^2} \dots (19)$$

將上式再代入(18)得

$$\begin{aligned} y &= \frac{d_1 d_2 \sin\theta_2}{a_1} = \frac{d_1 \sin\theta_2}{a_1} \times \frac{a_2 a_1 d_1}{a_3^2} \\ &\rightarrow d_1^2 = \frac{y a_3^2}{a_2 \sin\theta_2} \end{aligned}$$

又由正弦定理

$$\frac{a_3}{\sin\theta_2} = 2R$$

其中 R 為三角形 $A_1A_2A_3$ 外接圓半徑

因此

$$d_1^2 = \frac{2R y a_3}{a_2} \dots (20)$$

此時將(17)平方展開得

$$x^2 = \frac{d_1^2 (a_1^2 - d_2^2 \sin^2\theta_2)}{a_1^2} = d_1^2 - \frac{d_1^2 d_2^2 \sin^2\theta_2}{a_1^2} \dots (21)$$

其中 d_1^2 由(20)已知而 d_2^2 可由(20)代入(19)平方後，得

$$d_2^2 = \left(\frac{a_2 a_1 d_1}{a_3^2}\right)^2 = \frac{2R y a_1^2 a_2}{a_3^3} \dots (22)$$

再將(20)和(22)代入(21)即可得

$$x^2 = \frac{2R y a_3}{a_2} - \frac{2R y a_3}{a_2} \times \frac{2R y a_1^2 a_2}{a_3^3} \times \frac{\sin^2\theta_2}{a_1^2}$$

又根據正弦定理 $\sin^2\theta_2 = \frac{a_3^2}{4R^2}$

因此

$$x^2 = \frac{2R y a_3}{a_2} - \frac{2R y a_3}{a_2} \times \frac{2R y a_1^2 a_2}{a_3^3} \times \frac{a_3^2}{a_1^2 4R^2} = \frac{2R y a_3}{a_2} - y^2$$

整理後即可得 P_1 軌跡方程式

$$x^2 + \left(y - \frac{a_3 R}{a_2}\right)^2 = \left(\frac{a_3 R}{a_2}\right)^2$$

由此可歸納得

以 A_i 為原點， $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ 為 x 軸正向，可得動點 P_i 的軌跡方程式：

$$x^2 + \left(y - \frac{a_{i-1}R}{a_{i+1}}\right)^2 = \left(\frac{a_{i-1}R}{a_{i+1}}\right)^2$$

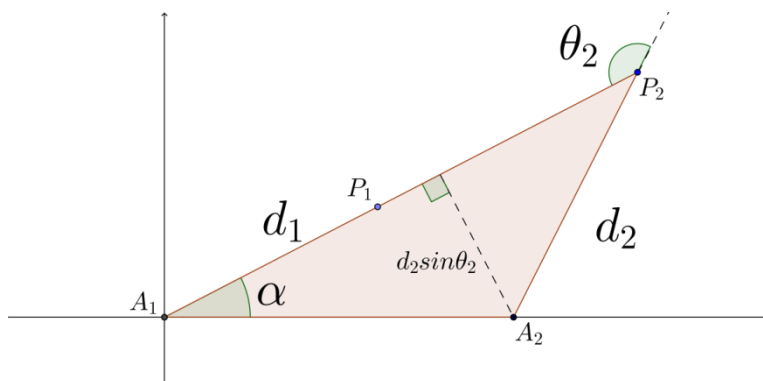
其中 $i = 1, 2, 3$ 且假設 $a_0 = a_3, a_4 = a_1, A_4 = A_1$ 。 □

接下來我討論三質點做三角形動態追逐時這值點的相遇情況。

由我們的定義，因為各質點所保持的三角形各外角均守恆，根據AA相似原理，可知每個時刻各質點所形成之三角形均和原三角形相似，因此假設當有兩質點先行相遇時，因為此兩點距離為0，依照相似三角形對應邊成比例性質可知，此兩點分別和第三點的距離也應該為0，因此此時三點會同時相遇在一點。所以我們可以知道，三質點做三角形動態追逐，會同時在同一點相遇(此結論也可由解析幾何或純幾何證明，礙於篇幅此只呈現較直觀的說法)，而這個三直點相遇的點還是一個三角形的心，稱做 *Brocard Point*，一個三角形 ABC 的*Brocard Point* P 的定義是符合 $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ 的點。

定理 4 證明。

假設一凸多邊形 $A_1 A_2 \dots A_n$ ， n 個內角 $\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n$ ，其中 $\overline{A_1 A_2} = a_1, \overline{A_2 A_3} = a_2, \dots, \overline{A_n A_1} = a_n$ ， n 個質點 $P_1 P_2 \dots P_n$ 做 n 邊形動態追逐，各位移了 $d_1 d_2 \dots d_n$ 。以 A_1 為原點， $\overrightarrow{A_1 A_2}$ 為 x 軸正向， $\angle P_2 A_1 A_2 = \alpha$ ，獨立探討 $\Delta P_2 A_1 A_2$ 如下，



可得 P_1 的參數式

$$\begin{cases} x = d_1 \cos \alpha = \frac{d_1 \sqrt{a_1^2 - d_2^2 \sin^2 \theta_2}}{a_1} \dots (23) \\ y = d_1 \sin \alpha = \frac{d_1 d_2 \sin \theta_2}{a_1} \dots (24) \end{cases}$$

由(24)可知

$$d_2 = \frac{a_1 \sin \alpha}{\sin \theta_2}$$

同理，再由我們在推論 4 時對三角形的討論可知，質點 $P_1 P_2 \dots P_n$ 的位移比 $d_1 : d_2 : \dots : d_n$ 即為

$$\frac{a_n}{\sin \theta_1} : \frac{a_1}{\sin \theta_2} : \dots : \frac{a_{n-1}}{\sin \theta_n}$$

由上式可得

$$d_2 = \frac{a_1 d_1 \sin \theta_1}{a_n \sin \theta_2} \dots (25)$$

將上式再代入(24)得

$$y = \frac{d_1 d_2 \sin \theta_2}{a_1} = \frac{d_1^2 \sin \theta_1}{a_n}$$

$$\rightarrow d_1^2 = \frac{y a_n}{\sin \theta_1} \dots (26)$$

此時將(23)平方展開

$$x^2 = \frac{d_1^2 (a_1^2 - d_2^2 \sin^2 \theta_2)}{a_1^2} = d_1^2 - \frac{d_1^2 d_2^2 \sin^2 \theta_2}{a_1^2} \dots (27)$$

其中 d_1^2 由(26)已知而 d_2^2 可由(26)代入(25)平方後求得，將所得 d_1^2 及 d_2^2 相乘，得

$$d_1^2 d_2^2 = \frac{y a_n}{\sin \theta_1} \times \left(\frac{a_1 d_1 \sin \theta_1}{a_n \sin \theta_2} \right)^2 = \frac{y^2 a_1^2}{\sin^2 \theta_2}$$

再將上式和(26)代入(27)即可得

$$x^2 = \frac{y a_n}{\sin \theta_1} - \frac{y^2 a_1^2}{\sin^2 \theta_2} \times \frac{\sin^2 \theta_2}{a_1^2} = \frac{y a_n}{\sin \theta_1} - y^2$$

因此即可得 P_1 軌跡方程式

$$x^2 + \left(y - \frac{a_n}{2 \sin \theta_1} \right)^2 = \left(\frac{a_n}{2 \sin \theta_1} \right)^2$$

由此可歸納得

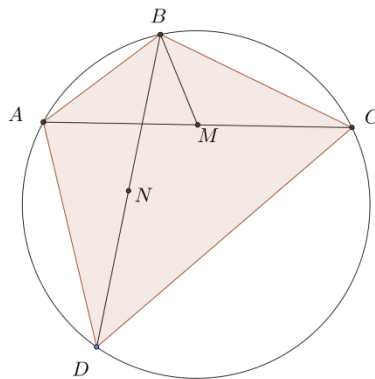
以 A_i 為原點， $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ 為x軸正向，可得動點 P_i 的軌跡方程式：

$$x^2 + \left(y - \frac{a_{i-1}}{2 \sin \theta_i} \right)^2 = \left(\frac{a_{i-1}}{2 \sin \theta_i} \right)^2$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 且令 $a_0 = a_n, A_{n+1} = A_1$ 。 □

推論 5 證明。

今有一調和四邊形 $ABCD$ ，令 \overline{AC} 中點 M ， \overline{BD} 中點 N ，如下圖，



首先我證明 $\angle CBD = \angle ABM$ 及 $\angle CDB = \angle ADM$ 。觀察 $\triangle ABM$ 和 $\triangle DBC$ ，我試著找出其邊長的關

係，由 *Ptolemy Theorem* 知: $\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC} = \overline{AC} \times \overline{BD}$ ，又由調和四邊形定義知:

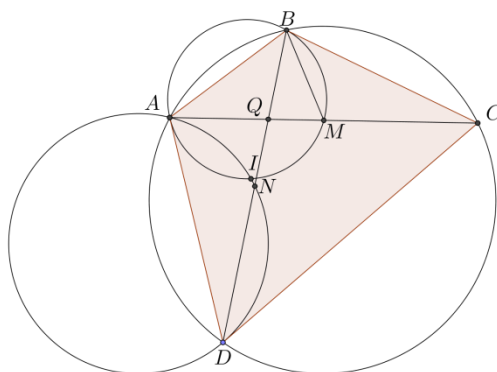
$$\overline{AB} \times \overline{CD} = \overline{AD} \times \overline{BC}, \text{ 因此 } 2\overline{AB} \times \overline{CD} = \overline{AC} \times \overline{BD}, \text{ 又 } \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC}, \text{ 因此得到 } \overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AM} : \overline{DC},$$

又由 $\angle BAM = \frac{1}{2}\widehat{BC} = \angle BDC$ ，所以 $\triangle ABM \sim \triangle DBC (SAS)$ ，因此 $\angle CBD = \angle MBA$ 。而由對稱性可知，必有 $\angle CDB = \angle ADM$ 。

接著我要證明過 A 、 B 兩點且和 \overline{AD} 相切的圓會過 M 。觀察 $\triangle DAM$ 和 $\triangle DBC$ ，由上述討論得知 $\angle CDB = \angle MDA$ ，又 $\angle MAD = \frac{1}{2}\widehat{CD} = \angle CBD$ ，所以 $\triangle DAM \sim \triangle DBC (AA)$ ，因此 $\triangle DAM \sim \triangle ABM$ ，

所以 $\angle ABM = \angle DAM$ ，作過點 A 、 B 、 M 的圓 C_1 ，由 $\angle DAM = \angle ABM = \frac{1}{2}\widehat{AM}$ ，知 $\angle DAM$ 為 \widehat{AM} 的弦切角，因此 \overline{AD} 為圓 C_1 的切線。而因為過 A 、 B 兩點且和 \overline{AD} 相切的圓唯一，因此知過 A 、 B 兩點且和 \overline{AD} 相切的圓會過 M 。

令過 A 、 B 兩點且和 \overline{AD} 相切的圓 C_1 ，過 D 、 A 兩點且和 \overline{DC} 相切的圓 C_2 ，過 C 、 D 兩點且和 \overline{CB} 相切的圓 C_3 ，過 B 、 C 兩點且和 \overline{BA} 相切的圓 C_4 。我要證明這四圓共點。由前述討論我可以知道， C_1 和 C_3 過點 M ， C_2 和 C_4 過點 N ，令 C_1 和 C_2 的一個交點 I (另一個交點即為 A)，如下圖，

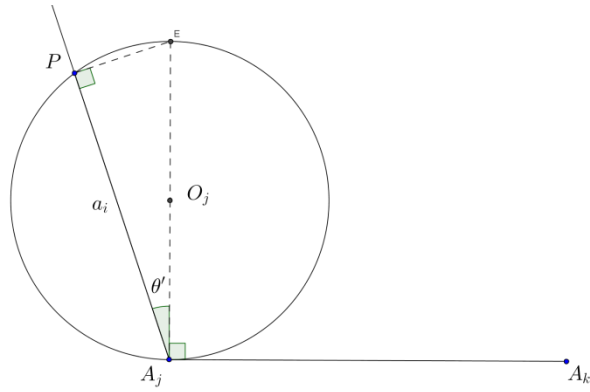


接下來我要證明點 I 亦位於 C_3 上，令 \overline{AC} 和 \overline{BD} 交於 Q ，

$$\begin{aligned} \angle MID &= (\pi - \angle AIM) + (\pi - \angle AID) \dots (\because 1 \text{ 個周角}) \\ &= \angle ABM + (\pi - \angle AND) \dots (\because ABMI、AIND \text{ 各自共圓}) \\ &= \angle QBC + \angle DAN + \angle NDA \dots (\because \text{已證命題及 } \triangle NDA) \\ &= \angle DBC + \angle NDC + \angle BCA \dots (\because \text{對同弧的圓周角及弦切角相等}) \\ &= \pi - \angle MCD \dots (\because \triangle BCD) \end{aligned}$$

因此點 I 位於 C_3 上，同理 I 亦位於 C_4 上，因此得證: C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 四圓共點於 I 。

而由定理 4 得到的方程式中，我知道多邊形中連續三頂點 A_i 、 A_j 、 A_k 中， A_j 做動態追逐的半徑為 $\frac{a_i}{\sin \theta_j}$ ，我以下頁之圖呈現，



其中 $\theta' = \theta_j - \frac{\pi}{2}$ ，令圓 O_j 和 $\overline{A_i A_j}$ 交於 P ，則

$$\begin{aligned} \overline{A_i P} &= \frac{a_i}{\sin \theta_j} \times \cos \left(\theta_j - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{a_i}{\sin \theta_j} \times \sin \theta_j = a_i \end{aligned}$$

因此點 P 即為 A_i 。所以可以得到以下結論：質點作動態追逐時的完整圓軌跡會通過其出發頂點往其順時針方向的下個頂點。因此再由我前面所證明的： C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 四圓共點，即可得知：四質點在調和四邊形上做四邊形動態追逐，則四質點會同時交會於一點。到此推論 5 證明完畢。 □

附錄 2

1. 經典單向追逐軌跡

首先先明確指出經典單向追逐的定義: **定義 4** 單向追逐

一質點 B 以等速度運動, 另一質點 A 瞬時速度之方向均朝向 B 且兩質點的速率大小總是成固定比例, 稱 A 對 B 做經典單向追逐。

以下先證明當 B 點初始位置為 $(d, 0)$, B 、 A 兩點速率比值為 n 時, A 點做經典單向追逐之軌跡為

$$y = \frac{1}{2}(d-x) \left(\frac{(1-\frac{x}{d})^n}{1+n} - \frac{(1-\frac{x}{d})^{-n}}{1-n} \right) + \frac{nd}{1-n^2}$$

首先, 令所求函數為 $y = f(x)$, A 點速率 u , B 點速率 v , 則 $v/u = n$, 由經典單向追逐定義可知, 當追逐一段時間 t 後, $y = f(x)$ 在 A 點的斜率會等於直線 AB 之斜率, 故得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-vt}{x-d}$$

而這段時間內 A 點所走路徑長為

$$ut = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2} dz$$

其中以 $y(z)$ 中的 z 做啞變數取代 $y(x)$ 是避免未來將 x 帶入時所造成之混淆。

接著由上兩式可得到

$$\frac{1}{v} \left(y - \frac{dy}{dx}(x-d) \right) = t = \frac{1}{u} \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2} dz$$

將 $v/u = n$ 代入並將兩邊對 x 微分, 得到

$$\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}(x-d) - \frac{dy}{dx} = n \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

在此令 $\frac{dy}{dx} = p$ 並整理

$$\rightarrow \frac{dp}{dx}(x-d) = -n\sqrt{1+p^2}$$

$$\rightarrow \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{-ndx}{x-d}$$

$$\rightarrow \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{-ndx}{x-d}$$

$$\rightarrow \ln(p + \sqrt{1+p^2}) = -n \ln|x-d| + c$$

因為追逐過程中 $d > x$ 皆成立, 故 $|x-d| = d-x$, 而為求積分常數 c , 注意到當 $x = 0$ 時, 因

為A點的速度方向要朝向此時的B點(0,0)，故此時 $p = 0$ 。將此代入上式，得

$$0 = -n\ln(d) + c$$

故得

$$c = n\ln(d)$$

因此知

$$\begin{aligned}\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) &= -n\ln(d - x) + n\ln(d) \\ \rightarrow \ln\left(\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right)\left(\frac{d - x}{d}\right)^n\right) &= 0 = \ln(1) \\ \rightarrow \left(p + \sqrt{1 + p^2}\right)\left(\frac{d - x}{d}\right)^n &= 1 \\ \rightarrow p + \sqrt{1 + p^2} &= \left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-n}\end{aligned}$$

在此為了方便求出 p ，令 $\left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-n} = q$ ，得

$$\begin{aligned}p + \sqrt{1 + p^2} &= q \\ \rightarrow 1 + p^2 &= (q - p)^2 = q^2 - 2pq + p^2 \\ \rightarrow p &= \frac{1}{2}\left(q - \frac{1}{q}\right)\end{aligned}$$

將 p 、 q 換回 x 、 n 、 d ，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-n} - \left(1 - \frac{x}{d}\right)^n\right)$$

為求 y ，在此將兩邊對 x 積分，得

$$2y = \int \left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-n} dx - \int \left(1 - \frac{x}{d}\right)^n dx + c'$$

令 $r = 1 - \frac{x}{d}$ ，因此

$$\begin{aligned}dr &= -dx/d \\ \rightarrow dx &= -d \cdot dr\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}2y &= \int -dr^{-n}dr - \int -dr^n dr + c' \\ &= \frac{-dr^{-n+1}}{-n+1} + \frac{-dr^{n+1}}{n+1} + c' \\ &= dr\left(\frac{r^n}{n+1} - \frac{r^{-n}}{-n+1}\right) + c'\end{aligned}$$

將 $r = 1 - \frac{x}{d}$ 代入，得

$$\begin{aligned}
2y &= d \left(1 - \frac{x}{d}\right) \left(\frac{\left(1 - \frac{x}{d}\right)^n}{n+1} - \frac{\left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-n}}{-n+1} \right) + c' \\
&= (d-x) \left(\frac{\left(1 - \frac{x}{d}\right)^n}{n+1} - \frac{\left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-n}}{-n+1} \right) + c'
\end{aligned}$$

最後求積分常數 c' ，注意到當 $x = 0$ 時，因為 A 點位於原點，因此 $y = 0$ ，故

$$\begin{aligned}
0 &= d \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{-n+1} \right) + c' \\
\rightarrow c' &= -d \left(\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n} \right) \\
&= \frac{2nd}{1-n^2}
\end{aligned}$$

因此就得到

$$2y = (d-x) \left(\frac{\left(1 - \frac{x}{d}\right)^n}{n+1} - \frac{\left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-n}}{-n+1} \right) + \frac{2nd}{1-n^2}$$

故

$$y = \frac{1}{2}(d-x) \left(\frac{\left(1 - \frac{x}{d}\right)^n}{1+n} - \frac{\left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-n}}{1-n} \right) + \frac{nd}{1-n^2} \quad \square$$

將單向追逐和經典單向追逐的運動軌跡並示於同一張平面，並使兩者 B 點初始位置相同， $t^{-1} = n$ ，在此 t 為 A 、 B 兩點總位移比之倒數，故 t^{-1} 即為 B 、 A 兩點總位移之比值，而 n 為 B 、 A 兩點做經典單向追逐之速率比值，故 $t^{-1} = n$ 之條件是使兩者在相同差距下的追逐。

注意到將 $x = d$ 代入經典單向追逐方程式後，可知其和 $x = d$ 之交點為

$$\left(d, \frac{nd}{1-n^2} \right)$$

為使此點存在，意即 A 點可追上 B 點，須符合 $1 - n^2 > 0$ 之條件。又因為 $n > 0$ ，故 n 的範圍為 $0 < n < 1$ ，又 t 需符合 $t^{-1} = n$ ，即 $t = n^{-1}$ ，因此 t 之範圍為 $t > 1$ ，依照我們在定理 5 的討論可知，當 $t > 1$ 時， A 點可追上 B 點，故我們可以此進行比較。

以下令 $a = n$ ，並圖列出 a 為不同值時，兩者的軌跡圖。圖中軌跡較粗者為單向追逐曲線，較細者為經典單向追逐曲線，由 a 從 0.03 漸遞增到 0.98，我們可從圖中得知，經典單向追逐曲線都較單向追逐曲線為長，因此合理的提出猜測 1。

