第十四屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA14-331

作品名稱：訊息傳遞路徑之探討

姓名：潘韋中

關鍵字：最小廣播圖、圖論、訊息傳遞

摘要

透過社群網站，可使得廣播訊息更為方便、快速。但若有重要訊息要讓所有人確切知道，就必須一對一的方式將訊息傳達出去（電話、電腦系統封包傳遞皆採此方式），再讓獲知訊息的人一起幫忙傳達，以便眾所皆知。我們將廣播訊息以圖來呈現，視人為頂點，人際傳遞為邊，繪出相對應的圖。當傳遞時間為最少時，若使用的邊亦為最少，則為廣播最佳的圖，又稱為「最小廣播圖」。找出廣播最佳的圖即是本篇研究的要點。

過去的文獻[2][4][6][8][9][10]僅就一對一及一個發源點的最小廣播圖進行探討。本研究則是針對兩個發源點的情形，結合一對一最小廣播圖的傳遞規則作進一步的推論。最後推廣至在 Q_d 圖中任意發源點，以及一對多傳遞方式中特定發源點的情形。

Abstract

Through social networks, messages or information can be delivered more speedily or conveniently. Yet, if we want everyone to get an important message, it has to be done on a one-to -one basis, and then make people who have known the message let out the specific information so that it is possible for everyone to obtain the information. So, if we present the message transmission in the form of a graph by taking every person as a vertex, every single transmitting process as an edge and then connecting the correlative relation, we can create a meaningful graph. In this case, the less time consumed and the least edges used, it makes the best graph (also called a minimum broadcast graph). Finding the best graph(s) is the main purpose of this research.

The previous researches [2][4][6][8][9][10] were only on certain one-to-one basis and there is only one origin; nevertheless, our research is particularly on combining the minimum broadcast graph and the two origins hypothesis. In the hope of further extending this theory makes the connection possible among random origins and on the situation of one-by-many connection from a specific origin.

壹、研究動機

基於網際網路發達，訊息散布複雜，加上隨時間越長，會越難辨識每則訊息，更何況，為有效利用時間，不宜收取非必要訊息，因此，藉由電話一對一的傳遞方式，可以確實讓訊息完整傳遞，而且能 100%讓對方接收訊息。而且在高一上時，學到指、對數單元時，意外發現 92 學年度學測中有一道很有趣的題目[1]，是關於訊息傳遞的部分，求**傳遞最快的時間**，而這傳播情形是否能用表格及圖形呈現呢？

> 根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1-2^{-kt})\%$，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則 T 最接近何數？

除觀察此題訊息傳遞的圖形，我們也開始尋找訊息傳遞方面的資料，找到了一項有關最小廣播圖的研究文獻[4]，發現內容可能有更快的傳遞方式(點個數變化以 1 傳 2、2 傳 4、4 傳 8、⋯、n 傳 $2n$ 之方式傳遞，即 2 倍傳輸)，實際圖形可能可以更為精簡、完整，且涵蓋的範圍、各點的訊息種類還可以更多，再加上後面分別有兩個猜想[6]，更引發我們興趣。想解出兩個猜想之解答，與探討最小廣播圖之內容。也有鑑於現在有線網路**管線複雜、成本高**（而其中可能有多餘設置的管線），而**網路拓墣中，環狀拓樸、匯流排狀拓樸線路損壞或是星狀拓樸中央節點故障即導致整個網路癱瘓[11]**。若能套用圖形至生活，必利於減少傳遞時間、線路故障時的整體癱瘓，而其中是否有特別連接的方式呢?

舉例來說，就像人之間的聯絡網，以電話之間相連繫，若是某人想將訊息傳達給其他人知道，且為確保每個人都能完整得知該訊息，則變成只能**一對一**的傳達，但為了減短傳遞時間，必須讓其他人在得知訊息後一起幫忙傳達給其他不知道的人，以達花費最少的時間。將人之間的連繫連接起來，可形成一種類似以放射狀傳遞的圖形。而當不只一種訊息需傳遞時，須經交換彼此的訊息，補足彼此的訊息後再傳遞，讓所有人獲得完整的訊息。然此時將人之間的連繫再連接起來，圖形是否會有不同的樣貌呢？會是如何發展？最快的圖形又是什麼樣子呢？

貳、研究目的

一、驗證、創新最小廣播圖文獻[4]之猜想 1 及猜想 2

(1)猜想 1：當 $2^{t-1}<n<2^t$ 時，則 $f_{G'}(n,k)\le f_G(n+1,k)$，其中圖 G'為 G 的子圖。**亦即將圖形增加一個點，是否會使<u>最小廣播圖</u>的<u>邊數</u>增加？**

(2)猜想 2：$f_G(n,2^m)=n+(m-2)\times 2^{m-1}$，其中 $m\in\mathbb{N}$。**亦即將發源點個數以 2 的指數成長，<u>最小廣播圖</u>的<u>邊數</u>是否會符合上述<u>通式</u>?**

二、探討最小廣播圖圖形之發源點個數 k 與總點數 n、邊個數之間的關係(解釋、創新定理)，並找出規律

符號定義

n：廣播圖中總點數

k：發源點個數(發源點計算在總點數內，故恆有 $k\le n$)

t：廣播圖傳遞時間(單位：秒)

$f_G(n,k)$：以 n 個點、**特定** k 個發源點組成的廣播圖 G 之**邊數**，傳遞時間達$\lceil \log_2 n\rceil$之下界(傳遞 **1** 對 **1**)

$f\,'_G(n,k)$：以 n 個點、**特定** k 個發源點組成的廣播圖 G 之**邊數**，傳遞時間達$\lceil \log_3 n\rceil$之下界(傳遞 **1** 對 **2**)

$B(n)$：以 n 個點、**<u>1 個發源點</u>**形成的廣播圖之**最小邊數**，傳遞時間達$\lceil \log_2 n\rceil$之下界，發源點可於 n 個點中**<u>任選其一</u>**

$F(n)$：以 n 個點、**<u>2 個發源點</u>**形成的廣播圖之**最小邊數**，傳遞時間達$\lceil \log_2 n\rceil$之下界，發源點可於 n 個點中**<u>任選其二</u>**，且圖形之邊數達最小

Q_d：d 維超立方體（$d\in\mathbb{N}$）

名詞解釋

(1)極小廣播圖(*Minimal Broadcast Graph*)

廣播圖傳遞達$\lceil \log_2 n\rceil$秒之下界，且每一真生成子圖(*every proper spanning subgraph*)，都無法傳遞達$\lceil \log_2 n\rceil$秒之下界。而極小廣播圖之邊數不一定最少，故有最小廣播圖之定義。

proper：此子圖不可以為原圖

spanning：此子圖須包含原圖之所有點

subgraph：子圖

(在所有具有相同點數極小廣播圖中，邊數最少之圖形稱最小廣播圖，未必唯一)

(2)最小廣播圖(*Minimum Broadcast Graph*)：

具有最少邊數之極小廣播圖。

定義：

當有 n 個點時，以若干條線路將其連接，使每個點都能接收到訊息；其中有 k 個($k\leq n$)發源點能發布訊息（1 秒傳一點）。經歷 t 秒時，設此圖形為(n,k)廣播圖，而將其圖形邊數記為 $f_G(n,k)$。且此時時間達$\lceil \log_2 n \rceil$秒之下界，而邊數又最少，稱其最小(時間及邊數)。

舉例：

如下圖 1，點 A 為發源點(帶有訊息)、A_1 為不具訊息的點，此時 A 將訊息有選擇性(一次傳給一個點)傳給 A_1，需要 1 秒的時間，此時，稱圖形為(2,1)廣播圖，而圖形邊數為 $f_G(2,1)=1$ 條；而當 A_1 收到訊息後，即與 A 有相同傳訊功能，故 2 點再將訊息傳給鄰近的點(如圖 2)，亦需 1 秒的時間(則從 $t=0$ 到 $t=2$ 需 2 秒)，此時，稱圖形為(4,1)最小廣播圖（k 表 $t=0$ 時，發源點的個數），而圖形邊數為 $f_G(4,1)=3$ 條，且達時間下界$\lceil \log_2 4 \rceil = 2$ 秒。

圖 1

圖 2

「最小廣播圖」訊息傳遞規則

(1)「有選擇性」傳送：一個發源點一秒(一時間單位)時僅能傳出一種訊息；但若有 2 種以上訊息則能分別「內傳」(原本的點之間)將不同訊息傳給 2 個以上的點；而向外延伸、傳遞之條件：單個點需獲得所有訊息，才可向外延伸，連接出新的點。

(2)(n,k)之圖形，發源點個數 k 恆以時間 $t=0$ 時(尚未開始傳訊息)記，而點個數 n 隨時間 t 而改變。

(3)所有點個數 n 恆大於或等於發源點個數 k。

(4)「單點傳輸」：當發源點僅有 1 個時，亦即只有一種訊息進行傳遞(發源點本身具備所有訊息)，故其他未有訊息的點，一旦獲得訊息，即可向外傳遞，可不需交換訊息後再傳。

(5)一個單位時間內，一個節點僅能參與一對節點的傳遞；見[2,8,10]。

(6)多對節點可於同一單位時間內同步傳遞，且彼此互不干擾；見[2,8,10]。

(7)內部傳遞(內傳)：發源點內互相傳遞(類似**交換訊息**)，之間不額外進行延伸(點個數不

變，除非點已獲得所有訊息且不協助傳遞訊息的狀態下，才會增加)，以達成所有點獲得全部訊息。

(8)每一個節點進行傳遞時，只能與相鄰之節點作為傳遞對象；見[2,8,10]。

參、研究方法

研究器材及設備

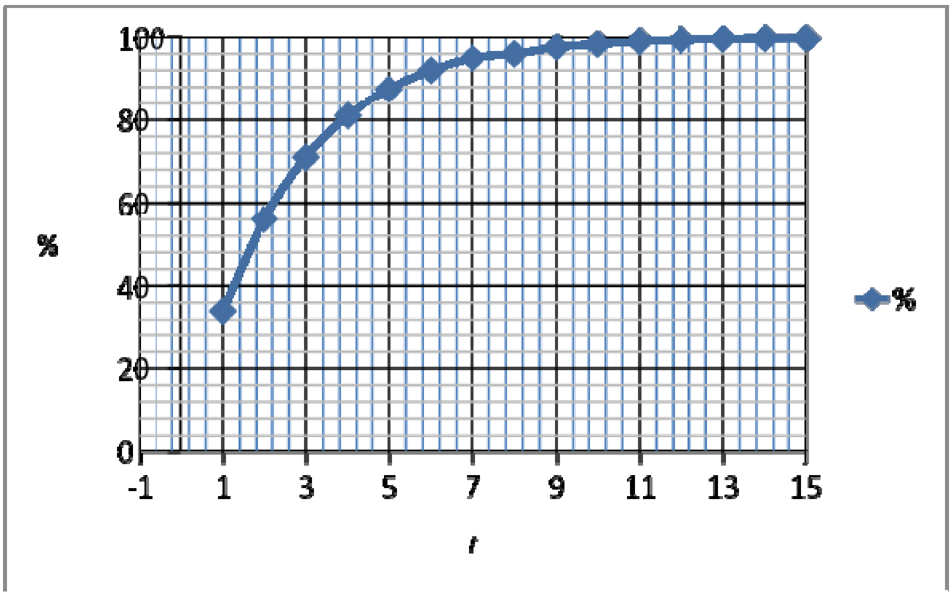
紙、筆、電腦(*Word*、*Excel*、*Geogebra*、*MathType*)、快樂的心。

研究內容

(為研究 $F(n)$廣播圖，故探討文獻[2],[8]的 $B(n)$最小廣播圖原有之結果，在此省略，詳見附錄)

> 題目：根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1\text{-}2^{-kt})$%，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息。又設<u>最快</u>要 T 小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則 T 最接近何數？

k=0.6(大約值)	
t	%
1	34
2	56
3	71
4	81
5	87.5
6	92
7	95
8	96
9	97.6
10	98.4
11	99
12	99.3
13	99.6
14	99.7
15	99.8



$$100(1-2^{-3k})=70 \Rightarrow k=\frac{\log_2 10-\log_2 3}{3}$$

$$100(1-2^{-kt})=99 \Rightarrow t=\frac{2\log_2 10}{k}$$

此圖形（藍色）一開始成長迅速，到後來逐漸減慢，無限趨近 100%。

經由 log 的換底公式，即可變成以 2 倍的傳輸。與最小廣播圖傳遞方式相同。

$f_G(n,k)$廣播圖(1 對 1)

以下 $f_G(n,k)$所得之邊數皆為圖形**傳遞達最大範圍**時(意即 n 取最大)之結果，且發源點多個的狀況。

定理 1：$f_G(n,1)=n-1=2^t-1$，其中 $n=2^t$

文獻[6]僅簡短提及 $f_G(n,1)=n-1$，但若經由 $t=\lceil \log_2 n \rceil$ 的轉換(而且 **n 需為廣播圖的點數傳播最多時的狀況**)，即可得 $n=2^t$。

證明：

當 $t=1$ 時，$f_G(2,1)=1$ 成立。如圖 3，發源點 A 傳訊息給 A_1。

$t=2$ 時，$f_G(4,1)=3$ 成立。如圖 4，發源點 A 與 A_1 傳訊息給鄰近 2 點。

$t=3$ 時，$f_G(8,1)=7$ 成立。如下圖 5，發源點 A 與 A_1 再傳訊息給鄰近 2 點，而第 2 秒(圖 4)延伸之兩點亦可向外傳訊給鄰近 2 點。

圖 3

圖 4

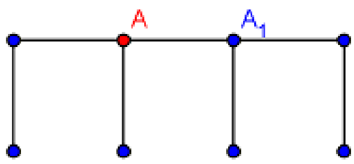


圖 5

設 $t=p$ 時，$f_G(2^p,1)=2^p-1$ (其中 $p\in\mathbb{N}$) 成立。

則 $t=p+1$ 時，$f_G(2^{p+1},1)=[2\times f_G(2^p,1)]+1=2\times(2^p-1)+1=2^{p+1}-1$ 亦成立(解釋如下圖 6)。

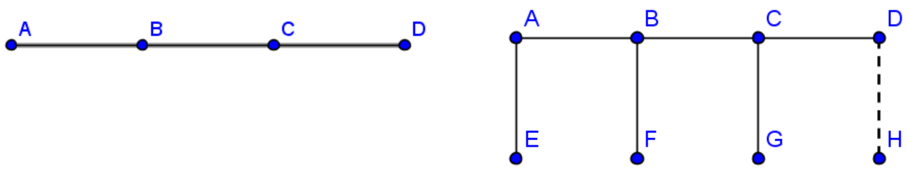


圖 6

(由於點個數為 2^p，則圖形邊數為 2^p-1（如上左圖）；而**下一秒的圖形為前一秒的 2 倍**，即 2^{p+1}，則**邊數為 2 倍的 2^p-1，再加上 1 個邊**(如上右圖，而虛線即為加上的邊))

由數學歸納法可知：$\forall\, t\in\mathbb{N}$，當 $k=1$ 時，圖形之邊數等於 $n-1=2^t-1$。 *Q.E.D.*

以下皆為多個發源點(且發源點的訊息不同)之圖形。

定理 2：$f_G(n,2)=n-1=2^t-1$，其中 $n=2^t$

同理， $f_G(n,1)=f_G(n,2)$之圖形，但差異在訊息種類多寡。

證明：

$t=1$ 時，$f_G(2,2)=1$ 成立。如圖 7，發源點 A,B 帶有不同訊息，兩者相互傳遞訊息。

$t=2$ 時，$f_G(4,2)=3$ 成立。如圖 8，A,B 皆具完整的訊息，即可向外傳遞至鄰近的點。

$t=3$ 時，$f_G(8,2)=7$ 成立。

設 $t=p$ 時成立，即 $f_G(2^p,2)= 2^p-1$ (其中 $p\in\mathbb{N}$)。

則 $t=p+1$ 時，$f_G(2^{p+1},2)=[2\times f_G(2^p,2)]+1=2\times(2^p-1)+1=2^{p+1}-1$ 亦成立。

由數學歸納法可知：$\forall\, t\in\mathbb{N}$，當 $k=2$ 時，圖形之邊數等於 $n-1=2^t-1$。 *Q.E.D.*

由此亦可知，$f_G(n,2)$之圖形等於 $f_G(n,1)$之圖形，但**訊息種類多一種**。

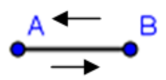


圖 7

圖 8

(備註：當每個點獲得所有訊息後，點個數將以 2 的倍數增加、延伸)

舉例：以圖 7 而言，由於 A , B 2 點在此時皆具所有訊息，而到下 1 秒(如圖 8)即可向外傳遞，點個數為 4 個，為前 1 秒的 2 倍，以此類推，圖形再經過 1 秒，即可變為 8 個點，點個數仍為其前 1 秒的 2 倍。

定理 3:

當 $t\geq3$ 時，$f_G(n,3)=2^{t-1}-1$，其中 $t=\lceil\log_2 n\rceil+1$ 且 G 中的發源點連成路徑

當 $t\geq3$ 時，$f_G(n,3)=2^{t-1}$，其中 $t=\lceil\log_2 n\rceil+1$ 且 G 中的發源點連成 C_3

當 $t\geq3$ 時，$f_G(n,3)=2^{t-1}-1$

A,B 2 點互換訊息(a 與 b 訊息互傳)，C 點不做任何變化，如圖 9。

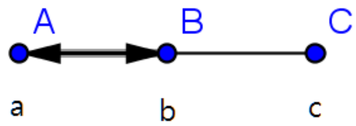


圖 9 $t=1$

A,B 點具 a,b 訊息，B,C 2 點互換訊息(a,b 與 c 訊息互傳)，A 點不做任何變化，如圖 10。

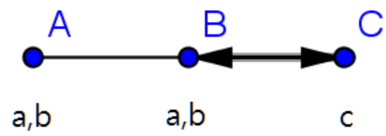


圖 10 t=2

B,C 點具 a,b,c 所有訊息，B 給 A 點 c 訊息，C 點因擁有所有訊息，且不需協助其他點傳遞，即向外傳遞產生新點 D。

所有點均具有所有訊息，即可於下一秒後開始 2 倍傳輸，如圖 11。

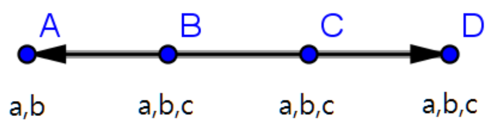


圖 11 t=3

當 $t\geq 3$ 時，$f_G(n,3)=2^{t-1}$

($t\leq 2$ 任一點訊息未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊，如圖 12、13)

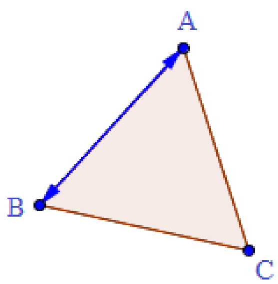


圖 12 t=1

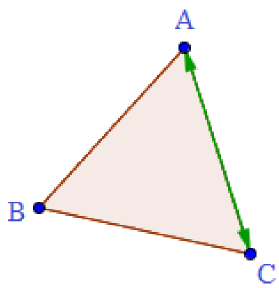


圖 13 t=2

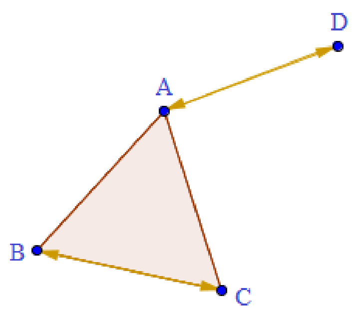


圖 14 t=3

定理 4：

$f_G(n,4)=$

$2^{t-1}-1$，其中 $t=\lceil \log_2 n \rceil+1$ 且 G 中的發源點連成路徑

2^t，其中 $t=\lceil \log_2 n \rceil$ 且 G 中的發源點連成 C_4

$f_G(n,4)=2^{t-1}-1$，$t\geq 3$ (如圖 15、16)

($t\leq 2$ 時，任一點訊息尚未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊)

(但其傳遞秒數須≥3 秒，每個點因均具所有訊息，訊息才能使點以 2 之倍數擴增)

圖 15

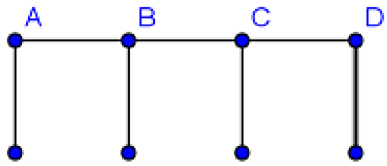


圖 16

$f_G(n,4)=2^t$ ($t\geq 2$)

(但其傳遞秒數須≥2 秒，每個點因均具所有訊息，訊息才能使點以 2 之倍數擴增)

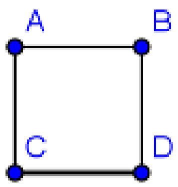


圖 17

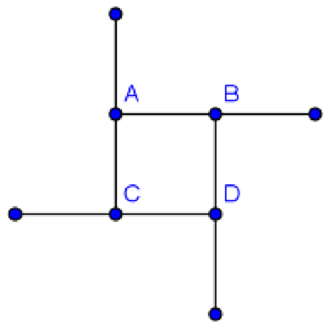


圖 18

$f_G(n,4)=2^t$，詳細訊息傳遞狀況。

($t=1$ 時，任一點訊息尚未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊)

A,B,C,D 分別為不同訊息的發源點，第 1 秒 A, B 互換訊息、C, D 互換訊息。

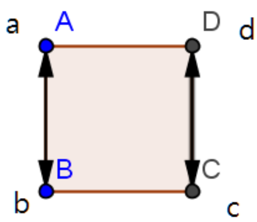


圖 19　$t=1$

當 t=2 時，$f_G(4,4)=4$。

第 2 秒，A, D 互換訊息、B, C 互換訊息，每個點皆有所有訊息。

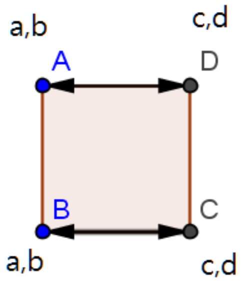


圖 20　t=2

當 t=3 時，$f_G(8,4)=8$。

如圖 21，由於 A,B,C,D 4 個點皆獲得全部訊息，即可向外延伸，傳遞至鄰近的點。

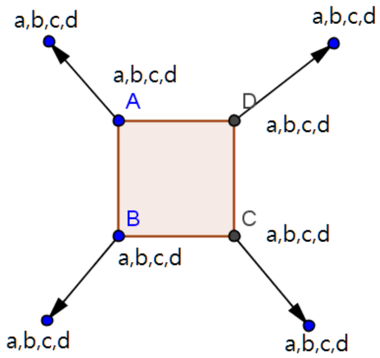


圖 21　t=3

當 t=4 時，$f_G(16,4)=16$。

定理 5：當 $t\geq3$ 時，$f_G(2^t,8)=4\times(2^{t-2}+1)$，其中 G 中的發源點連成 3 維超立方體（亦可看成平面圖，如圖 22）(來源:[6])

($t\leq2$ 時，任一點訊息尚未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊)

(但其傳遞秒數須≥4 秒，每個點因均具所有訊息，訊息才能使點以 2 之倍數擴增)

圖 22 為利用拓樸學之概念，將正六面體壓成平面圖形。

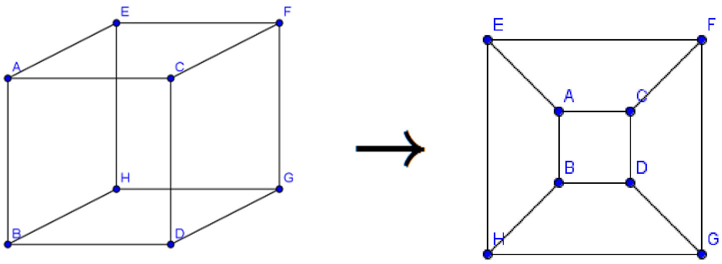


圖 22

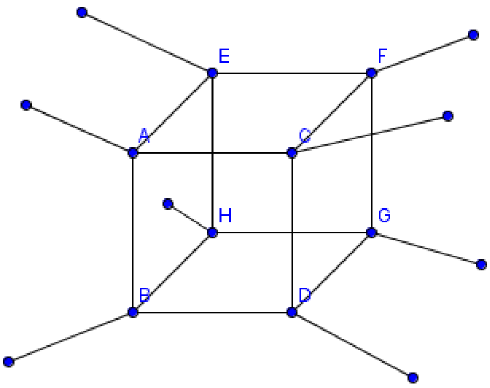


圖 23

定理 6：當 $t\geq 2$ 時，$f_G(n,4)=2^t+2$，其中 G 中的發源點連成正四面體（亦可看成平面圖，如圖 24）

($t\leq 1$ 時，任一點訊息尚未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊，傳遞方向如圖 24 之黑色箭頭)

圖 24 為利用拓樸學之概念，將正四面體壓成平面圖形。

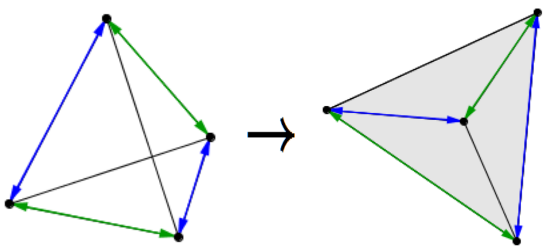


圖 24

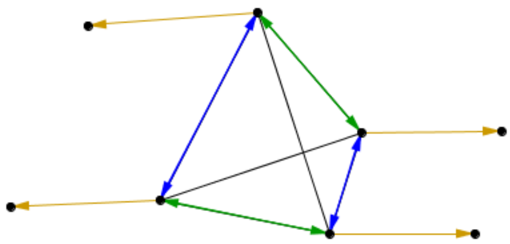


圖 25

猜想 1：n 單調增加的影響。當 $2^{t-1}<n<2^t$ 時，則 $f_{G'}(n,k)\leq f_G(n+1,k)$，其中圖 G'為 G 的子圖(來源：[6])

證明：

當 $2^{t-1}<n<2^t$ 時，$t=\lceil \log_2 n \rceil = \lceil \log_2 (n+1) \rceil$。因此$(n+1, k)$的廣播圖 G 與(n, k)的廣播圖 G'，廣播時間相同，其中圖 G'為 G 子圖。由於少掉一點必定會少一個以上的邊，且廣播時間相等，因此，$f_{G'}(n,k)\leq f_G(n+1,k)$。(依據最小廣播圖之定義)　*Q.E.D.*

猜想 2：$f_G(n, 2^m)=n+(m-2)\times 2^{m-1}$，其中 $m\in\mathbb{N}$，未必恆成立(來源：[6])

<Method 1>依照 Q_d 之特性，且 n 必須取**最大值**($n=2^m$)，可得圖形若為 Q_m，邊數為 $m+1\times 2^m$，故不合。(詳見 Q_d)

<Method 2>依照 $B(n)$與 $F(n)$之定義(發源點分別為 1 個、2 個)，故將 m 帶入 0 和 1，會得邊數分別為 n-1 與 n-1，則必知其圖形為路徑，但路徑符合最小廣播圖之圖形只有 $B(1)$、$B(2)$、$B(3)$、$F(2)$時會正確，故此算式並不一定是正確的。

$f'_G(n,k)$最小廣播圖(1 對 2)

$f'_G(n,k)$所得之邊數皆為圖形傳遞達最大範圍時(意即 n 取最大)之結果，且發源點多個的狀況 1 對 2

我們改變最小廣播圖中 1 對 1 傳遞的部分，改為 1 對 2 的傳遞，亦即一個單位時間內，一個節點變成能參與兩對節點的傳遞，邊數以 $f'_G(n,k)$表示。

定理 7：$f'_G(n,1)=3^t-1$，其中 $n=3^t$

證明：

當 $t=1$ 時，$f'_G(3,1)=3-1=2$，且 $n=3$ 成立。

如圖 26，A 點為發源點，故在第一秒時即擁有所有訊息，即可向外進行 1 對 2 的傳輸。

當 $t=2$ 時，$f'_G(9,1)=3^2-1=8$，且 $n=3^2=9$ 成立。

如下圖 27，第二秒時，由於 A,B,C 三點皆擁有所有訊息，3 點皆可向外進行 1 對 2 的傳輸。

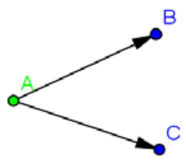


圖 26

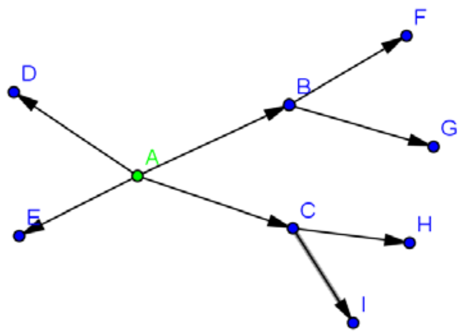


圖 27

設 $t=p$ 時，$f'_G(3^p,1)= 3^p-1$ ，且 $n=3^p$ (其中 $p\in\mathbb{N}$) 成立。

則當 $t=p+1$ 時，$f'_G(3^{p+1},1)=[3\times f'(3^p,1)]+2=3\times3^p-1=3^{p+1}-1$，且 $n=3\times3^p=3^{p+1}$ 亦成立。

解釋如圖 28。

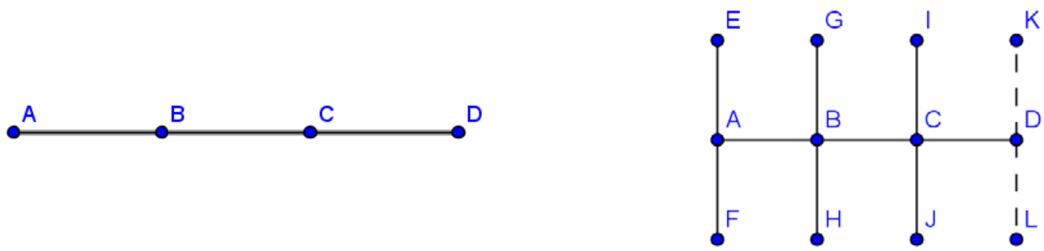


圖 28

(由於點個數為 3^p，則圖形邊數為 3^p-1(如上左圖)；而下一秒的圖形為前一秒的 3 倍，即 3^{p+1}，則邊數為 2 倍的 3^p-1，再加上 2 個邊(如上右圖，而虛線即為加上的邊))

由數學歸納法可知：$\forall\, t\in\mathbb{N}$，當 $k=1$ 時，圖形之邊數等於 $n-1=3^t-1$ 且 $n=3^t$。 *Q.E.D.*

以下為多個發源點(且發源點間訊息不同)之圖形

定理 8： $f\,'_G(n,2)=2\times3^{t-1}-1=n-1$，其中 $n=2\times3^{t-1}$，且發源點連成路徑

證明：

當 $t=1$ 時，$f\,'_G(2,2)=2\times1-1=1$，其中 $n=2\times3^0=1$ 成立。

如圖 29，發源點 A,B 帶有不同訊息，兩者相互傳遞訊息。

當 $t=2$ 時，$f\,'_G(6,2)=5$，其中 $n=2\times3^1=6$ 成立。

如圖 30，A,B 皆具完整的訊息，即可向外傳遞產生新點，進行 1 對 2 的傳輸。

設 $t=p$ 時成立，即 $f\,'_G(2\times3^{p-1},2)=2\times3^{p-1}-1$，其中 $n=2\times3^{p-1}$ (其中 $k\in\mathbb{N}$) 。

則 $t=p+1$ 時，$f\,'_G(2\times3^p,2)=[3\times f'_G(2\times3^{p-1},2)]+2=3\times(2\times3^{p-1}-1)+2=2\times3^p$，其中 $n=2\times3^p$ 亦成立。

由數學歸納法可知：$\forall\, t\in\mathbb{N}$，當 $k=2$ 時，圖形之邊數等於 $2\times3^{t-1}-1=n-1$，其中 $n=2\times3^{t-1}$。

Q.E.D.

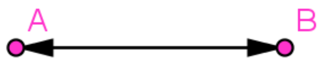


圖 29

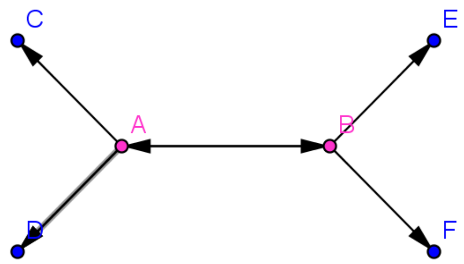


圖 30

仍有推導計算出後續之圖形以及改為 1 對 3、1 對 4 之傳遞方式。

以下再回到原本最小廣播圖 1 對 1 的傳遞作探討、延伸

C_4 魔方

在一個 C_4 中，任意取 1~4 個點作為發源點，且不論相鄰與否，皆可在$\lceil \log_2 4 \rceil=2$ 秒的時間下界內完成傳遞。

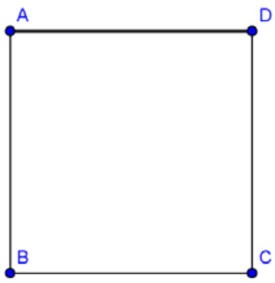


圖 54

以圖 54 為例，任取 A,B,C,D 任意 1~4 個點作為發源點，傳遞皆可在$\lceil \log_2 4 \rceil=2$ 秒的時間

下界內完成。

發源點 4 個時之狀況已於上述定理 4 中提及並證明，此處以 $F(4)$作解釋，並分別探討發源點 A 和 B 相鄰與 A 和 C 不相鄰的狀況。

A~B (A 相鄰 B)

A,B 點分別為不同訊息的發源點，因相鄰即可於第 1 秒先互傳訊息，補足<u>所有訊息</u>，即可於第 2 秒傳給 C, D 點，完成傳遞。(見圖 55、56)

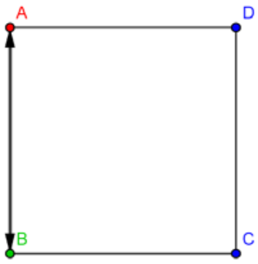


圖 55 t=1

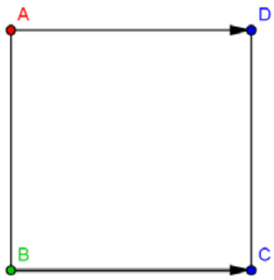


圖 56 t=2

A≁C (A 不相鄰 C)

A,C 點分別為不同訊息的發源點，因不相鄰即可於第 1 秒分別先傳給鄰近的 B,D 點，使其分別有 A,C 訊息，即可於第 2 秒互傳給對方，補足<u>所有訊息</u>，完成傳遞。(見圖 57、58)

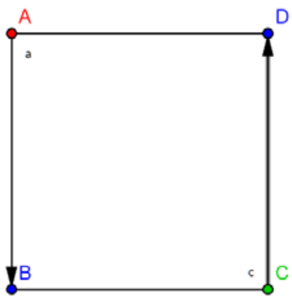


圖 57 t=1

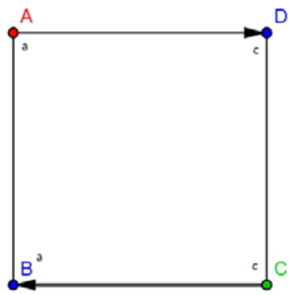


圖 58 t=2

同理，依據對稱性，1~4 個發源點皆落在同一 C_4 時，傳遞皆可在 $\lceil \log_2 4 \rceil = 2$ 秒的時間下界完成傳遞。

Q_d：d 維超立方體(來源：[8])

Q_d：圖形為 d 維超立方體，$n=2^d$，圖形邊數為 $d\times2^{d-1}$

證明：

當 $d=1$ 時，Q_1 為 1 維超立方體，$n=2^1=2$，圖形邊數為 $1\times2^{1-1}=1$ 成立。

圖 59

當 $d=2$ 時，Q_2 為 2 維超立方體(稱之為 C_4 魔方)，$n=2^2=4$，圖形邊數為 $2\times2^{2-1}=4$ 成立。Q_2 亦可表示為 2 個 Q_1 將點相連，點個數為「Q_1 的 2 倍」，$n=1\times2=2$，圖形邊數為「2 倍的 Q_1 邊數+2 個 Q_1 之間形成完美配對所需邊數」，$2\times1+2=4$ 成立。

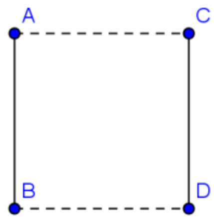


圖 60

設 $d=p$ 時成立，Q_p 為 p 維超立方體，$n=2^p$，圖形邊數為 $p\times2^{p-1}$。

圖 61

則當 $d=p+1$ 時，Q_{p+1} 為 $p+1$ 維超立方體，點個數為「Q_p 的 2 倍」，$n=2\times2^p=2^{p+1}$，圖形邊數為「2 倍的 Q_p 邊數+ 2 個 Q_p 之間形成完美配對所需邊數」，$2\times(p\times2^{p-1})+2^p=(p+1)\times2^p$ 亦成立。

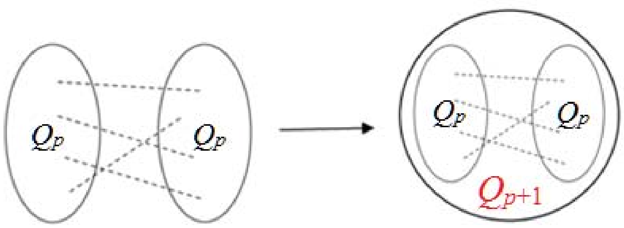


圖 62

由數學歸納法可知：$\forall d \in \mathbb{N}$，當圖形為 d 維超立方體，則 $n=2^d$，圖形邊數為 $d \times 2^{d-1}$。

Q.E.D.

定理 9：當 $n=2^d$，對於任何的 k 介於 $1\sim2^d$ 之間(包含 1 及 2^d)，Q_d 都是廣播圖

我們在 Q_d 中以 2 進位的方式分別將每個點命名，點個數有 2^d 個，每一個點的名字有 d 位數，而交換訊息的方式為：假設每一個點皆帶有訊息(無訊息也視為一種訊息，且所有訊息皆視為相異)，當 $t=1$ 秒時，名字只有最後一位元不同的點互相交換(下圖之藍線部分)，$t=2$ 秒時，名字只有倒數第 2 位元不同的點互相交換(下圖之紅線部分)，以此類推，由此可得知任一點在 t 秒內收到的訊息情況。

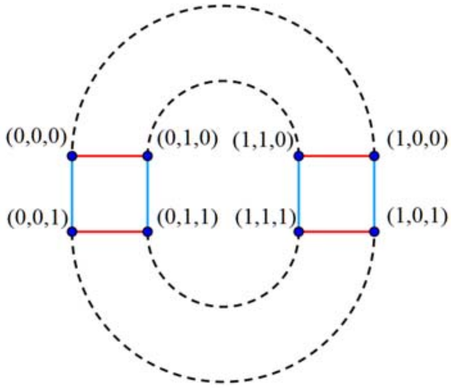


圖 63

由圖可知，此為 Q_3，第 1 秒時，任意一點交換訊息時會獲得彼此所擁有的訊息(先交換只有最後一位元不相同的點，即藍線部分)；第 2 秒時，因為前一秒的交換，所以任意一點皆有 1(自身訊息)+1(第 1 秒時獲得之訊息)=2 個訊息，所以交換訊息時便會再獲得 2 個訊息(再交換只有倒數第二位元不相同的點，即紅線部分)，各點即擁有 2+2=4 個訊息；第 3 秒時，因為前一秒、前二秒的交換，所以任意一點皆有 1(自身訊息)+1(第 1 秒時獲得之訊息) +2(第 2 秒時獲得之訊息)=4 個訊息，所以交換訊息時便會再獲得 4 個訊息(再交換只有倒數第三位元不相同的點，即虛線部分)，各點即擁有 4+4=8 個訊息。以此類推，故我們可得下表。

表 1		
秒數	收到訊息之個數	各點擁有之訊息個數
1	2^0	2
2	2^1	2^2
3	2^2	2^3
…	…	…
d	2^{d-1}	2^d

我們把 $1\sim d$ 秒所收到訊息之個數和原本持有個數相加後得出：$1+\sum_{i=1}^{d} 2^{i-1} = 2^d$

因為我們使用上述之交換方式，故訊息不會重複交換，因此可得知 Q_d 使用上述交換方式可以在時間下界 $\lceil \log_2 2^d \rceil = d$ 秒收到全部的訊息，且 k 可以是介於 1 至 2^d 間的任意一數。

Q.E.D.

引理：$f_G(2^d,k)= d \times 2^{d-1}$，其中 k 可為介於 1 至 2^d 間的任意一數

證明：

由定義，$f_G(2^d,k)\geq B(2^d)= d\times2^{d-1}$ (其中 $B(2^d)= d\times2^{d-1}$ 得自文獻[10]) 。由前面 Q_d 之定理，$f_G(2^d,k)\leq d\times2^{d-1}$，故得證。

Q.E.D.

兩個發源點之最小廣播圖—*F*(*n*)

以 n 個點($n\geq2$)、**<u>2 個發源點</u>**形成之廣播圖，時間達$\lceil \log_2 n \rceil$之下界，發源點可於 n 個點中**<u>任選</u>**其二，且圖形之邊數達最小。

$F(2)=1$

圖 64 t=0

如圖 65，A,B 兩不同訊息的發源點，互為鄰點，在第 1 秒即可互相交換訊息，完成傳遞，且達$\lceil \log_2 2 \rceil = 1$秒的時間下界。

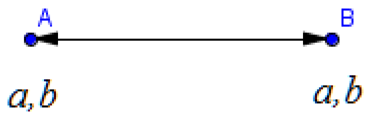


圖 65 t=1

$F(3)=3$

由 $F(n)$與 $B(n)$之定義，可得 $F(n)\geq B(n)$ 。

故 $F(3)\geq B(3)$，而已知 $B(3)=2$。點個數為 3、邊個數為 2 之連通圖是唯一的，如圖 66。

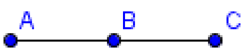


圖 66

但其發源點並不能任意，例如圖 67 中不相鄰兩點 A,C，

A,C 兩點為不同訊息之發源點，傳遞完成時間為 3 秒，未達時間下界$\lceil \log_2 3 \rceil = 2$秒。

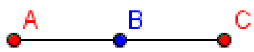


圖 67

由此可知，無法在 t=2 完成廣播，故 $F(3)>2$ 成立。

因此，我們考慮 $F(3)\geq3$ 的情況。點個數為 3、邊個數為 3 之圖是唯一的，如下圖 68。

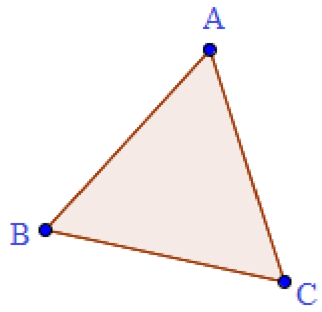


圖 68 t=0

不失一般性，設兩個發源點位置如下圖(此處以 A, B 兩點作為發源點)。

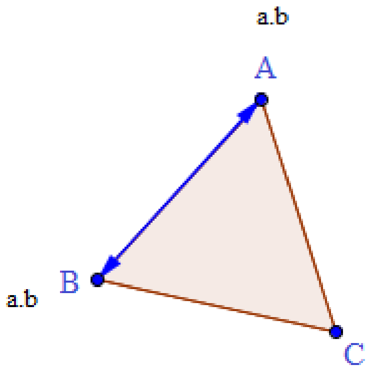


圖 69 t=1

A,B 2 點為發源點，第 1 秒互相交換，彼此擁有所有訊息，如圖 69。

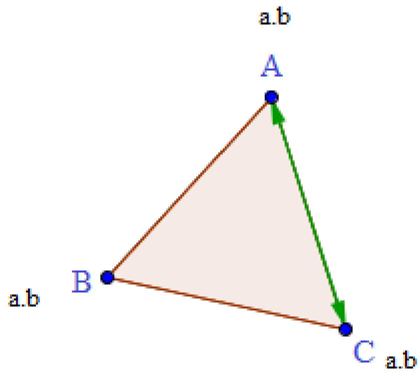


圖 70 t=2

第 2 秒，A,B 2 點其中一點傳訊息給 C 點(此處以 A 點傳給 C 點為例)，完成傳遞(如圖 70)。

由以上可知，即使任選 A,B、A,C 或 B,C 點，傳遞狀況相同，皆可於$\lceil \log_2 3 \rceil = 2$秒完成傳遞。故存在點個數為 3、邊個數為 3 的廣播圖，因此 $F(3)\leq 3$，故 $F(3)=3$。

$F(4)=4$

圖形即為 C_4 魔方，已在之前做過說明。

$F(5)=5$

由 $F(n)$與 $B(n)$之定義，可得 $F(5) \geq B(5)$。已知 $B(5)=5$，若能找到點個數為 5、邊個數為 5、2 個發源點位置可以任意之廣播圖，則有 $F(5)=5$。

考慮 5 個點連成五邊形，有兩種情形，分別探討如下：

(i) 2 發源點相鄰(不失一般性，考慮 A~B)

A,B 各為 2 個不同訊息的發源點，由於 2 點相鄰，在第 1 秒即互換訊息，使彼此擁有完整訊息，便可在下一秒向外傳遞訊息。

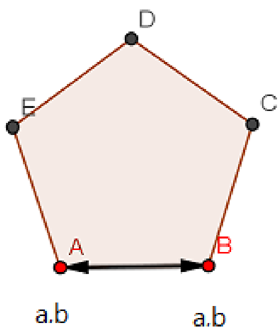


圖 71 t=1

第 2 秒，A,B 分別將訊息傳給 C,E。

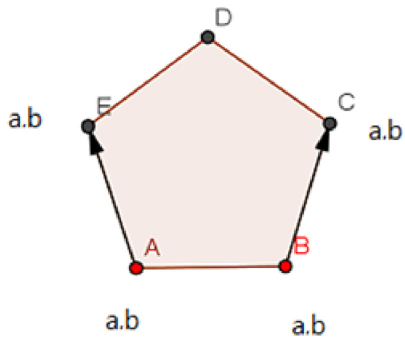


圖 72 t=2

第 3 秒，E 點將訊息傳給 D 點(實際上，C,E 中任意一點皆可傳遞訊息給 D 點，在此以 E 點為例) 。

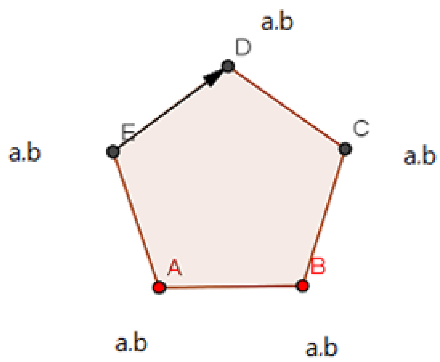


圖 73 t=3

(ii) 2 發源點不相鄰(不失一般性，考慮 A≁C)

A,C 點為不相鄰的發源點，第 1 秒分別傳遞訊息給 B,D 點，但每個點皆未有所有訊息。

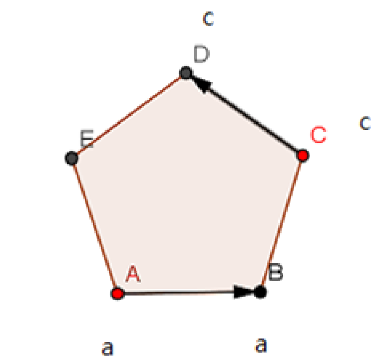


圖 74 t=1

第 2 秒，A 點將訊息傳給 E 點，B,C 點互換訊息，此時 B,C 點有所有訊息。

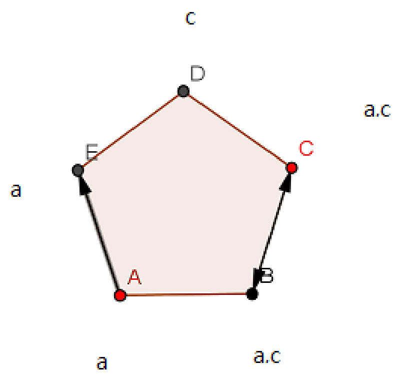


圖 75 t=2

第 3 秒，D,E 點互換訊息，B 點將訊息傳給 A 點，這時所有點皆具有全部訊息。

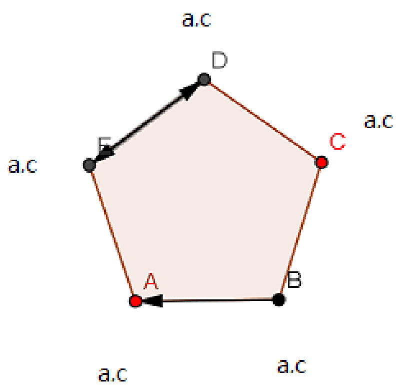


圖 76 t=3

由上可知，當 5 節點連成五邊形時，任意選擇 2 個發源點，皆可於$\lceil \log_2 5 \rceil = 3$秒完成傳遞。故 $F(5)$=5。

$F(6)$=6

已知 $B(6)$=6，由定義，可得 $F(6) \geq B(6)$ 。

若能找到點個數為 6、邊個數為 6、2 個發源點位置可以任意之廣播圖，則有 $F(6)$=6。

考慮 6 個點連成六邊形，有三種情形，分別探討如下：

(i) 2 發源點相鄰(不失一般性，考慮 A~B)

A,B 2 點為發源點，在第 1 秒互相交換彼此訊息，A, B 2 點皆具有所有訊息。

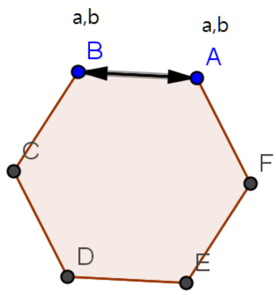


圖 77 t=1

第 2 秒，A,B 2 點分別將訊息傳給鄰近的 C, F 點。

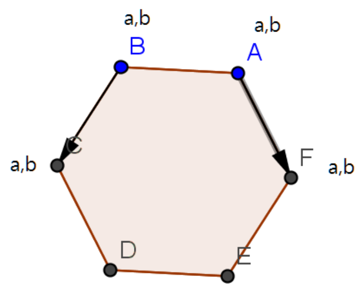


圖 78 t=2

第 3 秒，C,F 點分別將訊息傳給鄰近的 D,E，完成傳遞。

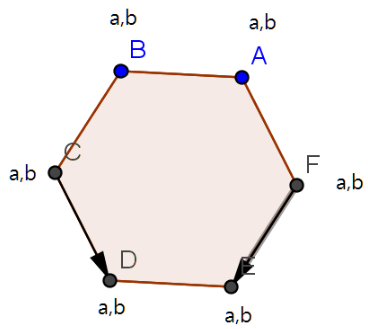


圖 79 t=3

(ii) 2 發源點不相鄰且相距 2(不失一般性，考慮 A≁C)

為方便表示，僅標示擁有訊息的點，以及標示訊息傳遞情形。如圖，紅點 A,C 為發源點，以下為 1 到 3 秒的傳遞情形。

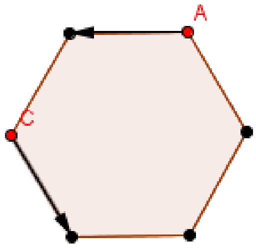


圖 80 (t=1) A, C 將訊息傳給鄰點

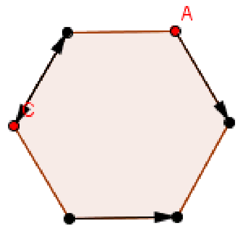


圖 81 (t=2) 一組節點相互交換訊息，另外兩點分別把訊息傳給鄰點

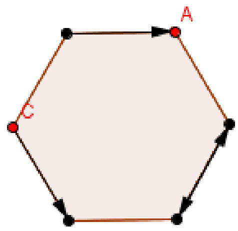


圖 82 t=3

一組節點相互交換訊息，另外兩點(第 2 秒獲得所有訊息的點)分別把訊息傳給鄰點。

(iii) 2 發源點不相鄰且相距 3(不失一般性，考慮 A+D) 。

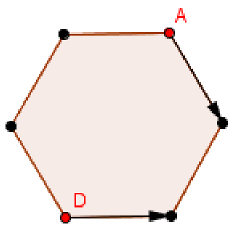


圖 83 (t=1) A,D 將訊息傳給鄰點

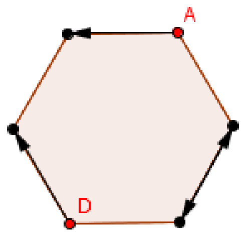


圖 84 (t=2) 一組節點相互交換訊息，另外兩點分別把訊息傳給鄰點

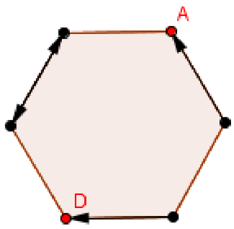


圖 85 (t=3) 一組節點相互交換訊息，另外兩點(第 2 秒獲得所有訊息的點)分別把訊息傳給鄰點

由上面 3 個探討可知，當 6 節點連成六邊形時，任意選擇 2 個發源點，皆可於 $\lceil \log_2 6 \rceil = 3$ 秒完成傳遞。故 $F(6)=6$。

$F(7) \leq 11$

由於 $F(7)\geq B(7)=8$，此處以 $B(7)$之圖形為基礎圖形，連接圖形中的點，再從中刪去多餘的邊。最初始之圖形，將邊補上，可得出 $F(7)\leq 18$，如圖 86。

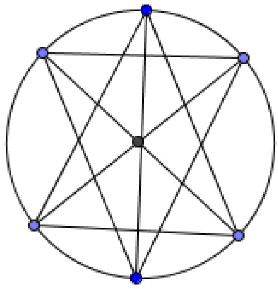


圖 86

刪去 3 個邊，可得出 $F(7)\leq 15$，如圖 87。

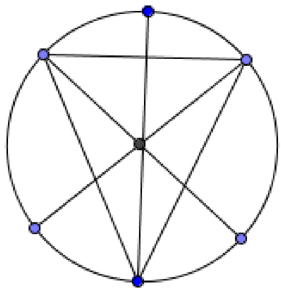


圖 87

再刪去 3 個邊，可得出 $F(7)\leq 12$，如圖 88。

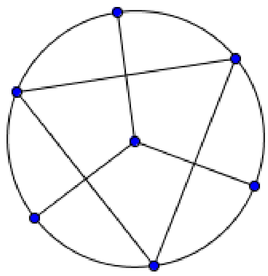


圖 88

分析圖形傳遞情形，此處僅探討兩種情形，如圖 89、90，其餘情況皆可由對稱性、C_4魔方之性質求得。

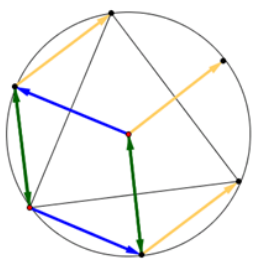


圖 89

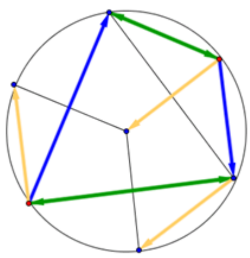


圖 90

當初以為圖 88 為最佳圖形，由於利用 C_4魔方可在$\lceil \log_2 4 \rceil = 2$秒的時間下界完成傳遞，而落在 C_4中的點在第 2 秒皆可獲得所有訊息，即可在第 3 秒傳給剩下的 3 個點，完成傳遞，

且達$\lceil \log_2 7 \rceil = 3$秒的時間下界。

圖 88 有一特殊發現：在這 7 個點中，任選 2 個發源點，發源點必定落在某一 C_4 當中，且皆可達$\lceil \log_2 7 \rceil = 3$秒的時間下界。而圖形若刪去任何的邊，則秒數增加，如圖 91。

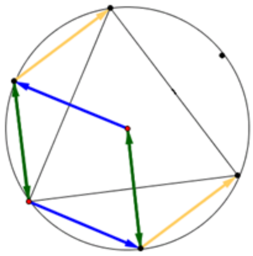


圖 91

如圖 91 所示，紅點為發源點，不失一般性，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形，黃色箭頭為第 3 秒傳遞情形。刪去其中一邊，則在第 3 秒無法完成傳遞，須再多花 1 秒才能完成傳遞，故無法達到$\lceil \log_2 7 \rceil = 3$秒的時間下界。

為求出 $F(7)$的圖形，改用數字拆解的方式，7=1+6=2+5=3+4，亦即將七邊形轉換為兩個圖形相結合(選擇 C_3+C_4，因藉由這種方式連接，發現會有較少的連接邊數，若是 C_5+2 個點或是 C_6+1 個點，欲求邊數少的圖形，會產生發源點無法任意、邊數較多的狀況)。

以下證明 $F(7)\le 11$。考慮圖 92。

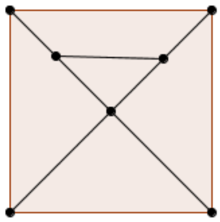


圖 92

如圖 92 所示，此為我們利用 C_3 加上 C_4 所找到的時間達到下界且邊個數為目前最少的圖形。

(C_3 為內圈 3 點，C_4 為外圈 4 點)有 3 情形。

(i) 當 2 個發源點皆落在 C_4 中，可利用與 $F(7)\le 12$ 之 C_4 魔方傳遞方式，完成傳遞。

(ii) 當 2 個發源點皆落在 C_3 中，可利用類似 C_4 魔方傳遞方式，完成傳遞(如圖 93)。

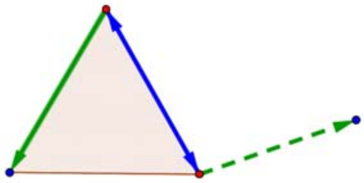


圖 93

如圖 93 所示，紅點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形，綠色虛線為第 2 秒圖形向外延伸一點。

故由圖 93 可知，C_3 傳遞時，若附近接有鄰點，即可向外傳遞如 C_4 魔方，故利用此傳遞方式，可完成傳遞。

(iii) 當 2 個發源點分別落在 C_3、C_4 中，其圖形傳遞情形，如圖 94 所示。紅點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形，黃色箭頭為第 3 秒傳遞情形。不失一般性，我們可以固定 C_4 中的發源點如圖 94，C_3 中的發源點、位置，有 3 個情形。

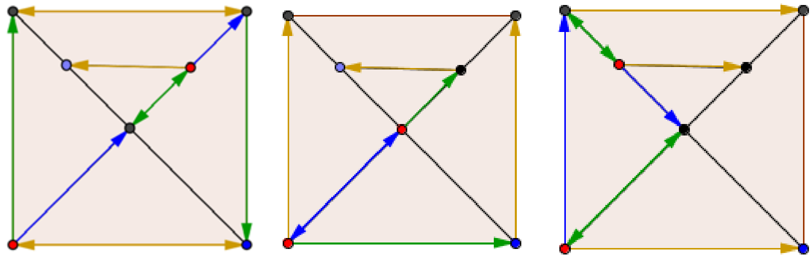


圖 94

故可求得出 $F(7)\leq 11$。

$F(8)=12$

由定理 9 的引理，$F(8)=12$。故有 $B(8)=F(8)=12$。兩者圖形均可用 Q_d，依據對稱性，發源點挑任意 2 點於 8 點之中，皆可於 $\lceil \log_2 8 \rceil = 3$ 秒完成傳遞。

$F(9)\leq 12$

我們利用數字拆解的方式，發現將其拆成 C_3+C_6 可得較少連接邊數($9=3+6=4+5$，若取 C_4+C_5，而 2 個發源點分別落在 C_4、C_5 中，欲完成傳遞，至少必須連接 4 條邊(C_4)，則邊數為 $4+5+4=13$，則邊數多於 C_3+C_6)，其邊數為 $3+6+3=12$，故選此作探討。

$F(9)\leq 12$。考慮圖 95。

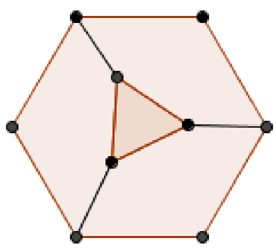


圖 95

(C_3 指內圈三點，C_6 指外圈 6 點)

(i) 當 2 個發源點皆落在 C_6 中，可利用 $F(6)$廣播圖，傳遞時間為$\lceil \log_2 6 \rceil = 3$ 秒，完成 C_6 內的傳遞，只需再一秒(即第 4 秒)傳給 C_3，即可完成傳遞。

(ii) 當 2 個發源點皆落在 C_3 中，可利用 $F(3)$廣播圖，傳遞時間為$\lceil \log_2 3 \rceil = 2$秒，完成 C_3 內的傳遞，只需再兩秒(即第 3 秒、第 4 秒)傳給 C_6，即可完成傳遞。

(iii) 2 個發源點分別落在 C_3、C_6 中的傳遞情形。如圖 96、97、98、99，探討發源點分別落在 C_3、C_6 中全部的傳遞情形，共 4 種。

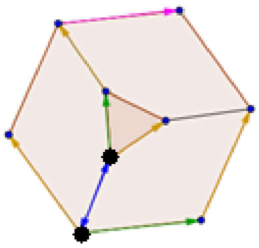


圖 96

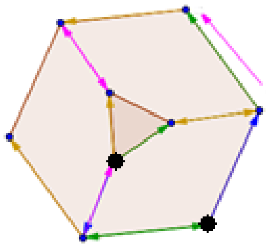


圖 97

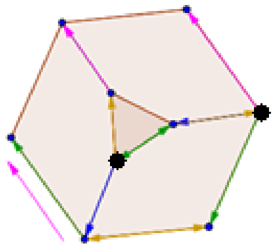


圖 98

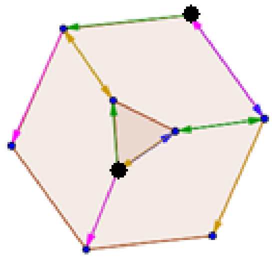


圖 99

如圖 96、97、98、99 所示，黑色大點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形，黃色箭頭為第 3 秒傳遞情形，粉色箭頭為第 4 秒傳遞情形。

故可得出 $F(9)\leq 12$。

$F(10)\leq 13$

採取數字拆解的方式，但允許重疊，從圖形區域上來看，圖形是由(2 個 C_4)+(2 個 C_6)所組成，邊數為 2×4(C_4 之邊數)$+2\times 6$(C_6 之邊數)-7(重疊部分之邊數)$=13$。

曾採取 C_5+C_5，但其邊數為連接 2 個 C_5，邊數 $5+5+5=15$，則邊數多於 2 個 C_4+2 個 C_6，故選此作探討。

以下證明 $F(10)\leq 13$。考慮圖 100。

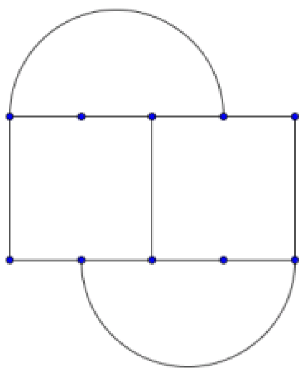


圖 100

探討其傳遞情形

(i) 2 個發源點落於同一個 C_4 中，如下圖 101。(不失一般性，僅考慮上方的 C_4)

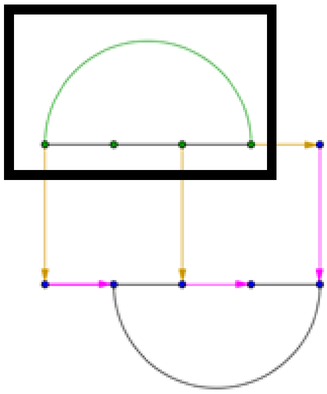


圖 101

如圖 101 所示，黑框區域為 C_4(發源點落於其中)，綠色區域為第 1 秒到第 2 秒傳遞完成之部分，黃色箭頭為第 3 秒傳遞情形，粉色箭頭為第 4 秒傳遞情形。

(ii) 2 個發源點不落於同一個 C_4 之情形。

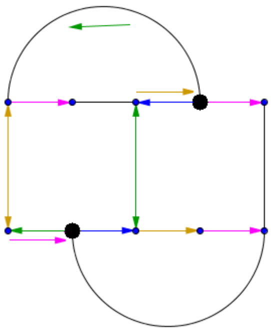


圖 102

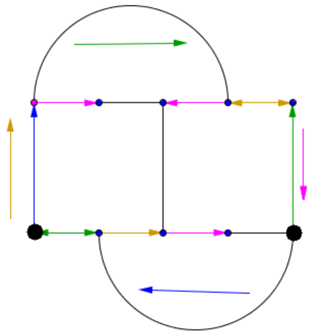


圖 103

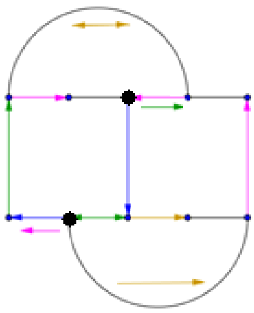


圖 104

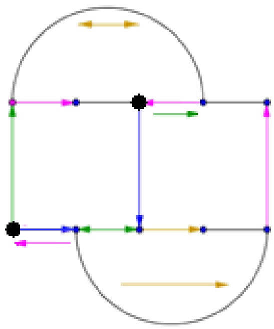


圖 105

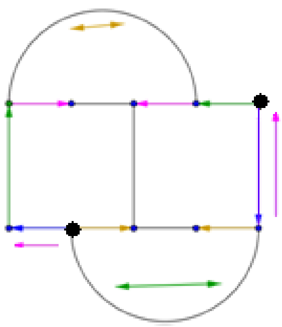


圖 106

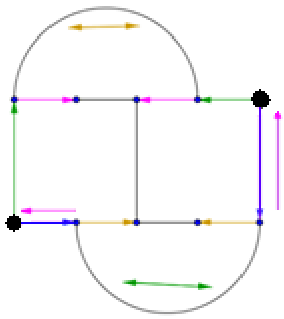


圖 107

如圖 102 至圖 107 所示，黑色大點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形，黃色箭頭為第 3 秒傳遞情形，粉色箭頭為第 4 秒傳遞情形。

此處未列出所有傳遞情形，但藉由以上 6 種傳遞情形，亦可推得剩餘未列出之狀況，由於會有圖形傳遞過程相同之部分，故可得相同的結果。

故可得出 $F(10)\leq 13$。

肆、研究結果

一、$f_G(n,k)$廣播圖(1 對 1)之結果與各項比較，如下表

$f_G(n,k)$	邊數	時間	發源點連接狀態
$f_G(n,1)$	$n-1=2^t-1$	$t\geq 1$，且 $t=\lceil \log_2 n \rceil$	1 個點
$f_G(n,2)$	$n-1=2^t-1$	$t\geq 1$，且 $t=\lceil \log_2 n \rceil$	路徑
$f_G(n,3)$	$2^{t-1}-1$	$t\geq 3$，且 $t=\lceil \log_2 n \rceil+1$	路徑
$f_G(n,3)$	2^{t-1}	$t\geq 3$，且 $t=\lceil \log_2 n \rceil+1$	C_3
$f_G(n,4)$	$2^{t-1}-1$	$t\geq 2$，且 $t=\lceil \log_2 n \rceil+1$	路徑
$f_G(n,4)$	2^t	$t\geq 2$，且 $t=\lceil \log_2 n \rceil$	C_4
$f_G(2^t,8)$	$4\times(2^{t-2}+1)$	$t\geq 3$，且 $t=\lceil \log_2 n \rceil$	3 維超立方體
$f_G(n,4)$	2^t+2	$t\geq 2$，且 $t=\lceil \log_2 n \rceil$	正四面體

二、$f'_G(n,k)$ 廣播圖(1 對 2)之結果與各項比較，如下表

$f'_G(n,k)$	邊數	時間	發源點連接狀態
$f'_G(n,1)$	$n-1=3^t-1$	$t\geq 1$，且 $t=\lceil \log_3 n \rceil$	1 個點
$f'_G(n,2)$	$2\times 3^{t-1}-1=n-1$	$t\geq 1$，且 $t=\lceil \log_3 n \rceil$	路徑

三、$B(n)$與 $F(n)$之比較，如下表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B(n)$	0	1	2	4	5	6	8	12	10	12
$F(n)$	不適用	1	3	4	5	6	≤ 11	12	≤ 12	≤ 13

四、結論 1：當 $2^{t-1}<n<2^t$ 時，則 $f_{G'}(n,k)\leq f_G(n+1,k)$，其中圖 G'為 G 的子圖。即最小廣播圖之邊數隨頂點 n 增加，其邊數單調增加。

五、結論 2：$f_G(n, 2^m)=n+(m-2)\times 2^{m-1}$，其中 $m\in\mathbb{N}$，未必恆成立。

六、Q_d：圖形為 d 維超立方體，點數 $n=2^d$，邊數為 $d\times 2^{d-1}$。

七、當 $n=2^d$，對於任何的 k 介於 $1\sim 2^d$ 之間(包含 1 及 2^d)，Q_d都是最小廣播圖。

八、$f_G(2^d,k)= d\times 2^{d-1}$，其中 k 可以是介於 1 至 2^d 間的任意一數。

九、**C_4 魔方**：在一個 $C_4(n=4)$中，任意取 1~4 個點作為發源點，且不論相鄰與否，皆可在 $\lceil \log_2 4 \rceil = 2$ 秒的時間下界內完成傳遞。

伍、討論與結論

一、討論

1. (n,k)廣播圖為固定發源點之圖形(定理 1 到 6)，故可在其中尋找出傳遞最佳之圖形，以及找到其圖形最少邊數。

2. $B(n)$與 $F(n)$之廣播圖為任意發源點之圖形，可在其中尋找出傳遞最佳之圖形，達$\lceil \log_2 n \rceil$秒的時間下界，且圖形未必唯一，而現今尚有不少未有確定值之下界，能否正確求出？(目前得知 $B(n)\leq F(n)$，若 $B(n)=F(n)$，且 $B(n)$須已確定為最小邊數，即可得 $F(n)$之最小邊數)

3. 探討運用多邊形相連(如 $F(7)$之 C_3+C_4，$F(9)$之 C_3+C_6)，與 C_4 魔方之結合的邊數關係，且是否能利用此方法求得最小邊數？

4. C_4 魔方提供我們尋找 $F(n)$之接近下界的邊數，然若發源點 1 到 4 個皆落在同一 C_4 中，皆可達$\lceil \log_2 4 \rceil = 2$ 秒的時間下界，故 C_4 仍可延伸至 3、4 個發源點的狀況作討論。

二、結論

1. 藉由 C_4 魔方，可在 $B(n)$、$F(n)$ 中找出達 $\lceil \log_2 n \rceil$ 下界之圖形，但其邊數未必最小。

2. 證明出 Q_d 之邊數為 $d\times 2^{d-1}$、點個數 $n=2^d$，且知其發源點可任意於 Q_d 中$(1\le k\le 2^d)$，皆可在 $\lceil \log_2 2^d \rceil = d$ 秒的時間下界完成傳遞，亦可使 2^d 個點皆獲得所有訊息。

3. 若圖形為 1 對 1 的圖形，可推得其圖形傳遞之最大範圍之邊數、點個數必以 2^t 作變化，並可列出其通式(由定理 1~6 可得)；若圖形為 1 對 1 的圖形，可推得其圖形傳遞之最大範圍之邊數、點個數必以 3^t 作變化，並可列出其通式(由 $f'_G(n,k)$ 可得)。

4. 求出 $F(n)$ 在 $n\le 6$ 之確定值。

5. 證明出 $B(2^d)= F(2^d)= d\times 2^{d-1}$(可由 Q_d 得知)。

陸、未來展望

1. 猜想：若圖形為 1 對 a 傳遞的圖形(即 1 個點在一單位時間內可對 a 個相鄰點作傳遞，其中 $a\in\mathbb{N}$)，其圖形傳遞到最大範圍時，邊數、點個數是否會以$(a+1)^t$ 作變化，並能列出其通式？
2. 藉由 C_4 魔方、數字拆解等方法，嘗試求出確切的 $F(n)$之最小邊數。
3. 將最小廣播圖套用至網路拓樸之中，減少線路成本、避免部分線路損毀而導致整個網路癱瘓等情形發生。

柒、參考資料

[1] 92 學年度學測考題─單選第 5 題。取自 *math1.ck.tp.edu.tw/陳嘯虎/小虎/學測考題/試題與答案/92 學年度學測試題.pdf*。

[2] 肖金声、王晓(1988 年 2 月)。最小廣播圖研究。

[3] 李姿慧(2011)。搜尋散布謠言者的數學模型。國立交通大學。2014 年 2 月 16 日。取自臺灣碩博士論文加值系統。

[4] 南京大學數學建模競賽 A 題(2000)。最小廣播圖設計。

[5] 許志農(2012)。高級中學數學課本第二冊。新北市：龍騰文化。

[6] 最小廣播圖設計(2000)。*http://wenku.baidu.com/view/5e698b39580216fc700afde9.html*。

[7] 傅筱婷、陳芊澐、康書維(2013)。來人阿！把訊息傳出去。101 學年度(第 53 屆)中小學科學展覽會第 3 名。

[8] Averbuch, A., Hollander, R., Shabtai, Y. R.: Efficient construction of broadcast graphs. *Discrete Applied Mathematics* ,***171***,*9-14*(2014).

[9] Edwards, K.: The complexity of some graph coloring problems. *Discrete Applied Mathematics*, *36*, *131-140*(1992).

[10] Farley, A., Hedetniemi, S., Mitchell, S., Proskurowski, A.:Minimum Broadcast Graphs. *Discrete Mathematics* ,***25***, *189-193*(1979).

[11] 劉洲溶、蘇淵源、翟家甫、全華實驗室(2013)。資訊科技概論。新北市：全華圖書股份有限公司。

捌、附錄

定理 3,4,5,6 之證明

定理 3:

1.當 $t \geq 3$ 時，$f_G(n,3)=2^{t-1}-1$，其中 $t=\lceil \log_2 n \rceil+1$ 且 G 中的發源點連成路徑

2.當 $t \geq 3$ 時，$f_G(n,3)=2^{t-1}$，其中 $t=\lceil \log_2 n \rceil+1$ 且 G 中的發源點連成 C_3

證明 1：

($t \leq 2$ 時，任一點訊息未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊，如上圖 9、10)

當 $t=3$，$f_G(4,3)=2^{3-1}-1=3$ 成立，如圖 11。

設 $t=p$ 時成立，$f_G(2^{p-1},3)= 2^{p-1}-1$。

則 $t=p+1$ 時，$f_G(2^{p-1+1},3)= 2\times f_G(2^{p-1},3)+1= 2^p-1$ 亦成立。

由數學歸納法可知：$\forall\, t\in\mathbb{N}$ 且 $t \geq 3$，當 $k=3$ 時，圖形之邊數等於 $f_G(n,3)= 2^{t-1}-1$。*Q.E.D*

當 $t \geq 3$ 時，$f_G(n,3)=2^{t-1}$

證明 2：

($t \leq 2$ 任一點訊息未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊，如圖 12、13)

當 $t=1$ 時，A,B 點互相交換訊息，C 點不做任何傳遞，如圖 12。

當 $t=2$ 時，A,C 點互相交換訊息且 2 點皆擁有所有訊息，B 點不做任何傳遞，如圖 13。

當 $t=3$ 時，$f_G(4,3)=2^{3-1}=4$ 成立，B,C 點互相交換訊息，A 點由於擁有所有訊息，便可以向外傳遞延伸新點 D，如圖 14。

設 $t=p$ 時成立，$f_G(2^{p-1},3)= 2^{p-1}$。

則 $t=p+1$ 時，$f_G(2^{p-1+1},3)= 2\times f_G(2^{p-1},3)= 2^p$ 亦成立。

由數學歸納法可知：$\forall\, t\in\mathbb{N}$ 且 $t \geq 3$，當 $k=3$ 時，圖形之邊數等於 $f_G(n,3)= 2^{t-1}$。 *Q.E.D.*

定理 4：

$f_G(n,4)=$

1. $2^{t-1}-1$，其中 $t=\lceil \log_2 n \rceil+1$ 且 G 中的發源點連成路徑

2. 2^t，其中 $t=\lceil \log_2 n \rceil$ 且 G 中的發源點連成 C_4

證明 1：

($t\leq 2$ 時，任一點訊息尚未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊)

當 $t=3$，$f_G(4,4)=3$ 成立。

如圖 15，最快 3 秒 A,B,C,D 4 個點才可獲得全部訊息，以 A 點為例，當它傳遞訊息到 D 點時，需經 3 秒才可完成。

$t=4$，$f_G(8,4)=7$。

如圖 16，由於 A,B,C,D 4 個點皆獲得全部訊息，即可向外延伸，傳遞至鄰近的點。

$t=5$，$f_G(16,4)=15$。

設 $t=p$ 時成立，亦即 $f_G(2^{p-1},4)= 2^{p-1}-1$。

則 $t=p+1$，$f_G(2^{p-1+1},4)= 2\times f_G(2^{p-1},4)+1= 2^p-1$ 亦成立。

由數學歸納法可知：$\forall\, t\in\mathbb{N}$ 且 $t\geq 3$，當 $k=4$ 時，圖形之邊數等於 $f_G(n,4)= 2^{t-1}$。 *Q.E.D.*

證明 2：

($t=1$ 時，任一點訊息尚未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊)

當 $t=2$，$f_G(4,4)=4$ 成立。

如圖 17，最快 2 秒 A,B,C,D 4 個點才可獲得全部訊息，以 A 點為例，當它第 1 秒傳遞訊息到 B 點時，A,B 點具有相同訊息，在第 2 秒分別傳給 C,D 點，即可使 A,B,C,D 皆具有相同訊息。同理，B, C, D 點，也需 2 秒才可完成。

當 $t=3$，$f_G(8,4)=8$ 成立。

如圖 18，由於 A, B, C, D 4 個點皆獲得全部訊息，即可向外延伸，傳遞至鄰近的點。

當 $t=4$，$f_G(16,4)=16$ 成立。

設 $t=p$ 時成立，亦即 $f_G(2^p,4)= 2^p$。

則 $t=p+1$，$f_G(2^{p+1},4)= 2\times f_G(2^p,4)+1= 2^p$ 亦成立。

由數學歸納法可知：$\forall\, t\in\mathbb{N}$ 且 $t\geq 2$，當 $k=4$ 時，圖形之邊數等於 $f_G(n,4)= 2^t$。 *Q.E.D.*

定理 5：當 $t\geq 3$ 時，$f_G(2^t,8)=4\times(2^{t-2}+1)$，其中 G 中的發源點連成 3 維超立方體（亦可看成平面圖，如圖 22）(來源:[6])

證明：

($t\leq 2$ 時，任一點訊息尚未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊)

當 $t=3$，$f_G(8,8)= 4\times(2^{3-2}+1) =12$ 成立(如下圖 22) 。

當 $t=4$，$f_G(16,8)= 4\times(2^{4-2}+1)=20$ 成立(如下圖 23) 。

設 $t=p$ 時成立，$f_G(2^p,8)= 4\times(2^{p-2}+1)$ 。

則 $t=p+1$，$f_G(2^{p+1},8)= 2\times f_G(2^p,8)=4\times(2^{p-1}+1)$亦成立。

由數學歸納法可知：∀ $t\in\mathbb{N}$ 且 $t\geq3$，當 k=8 時，圖形之邊數等於 $f_G(n,8)= 4\times(2^{t-2}+1)$。*Q.E.D.*

且根據定理 2 備註之概念，可知當 $t\geq3$，且發源點所連成之圖形為 3 維超立方體，其邊數為 $f(2^t, 8)=4\times(2^{t-2}+1)$。

定理 6：當 $t\geq2$ 時，$f_G(n,4)=2^t+2$，其中 G 中的發源點連成正四面體（亦可看成平面圖，如圖 24）

證明：

($t\leq1$ 時，任一點訊息尚未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊，傳遞方向如圖 24 之黑色箭頭)

當 t=2，$f_G(4,4)= 2^2+2=6$ 成立(如下圖 24) 。

傳遞方向如藍色箭頭，由此可知，所有點依照此方式互傳，此時所有點即擁有所有訊息。

當 t=3 時，$f_G(8,4)= 2^3+2=10$ 成立(如下圖 25) 。

由於所有點具有所有訊息，即可以 2 倍傳遞方式延伸。

當 t=4 時，$f_G(16,4)= 2^4+2=18$ 成立。

設 $t=p$ 時成立，$f_G(2^p,4)= 2^p+2$。

則 $t=p+1$ 時，$f_G(2^{p+1},4)= f_G(2^p,4)+2^p$(前一秒點個數)$=2\times2^p+2= 2^{p+1}+2$ 亦成立。

由數學歸納法可知：$t\in\mathbb{N}$ 且 $t\geq2$，當 k=4 時，圖形之邊數等於 $f_G(n,4)= 2^t+2$。 *Q.E.D.*

一個發源點的最小廣播圖—*B*(*n*) (來源：[2,10])

以 n 個點、<u>**1 個發源點**</u>形成之圖，時間達 $\lceil\log_2 n\rceil$ 之下界，發源點可於 n 個點中<u>**任選**</u>其一，且圖形之邊數達最小。

$B(1)=0$

圖 31

如圖 31(A 點本身即為發源點，且並無其他的點需要傳遞)所示，圖形為 1 個點，達時間下界 $\lceil\log_2 1\rceil=0$ 秒即可完成傳遞。

$B(2)=1$

如圖 32 所示，A 為發源點，在第 1 秒即可傳給 B 點，完成傳遞，且達 $\lceil\log_2 2\rceil=1$ 秒之時間下界。並且依據對稱性，當 B 為發源點時，邊數仍然為 1，如圖 33。

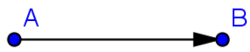


圖 32　　　　　圖 33

$B(3)=2$

廣播圖必須是連通圖，連通圖之邊數至少是點數減 1。

點個數為 3、邊個數 2 之連通圖是唯一的，如圖 34，若此圖能達傳遞的時間下界，則得證。

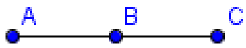


圖 34

如圖 35-1 及圖 35-2 所示，紅點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形。此處分別探討發源點連接邊數多寡的兩種情形。

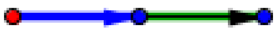
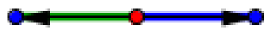



圖 35-1　連接邊數為 1　　　圖 35-2　連接邊數為 2

由圖 35-1 及圖 35-2 可知，發源點可任意選於 3 點之中，且皆可在 $\lceil \log_2 3 \rceil = 2$ 秒的時間下界內完成傳遞，故可知 $B(3)=2$。

$B(4)=4$

同前面之論述，廣播圖必須是連通圖，因此 $B(4)\geq 3$。點個數為 4 個、邊個數為 3 的連通圖只有下面兩種情形：

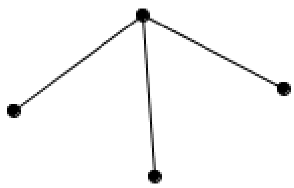


圖 36

可檢驗兩圖形均無法在 $\lceil \log_2 4 \rceil = 2$ 秒的時間下界(圖 36 左：發源點在 A，或在 B 時，不行；圖 36 右：發源點不論在任何一點都不行) 。

由以上得知，$B(4)\geq 4$，以下證明 $B(4)\leq 4$。

如圖 37 所示，紅點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形。

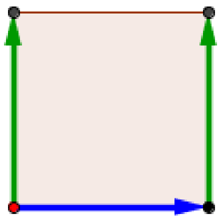


圖 37

同理，依據對稱性，發源點為 4 點之中的任意一點，傳遞狀況相同，皆可於$\lceil \log_2 4 \rceil = 2$秒完成傳遞，且圖為點個數為 4、邊個數為 4 的廣播圖，因此 $B(4)\leq 4$，故 $B(4)=4$。

$B(5)=5$

用類似於證明 $B(4)\geq 4$ 之方法，可證出 $B(5)\geq 5$，以下證明 $B(5)\leq 5$。

點個數為 5、邊個數為 5 的廣播圖有多種圖形，此處以兩種不同圖形(連接成五邊形、四邊形加上一個點)分別探討。

如圖 38 所示，紅點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形，黃色箭頭為第 3 秒傳遞情形。

(i)圖形連接成五邊形

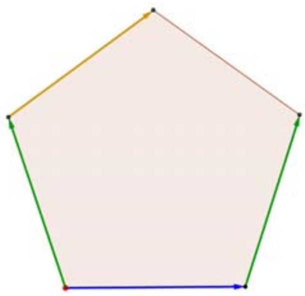


圖 38

依據對稱性，發源點為 5 點之中的任意一點，傳遞狀況相同，可於$\lceil \log_2 5 \rceil = 3$秒完成傳遞。

(ii)圖形連接成四邊形加上一個點

此處再分別探討發源點落於四邊形中、及四邊形外一點的情形。

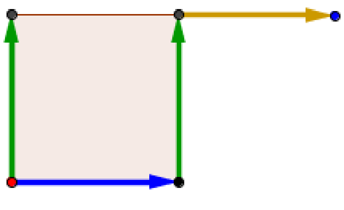


圖 39 發源點落在四邊形中

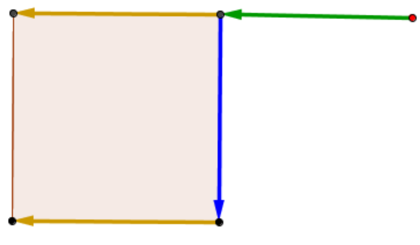


圖 40 發源點落在四邊形外一點

由上圖 39、40 可知，同理，發源點為 5 點之中的任意一點，傳遞狀況雖不同，但仍然可於$\lceil \log_2 5 \rceil = 3$秒完成傳遞。

由以上可知，存在為點個數為 5、邊個數為 5 的廣播圖，因此 $B(5) \le 5$，故 $B(5)=5$。

$B(6)=6$

同於之前，可證出 $B(6) \ge 6$，以下證明 $B(6) \le 6$。

點個數為 6、邊個數為 6 的廣播圖有多種圖形，此處直接以 1 種圖形(連接成六邊形)作探討。

如圖 41 所示，紅點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形，黃色箭頭為第 3 秒傳遞情形。

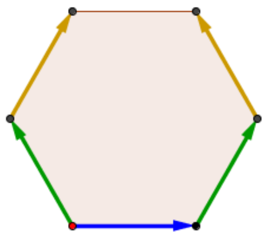


圖 41

依據對稱性，發源點任意於 6 點之中，傳遞狀況相同，皆可於$\lceil \log_2 6 \rceil = 3$秒完成傳遞，由以上，存在點個數為 6、邊個數為 6 的廣播圖，因此 $B(6) \le 6$，故 $B(6)=6$。

$B(7)=8$

同於之前，可證出 $B(7) \ge 7$，$B(7)=7$ 不可能(此部分證明省略)，故有 $B(7) \ge 8$，以下證明 $B(7) \le 8$。

依據文獻[10]之圖形，分別探討發源點置於 3 種不同位置的傳遞情形。

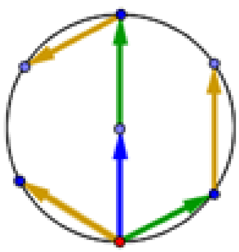


圖 42
發源點位於圖中直徑與圓周之交點上

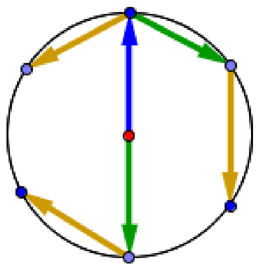


圖 43
發源點位於圓心上

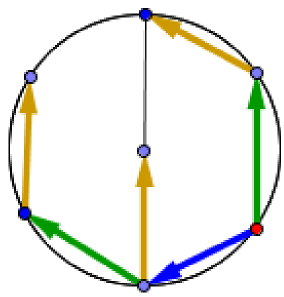


圖 44
發源點位於圓周上

如圖 42、43、44 所示，紅點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形，黃色箭頭為第 3 秒傳遞情形。

由上可知，存在點個數為 7、邊個數為 8 的廣播圖，且發源點任意於 7 點之中，明顯傳法不同，但皆可於 $\lceil \log_2 7 \rceil = 3$ 秒完成傳遞，因此 $B(7) \le 8$，故 $B(7)=8$。

$B(8)=12$

我們省略 $B(8) \ge 12$ 這部分的討論。

依據文獻[10]，如圖 45 所示，紅點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形，黃色箭頭為第 3 秒傳遞情形。

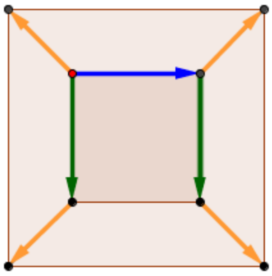


圖 45

如圖所示，依據對稱性，發源點任意於 8 點之中，傳遞狀況相同，皆可於 $\lceil \log_2 8 \rceil = 3$ 秒完成傳遞，且圖形為點個數為 8、邊個數為 12 的廣播圖(即為 3 維超立方體，於後面 Q_d 有更進一步的說明)，因此 $B(8) \le 12$，故 $B(8)=12$。

$B(9)=10$

我們省略 $B(9) \ge 10$ 這部分的討論。

依據文獻[10]，分別探討發源點置於 4 種不同位置的傳遞情形。

如圖 46、47、48、49 所示，紅點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形，黃色箭頭為第 3 秒傳遞情形，粉色箭頭為第 4 秒傳遞情形。

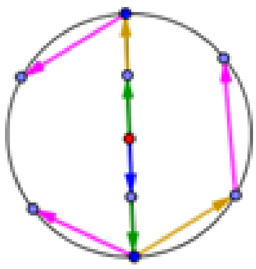


圖 46

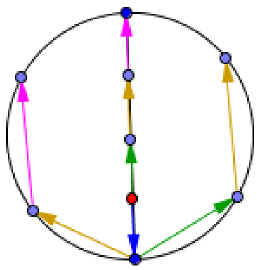


圖 47

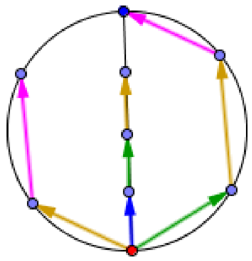


圖 48

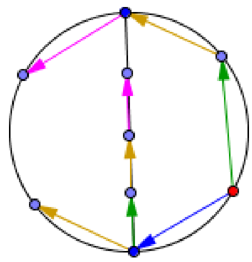


圖 49

存在點個數為 9、邊個數為 10 的廣播圖，且發源點任意於 9 點之中，明顯傳法不同，但皆可於$\lceil \log_2 9 \rceil = 4$秒完成傳遞，因此 $B(9) \le 10$，故 $B(9)=10$。

$B(10)=12$

我們省略 $B(10) \ge 12$ 這部分的討論。

依據文獻[10]，分別探討發源點置於 4 種不同位置的傳遞情形。

如圖 50、51、52、53 所示，紅點為發源點，藍色箭頭為第 1 秒傳遞情形，綠色箭頭為第 2 秒傳遞情形，黃色箭頭為第 3 秒傳遞情形，粉色箭頭為第 4 秒傳遞情形。

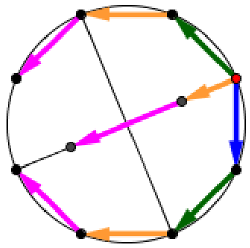


圖 50

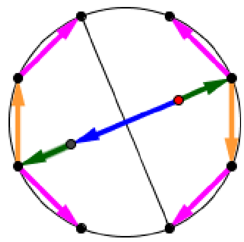


圖 51

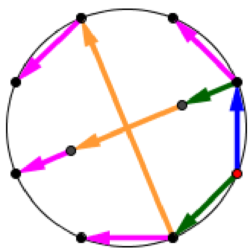


圖 52

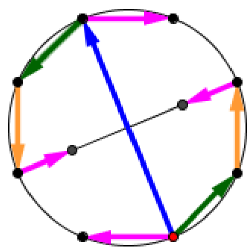


圖 53

存在點個數為 10、邊個數為 12 的廣播圖，且發源點任意於 10 點之中，皆可於$\lceil \log_2 10 \rceil = 4$秒完成傳遞，因此 $B(10) \le 12$，故 $B(10)=12$。

由 $B(8)=12$ 及 $B(9)=10$，也可得知 $B(n)$不是遞增函數。