第十四屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA14-404

作品名稱：各類曲線等角分割下線段長定值之研究

姓名：曾靖國

關鍵字：披薩定理、圓錐曲線、牛頓恆等式

壹、研究動機

在第一次數學專研課時，老師介紹了以前學長的作品，關於披薩定理的相關問題，由於本身對幾何很感興趣再加上老師的介紹下，我也覺得這份作品的題材相當有意思，所以就決定繼續研究披薩定理相關的推廣及延伸。我先前作品[參考資料三]主要是研究過圓內任意點及過心臟線尖點等角切 n 刀，兩人拿取的線段長 k 次方和的關係，本作品延續[參考資料三]，主要將圓的等角切割問題推廣到圓錐曲線的等角切割問題，研究等角切 n ($n\geqq 2, n\in N$)刀，切出來的切痕的長度 k ($k\in Z$)次方和和刀數 n 的關係。

貳、研究目的

我主要的研究目的，有以下四點：

一、過圓內任一點 P 切 n($n\geq 2, n\in N$)刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，P 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，

(1)若 $n=2m+1(m\in N)$，則兩人取出的線段長 $2k+1$ ($k\in Z$)次方和相等，其中 $-m\leq k\leq m-1$。

(2)若 $n=2m(m\in N)$，則兩人取出的線段長 $2k$ ($k\in Z$)次方和相等，其中 $1-m\leq k\leq m-1$。

不同於[參考資料三]切偶數刀時花了整整三頁的篇幅在暴力硬算求和，我利用類似(1)的手法及牛頓恆等式，更簡潔地(只用約一頁篇幅)證明了(2)的結論。

二、過一直線 L 外一點等角切 n 刀，設此 n 刀所在的直線與直線 L 的交點由左至右(或由下到上)依序命名為 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，P 到 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的線段由兩人依左至右(或下到上)的次序取，

(1)若 $n=2m(m\in N)$，則兩人取出的線段長度 $2k$ ($k\in Z$)次方和相等，其中 $1-m\leq k\leq 0$。

(2)若 $n=2m+1(m\in N)$，則兩人取出的線段長度 $2k+1$ ($k\in Z$)次方和相等，其中 $-m\leq k\leq -1$。

三、將上述二的一直線的結果推廣至兩平行直線及兩相交直線，結論依然成立。即：在退化的圓錐曲線上(兩相交直線、兩平行直線、一直線)，過線外任一點 P 等角切 $n(n\geq 2, n\in N)$ 刀，考慮兩人依序輪流拿取的線段，其線段長 k 次方和的相等的性質仍然成立。

四、過圓錐曲線(非退化)內任一點 P 切 $n(n\geq 2, n\in N)$ 刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，P 點到圓錐曲線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則：

(1)若 $n=2m(m\in N)$ 時，則兩人取出的線段長度 $2k$ 次方和相等，其中 $1-m\leq k\leq 0$。

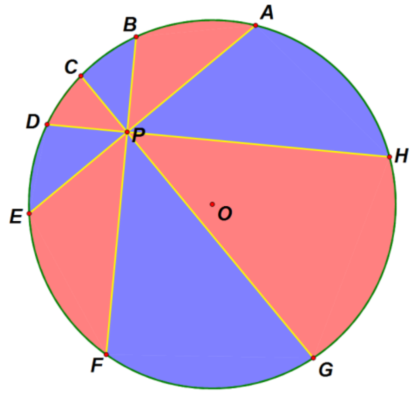
(2)若 $n=2m+1(m\in N)$ 時，則兩人取出的線段長度 $2k+1$ 次方和相等，其中 $-m\leq k\leq -1$。

參、研究過程

原始問題（披薩定理）介紹：

如果以圓盤中任意一個指定點為中心，切下 n 刀，使相鄰兩割線夾角皆相同；然後以逆時針（或順時針）的順序給切出的各塊交替染上兩種顏色（下圖以切四刀為例），將圓盤分為兩個部分。那麼有下列結論：

1. 當 n 是大於 2 的偶數，或有任一刀通過圓心時：
   兩種顏色的面積和一樣大。
2. 若任意一刀都不通過圓心，則：
   (1) 當 $n = 1,2$ 或 $n = 4m-1(m\in N)(n=1,2,3,7,11,15,..)$時，
   包含圓心的部分面積和比較大。
   (2) 當 $n = 4m+1(m\in N)$ $(n = 5,9,13,17,..)$時，
   包含圓心的部分面積和比較小。



文獻探討：

1967 年 5 月厄普頓（L. J. Upton）在《Mathematics Magazine》中提出披薩定理等角切 4 刀的問題。隔年郭德堡（M. Goldberg）在同一期刊證明了「等角切偶數刀時，兩人會分得一樣多的披薩。」

1994 年 10 月，Larry Carter ,Stan Wagon 提出等角切 3 刀時兩人依逆時針序輪流拿取，拿到含圓心的人分得較多；切 5 刀時拿到含圓心的人分得較少的問題。同一年，兩位數學家 Paul Deiermann 及 Rick Mabry 加入研究，解決了切 3 刀及切 5 刀的問題，但切一般奇數刀的問題則由兩人歷經 15 年的研究，終於在 2009 年解決。

2013 年 2 月，[參考資料一]證明了過圓內一點 P 等角切奇數刀時，P 到圓周的線段由兩人依逆時針序輪流拿取，兩人所取的線段長度和相等；切偶數刀時，兩人所取的線段長度平方和相等。

2015 年 2 月，我於[參考資料三]證明了過圓內任一點 P 切 $2n(n\in N)$ 刀，使每一組相鄰割線角度皆相同， 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則兩人取出的線段長度 $2k(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $1-n\le k\le n-1$；也證明了在切 $2n+1(n\in N)$ 刀的情況下，兩人取出的線段長 $2k+1(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $-n\le k\le n-1$。在[參考資料三]中，我還證明了過心臟線尖點（及過蚶線基點）切 $n(n\ge 2, n\in N)$ 刀，使每一組相鄰割線角度皆相同，尖點（基點）到心臟線（蚶線）的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則各組取出的線段長度的 $k(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $0\le k\le n-1$。

本篇研究希望將以上的研究推廣到圓錐曲線上：過圓錐曲線內任一點 P 等角切 $n(n\ge 2, n\in N)$ 刀，將 P 點到圓錐曲線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則：

(1)若 $n=2m(m\in N)$ 時，則兩人取出的線段長度 $2k$ 次方和相等，其中 $1-m\le k\le 0$。

(2)若 $n=2m+1(m\in N)$ 時，則兩人取出的線段長度 $2k+1$ 次方和相等，其中 $-m\le k\le -1$。

$\boxed{\text{引理一}}$

牛頓恆等式(Newton's identities)

設 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n$，

$S_k=x_1{}^k+x_2{}^k+\cdots+x_n{}^k,\ \ k=0,1,2,\cdots$

則 $S_k-\sigma_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_nS_{k-n}=0,$ 當 $k>n$ 時；

$S_k-\sigma_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^kk\sigma_k=0,$ 當 $1\le k\le n$ 時。

其中 $\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n\\ \sigma_2=\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j\\ \cdots\cdots\\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n\end{cases}$ 為 n 個不定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的基本對稱式。

證明：

$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n\cdots\cdots(1)$

1. 當 $k>n$ 時, (1)式兩邊同乘 x^{k-n} 得

$x^{k-n}f(x)=x^k-\sigma_1x^{k-1}+\sigma_2x^{k-2}-\cdots+(-1)^k\sigma_nx^{k-n}$

$\because\ f(x_i)=0,\ i=1,2,\cdots n$

$\therefore\sum\limits_{i=1}^n\left[x_i{}^k-\sigma_1x_i{}^{k-1}+\sigma_2x_i{}^{k-2}-\cdots+(-1)^k\sigma_nx_i{}^{k-n}\right]=0$

$\Rightarrow S_k-\sigma_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_nS_{k-n}=0$

2. 當 $1\le k\le n$ 時, 由(1)式得 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x-x_n}=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{1}{x-x_i}$

$\Rightarrow\dfrac{x^{k+1}f'(x)}{f(x)}=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{x^{k+1}}{x-x_i}=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{x^{k+1}-x_i{}^{k+1}}{x-x_i}+\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{x_i{}^{k+1}}{x-x_i}$

$\Rightarrow x^{k+1}f'(x)=f(x)\cdot\sum\limits_{i=1}^n(x^k+x_ix^{k-1}+\cdots+x_i{}^k)+g(x),$ 其中 $g(x)=f(x)\cdot\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{x_i{}^{k+1}}{x-x_i}$ 且 $\deg g(x)<n$

$\Rightarrow x^{k+1}f'(x)=f(x)(nx^k+S_1x^{k-1}+S_2x^{k-2}+\cdots+S_k)+g(x)\cdots\cdots(2)$

由(1)得 $f'(x)=nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^k(n-k)\sigma_kx^{n-k-1}+\cdots$

比較(2)式兩邊 x^n 的係數, 得

$(-1)^k(n-k)\sigma_k=S_k-\sigma_1S_{k-1}+\sigma_2S_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^k\sigma_k\cdot n$

即 $S_k-\sigma_1S_{k-1}+\sigma_2S_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^kk\sigma_k=0$

引理二

$\cos n\theta=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_k^{n-k}(2\cos\theta)^{n-2k}$ 。 (證明詳見[參考資料二]

定理一

過圓內任一點 P 切 $n(n\geq 2,n\in N)$ 刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，P 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，

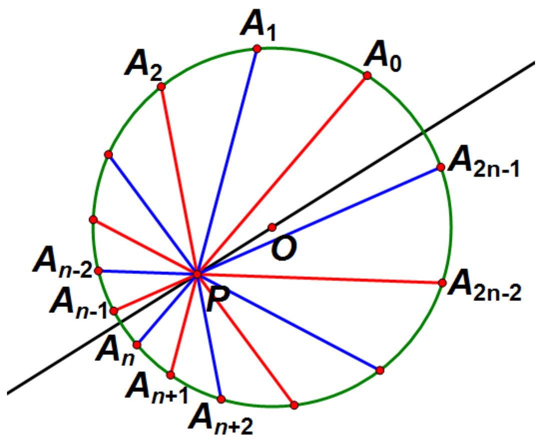
(1)若 $n=2m+1(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長 $2k+1(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $-m\leq k\leq m-1$ 。

(2)若 $n=2m(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長 $2k(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $1-m\leq k\leq m-1$ 。

(1)的證明：([參考資料三]定理二)

(1)等同以下問題，

右圖中，過圓 O 內一點 P 等角切 n 刀(n是奇數)



其中一人取到的值為 $\sum_{i=0}^{n-1}\left(\overline{PA_{2i}}\right)^{2k+1}$ ，

另一人取到的值為 $\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{PA_{2i-1}}\right)^{2k+1}$

當且僅當 $\frac{1-n}{2}\leq k<\frac{n-1}{2},k\in \mathrm{Z}$時，

有 $\sum_{i=1}^{n}(\overline{PA_{2i-1}})^{2k+1}=\sum_{i=0}^{n-1}(\overline{PA_{2i}})^{2k+1}$

考慮 $\prod_{i=0}^{2n-1}\left[x-(-1)^i\overline{PA_i}\right]$ ，我們希望確定它的係數，

就能用牛頓恆等式計算 $S_{2k+1}=\sum_{i=0}^{n-1}(\overline{PA_{2i}})^{2k+1}-\sum_{i=1}^{n}(\overline{PA_{2i-1}})^{2k+1}$

要說明 $S_{2k+1}=0$ ，且僅當 $\frac{1-n}{2}\leq k<\frac{n-1}{2},k\in Z$

不失一般性，可令 $\overline{PO}=\frac{a}{2}$ ， $\angle A_0PO=\theta$ (非定值)， $\overline{PA_0}\cdot\overline{PA_n}=1$

則 $(-1)^i\overline{PA_i},(-1)^{i+n}\overline{PA_{i+n}}$ 滿足 $x-\frac{1}{x}=a\cos(\theta+\frac{i\pi}{n}+i\pi),\ i=0,1,2,\cdots,n-1$

$$\left\{a\cos(\theta+\frac{i\pi}{n}+i\pi)\middle|\,i=0,1,2,\cdots,n-1\right\}=\left\{a\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})\middle|\,i=0,1,2,\cdots,n-1\right\}$$

令 $\prod_{i=0}^{n-1}\left[x-a\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})\right]=f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}$

則 $f(x-\frac{1}{x})=\prod_{i=0}^{n-1}\left[x-\frac{1}{x}-a\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})\right]$, $f(x-\frac{1}{x})=0$ 的解集即 $\left\{(-1)^i\overline{PA_i}\,\middle|\,i=0,1,2,\cdots,2n-1\right\}$

同乘 x^n ($x\neq 0$ ，解集不變)， $x^nf(x-\frac{1}{x})\equiv\prod_{i=0}^{2n-1}\left[x-(-1)^i\overline{PA_i}\right]$

因為$\cos n\alpha=\cos n\theta$的方程式中$\alpha$有$n$個解，分別為$\theta+\dfrac{2j\pi}{n}$ ， $j=0\sim n-1$

由引理二， $\cos n\alpha=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\dfrac{n}{n-k}C_k^{n-k}(2\cos\alpha)^{n-2k}$ ，

令$\cos\alpha=x$， $p(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}\left[\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\dfrac{n}{n-k}C_k^{n-k}(2x)^{n-2k}-\cos n\theta\right]=0$ ，

$p(x)$的解集與$f(x)$的解集相同，且$\deg f(x)=\deg p(x)$ ， $p(x)$和$f(x)$首項係數都為 1，故$p(x)$和$f(x)$各項係數一一相等，

觀察$p(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}\left[\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\dfrac{n}{n-k}C_k^{n-k}(2x)^{n-2k}-\cos n\theta\right]$看出$a_1=a_3=...=a_{n-2}=0$

且$a_0,a_2......a_{n-1}$是常數(不隨θ變動)，只有$a_n=-\dfrac{\cos n\theta}{2^{n-1}}$非常數

$$x^n f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^n\left[a_n+\sum_{\substack{i\equiv 0 \pmod 2\\ i=0}}^{n}a_i\left(x-\frac{1}{x}\right)^{n-i}\right]$$

$$=b_0x^{2n}+b_2x^{2n-2}+b_4x^{2n-4}+\cdots+a_nx^n+\cdots+b_{2n}\ (b_0,b_2,b_4,\cdots,b_{2n}\text{為常數})$$

看出$S_1=0$

由引理一知$b_0S_3+b_2S_1=0\Rightarrow S_3=0$

設$S_{2k+1}=0$ 對$k=0,1,\cdots,t$皆成立，且$t\le\dfrac{n-5}{2}$

由$\displaystyle\sum_{i=0}^{t+1}b_{2i}S_{2t+3-2i}=0\Rightarrow S_{2t+3}=0$ ，所以確定了

$k=0,1,2,\cdots,\dfrac{n-3}{2}$時， $S_{2k+1}=0$

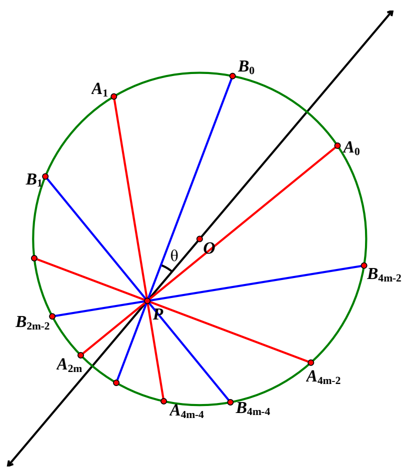
負數次方時，由圓冪定理可得。

(2)證明：

右圖中，過圓O內一點P等角切$2m$刀，

其中一人取到的值為$\displaystyle\sum_{i=0}^{2m-1}\left(\overline{PA_{2i}}\right)^{2k}$ ，

另一人取到的值為$\displaystyle\sum_{i=0}^{2m-1}\left(\overline{PB_{2i}}\right)^{2k}$



當且僅當$1-m\le k\le m-1, k\in \mathrm{Z}$時，有 $\sum_{i=0}^{2m-1}\left(\overline{PA_{2i}}\right)^{2k}=\sum_{i=0}^{2m-1}\left(\overline{PB_{2i}}\right)^{2k}$

和奇數刀略有不同，這次要確定$\prod_{i=0}^{2m-1}\left(x^2-\overline{PA_i}^2\right)$的各項係數，再用牛頓恆等式計算$S_{2k}$，

說明S_{2k}的值與θ無關。

當 m 是奇數時，在(1)已求出

$$x^m f(x-\frac{1}{x})=\prod_{i=0}^{2m-1}\left(x-\overline{PA_i}\right)=b_0x^{2m}+b_2x^{2m-2}+b_4x^{2m-4}+\cdots+a_mx^m+\cdots+b_{2m}\ (b_0,b_2,b_4,\cdots,b_{2m}\text{為常數})$$

由引理一知$b_0S_2+b_2S_0=0\Rightarrow S_2$為定值

若$S_{2k}=0$ 對$k=0,1,\cdots,t$皆成立，且$t\le m-2$

由$b_0S_{2t+2}+b_2S_{2t}+\cdots+b_{2t+2}S_0=0\Rightarrow S_{2t+2}$為定值

若 m 為偶數，同樣地假設$\overline{PO}=\frac{a}{2}$，$\angle A_0PO=\theta$(非定值)，$\overline{PA_0}\cdot\overline{PA_m}=1$

則$(-1)^i\overline{PA_i}, (-1)^{i+1}\overline{PA_{i+m}}, i=0,1,2,\cdots,m-1$滿足$x-\frac{1}{x}=a\cos(\theta+\frac{i\pi}{m}+i\pi)$

$(-1)^i\overline{PA_i}, (-1)^{i+1}\overline{PA_{i-m}}, i=m,m+1,\cdots,2m-1$滿足$x-\frac{1}{x}=a\cos(\theta+\frac{i\pi}{m}+i\pi)$

又$\left\{a\cos(\theta+\frac{i\pi}{m}+i\pi)\,\middle|\, i=0,1,2,\cdots,2m-1\right\}=\left\{a\cos(\theta+\frac{i\pi}{n})\,\middle|\, i=0,1,2,\cdots,2m-1\right\}$

同樣地令 $f(x)=\prod_{i=0}^{2m-1}\left[x-a\cos(\theta+\frac{i\pi}{m})\right]=\sum_{i=0}^{2m}a_ix^{2m-i}$

所以以$(-1)^i\overline{PA_i}, (-1)^{i+1}\overline{PA_i}, i=0,1,2,\cdots,2m-1$這 $4m$ 個數為根的方程即$f(x-\frac{1}{x})$乘上x^{2m}

$$x^{2m}f(x-\frac{1}{x})\equiv\prod_{i=0}^{2m-1}\left[x-(-1)^i\overline{PA_i}\right]\left[x-(-1)^{i+1}\overline{PA_i}\right]=\prod_{i=0}^{2m-1}\left[x^2-\overline{PA_i}^2\right]$$

$x^{2m}f(x-\frac{1}{x})$形如$b_0x^{4m}+b_2x^{4m-2}+\cdots+b_{2m}x^{2m}+\cdots+b_{4m}$ (b_{2m}非常數)

令$y=x^2$，則以$\overline{PA_i}^2, i=0,1,2,\cdots,2m-1$這 $2m$ 個數為根的方程即

$$b_0y^{2m}+b_2y^{2m-1}+\cdots+b_{2m}y^m+\cdots+b_{4m}$$

因為$b_0,b_2,\cdots,b_{2m-2}$為定值，用牛頓恆等式計算，顯然當$0\le k\le m-1$時S_k為定值，

負數次方時，由圓冪定理可得。

引理三

給定圓內接正 $2n+1$($n\in N$)邊形 $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$，及圓周上一點 $P\in A_mA_{m+1}$ 弧，連接

$\overline{PA_j}(j=1,2,..,2n+1)$，將其連接線段由 $\overline{PA_{m+1}}$ 開始，依逆時針序由兩人輪流取走，

則兩人所取得的線段 $2k+1$($0\le k\le n-1,\ k\in Z$)次方和相等。

證明：

即說明 $\sum\limits_{\substack{i\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\\ i=1}}^{2n+1}\left(\overline{PA_i}\right)^{2k+1}=\sum\limits_{\substack{i\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)\\ i=0}}^{2n+1}\left(\overline{PA_i}\right)^{2k+1},\ 0\le k\le n-1,\ k\in Z$

令 $\overline{PO}=r\Rightarrow(-1)^i\,\overline{PA_i}=2r\cos\left(\theta+\dfrac{(i-1)\pi}{2n+1}+i\pi\right),\ i=1,2,\cdots,2n+1$

又 $\left\{2r\cos\left(\theta+\dfrac{(i-1)\pi}{2n+1}+i\pi\right)\mid i=1,2,\cdots,2n+1\right\}=\left\{2r\cos\left(\theta+\dfrac{2(i-1)\pi}{2n+1}\right)\mid i=1,2,\cdots,2n+1\right\}$

$$\prod_{i=1}^{2n+1}\left[x-2r\cos\left(\theta+\frac{2(i-1)\pi}{2n+1}\right)\right]=\sum_{i=0}^{2n+1}a_ix^{2n+1-i}$$

同樣地(理由同定理一) $a_1=a_3=\ldots=a_{2n-1}=0$，

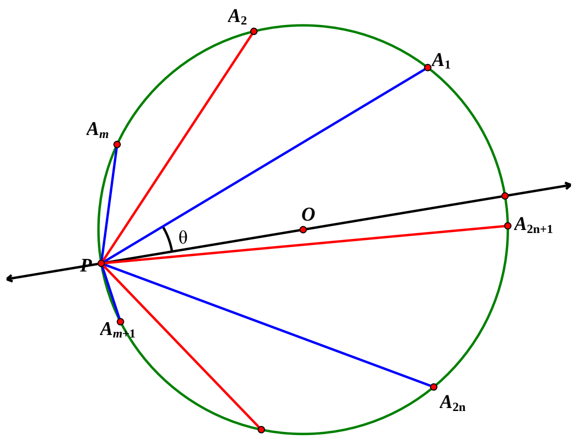
$a_0,a_2,\ldots,a_{2n-2},a_{2n}$ 為定值，a_{2n+1} 非定值

可看出 $S_1=a_1=0$，由引理一知

$a_0S_3+a_2S_1=0\Rightarrow S_3=0$

$\vdots$

$a_0S_{2n-1}+a_2S_{2n-3}+\cdots+a_{2n-2}S_1=0\Rightarrow S_{2n-1}=0$

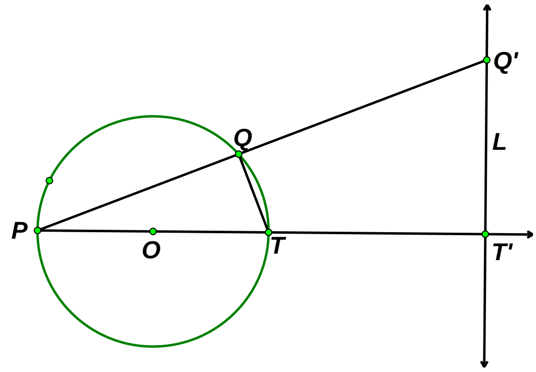


故引理三得證。

引理四

設 P 為圓 O 上一點，以 P 為反演中心， r^2 為反演冪，則圓 O 反演後的圖形為直線。

證明：



設 T 為 P 的對徑點，T' 為 T 的反演點，過 T' 做垂直 PT' 的直線 L ，Q' 為 L 上任意點，連接 PQ' 交圓 O 於 Q

$\because PT$ 為直徑 $\therefore \angle PQT = 90^\circ = \angle PT'Q'$

$\therefore Q$、T、T'、Q' 四點共圓 $\Rightarrow \overline{PQ}\cdot\overline{PQ'} = \overline{PT}\cdot\overline{PT'} = r^2$

$\therefore Q$ 、Q' 互為反演點

反之，若 Q 為圓 O 上任意點，Q' 為 Q 的反演點，

則 Q' 會落在 L 上，所以圓 O 反演後的圖形即為 L ，

得證。

定理二

過一直線 L 外一點 P 等角切 n 刀，設此 n 刀所在的直線與直線 L 的交點由左至右(或由下到上)依序命名為 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ， P 到 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的線段由兩人依左至右(或下到上)的次序取，

(1)若 $n=2m(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長度 $2k(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $1-m\le k\le 0$ 。

(2)若 $n=2m+1(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長度 $2k+1(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $-m\le k\le -1$ 。

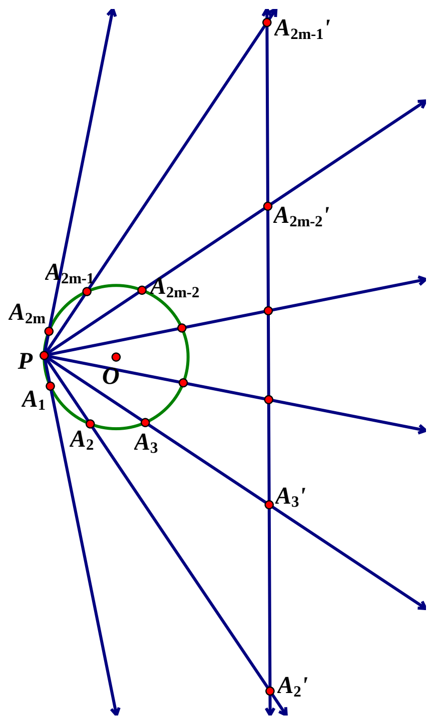
(1)證明：

由[參考資料三]引理二：

對任意正 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 內接於圓 O，圓周上取一點 P，

連接$\overline{PA_j}\,(j=1,2,\ldots,n)$，則$\sum_{j=1}^{n}(\overline{PA_j})^{2k}$之值為

$n\cdot C_k^{2k}\cdot r^{2k}$ ，其中 k=1, 2, …, n-1。(證明見[參考資料三])



以 P 為反演中心，r^2 為反演冪，由引理四可將圓變換為直線，

設 $A_i \mapsto A_i', i=1,2,\cdots,2m$

[參考資料三]的引理二等於說明

$$\sum_{\substack{i\equiv 1 \pmod 2\\ i=1}}^{2m}\left(\overline{PA_i}\right)^{2k} = m\cdot C_k^{2k}\cdot r^{2k} = \sum_{\substack{i\equiv 0 \pmod 2\\ i=2}}^{2m}\left(\overline{PA_i}\right)^{2k}\ (k=1,2,\ldots,m-1)$$

$$\sum_{\substack{i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\\ i=1}}^{2m}\left(\overline{PA_i'}\right)^{2k}\text{(其中一人取到的值)}$$

$$=\sum_{\substack{i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\\ i=1}}^{2m}\left(\frac{\overline{PA_i}}{r^2}\right)^{-2k}=\sum_{\substack{i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\\ i=2}}^{2m}\left(\frac{\overline{PA_i}}{r^2}\right)^{-2k}$$

$$=\sum_{\substack{i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\\ i=2}}^{2m}\left(\overline{PA_i'}\right)^{2k}\text{(另一人取到的值)}(1-m\le k\le 0)$$

得證。

(2)證明：

以 P 為反演中心，r^2 為反演冪，由引理四可將圓變換為直線，

設 $A_i \mapsto A_i', i=1,2,\cdots,2m+1$

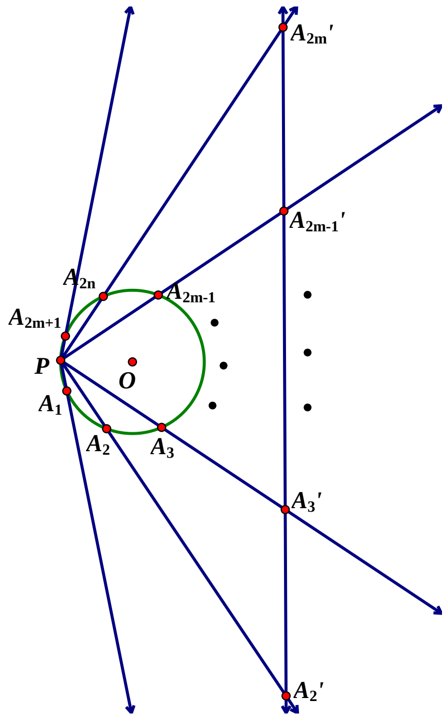
由引理三 $\displaystyle\sum_{\substack{i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\\ i=1}}^{2m+1}\left(\overline{PA_i}\right)^{2k+1}=\sum_{\substack{i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\\ i=0}}^{2m+1}\left(\overline{PA_i}\right)^{2k+1}, 0\le k\le m-1, k\in Z$

$$\sum_{\substack{i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\\ i=1}}^{2m+1}\left(\overline{PA_i'}\right)^{2k+1}\text{(其中一人取到的值)}$$

$$=\sum_{\substack{i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\\ i=1}}^{2m+1}\left(\frac{\overline{PA_i}}{r^2}\right)^{-2k-1}=\sum_{\substack{i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\\ i=2}}^{2m}\left(\frac{\overline{PA_i}}{r^2}\right)^{-2k-1}$$

$$=\sum_{\substack{i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\\ i=2}}^{2m+1}\left(\overline{PA_i'}\right)^{2k+1}\text{(另一人取到的值)}(-m\le k\le -1)$$

得證。



系理一

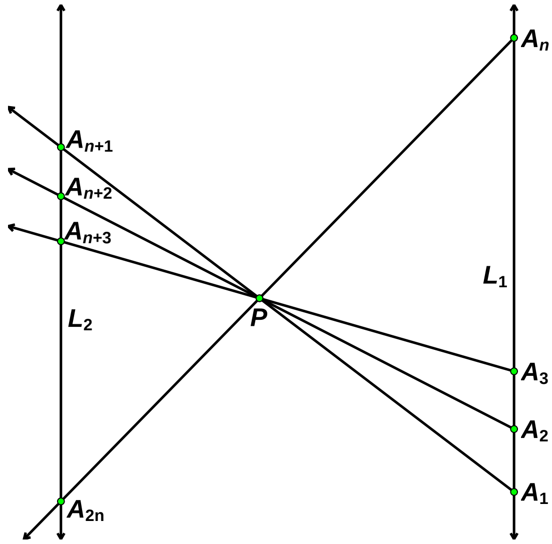
過兩平行直線 L_1、L_2 所在平面上一點等角切 n 刀，設此 n 刀所在的直線與直線 L_1, L_2 的交點以逆時針(或順時針)依序命名為 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$ ， P 到 $A_i(i=1,2,\cdots,2n)$ 的線段由兩人以逆時針(或順時針)的次序取，

(1)若 $n=2m(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長度 $2k(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $1-m\le k\le 0$ 。

(2)若 $n=2m+1(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長度 $2k+1(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $-m\le k\le -1$ 。

證明：(以下證明中$n \equiv r (\bmod 2)$)

如圖，過P點等角切n刀，以逆時針順序把直線和L_1、L_2的交點命名為A_1、$A_2 \cdots A_{2n}$



原題等價於證明 $\sum_{\substack{i\equiv 1(\bmod 2)\\ i=1}}^{2n} \left(\overline{PA_i}\right)^r = \sum_{\substack{i\equiv 0(\bmod 2)\\ i=2}}^{2n} \left(\overline{PA_i}\right)^r \cdots\cdots(1)$

由定理二得 $\sum_{\substack{i\equiv 1(\bmod 2)\\ i=1}}^{n} \left(\overline{PA_i}\right)^r = \sum_{\substack{i\equiv 0(\bmod 2)\\ i=2}}^{n} \left(\overline{PA_i}\right)^r \cdots\cdots(2)$

$$\sum_{\substack{i\equiv n+1(\bmod 2)\\ i=n+1}}^{2n} \left(\overline{PA_i}\right)^r = \sum_{\substack{i\equiv n+2(\bmod 2)\\ i=n+2}}^{2n} \left(\overline{PA_i}\right)^r \cdots\cdots(3)$$

若$n+1$為奇數，(2)式左半+(3)式左半=(1) 式左半

(2)式右半+(3)式右半=(1) 式右半，所以(1)式成立。

若$n+1$為偶數，(2)式左半+(3)式右半=(1) 式左半

(2)式右半+(3)式左半=(1) 式右半，所以(1)式成立，證畢

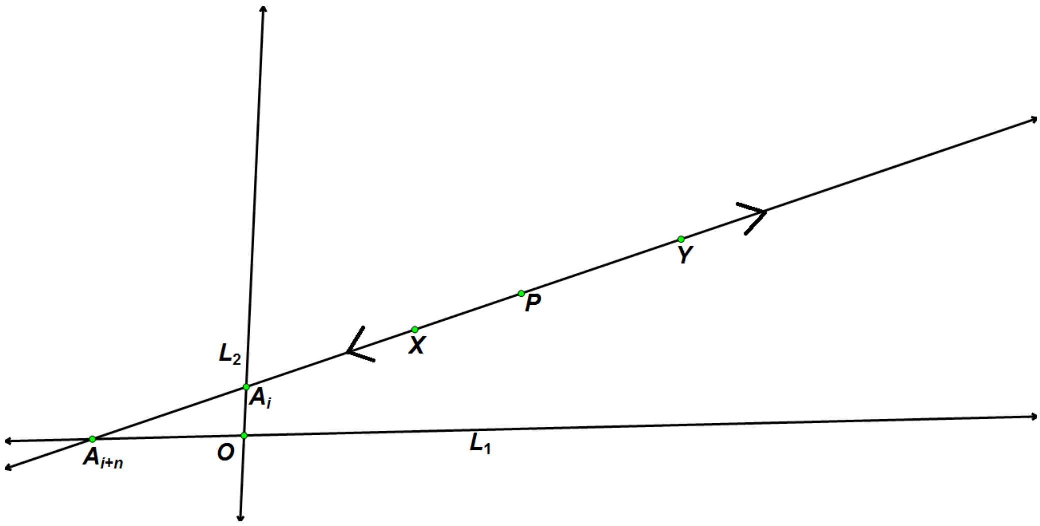
$\boxed{\text{系理二}}$

過平面上一點P等角切n刀，設此n刀所在的直線兩相交直線L_1、L_2的交點以順時針(或逆時針) 依序命名為$A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$，P到$A_i(i=1,2,\cdots,2n)$的有向線段，由兩人以順時針(或逆時針)的次序取，

(1)若$n=2m(m\in N)$，則兩人取出的線段長度$2k(k\in Z)$次方和相等，其中$1-m\le k\le 0$。

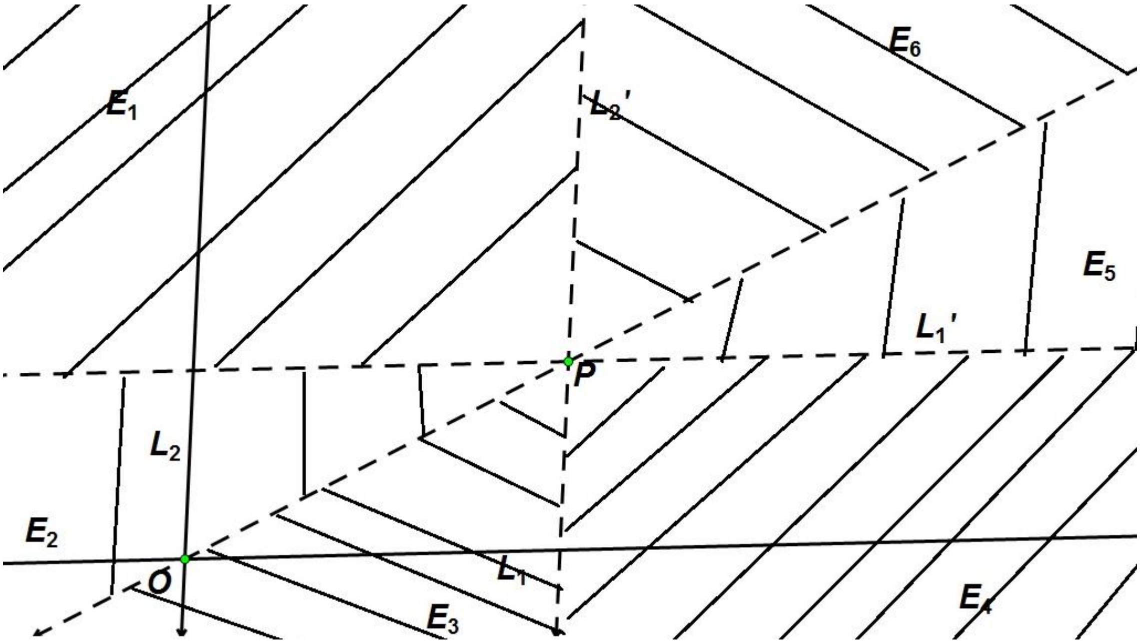
(2)若$n=2m+1(m\in N)$，則兩人取出的線段長度$2k+1(k\in Z)$次方和相等，其中$-m\le k\le -1$

註：有向線段是指過P的直線在PX方向上和L_2有交點A_i，在PY方向上和L_1沒有交點，反而跑到PX方向上的A_{i+n}，則取到PA_i這段的人的值取正，取到PA_{i+n}這段的人的值取負。

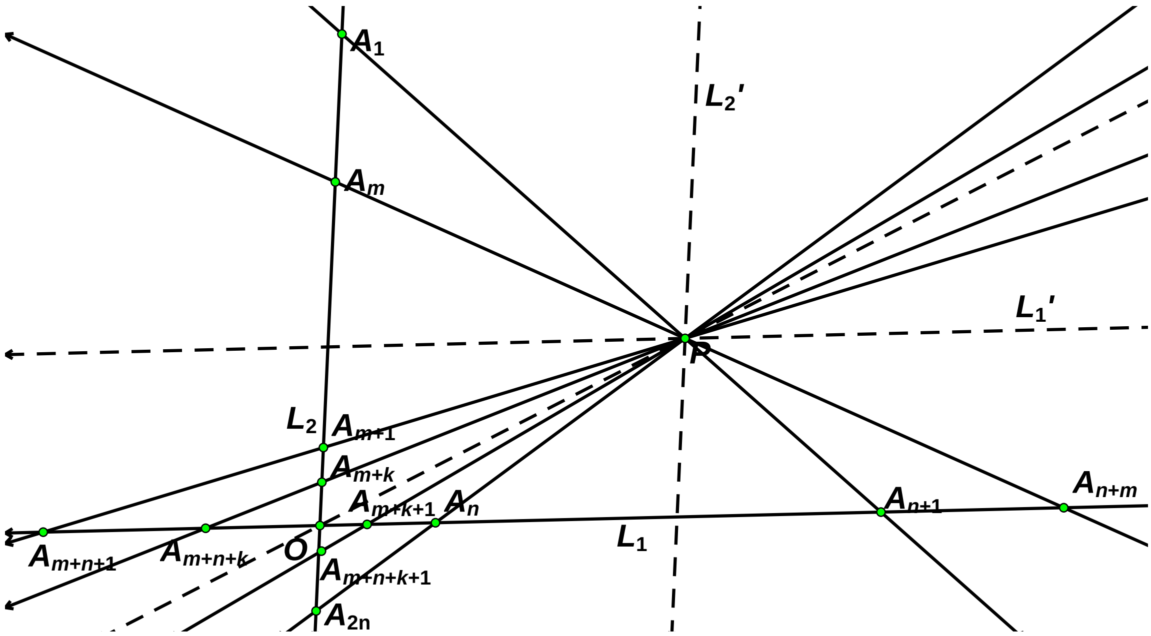


證明：(以下證明中$n \equiv r (\bmod 2)$)

設兩相交直線為 L_1 、 L_2 且相交於 O ，可令 P 位於右上方的區塊內，過 P 作平行 L_1 、 L_2 的直線分別為 L_1' 、 L_2' ，連接 PO 直線將平面分為 6 個區域 E_1 、 $E_2 \ldots E_6$



過直線 P 等角切 n 刀交 L_1 、 L_2 於 A_1 、 $A_2 \ldots A_{2n}$ (以逆時針方向繞一圈)， $A_1 \ldots A_m$ 在 E_1 內， $A_{m+1} \ldots A_{m+k}$ 、 $A_{m+n+1} \ldots A_{m+n+k}$ 在 E_2 內， $A_{m+k+1} \ldots A_n$ 、 $A_{m+n+k+1} \ldots A_{2n}$ 在 E_3 內， $A_{n+1} \ldots A_{n+m}$ 在 E_4 內，



其中一人取到的值 $\sum_{\substack{i \equiv 1 \bmod 2) \\ i=1}}^{2n} \left((-1)^t \overline{PA_i}\right)^r$ $(if\ \ m+n+1 \le i \le 2n \quad t$ 取1， $if\ \ i \le m+n \quad t$ 取0)……(1)

另一人取到的值 $\sum_{\substack{i \equiv 0 \bmod 2) \\ i=2}}^{2n} \left((-1)^t \overline{PA_i}\right)^r$ $(if\ \ m+n+1 \le i \le 2n \quad t$ 取1， $if\ \ i \le m+n \quad t$ 取0)……(2)

當 n 是偶數時，

$$(1)\text{式}=\sum_{\substack{i\equiv 1 \bmod 2)\\ i=1}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r=\sum_{\substack{i\equiv 1 \bmod 2)\\ i=1}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_2)+\sum_{\substack{i\equiv 1 \bmod 2)\\ i=1}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_1)$$

同理，(2)式$=\displaystyle\sum_{\substack{i\equiv 0 \bmod 2)\\ i=2}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_2)+\sum_{\substack{i\equiv 0 \bmod 2)\\ i=2}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_1)$

由定理二，$\displaystyle\sum_{\substack{i\equiv 1 \bmod 2)\\ i=1}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_2)=\sum_{\substack{i\equiv 0 \bmod 2)\\ i=2}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_2)$

$\displaystyle\sum_{\substack{i\equiv 1 \bmod 2)\\ i=1}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_1)=\sum_{\substack{i\equiv 0 \bmod 2)\\ i=2}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_1)$，(1)式=(2)式成立。

當 n 是奇數時，

$$(1)=\sum_{\substack{i\equiv 1 \bmod 2)\\ i=1}}^{m+n}\left(\overline{PA_i}\right)^r-\sum_{\substack{i\equiv 1 \bmod 2)\\ m+n+1\le i\le 2n}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r$$

$$(2)=\sum_{\substack{i\equiv 0 \bmod 2)\\ i=2}}^{m+n}\left(\overline{PA_i}\right)^r-\sum_{\substack{i\equiv 0 \bmod 2)\\ m+n+1\le i\le 2n}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r$$

$$(1)=(2)\Leftrightarrow\sum_{\substack{i\equiv 1 \bmod 2)\\ i=1}}^{m+n}\left(\overline{PA_i}\right)^r+\sum_{\substack{i\equiv 0 \bmod 2)\\ m+n+1\le i\le 2n}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r=\sum_{\substack{i\equiv 0 \bmod 2)\\ i=2}}^{m+n}\left(\overline{PA_i}\right)^r+\sum_{\substack{i\equiv 1 \bmod 2)\\ m+n+1\le i\le 2n}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\cdots\cdots(3)$$

$\because n$ 是奇數 $\therefore i+n\neq i(\bmod 2)$

$\therefore(3)$ 式左半$=\displaystyle\sum_{\substack{i\equiv 1 \bmod 2)\\ i=1}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_2)=\sum_{\substack{i\equiv 0 \bmod 2)\\ i=2}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_2)$

(3) 式右半$=\displaystyle\sum_{\substack{i\equiv 0 \bmod 2)\\ i=2}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_2)+\sum_{\substack{i\equiv 0 \bmod 2)\\ i=2}}^{2n}\left(\overline{PA_i}\right)^r\quad (A_i\in L_1)$，同樣由定理二之(3)式成立，

證畢。

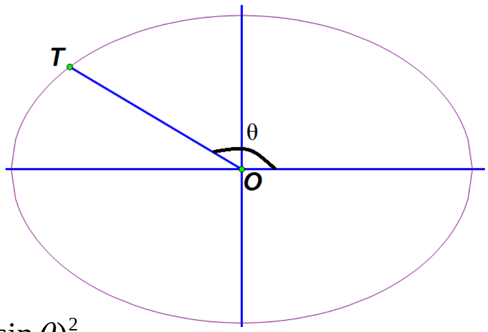
$\boxed{\text{定理三}}$

設橢圓中心為O，任意給出橢圓上n個點$P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$，使得$OP_0, OP_1, \cdots, OP_{n-1}$中相鄰線段夾角都相同，

(1) 若n為奇數，則$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\overline{OP_i}^{2k}}$為定值($0\le k\le n-1$，$k\in\mathbb{Z}$)。

(2) 若n為偶數(令$n=2^m\cdot t$,其中t為奇數, $m\in\mathbb{N}$)，則$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\overline{OP_i}^{2k}}$為定值($0\le k\le t-1$，$k\in\mathbb{Z}$)。

證明：



先來證明(1)

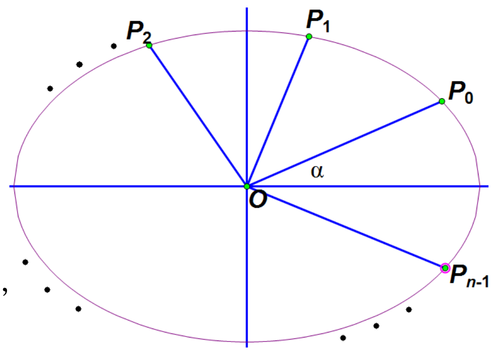
設橢圓方程式為：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

T為橢圓上一點，$\overline{OT}=p$，OT和x軸夾角為θ。

則$T=(p\cos\theta, p\sin\theta)$，代入橢圓方程式得$\frac{(p\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(p\sin\theta)^2}{b^2}=1$。

則$\frac{1}{p^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{1+\cos2\theta}{2a^2}+\frac{1-\cos2\theta}{2b^2}$

$$=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}+(\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2b^2})\cos2\theta$$



令OP_0和x軸夾角為α，

則OP_i和x軸夾角為$\alpha+\frac{2i\pi}{n}$。

因此要證明的命題等價於證明：在$0\le k\le n-1$，$k\in\mathbb{Z}$時，

$\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}+(\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2b^2})\cos(2\alpha+\frac{4i\pi}{n})\right]^k$為定值。

$\because (n,2)=1$

$\therefore \{b_i \mid b_i$為$2i$在$\bmod n$下的最小非負剩餘$\}=\{0,1,\ldots,n-1\}$

$\therefore \{\cos(2\alpha+\frac{2i\pi}{n}) \mid i=0,2,\ldots,2n-2\}=\{\cos(2\alpha+\frac{2i\pi}{n}) \mid i=0,1,\ldots,n-1\}$

$$\therefore \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}+(\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2b^2})\cos(2\alpha+\frac{4i\pi}{n})\right]^k$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}+(\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2b^2})\cos(2\alpha+\frac{2i\pi}{n})\right]^k \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

令 $\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2b^2}=s$ ，$\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}=r$ ，展開(1)式得，

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{k}C_j^k\cdot s^j\cos^j(2\alpha+\frac{2i\pi}{n})\cdot r^{(k-j)}\right]=\sum_{j=0}^{k}C_j^k\cdot s^j\cdot r^{(k-j)}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\cos^j(2\alpha+\frac{2i\pi}{n})\ldots\ldots..(2)$$

令 $\prod_{i=0}^{n-1}\left[x-\cos(2\alpha+\frac{2i\pi}{n})\right]=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^{n-i}$

同樣地(理由同定理一)

$a_1=a_3=...=a_{2n-1}=0$ ，$a_0,a_2,...,a_{2n-2},a_{2n}$ 為定值，a_{2n+1} 非定值。

由引理一知

$S_1=-a_1=0$

若 $S_1,S_2,\ldots,S_r$ 皆為定值(與 α 無關)且 $r\le n-2$ 時，由引理一知

$S_{r+1}a_0+S_ra_1+S_{r-1}a_2+\ldots+(r+1)a_{r+1}=0$

則 S_{r+1} 亦為定值。

$\therefore$ 當 $0\le j\le n-1$ 時，$\sum_{i=0}^{n-1}\cos^j(2\alpha+\frac{2i\pi}{n})$ 為定值

$\therefore$ 當 $0\le k\le n-1$ 時，(2)為定值，n 為奇數的情形已證明完畢。

當 n 為偶數(令 $n=2^m\cdot t$,其中 t 為奇數, $m\in\mathbb{N}$)，可以把這 n 個點分為 2^m 組，每組

t 個點 $P_i,P_{2^m\cdot1+i},P_{2^m\cdot2+i}\ldots,P_{2^m\cdot(t-1)+i}$ ，$i=0\sim2^m-1$ 。

每組 t 個點就形成了奇數個點的情形，所以 $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\overline{OP_i}^{2k}}=2^m\sum_{i=0}^{t-1}\frac{1}{\overline{OP_{2^m i}}^{2k}}$ ，

所以 n 為偶數時為定值的範圍應和奇數刀相同，也就是 $0\le k\le t-1$ 。

$\boxed{\text{定理四}}$

過圓錐曲線內任一點 P 切 $n(n\ge2,n\in N)$ 刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，P 點到圓錐曲線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則：

(1)若 $n=2m(m\in N)$ 時，則兩人取出的線段長度 -2 次方和相等。

(2)若 $n=2m+1(m\in N)$ 時，則兩人取出的線段長度 -1 次方和相等。

(2)的證明：

令圓錐曲線的方程式為：$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$
過 P (不妨令其為原點)的 $2m+1$ 條割線和圓錐曲線的交點以逆時針順序命名為 $A_0A_1\dots A_{4m+1}$，

PA_0 和 x 軸夾角為 α 。

所要證明得即為 $\sum_{i=1}^{2m+1}(\overline{PA_{2i-1}})^{-1}=\sum_{i=0}^{2m}(\overline{PA_{2i}})^{-1}$

我們希望確定 $\prod_{i=0}^{4m+1}\left[x-\frac{1}{(-1)^i\overline{PA_i}}\right]$ 中 x^{4m+1} 的係數，只要證明 x^{4m+1} 的係數為 0，由根與係數的關係，

得 $\sum_{i=0}^{4m+1}\frac{1}{(-1)^i\overline{PA_i}}=0$ ，及所要證得。

過 P 的一條直線：$y=x\tan\theta$ 和圓錐曲線交於 T_1 、T_2 (PT_1 和 x 軸夾 θ ，PT_2 和 x 軸夾 $\theta+\pi$)，

和圓錐曲線的方程式聯立後(以 $x\tan\theta$ 代入 y)，可解出 T_1 、T_2 的 x 座標滿足

$(a+b\tan\theta+c\tan^2\theta)x^2+(d+e\tan\theta)x+f=0$ ， 以 $\frac{\cos\theta}{x}$ 代入 x ，

則以 $\frac{1}{\overline{PT_1}}$ 、$\frac{1}{-\overline{PT_2}}$ 為根的方程為 $(a\cos^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta)+(d\cos\theta+e\sin\theta)x+fx^2=0$ ，

將 $d\cos\theta+e\sin\theta$ 疊合成 $t\cos(h+\theta)$ 後，

以下所有證明令 $p(\theta)=(a\cos^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta)+t\cos(h+\theta)x+fx^2$

又 $\prod_{i=0}^{4m+1}\left[x-\frac{1}{(-1)^i\overline{PA_i}}\right]=\prod_{i=0}^{m}\left[(x-\frac{1}{(-1)^{2i}\overline{PA_{2i}}})(x-\frac{1}{(-1)^{2i+2m+1}\overline{PA_{2i+2m+1}}})\right]$

$=\prod_{i=0}^{2m}p(\theta_i)$ ，其中 θ_i 為 $\alpha+\frac{2i\pi}{n}$

$\therefore$ x^{4m+1} 的係數為 $\sum_{i=0}^{n-1}d\cos(a+\frac{2i\pi}{n})+e\sin(a+\frac{2i\pi}{n})$ ……….(*)

而 $\cos n\theta=\cos n\alpha$ 中 θ 有 n 個解，分別是 $\cos(a+\frac{2i\pi}{n})$ $i=0\sim n-1$ 。

類似地，由引理二知 $\sum_{i=0}^{n-1}d\cos(a+\frac{2i\pi}{n})=0$ ，又 $\sum_{i=0}^{n-1}e\sin(a+\frac{2i\pi}{n})=\sum_{i=0}^{n-1}-e\cos(a+\frac{\pi}{2}+\frac{2i\pi}{n})=0$ ，從而(*)式等於 0，也就是所欲證的。

(1)的證明：當 $n=2m$ 的 m 是奇數時，在(2)的證明我們已經求出 $\prod_{i=0}^{4m+1}\left[x-\frac{1}{(-1)^i\overline{PA_i}}\right]$

$=\prod_{i=0}^{2m} p(\theta_i)$，其中 θ_i 為 $\alpha+\dfrac{2i\pi}{n}$

，令 $\prod_{i=0}^{4m+1}\left[x-\dfrac{1}{(-1)^i\overline{PA_i}}\right]=\sum_{i=0}^{4m+2} a_i x^{4m+2-i}$，由引理一我們有 $\sum_{i=0}^{4m+1}\dfrac{1}{\overline{PA_i}^2}=a_1^2-2a_2$

，在(2)的證明中已說明 $a_1=0$，由根與係數的關係得

$$a_2=\sum_{i=0}^{2m} a\cos^2\theta_i+b\sin\theta_i\cos\theta_i+c\sin^2\theta_i+\sum_{0\le i<j\le 2m} t^2\cos(h+\theta_i)\cos(h+\theta_j)\ \ldots.(**)$$

同理由引理二可得(**)式下半為定值(和 α 無關)，由引理二和引理一可得 $\sum_{i=0}^{2m} a\cos^2\theta_i$ 為定值，

及 $\sum_{i=0}^{2m} c\sin^2\theta_i=\sum_{i=0}^{2m} c\cos^2(\theta_i+\dfrac{\pi}{2})$ 亦為定值

$\sum_{i=0}^{2m} b\sin\theta_i\cos\theta_i=\sum_{i=0}^{2m}\dfrac{b}{2}\sin 2\theta_i=\sum_{i=0}^{2m}\dfrac{b}{2}\sin\theta_i=\sum_{i=0}^{2m}\dfrac{b}{2}\cos\theta_i=0$，所以(**)為定值，從而 $\sum_{i=0}^{4m+1}\dfrac{1}{\overline{PA_i}^2}$ 為定值，

以 $\alpha+\dfrac{\pi}{2m+1}$ 代入 α，即得另一人取到的值，因為為定值，兩人取到的值相等。

當 $n=2m$ 的 m 是偶數時，令 $m=2s$

過 P (不妨令其為原點)的 $2m$ 條割線和圓錐曲線的交點以逆時針順序命名為

$A_0B_0A_1\ldots A_{2m-1}B_{2m-1}$，$PA_0$ 和 x 軸夾角為 α。

兩人取到的值分別為 $\sum_{i=0}^{4s-1}\dfrac{1}{\overline{PA_i}^2}$ 和 $\sum_{i=0}^{4s-1}\dfrac{1}{\overline{PB_i}^2}$

$$\prod_{i=0}^{4s-1}(x^2-\frac{1}{\overline{PA_i}^2})=\prod_{i=0}^{4s-1}(x-\frac{1}{\overline{PA_i}})(x+\frac{1}{\overline{PA_i}})=\prod_{i=0}^{2s-1}(x-\frac{1}{\overline{PA_{2i}}})(x+\frac{1}{\overline{PA_{2i+2s}}})(x-\frac{1}{\overline{PA_{2i+1}}})(x+\frac{1}{\overline{PA_{2i+2s+1}}})$$

$=\prod_{i=0}^{4s-1} p(\theta_i)$，其中 θ_i 為 $\alpha+\dfrac{i\pi}{2s}$ …..(****)

(****)式又 $=\prod_{i=0}^{2s-1} p(\theta_i)p(\theta_i+\pi)=\prod_{i=0}^{2s-1}\{(a\cos^2\theta_i+b\sin\theta_i\cos\theta_i+c\sin^2\theta_i)^2$

$$+[t^2\cos^2(h+\theta_i)+2f(a\cos^2\theta_i+b\sin\theta_i\cos\theta_i+c\sin^2\theta_i)]x^2+f^2x^4\}$$

以 x 代換 x^2，則 $\prod_{i=0}^{4s-1}(x-\dfrac{1}{\overline{PA_i}^2})=\prod_{i=0}^{2s-1}\{(a\cos^2\theta_i+b\sin\theta_i\cos\theta_i+c\sin^2\theta_i)^2$

$$+[t^2\cos^2(h+\theta_i)+2f(a\cos^2\theta_i+b\sin\theta_i\cos\theta_i+c\sin^2\theta_i)]x+f^2x^2\}$$

由根與係數關係得 $\sum_{i=0}^{4s-1}\frac{1}{\overline{PA_i}^2}=\sum_{i=0}^{2s-1}t^2\cos^2(h+\theta_i)+2f(a\cos^2\theta_i+b\sin\theta_i\cos\theta_i+c\sin^2\theta_i)$ (*****)

類似在(1)的證明中將 $b\sin\theta_i\cos\theta$ 換成 $\frac{b}{2}\sin 2\theta_i$ ，及由引理二、引理一可證明(*****)為定值，

將 a 以 $\alpha+\frac{\pi}{m}$ 代換可得另一人取的值，因為是定值(和 a 無關)，可知兩人取到的值相等，

證畢。

$\boxed{\text{定理五}}$

過圓錐曲線(非退化)內任一點 P 切 $n(n\geq 2, n\in N)$ 刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，P 點到圓錐曲線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則：

(1)若 $n=2m(m\in N)$ 時，則各組取出的線段長度 $2k$ 次方和相等，其中 $1-m\leq k\leq 0$ 。

(2)若 $n=2m+1(m\in N)$ 時，則各組取出的線段長度 $2k+1$ 次方和相等，其中 $-m\leq k\leq -1$ 。

(尚未得出證明)

目前我已證明以下引理：

1. 過圓錐曲線焦點切 n 刀，使相鄰割線角度均相同，將焦點到圓錐曲線的所有線段以逆時針依序取一段，則兩人取到的線段長 k 次方和相同，其中 $1-n\leq k\leq 0$ 。([參考資料三]定理六)

2. 橢圓的相交弦定理：過橢圓內任一點 P 引任兩條弦 $\overline{AB}, \overline{CD}$ ，過橢圓之一焦點 F 作兩條弦 $\overline{A'B'}, \overline{C'D'}$ 分別平行於 $\overline{AB}, \overline{CD}$ ，則 $\frac{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}{\overline{PC}\cdot\overline{PD}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ 。

可能的證明方向：

應該有機會利用上述 1, 2 的結果，至少將定理五中橢圓的部分，轉換成過橢圓內的焦點等角切 n 刀的問題，而該問題已解決([參考資料三]定理六)。

肆、結論

以下整理本作品已證明的一些結論及未來展望。

一、已證明的結論

編號	引理、定理、系理內容
引理一	牛頓恆等式(Newton's identities) 設 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n$ ， $S_k={x_1}^k+{x_2}^k+\cdots+{x_n}^k,\ k=0,1,2,\cdots$ 則 $S_k-\sigma_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_nS_{k-n}=0$, 當 $k>n$ 時； $S_k-\sigma_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^kk\sigma_k=0$, 當 $1\le k\le n$ 時。 其中 $\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n\\ \sigma_2=\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j\\ \cdots\cdots\\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n\end{cases}$ 為 n 個不定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的基本對稱式。
引理二	$\cos n\theta=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\dfrac{n}{n-k}C_k^{n-k}(2\cos\theta)^{n-2k}$
引理三	定圓內接正 $2n+1$($n\in N$)邊形 $A_1A_2...A_{2n+1}$ ，及圓周上一點 $P\in A_1A_{2n+1}$ ，連接 $\overline{PA_j}(j=1,2,..,2n+1)$ ，將其連接線段由 $\overline{PA_1}$ 開始，依逆時針序由兩人輪流取走， 則兩人所取得的線段 $2k+1$($0\le k\le n-1, k\in Z$)次方和相等。
引理四	設 P 為圓 O 上一點，以 P 為反演中心， r^2 為反演冪，則圓 O 反演後的圖形為直線。
定理一	過圓內任一點 P 切 $n(n\ge 2,n\in N)$ 刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，P 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段， (1)若 $n=2m+1(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長 $2k+1(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $-m\le k\le m-1$ 。 (2)若 $n=2m(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長 $2k(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $1-m\le k\le m-1$ 。
定理二	過一直線 L 外一點 P 等角切 n 刀，設此 n 刀所在的直線與直線 L 的交點由左至右(或由下到上)依序命名為 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ ， P 到 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的線段由兩人依左至右(或下到上)的次序取， (1)若 $n=2m(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長度 $2k(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $1-m\le k\le 0$ 。 (2)若 $n=2m+1(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長度 $2k+1(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $-m\le k\le -1$ 。

系理一	過兩平行直線 L_1、L_2 所在平面上一點等角切 n 刀，設此 n 刀所在的直線與直線 L_1, L_2 的交點以逆時針(或順時針)依序命名為 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$， P 到 $A_i(i=1,2,\cdots,2n)$ 的線段由兩人以逆時針(或順時針)的次序取， (1)若 $n=2m(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長度 $2k(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $1-m\le k\le 0$ 。 (2)若 $n=2m+1(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長度 $2k+1(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $-m\le k\le -1$ 。
系理二	過平面上一點 P 等角切 n 刀，設此 n 刀所在的直線兩相交直線 L_1 、 L_2 的交點以順時針(或逆時針) 依序命名為 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$， P 到 $A_i(i=1,2,\cdots,2n)$ 的有向線段，由兩人以順時針(或逆時針)的次序取， (1)若 $n=2m(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長度 $2k(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $1-m\le k\le 0$ 。 (2)若 $n=2m+1(m\in N)$ ，則兩人取出的線段長度 $2k+1(k\in Z)$ 次方和相等，其中 $-m\le k\le -1$
定理三	設橢圓中心為 O ，任意給出橢圓上 n 個點 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ ，使得 $OP_0, OP_1, \cdots, OP_{n-1}$ 中相鄰線段夾角都相同， (1)若 n 為奇數，則 $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\overline{OP_i}^{2k}}$ 為定值($0\le k\le n-1$ ， $k\in\mathbb{Z}$)。 (2)若 n 為偶數(令 $n=2^m\cdot t$,其中 t 為奇數, $m\in\mathbb{N}$)，則 $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\overline{OP_i}^{2k}}$ 為定值($0\le k\le t-1$ ， $k\in\mathbb{Z}$)。
定理四	過圓錐曲線內任一點 P 切 $n(n\ge 2, n\in N)$ 刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同 ，P 點到圓錐曲線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則： (1)若 $n=2m(m\in N)$ 時，則兩人取出的線段長度 -2 次方和相等。 (2)若 $n=2m+1(m\in N)$ 時，則兩人取出的線段長度 -1 次方和相等。

二、未來展望：

定理五	過圓錐曲線(非退化)內任一點 P 切 $n(n\ge 2, n\in N)$ 刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，P 點到圓錐曲線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則： (1)若 $n=2m(m\in N)$ 時，則各組取出的線段長度 $2k$ 次方和相等，其中 $1-m\le k\le 0$ 。 (2)若 $n=2m+1(m\in N)$ 時，則各組取出的線段長度 $2k+1$ 次方和相等，其中 $-m\le k\le -1$ 。

伍、討論與應用

定理五雖然尚未得出證明，但我目前已成功證明出過橢圓內任一點等角切奇數刀時，兩人依逆時針序輪流拿取的線段長 -1 次方和相等，以及等角切偶數刀時，兩人依逆時針序輪流拿取的線段長 -2 次方和相等。關於一般的等角切奇數(偶數)刀負奇數(偶數)次方和，我推測可能與「對稱多項式基本定理」(The Fundamental Theorem of Symmetric Polynomials)有關，但目前仍繼續研究中。將過橢圓內任意點的問題透過「橢圓的相交弦定理」轉換成過橢圓內一焦點的問題也是一個可能的方向，不過目前尚無結果。

應用上，先看一下我在[參考資料三]證出的定理四及數論上的「等冪和問題」(Prouhet–Tarry–Escott problem)

[參考資料三]定理四

過心臟線尖點切 $n(n\geq 2，n\epsilon N)$刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，尖點到心臟線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則各組取出的線段長度的 $k(0\leq k\leq n-1,\ k\in Z)$ 次方和相等。

「等冪和問題」是指給定正整數 k，找出兩組整數，每一組各有 n 個整數，使兩組整數各自的和相等、平方和相等、立方和相等到 k 次方和都相等。此問題已提出超過百年，但研究方面仍無重大突破，對於問題的解決也未確立通則，只有找到一些例證而已，目前找到的最佳解是 $n=12, k=11$。

我的結論其實就是「等冪和問題」的實數版本，將來可能有機會應用在解此問題。

另一個應用是在平面幾何上，如果想找兩組各 n 個線段，使它們連續 n 個負奇數次方和相等，但負偶數次方和不等，找法就是過線外一點等角切奇數刀，切出來的線段長由直線的其中一端開始交錯取之，即得所求的兩組線段，根據定理二，此兩組線段必滿足條件。

陸、參考資料

一、呂映霆、蘇哲寬，2013 年，有趣的切披薩問題，2013 臺灣國際科展研究報告書
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2013/pdf/010034.pdf

二、林柏含、王語萱、郭書寒，2004 年，找出 $\cos n\theta$ 與 $\sin n\theta$ 的一般項公式，第四十四屆全國中小學科展高中組作品說明書，p.16
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/44/E/040414.pdf

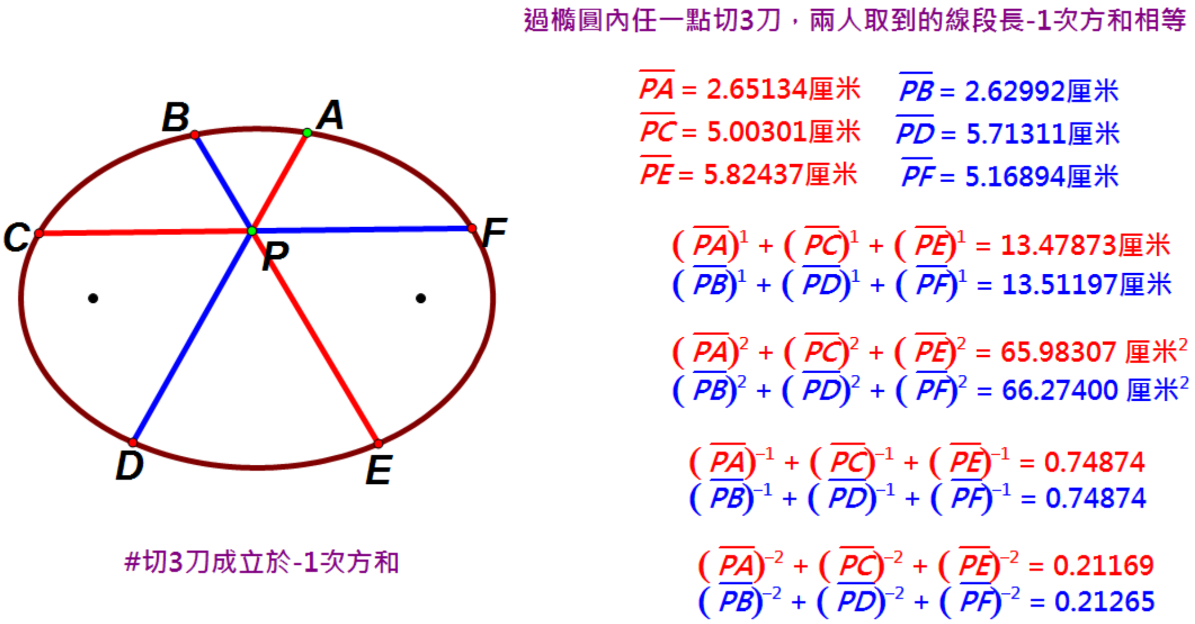
三、曾靖國(同本篇作者)、吳泓寬、黃唯洋，2015 年，一刀兩斷，2015 臺灣國際科展研究報告書
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2015/pdf/010014.pdf

四、Rick Mabry and Paul Deiermann (2009),Of Cheese and Crust：A Proof of the Pizza Conjecture and Other Tasty Results, American Mathematical Monthly, Vol.116, No.5, p. 423-438

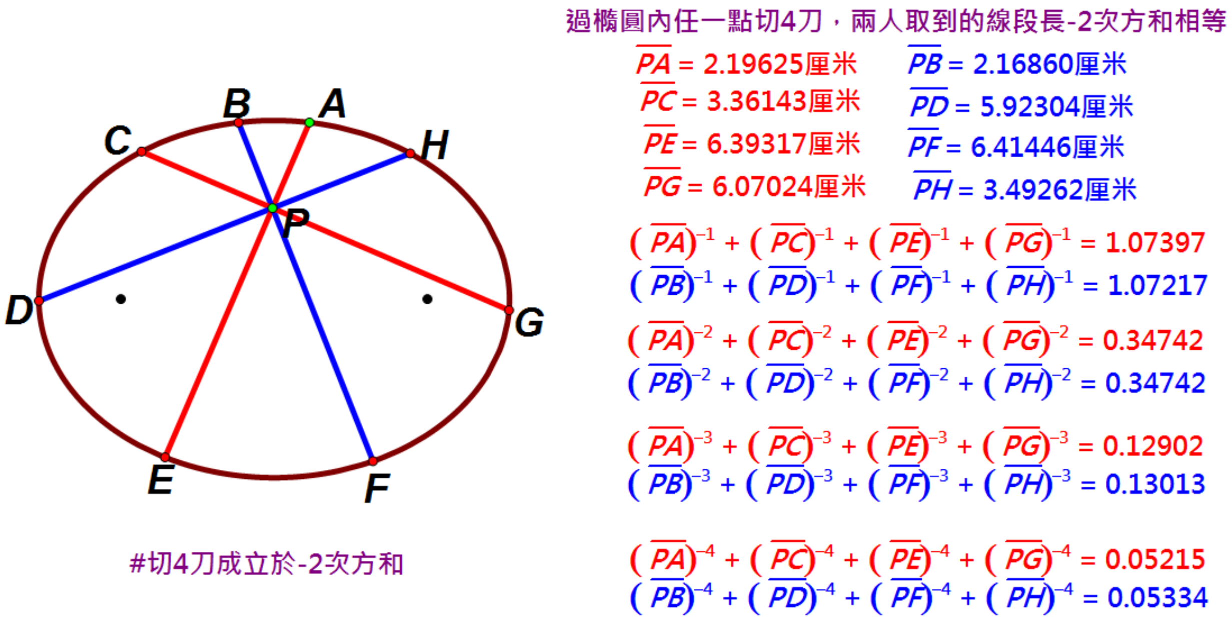
柒、附錄：GSP 實驗

以下是已作的大量 GSP 實驗，作為一系列的猜測，或作為已證得定理的驗證。

1. (1)過橢圓內任一點 P 等角切 3 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的 -1次方和相等：

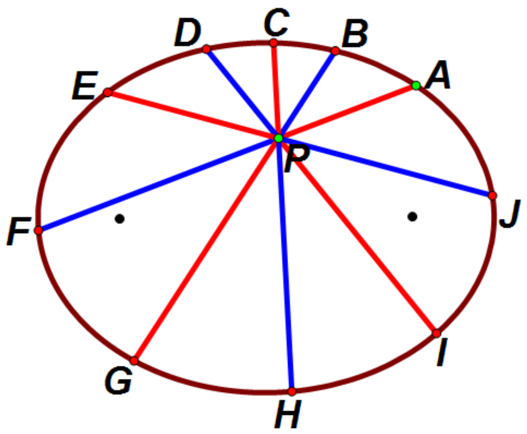


(2) 過橢圓內任一點 P 等角切 4 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的 -2次方和相等：



(3)過橢圓內任一點 P 等角切 5 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的 -1次方和、-3次方和相等：

過橢圓內任一點切5刀，兩人取到的線段長-1、-3次方和相等



#切5刀成立於-1,-3次方和

$\overline{PA}$ = 3.57982厘米　$\overline{PB}$ = 2.53352厘米
$\overline{PC}$ = 2.32194厘米　$\overline{PD}$ = 2.78948厘米
$\overline{PE}$ = 4.30430厘米　$\overline{PF}$ = 6.25100厘米
$\overline{PG}$ = 6.44958厘米　$\overline{PH}$ = 6.16269厘米
$\overline{PI}$ = 6.10293厘米　$\overline{PJ}$ = 5.38185厘米

$$(\overline{PA})^{-1}+(\overline{PC})^{-1}+(\overline{PE})^{-1}+(\overline{PG})^{-1}+(\overline{PI})^{-1}=1.26125$$
$$(\overline{PB})^{-1}+(\overline{PD})^{-1}+(\overline{PF})^{-1}+(\overline{PH})^{-1}+(\overline{PJ})^{-1}=1.26125$$

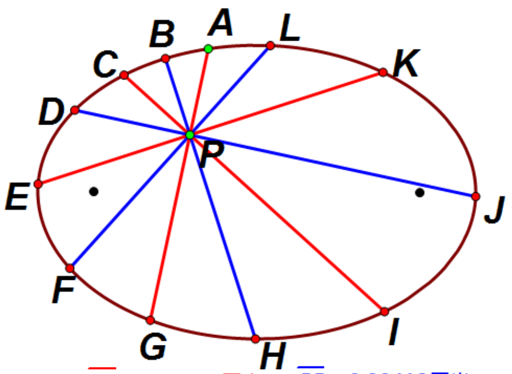
$$(\overline{PA})^{-2}+(\overline{PC})^{-2}+(\overline{PE})^{-2}+(\overline{PG})^{-2}+(\overline{PI})^{-2}=0.36838$$
$$(\overline{PB})^{-2}+(\overline{PD})^{-2}+(\overline{PF})^{-2}+(\overline{PH})^{-2}+(\overline{PJ})^{-2}=0.37076$$

$$(\overline{PA})^{-3}+(\overline{PC})^{-3}+(\overline{PE})^{-3}+(\overline{PG})^{-3}+(\overline{PI})^{-3}=0.12235$$
$$(\overline{PB})^{-3}+(\overline{PD})^{-3}+(\overline{PF})^{-3}+(\overline{PH})^{-3}+(\overline{PJ})^{-3}=0.12235$$

$$(\overline{PA})^{-4}+(\overline{PC})^{-4}+(\overline{PE})^{-4}+(\overline{PG})^{-4}+(\overline{PI})^{-4}=0.04470$$
$$(\overline{PB})^{-4}+(\overline{PD})^{-4}+(\overline{PF})^{-4}+(\overline{PH})^{-4}+(\overline{PJ})^{-4}=0.04333$$

$$(\overline{PA})^{-5}+(\overline{PC})^{-5}+(\overline{PE})^{-5}+(\overline{PG})^{-5}+(\overline{PI})^{-5}=0.01740$$
$$(\overline{PB})^{-5}+(\overline{PD})^{-5}+(\overline{PF})^{-5}+(\overline{PH})^{-5}+(\overline{PJ})^{-5}=0.01594$$

(4)過橢圓內任一點 P 等角切 6 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的 -2次方和、-4次方和相等：



$\overline{PA}$ = 2.22015厘米　$\overline{PB}$ = 2.02413厘米
$\overline{PC}$ = 2.24897厘米　$\overline{PD}$ = 2.98068厘米
$\overline{PE}$ = 4.03899厘米　$\overline{PF}$ = 4.53248厘米
$\overline{PG}$ = 4.77867厘米　$\overline{PH}$ = 5.40529厘米
$\overline{PI}$ = 6.64276厘米　$\overline{PJ}$ = 7.40081厘米
$\overline{PK}$ = 5.13780厘米　$\overline{PL}$ = 3.03683厘米

#切6刀成立於-2,-4次方和

過橢圓內任一點切6刀，兩人取到的線段長-2.-4次方和相等

$$(\overline{PA})^{-1}+(\overline{PC})^{-1}+(\overline{PE})^{-1}+(\overline{PG})^{-1}+(\overline{PI})^{-1}+(\overline{PK})^{-1}=1.69709$$
$$(\overline{PB})^{-1}+(\overline{PD})^{-1}+(\overline{PF})^{-1}+(\overline{PH})^{-1}+(\overline{PJ})^{-1}+(\overline{PL})^{-1}=1.69958$$

$$(\overline{PA})^{-2}+(\overline{PC})^{-2}+(\overline{PE})^{-2}+(\overline{PG})^{-2}+(\overline{PI})^{-2}+(\overline{PK})^{-2}=0.56622$$
$$(\overline{PB})^{-2}+(\overline{PD})^{-2}+(\overline{PF})^{-2}+(\overline{PH})^{-2}+(\overline{PJ})^{-2}+(\overline{PL})^{-2}=0.56622$$

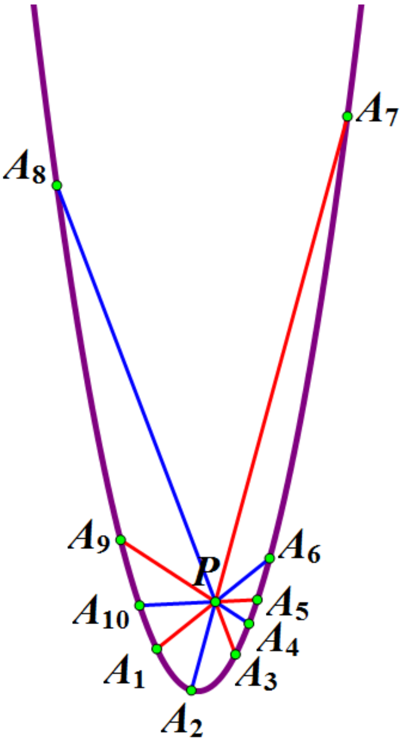
$$(\overline{PA})^{-3}+(\overline{PC})^{-3}+(\overline{PE})^{-3}+(\overline{PG})^{-3}+(\overline{PI})^{-3}+(\overline{PK})^{-3}=0.21442$$
$$(\overline{PB})^{-3}+(\overline{PD})^{-3}+(\overline{PF})^{-3}+(\overline{PH})^{-3}+(\overline{PJ})^{-3}+(\overline{PL})^{-3}=0.21359$$

$$(\overline{PA})^{-4}+(\overline{PC})^{-4}+(\overline{PE})^{-4}+(\overline{PG})^{-4}+(\overline{PI})^{-4}+(\overline{PK})^{-4}=0.08787$$
$$(\overline{PB})^{-4}+(\overline{PD})^{-4}+(\overline{PF})^{-4}+(\overline{PH})^{-4}+(\overline{PJ})^{-4}+(\overline{PL})^{-4}=0.08787$$

$$(\overline{PA})^{-5}+(\overline{PC})^{-5}+(\overline{PE})^{-5}+(\overline{PG})^{-5}+(\overline{PI})^{-5}+(\overline{PK})^{-5}=0.03761$$
$$(\overline{PB})^{-5}+(\overline{PD})^{-5}+(\overline{PF})^{-5}+(\overline{PH})^{-5}+(\overline{PJ})^{-5}+(\overline{PL})^{-5}=0.03834$$

$$(\overline{PA})^{-6}+(\overline{PC})^{-6}+(\overline{PE})^{-6}+(\overline{PG})^{-6}+(\overline{PI})^{-6}+(\overline{PK})^{-6}=0.01646$$
$$(\overline{PB})^{-6}+(\overline{PD})^{-6}+(\overline{PF})^{-6}+(\overline{PH})^{-6}+(\overline{PJ})^{-6}+(\overline{PL})^{-6}=0.01740$$

2. 過拋物線內任一點 P 等角切 5 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的 -1 次方和、 -3 次方和相等：



$PA_1 = 1.66596$ cm　　$PA_2 = 2.03401$ cm

$PA_3 = 1.24825$ cm　　$PA_4 = 0.88577$ cm

$PA_5 = 0.92850$ cm　　$PA_6 = 1.53913$ cm

$PA_7 = 11.15326$ cm　　$PA_8 = 9.87779$ cm

$PA_9 = 2.50936$ cm　　$PA_{10} = 1.68070$ cm

$f(x) = PA_1^x + PA_3^x + PA_5^x + PA_7^x + PA_9^x$

$g(x) = PA_2^x + PA_4^x + PA_6^x + PA_8^x + PA_{10}^x$

$f(1) - g(1) = 1.48793$

$f(2) - g(2) = 28.20156$

$f(-1) - g(-1) = 0.00000$

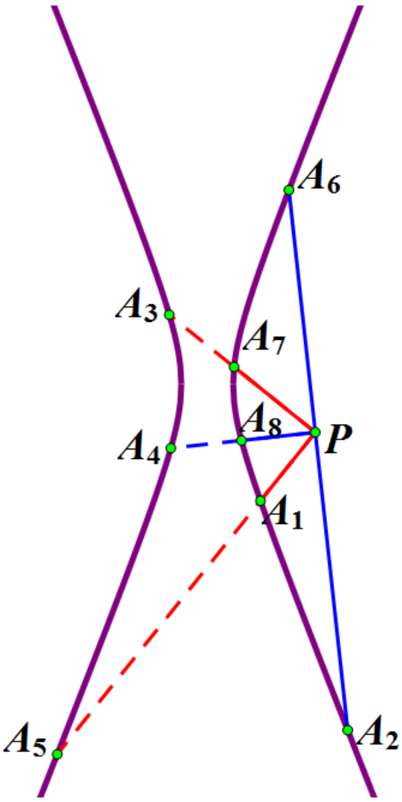
$f(-2) - g(-2) = 0.02623$

$f(-3) - g(-3) = 0.00000$

$f(-4) - g(-4) = -0.07407$

$f(-5) - g(-5) = -0.18603$

3. 過雙曲線內任一點 P 等角切 4 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的 -2 次方和相等：(A_3, A_4, A_5 在雙曲線另一支，其線段長要變號再取 k 次方和)



$PA_1 = 1.92880$ cm　　$PA_2 = 6.58528$ cm

$PA_3 = 4.12699$ cm　　$PA_4 = 3.20158$ cm

$PA_5 = 9.07717$ cm　　$PA_6 = 5.35834$ cm

$PA_7 = 2.29626$ cm　　$PA_8 = 1.63550$ cm

$f(x) = PA_1^x + (-PA_3)^x + (-PA_5)^x + PA_7^x$

$g(x) = PA_2^x + (-PA_4)^x + PA_6^x + PA_8^x$

$f(1) - g(1) = -19.35665$

$f(2) - g(2) = 23.41754$

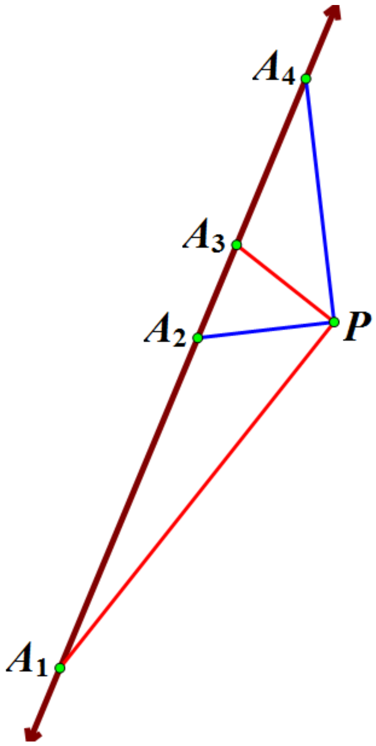
$f(-1) - g(-1) = -0.03609$

$f(-2) - g(-2) = 0.00000$

$f(-3) - g(-3) = -0.00173$

$f(-4) - g(-4) = -0.03921$

4. 過一直線外一點 P 等角切 4 刀，P 到 $A_i\,(i=1,2,\cdots,4)$ 的線段由兩人依下到上的次序取，則兩人取出的線段長的 -2 次方和相等：



$PA_1 = 9.67135$ cm　$PA_2 = 3.00780$ cm

$PA_3 = 2.72640$ cm　$PA_4 = 5.36937$ cm

$f(x) = PA_1^{\,x} + PA_3^{\,x}$

$g(x) = PA_2^{\,x} + PA_4^{\,x}$

$f(1) - g(1) = 4.02058$

$f(2) - g(2) = 63.09120$

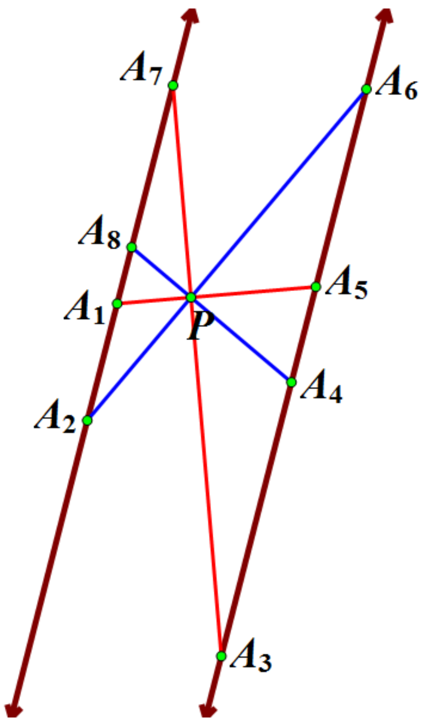
$f(-1) - g(-1) = -0.04853$

$f(-2) - g(-2) = 0.00000$

$f(-3) - g(-3) = 0.00724$

$f(-4) - g(-4) = 0.00479$

5. 過兩平行線外一點 P 等角切 4 刀，P 到 $A_i\,(i=1,2,\cdots,8)$ 的線段由兩人從 A_1 開始依逆時針次序取，則兩人取出的線段長的 -2 次方和相等：



$PA_1 = 1.64075$ cm　$PA_2 = 3.56176$ cm

$PA_3 = 7.96917$ cm　$PA_4 = 2.91279$ cm

$PA_5 = 2.77751$ cm　$PA_6 = 6.02944$ cm

$PA_7 = 4.70761$ cm　$PA_8 = 1.72067$ cm

$f(x) = PA_1^{\,x} + PA_3^{\,x} + PA_5^{\,x} + PA_7^{\,x}$

$g(x) = PA_2^{\,x} + PA_4^{\,x} + PA_6^{\,x} + PA_8^{\,x}$

$f(1) - g(1) = 2.87038$

$f(2) - g(2) = 35.59048$

$f(-1) - g(-1) = -0.06368$

$f(-2) - g(-2) = 0.00000$

$f(-3) - g(-3) = 0.02117$

$f(-4) - g(-4) = 0.02213$

6. 過兩相交直線外一點 P 等角切 5 刀，P 到 $A_i\,(i=1,2,\cdots,10)$ 的線段由兩人從 A_1 開始依逆時針次序取，則兩人取出的線段長的 -1 次方和、 -3 次方和相等：

(兩相交直線視為交於原點的兩斜角坐標軸，將平面分成四個區域，包含 P 點的區域視為第一象限，依逆時針序分別將另外三個區域視為第二、三、四象限，當切割線與坐標軸的交點在正向時，線段長符號取正，再 k 次方相加；當切割線與坐標軸的交點在負向時，線段長符號取負，再 k 次方相加)