

第十四屆旺宏科學獎

創意說明書

參賽編號：SA14-252

作品名稱：簡易的動摩擦係數測定方法

姓名：莊鎧爾

關鍵字：恢復係數、碰撞、動摩擦係數

壹、摘要：

藉由光電計時器、高速攝影機和向心力實驗轉速控制裝置，藉碰撞的實驗發展出簡易的動摩擦係數測定方法，藉此可清楚的測出碰撞的一瞬之中金屬球與接觸面的動摩擦係數之量值，本實驗中測出金屬球與鋼盤的動摩擦係數 μ_k 約為 0.14 ± 0.01 。另外藉由不同直徑的金屬球與鋼盤碰撞時有不同恢復係數的性質，藉此探究不同恢復係數的金屬球其在碰撞時動摩擦係數是否受到影響而變化，發現恢復係數介於 0.51-0.58 之間，金屬球與鋼盤的動摩擦係數為一定值，數值為 0.12 ± 0.01 。

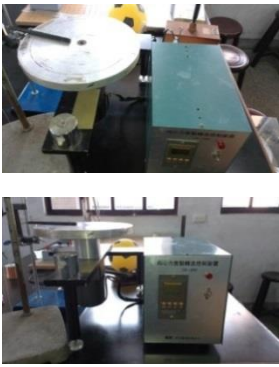







貳、實驗動機：


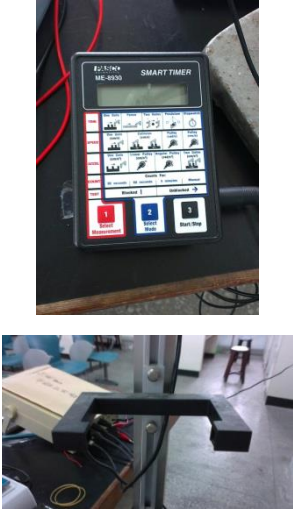
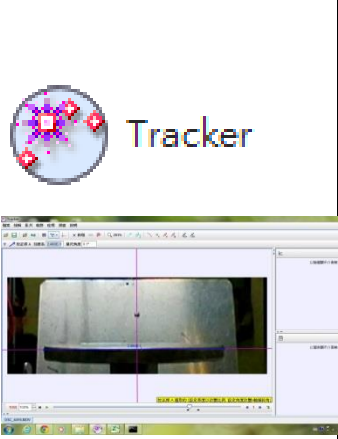
在高中課程中學到了碰撞，其中提到了恢復係數，使我對其產生興趣，因此想研究在碰撞過程中，碰撞時的入射角度是否會影響恢復係數，並且想知道碰撞過程有那些因素會影響到恢復係數。意料之外的是此實驗竟然能測量出動摩擦係數，現今動摩擦係數的測量方式不少，其中最常見的就是將物體放在斜面上使其下滑，當下滑為等速下滑時，斜面的斜率即為動摩擦係數，想法雖簡單，但實際卻不如預期的容易操作，且無法測量出精準的動摩擦係數，原因在於運動等速與否若不用儀器測量，只靠肉眼容易造成較大的誤差。因此欲以碰撞的實驗來發展出簡易的動摩擦係數測定方法，如此，不僅可以減少實驗過程中的測量誤差，亦可使動摩擦係數測定更為便利。

參、實驗目的：

- 一、以向心力實驗轉速控制裝置，探討金屬球在不同入射角度與恢復係數的關係。
- 二、藉由碰撞不同轉速的圓盤分析得金屬球與圓盤之間的動摩擦係數。
- 三、探討不同大小的金屬球直徑與恢復係數的關係、恢復係數與動摩擦係數的關係。

肆、實驗器材：

			
向心力實驗轉速控制裝置	漆包線、鐵釘(做成電磁鐵)	金屬球	導線
			
可變電阻	直、交流電源供應器	高速攝影機	腳架

		
電子天秤	光電計時器	Tracker

伍、實驗步驟：

一、以向心力實驗轉速控制裝置，探討金屬球在不同入射角度與恢復係數的關係

- (一) 以向心力實驗轉速控制裝置控制圓盤轉速。
- (二) 電磁鐵通電，使金屬球吸附於其上。
- (三) 斷電時金屬球自由落下，以 1200 fps 拍攝金屬球路徑。
- (四) 改變向心力實驗轉速控制裝置的轉速，重複步驟(一)到(三)。
- (五) 以 Tracker 分析金屬球路徑。
- (六) 以 Excel 作圖分析恢復係數。
- (七) 藉相對運動換算，找出入射角與恢復係數的關係。

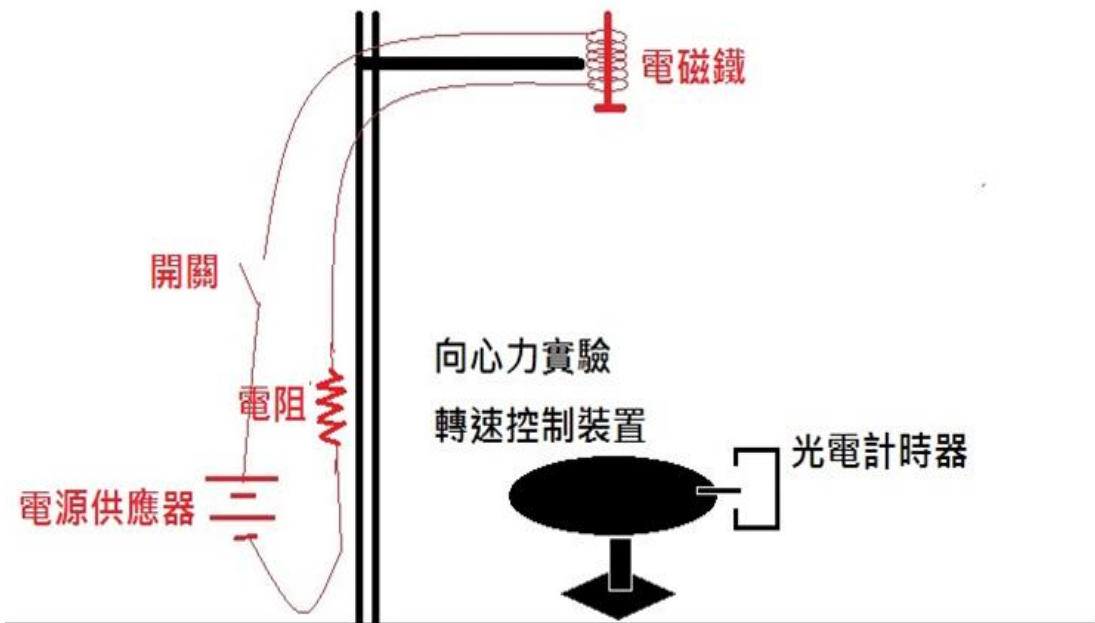
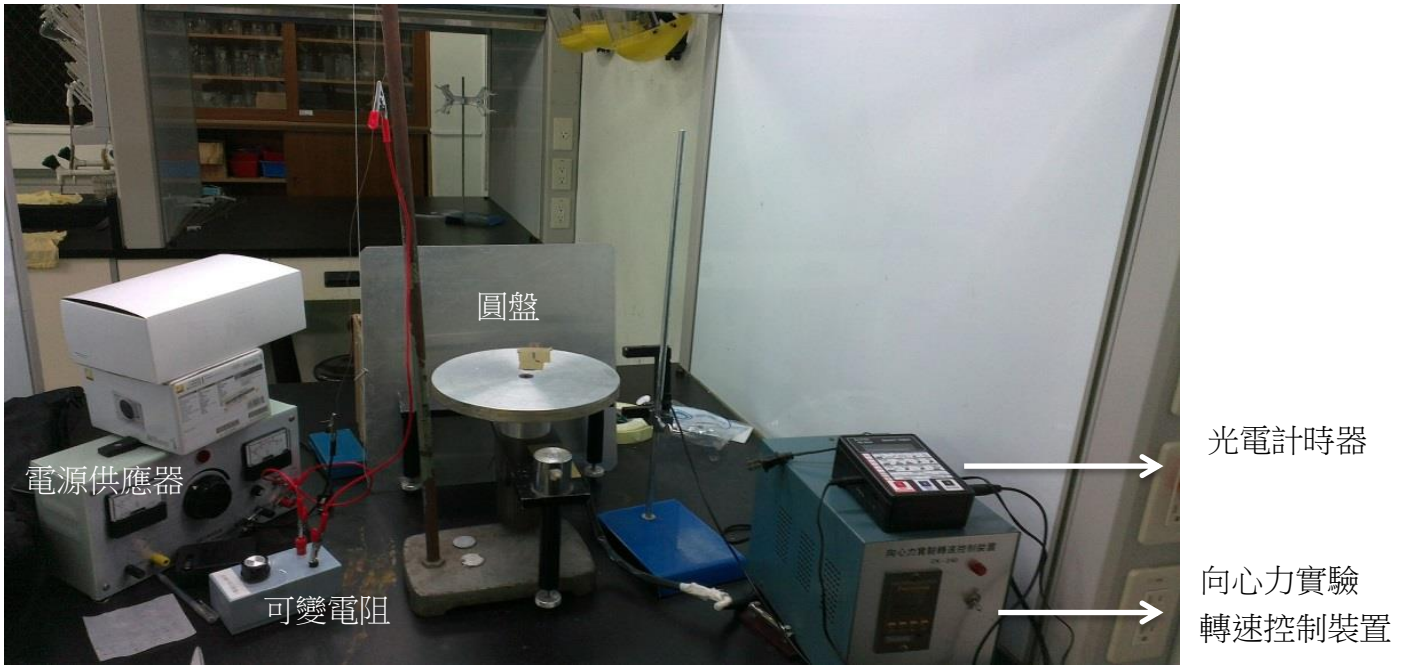
二、藉由碰撞不同轉速的圓盤分析得金屬球與圓盤之間的動摩擦係數

- (一) 以向心力實驗轉速控制裝置控制圓盤轉速。
- (二) 改變圓盤轉速，並以光電計時器測量其轉速。
- (三) 以電磁鐵控制金屬球的下落時間。
- (四) 以相同大小的金屬球分別下落碰撞不同轉速圓盤的相同半徑之位置。
- (五) 用高速攝影機以 1200fps 拍攝碰撞過程。
- (六) 以 Tracker 分析金屬球路徑。
- (七) 以 Excel 作圖分析得動摩擦係數。

三、探討不同大小的金屬球直徑與恢復係數的關係、恢復係數與動摩擦係數的關係

- (一) 找到材質相同但大小不同的金屬球進行實驗。
- (二) 以實驗 一 的實驗方法測量不同大小金屬球的恢復係數。
- (三) 以實驗 二 的實驗方法測量不同大小金屬球的動摩擦係數。
- (四) 以 Excel 作圖分析得金屬球直徑與其恢復係數的關係。
- (五) 以 Excel 作圖分析得金屬球恢復係數與動摩擦係數的關係。

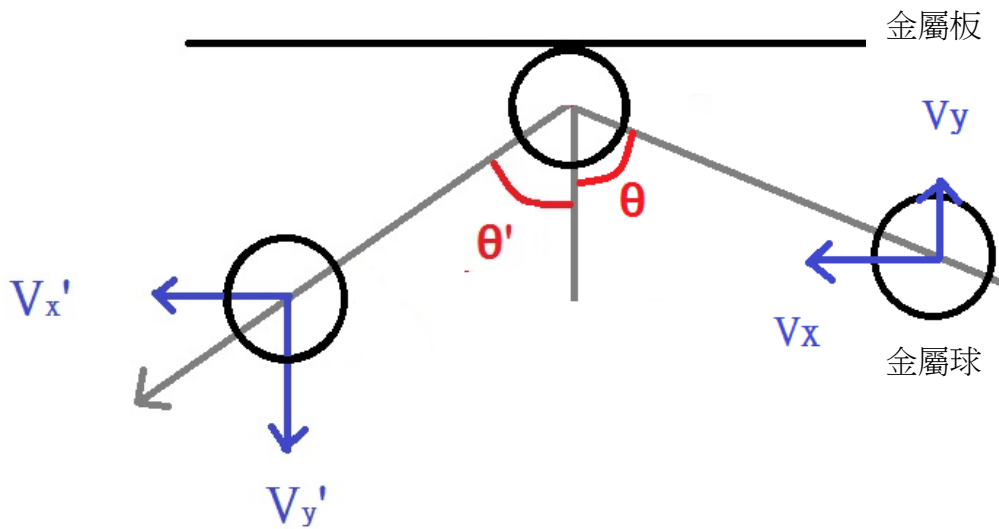
(圖一)實驗裝置圖



陸、實驗結果與討論：

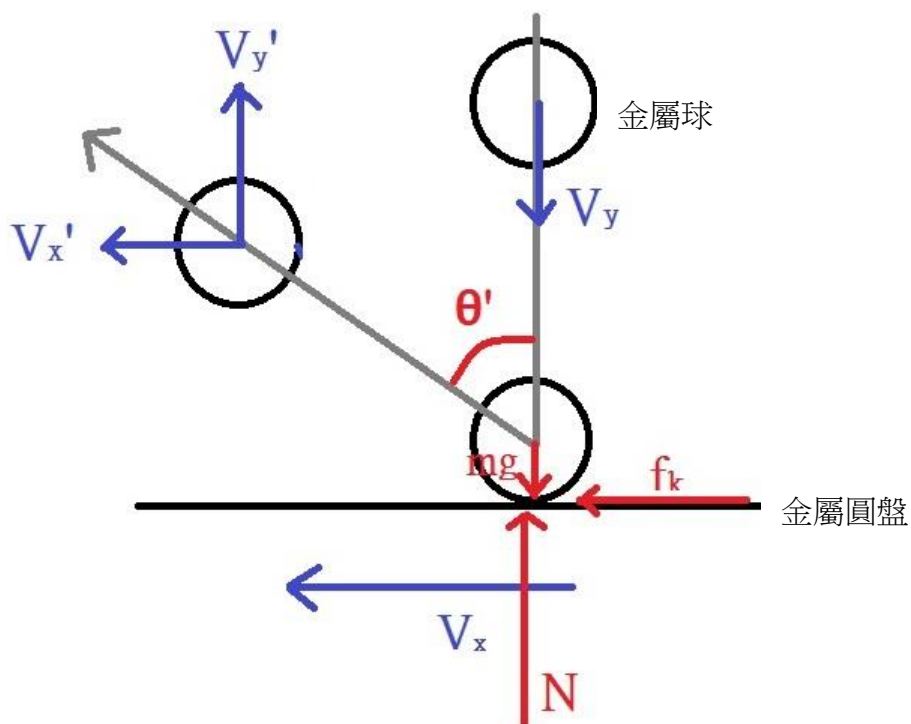
一、實驗設計：

(一)研究金屬球不同角度入射固定的金屬板是否影響金屬球的恢復係數，為實驗最初動機，故實驗設計由金屬球以不同角度入射金屬板。如(圖二)



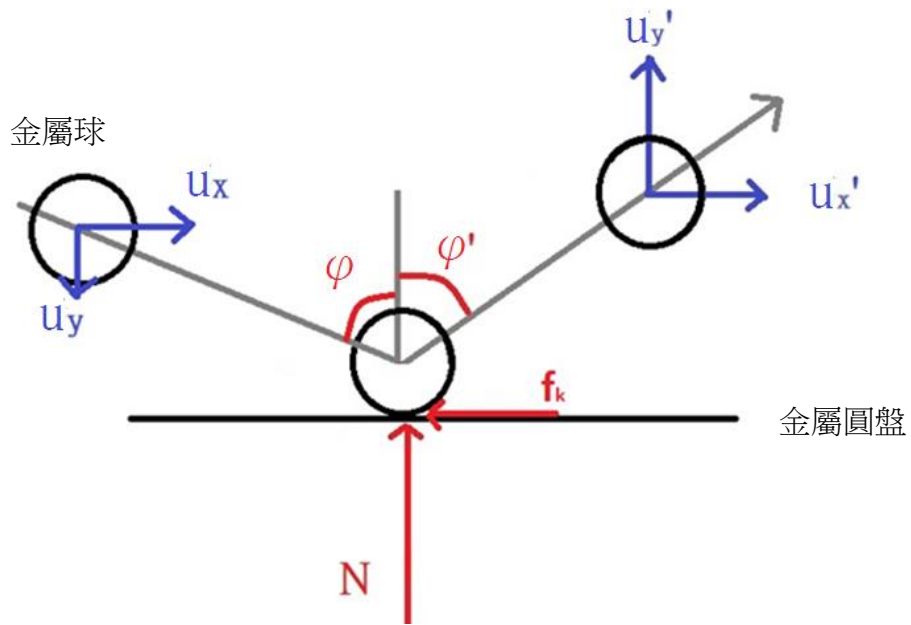
(圖二) 最初的實驗設計圖

(二)但金屬球入射角度難以控制，且金屬球於入射過程中是否有旋轉無從得知，因此改變實驗方法，以金屬球自由落體，碰撞轉動中的金屬圓盤邊緣。如(圖三)



(圖三) 修正後的實驗設計圖

由上圖，再根據相對運動，定圓盤轉速(V_x)為零，得(圖四)

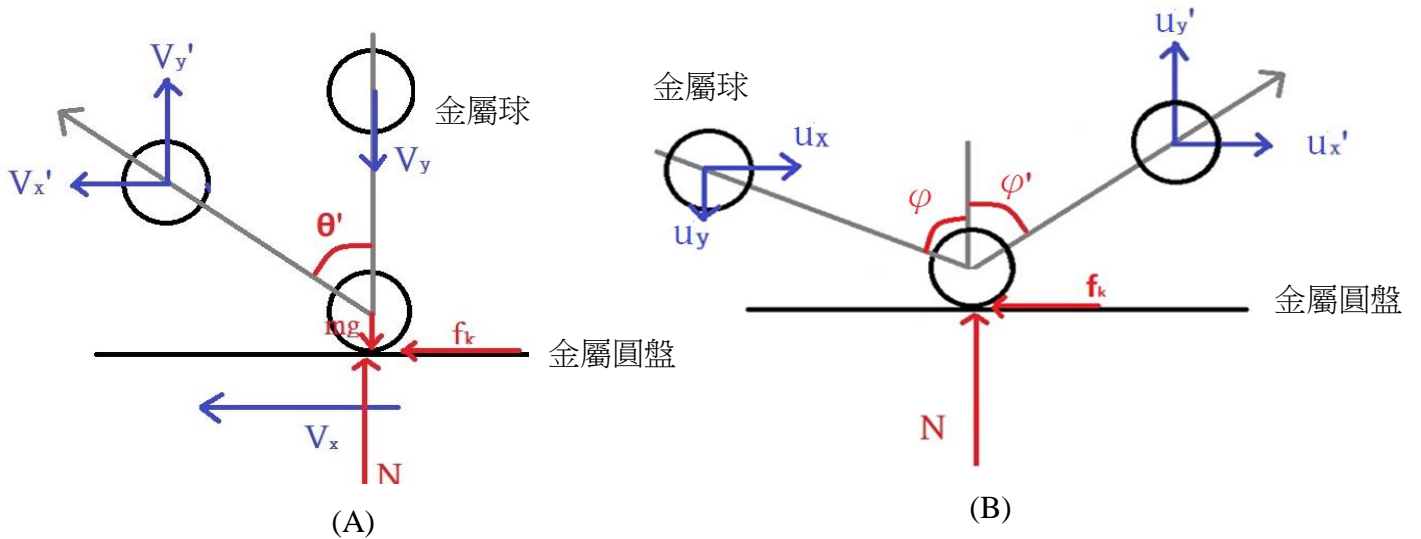


(圖四) 由相對運動轉

如此，即可輕易改變金屬球的入射角度，且確保金屬球於入射過程中不會旋轉。

二、恢復係數測量原理：

(一) 假設說明。如(圖五)



(圖五)

由(A)圖：

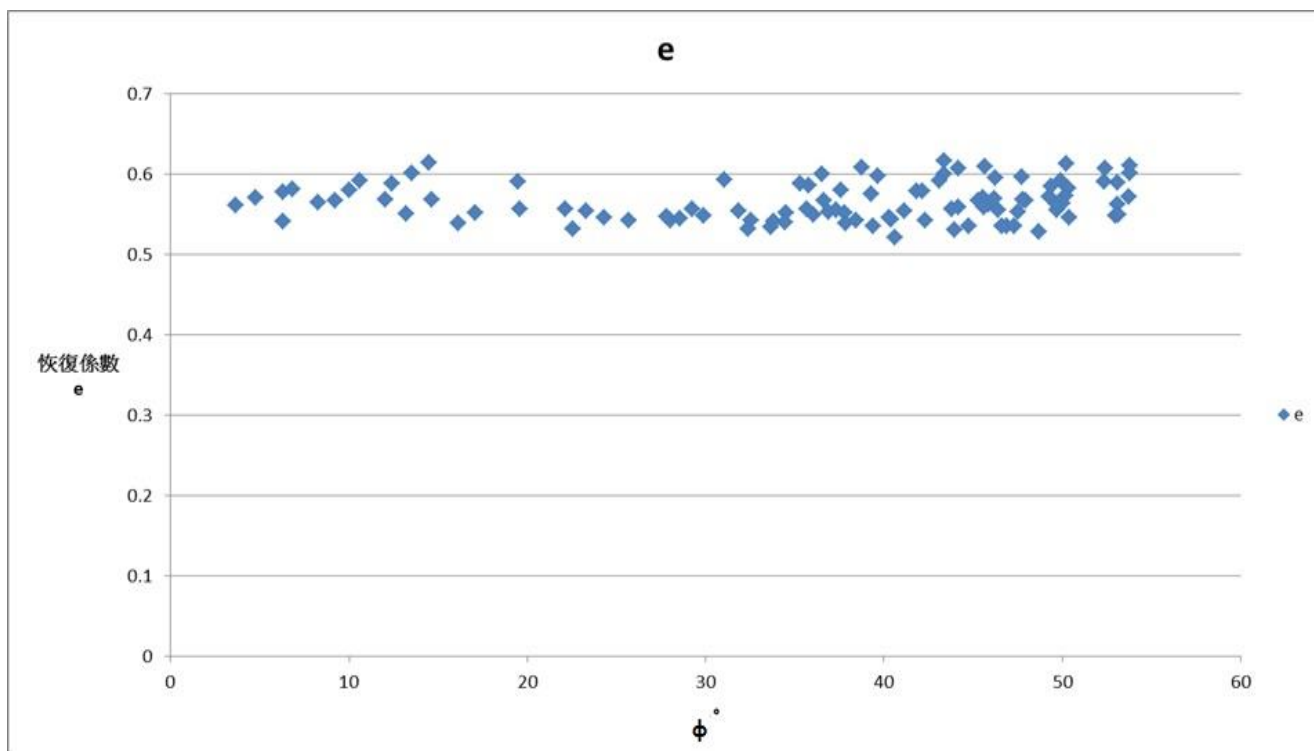
1. 入射速度量值為 V (鉛直分量為 V_y 、水平分為 0)
2. 反射速度量值為 V' (鉛直分量為 V_y' 、水平分量量為 V_x')
3. 轉盤轉動造成的水平速度量值為 V_x
4. 反射時相對鉛直線夾角為 θ'

(二) 由相對運動，可得(B)圖：

1. 入射速度量值為 u (y 分量為 $u_y = V_y$ 、x 分量為 $u_x = V_x$)
2. 反射速度量值為 u' (y 分量為 $u_y' = V_y'$ 、x 分量為 $u_x' = V_x - V_x'$)
3. 入射角為 φ ($\tan \varphi = u_x / u_y$)、反射角為 φ' ($\tan \varphi' = u_x' / u_y'$)
4. 恢復係數 $e = u_y' / u_y$

三、不同入射角度與恢復係數的關係：

(一)恢復係數(e) 與 入射角度(φ) 的關係圖



(二)發現恢復係數與入射角度無關。

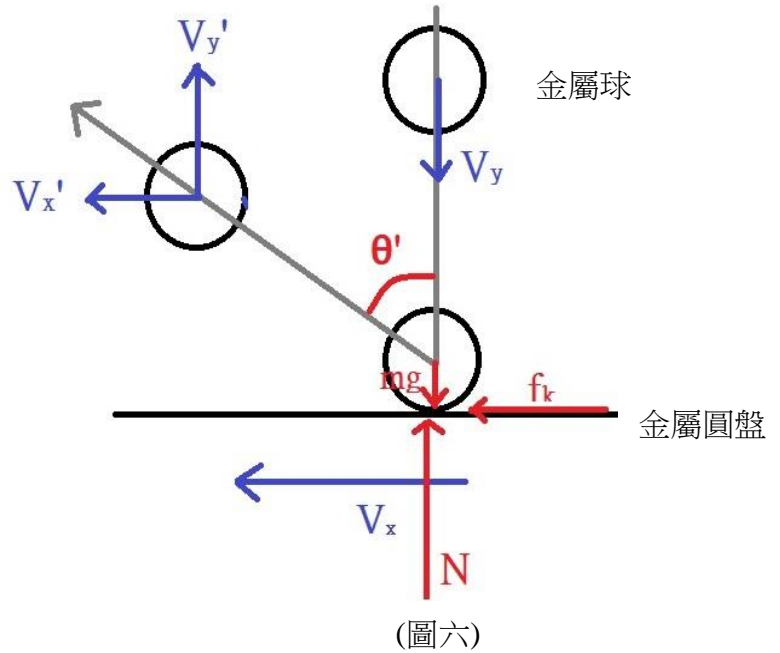
(三)恢復係數 e 約等於 0.56 ± 0.02

(四)然而發現可藉由此實驗，測量碰撞中兩物的動摩擦係數。

四、動摩擦係數測量原理：

(一) 假設說明。如(圖六)

1. 入射速度量值為 V
(鉛直分量為 V_y 、
水平分量為 0)
2. 反射速度量值為 V'
(鉛直分量為 $V_{y'}$ 、
水平分量量為 $V_{x'}$)
3. 轉盤轉動造成的水平速度量值為 V_x
4. 反射時相對鉛直線夾角為 θ'
5. 受到動摩擦力量值為 f_k
6. 正向力量值為 N
7. 求受重力量值為 mg
8. 碰撞時間為 Δt



(二) 導證：

1. 鉛直力所造成的衝量等於鉛直動量變化

$$(N - mg) \Delta t = m \times (V_{y'} + V_y) \quad \dots\dots\dots(\text{式 1-1})$$

因為 $V_{y'}$ 和 V_y 都取正值，故用加號

2. 水平力所造成的衝量等於水平動量變化

$$f_k \times \Delta t = m \times (V_{x'} - 0) \quad \dots\dots\dots(\text{式 1-2})$$

3. 後面將驗證 $N \gg mg$ ，由(式 1-1)可得：

$$N \times \Delta t = m \times (V_{y'} + V_y) \quad \dots\dots\dots(\text{式 1-3})$$

4. 將(式 1-2)除以(式 1-3) 可得：

$$\frac{f_k}{N} = \frac{V_{x'}}{(V_{y'} + V_y)} = \mu_k \quad (\text{動摩擦係數}) \quad \dots\dots\dots(\text{式 1-4})$$

5. 故定義 $\frac{V_{x'}}{(V_{y'} + V_y)} = \mu$ ，後面此式皆以 μ 表示之。

五、求證 $N \gg mg$:

由(式 1-1)可得 :

$$(N - mg) = \frac{m \times (V_{y'} + V_y)}{\Delta t} \dots\dots\dots(式 2-1)$$

由影片挑出一個碰撞實驗，其數據如下：

V_x (m/s)	V_y (m/s)	$V_{x'}$ (m/s)	$V_{y'}$ (m/s)
1.98	2.74	0.64	1.61

經由影片分析，得 $\Delta t < 0.00333s$

由電子天平測得金屬球質量 $m = 4.093g$

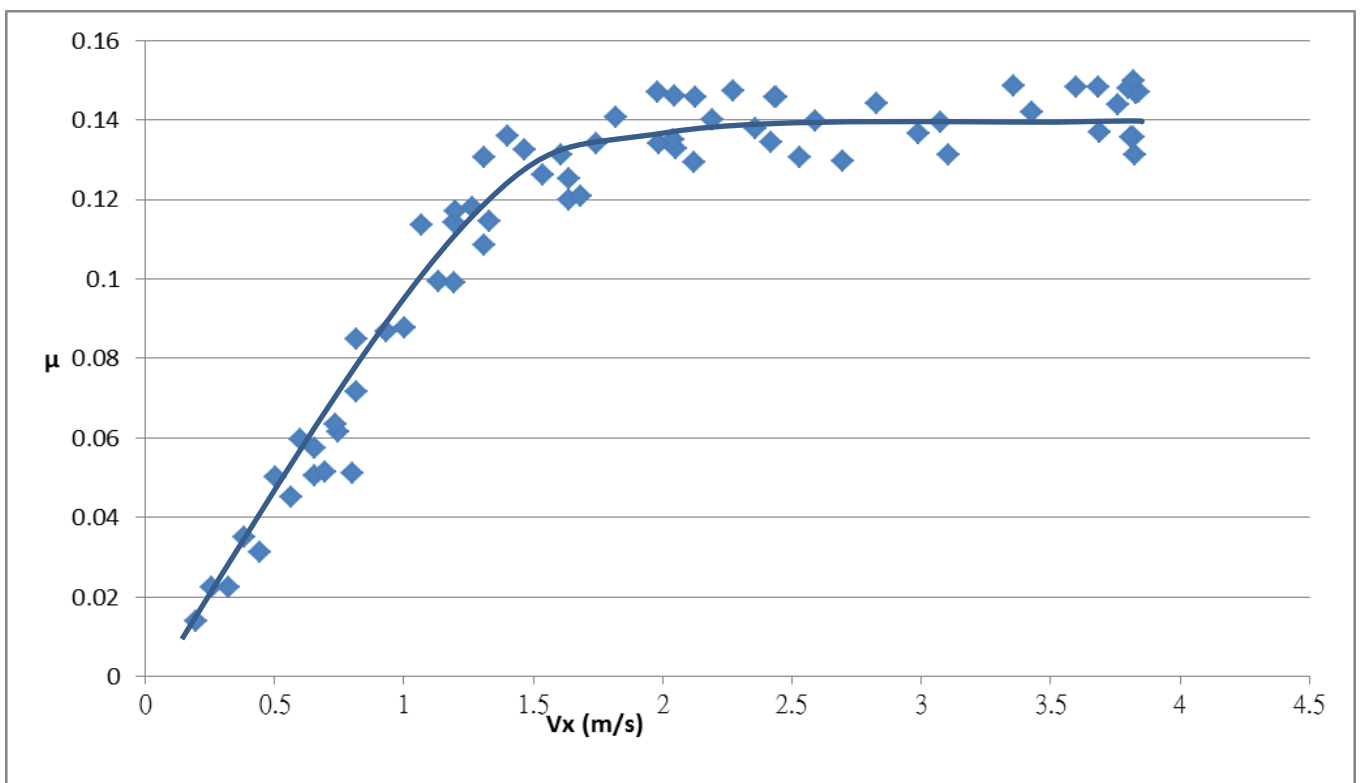
由(式 2-1)，將 Δt 以 $0.00333s$ 、 $m = 4.093g$ 帶入，得：

$$N - mg = 5.35 \text{ N} \quad N = 5.39 \text{ N}$$

知 $N > 5.39N \gg 0.04N = mg$

得 $N \gg mg$

六、改變 V_x ，測量 μ ，結果如下：



由實驗結果發現與原先推導結果不符，原推導得：

$$\mu = \frac{V_{x'}}{(V_{y'} + V_y)} = \mu_k$$

應為一個定值，可知原推導過程有誤，需進行修正。

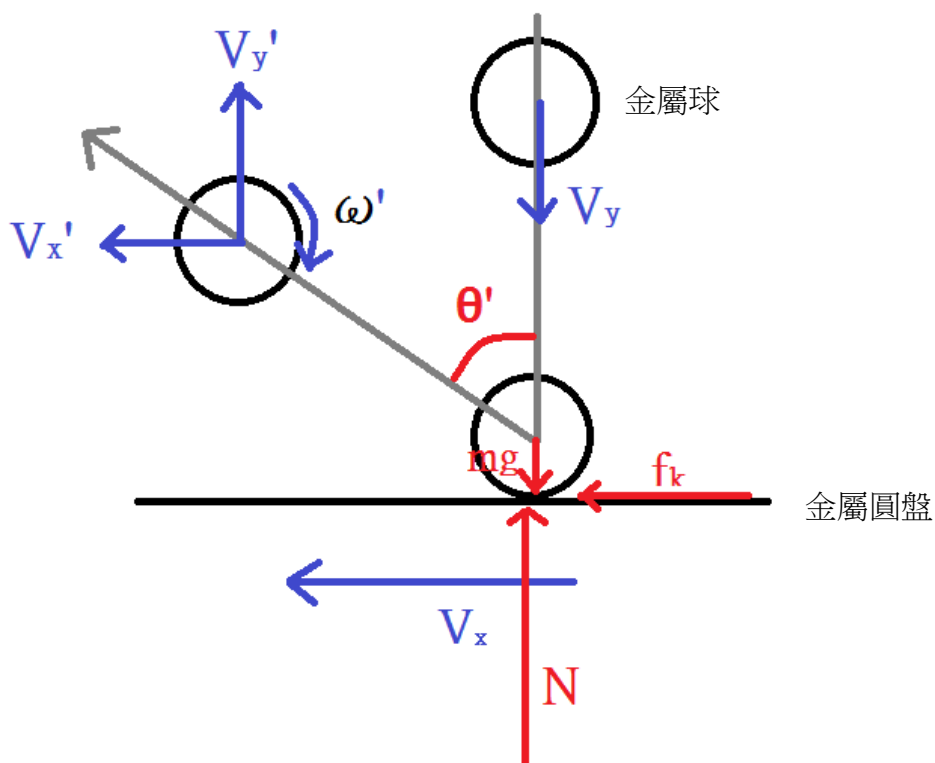
七、測量原理修正：

(一)錯誤之處

1. 原推導過程沒有考慮到金屬球轉動造成影響，今修正之。
2. 原推導過程碰撞時間等於摩擦力作用時間，今考慮到碰撞時間不一定等於摩擦力作用時間。

(二)新增假設：如(圖七)

1. 入射時球的轉速量值為 ω
2. 入射時球的轉速量值為 ω'
3. 碰撞時間為 Δt
4. 摩擦力作用時間為 $\Delta t'$
5. 金屬球半徑為 r
6. 金屬球的轉動質量為 I



(圖七)

(三)推導修正：

1. 已知關係式：

$$fk \times \Delta t = m \times (Vx' - 0) \quad \dots\dots\dots(\text{式 1-2})$$

$$N \times \Delta t = m \times (Vy' + Vy) \quad \dots\dots\dots(\text{式 1-3})$$

2. 摩擦力作用造成的角衝量等於金屬球的角動量變化

$$fk \times r \times \Delta t' = I \times (\omega' - 0) \quad \dots\dots\dots(\text{式 3-1})$$

3. 已知摩擦力作用時間為 \leq 碰撞時間為，即：

$$\Delta t' \leq \Delta t$$

以下分別討論 $\Delta t' < \Delta t$ 與 $\Delta t' = \Delta t$ 的發生條件。

4. 討論 $\Delta t'$ 與 Δt 之關係：

(1) $\Delta t' < \Delta t$ 之發生條件：

當轉盤與金屬球的接觸點相對靜止後，動摩擦力即不再作用。轉盤與金屬球的接觸點相對靜止之關係式為：

$$(\omega' \times r) + Vx' = Vx \quad \dots\dots\dots(\text{式 3-2})$$

(2) $\Delta t' = \Delta t$ 之發生條件：

當轉盤與金屬球的接觸點無法達到相對靜止時，動摩擦力即持續作用。
若 Vx 夠大，則轉盤與金屬球的接觸點即無法達到相對靜止。

5. 使 Vx 夠大，則 $\Delta t' = \Delta t$ (摩擦力作用時間 = 碰撞時間)，即可回到原推導過程，可知：

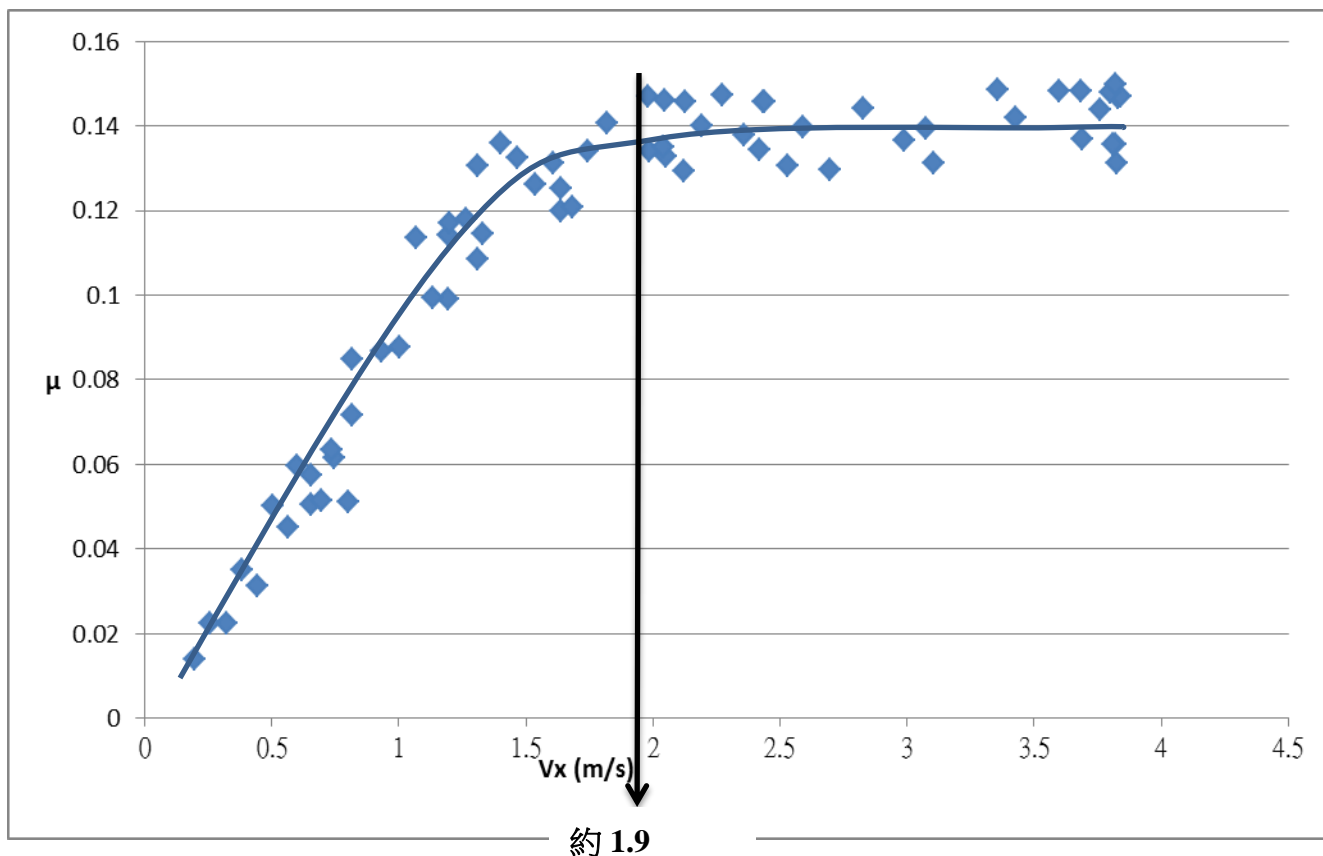
$$\mu = \frac{Vx'}{(Vy' + Vy)}$$

當 Vx 夠大，則 $\Delta t' = \Delta t$

$$\mu = \frac{Vx'}{(Vy' + Vy)} = \mu_k$$

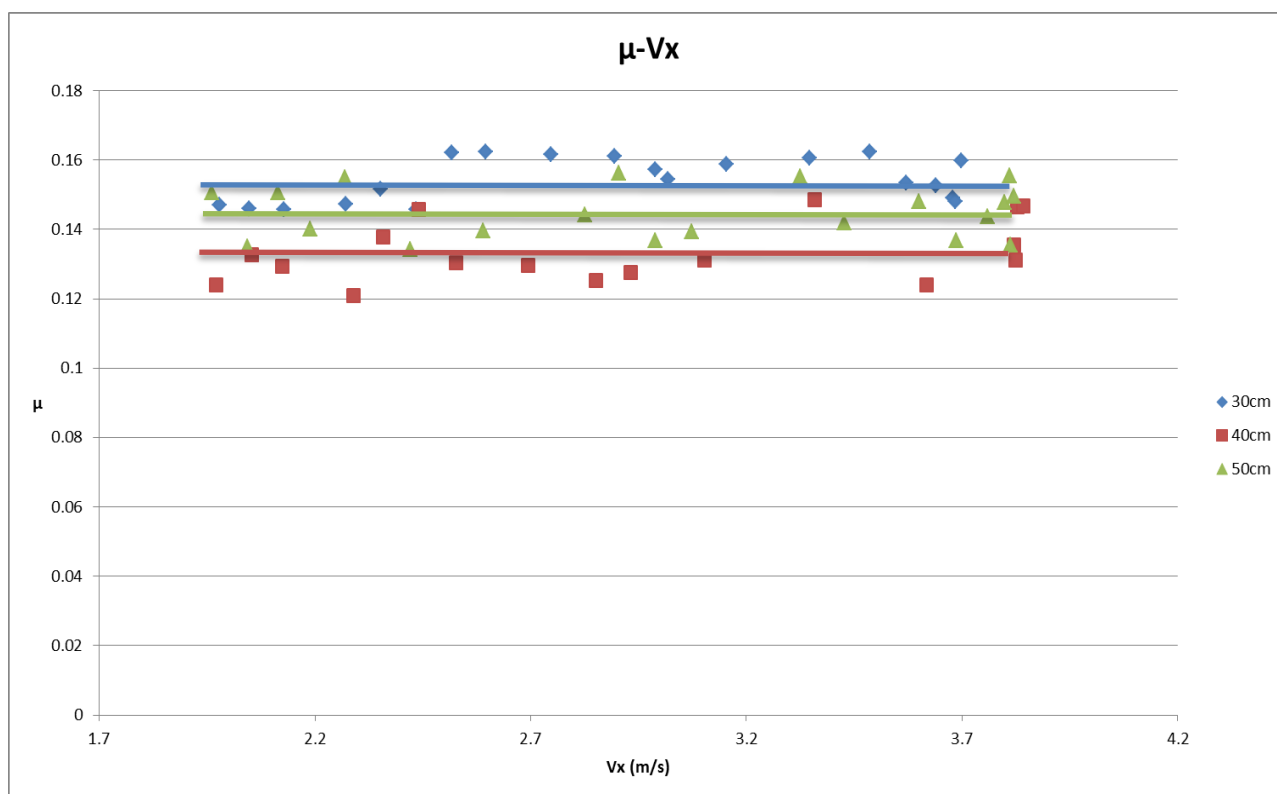
6. 此即與實驗結果相符。

八、由實驗結果(下圖)，可得當 $V_x > 1.9$ 後，會漸近一定值，此值即為 μ_k 。



九、為了測得 μ_k ，將 $1.9 < V_x < 4.5$ ，提出討論：

(一)使金屬球以不同高度下落，故實驗結果分成三種顏色，下落高度標於圖表右側：



(二)將實驗結果取平均得：

$$30\text{cm} : \mu = 0.153 \pm 0.007$$

$$40\text{cm} : \mu = 0.133 \pm 0.009$$

$$50\text{cm} : \mu = 0.145 \pm 0.008$$

(三)可知測得的動摩擦係數 μ_k 約為 0.14 ± 0.01

十、由轉動慣量驗證實驗結果：

(一)計算動摩擦力：

1. 由實驗結果與討論 三，知 $\Delta t < 0.00333\text{s}$ ，以及 $N > 5.39\text{N}$

2. 由實驗結果與討論 七，知 μ_k 約為 0.14 ± 0.01

3. 由上述兩點，得到動摩擦力 f_k ：

$$f_k = N \times \mu_k > 0.75 \quad (\text{N})$$

(二)計算金屬球轉動慣量：

1. 以螺旋測微器測得金屬球半徑為 4.995mm

2. 以電子天平測得金屬球質量為 4.093g

3. 由上述兩點，得到金屬球轉動慣量 I ：

$$I = \frac{2}{5} \times m \times r^2 = 4.85 \times 10^{-8} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

(三)計算摩擦力作用可使金屬球與圓盤之接觸點達到的最大速率：

1. 計算的摩擦力所造成的水平衝量約為 $f_k \times \Delta t$

知 $\Delta t < 0.00333\text{s}$ ，所以得

$$\text{水平衝量} = 2.50 \times 10^{-3} \quad (\text{N} \cdot \text{s})$$

2. 再由 水平衝量 = $m \times \Delta v = m \times (V_x' - 0)$ ，得到：

$$V_x' = \frac{\text{水平衝量}}{m} = 0.61 \quad (\text{m/s}) \quad \dots\dots\dots(\text{式 4-1})$$

3. 計算的摩擦力所造成的角衝量約為 $f_k \times r \times \Delta t$ ，

知 $\Delta t < 0.00333\text{s}$ ，所以得

$$\text{角衝量} = 1.26 \times 10^{-5} \quad (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s})$$

4. 再由 角衝量 = $I \times \Delta \omega = I \times (\omega' - 0)$ ，得到：

$$\omega' = \frac{\text{角衝量}}{I} = 260 \quad (\text{rad/s}) \quad \dots\dots\dots(\text{式 4-2})$$

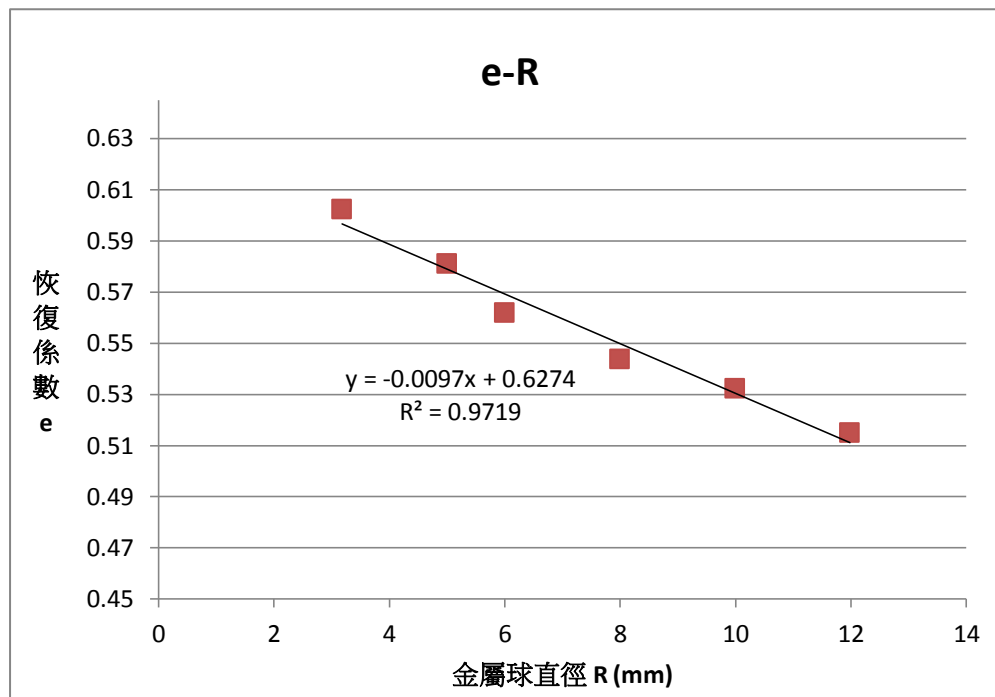
5. 由(式 4-1)與(式 4-2),計算摩擦力作用可使金屬球與圓盤之接觸點達到的最大速率:

$$\text{最大速率} = (\omega' \times r) + Vx' = 1.9 \quad (\text{m/s})$$

(四)與實驗結果與討論 六 的結果相符。

十一、金屬球直徑與其恢復係數的關係:

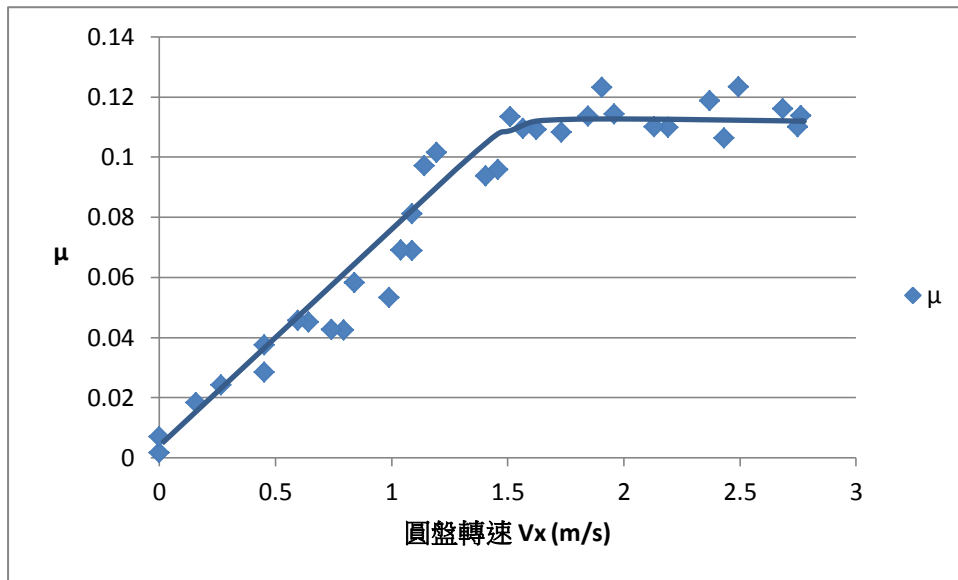
(一)測量數據如下:



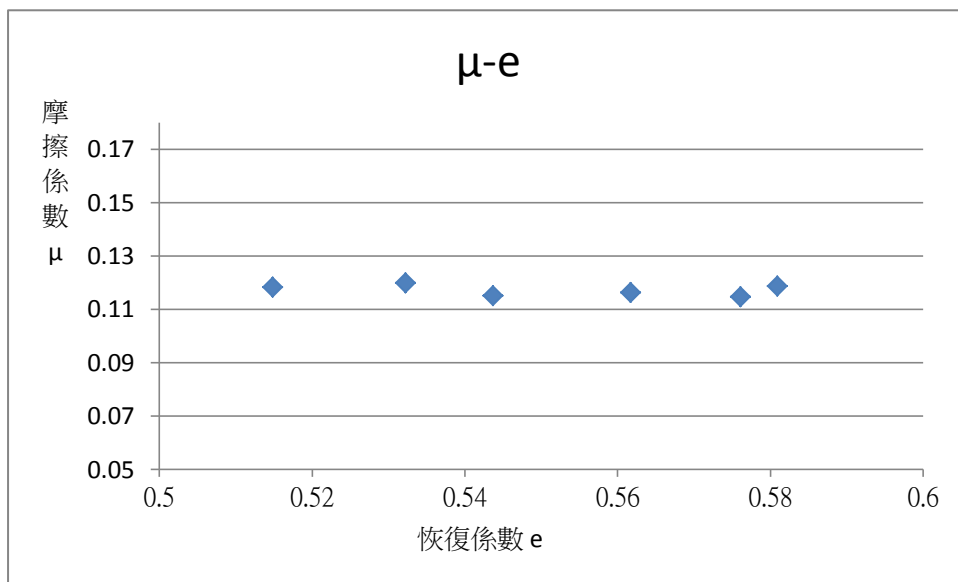
1. 得到金屬球恢復係數(e)與金屬球直徑(R)的回歸直線關係式
 $e = -0.0097 R + 0.6274$ 。
2. 可知金屬球愈大,測得的恢復係數愈小,推測因為金屬球愈大顆,撞擊時造成球的形變就愈大,而金屬球形變時會做功而產生熱能,故回彈時動能損耗較多,故恢復係數較小。

十二、金屬球恢復係數與動摩擦係數的關係：

(一) 以實驗 二 方法進行摩擦係數的測量：(下表為金屬球直徑 6.01 mm)



(二) 恢復係數與動摩擦係數關係如下：



1. 發現金屬球恢復係數介於 0.51 到 0.58 這個區間時，金屬球與鋼盤的動摩擦係數為定值。

2. 由實驗可知此種材質的金屬球與鋼盤的動摩擦係數趨近於 0.12 ± 0.01

柒、結論：

- 一、恢復係數與金屬球的入射角度無關，可測得在不同入射角時，金屬球與圓盤碰撞的恢復係數為 0.56 ± 0.02 。然而發現可藉由此實驗，測量碰撞中兩物間的動摩擦係數。
- 二、摩擦係數雖然已經有許多測量方法，但大多沒有辦法簡單且確切的測量動摩擦係數數值，經由碰撞過程測量摩擦係數，能夠克服此缺點。
- 三、碰撞過程發生於一瞬間之中，藉由碰撞過程測量摩擦係數，可輕易測量出碰撞瞬間兩物體間的動摩擦係數。
- 四、若物體微小(如實驗中的金屬球)，難以藉由傳統方法測出其動摩擦係數，但藉由碰撞過程測量摩擦係數，可有效解決微小物體摩擦係數不易測量的缺點，此將是一個測量摩擦係數的新方法。
- 五、可測得的金屬球與圓盤間的動摩擦係數 μ_k 為 0.14 ± 0.01
- 六、大金屬球與鋼盤碰撞時能量損耗較多，故其恢復係數較小。
恢復係數(e)與金屬球直徑(R)的關係為 $e = -0.0097R + 0.6274$
- 七、在恢復係數並沒有急遽變化的情況下(實驗為 $0.51 < \text{恢復係數} < 0.58$)，測出的動摩擦係數為 0.12 ± 0.01 ，為一定值，不會因恢復係數不同而有所變化。

捌、

- 一、基礎物理 2B 下，龍騰版
- 二、影響球體恢復係數變因之探討 陳佳卉、賴亦辰、林皇谷、林天健，中華民國第四十六屆中小學科學展覽會高中組物理科
- 三、Air Pressure and the Coefficient of Restitution of a Ball, by Rod Cross, Physics Department, University of Sydney, 2006 Australia
- 四、A semi-analytical model for oblique impacts of elastoplastic spheres, by CHUAN-YU WU, COLIN THORNTON, and LONG-YUAN LI, School of Chemical Engineering, and School of Civil Engineering, University of Birmingham, Birmingham B15 2TT, UK