第十四屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA14-496

作品名稱：鋪天蓋地—論虧格位置與長條間的關係

姓名：石登輝

關鍵字：虧格、覆蓋、鋪地磚

摘要

本科展起源於 2014 年亞太數奧初試的題目，是關於在一個給定的方陣（正方形）中填入長條，求最後所剩的空格（稱之為虧格），主要在討論平面上任一方陣填入長條是否會出現虧格，和其虧格位置的問題。當中我們先從一個想法切入解出原題目，但發現還有美中不足之處（預測出來的虧格未必實際可行），進而去探討方陣邊長和長條之間的關係。接著透過寫程式找到一個極為重要的猜想，最後在原本的想法上有了突破，因而順利解釋所謂美中不足之處。之後順便將長條延伸到小長方形，並給出一般化的公式。

鋪天蓋地—論虧格位置與長條的關係

壹、研究動機

一、類似於平面座標系將西洋棋盤 8*8 的方格標記，從左下方格(1,1)直到右上為(8,8)，將 21 支 1*3 的長方型放置在棋盤上。(長方型的方格與棋盤的方格大小一致，放置時可以水平或垂直，不重疊也不超出，而且彼此方格要對齊。)如果西洋棋盤方格(a,b)是成功放置所留下的唯一空格，稱之為虧格。試問下列數字之和

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots = \underline{\text{①②③}}\ 。$$

其中(a_i, b_i)是所有可能的虧格；如果沒有任何虧格存在，請填答“000”。(來源：2014 亞太數學奧林匹亞初試試題)

當初在考數奧初試就碰到這神奇的一題，當下沒有想法只好直接去畫圖形，考試完後大家也都爭相問這題的答案，交談後才知道原來他們的做法都和我一樣，硬暴。碰到這種題目時如果數據改成較大的數字當然就無法一個一個去嘗試，因此我們試圖想找出這個問題背後暗藏的玄機。

貳、研究目的

一、在$M*M$方陣中找出對$1*N$長條或$N'*N$長方形的實際虧格

參、研究設備及器材

方格紙、筆、電腦（C++、GGB）

肆、研究過程與方法

一、在$M*M$方陣中找出對$1*N$長條或$N'*N$長方形的實際虧格

（一）解出原題目

偶然的情況下，在另一本書上看到某個題目的解法後，對上面那題的求解因此得到了莫大的啟發。

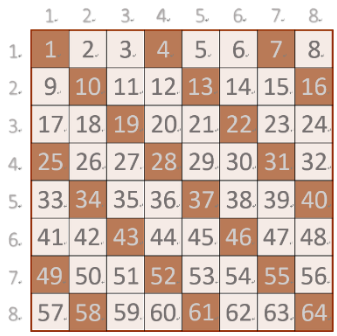
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

現在教室有 25 個座位，使每個人和其上、下、左、右中選擇一個方向，且僅能換一次座位，試問是否所有人都能換到座位呢？

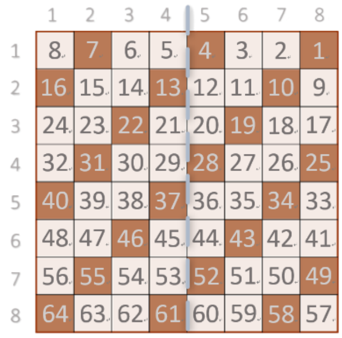
現在，我們給這 5*5 的方格號碼 1~25。奇數塗黑，偶數留白。此時共有黑格子 13 格及白格子 12 格，且每個黑格子必須和一個白格子交換。交換到最後，總會有一個黑格子找不到白格子可換，與原題目敘述相矛盾，所以無法讓每個人都交換到位子。

其中：每對彼此互換的人因為彼此相鄰且不能再與其他人互換，而等價於各個長度為 2 且兩兩不重疊的長條。整個命題即等價於在 5*5 的方陣中，是否能被 1*2 的長條所填滿。顯然地，無論怎樣排列，總會留下一格而無法繼續填滿，而那格總是被塗黑的格子，其編號恰為 $2k+1$。

利用這個想法，我們嘗試解決原來 8*8 方格的題目。



圖(1-1)

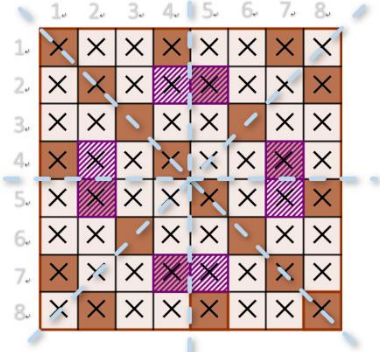


圖(1-2)

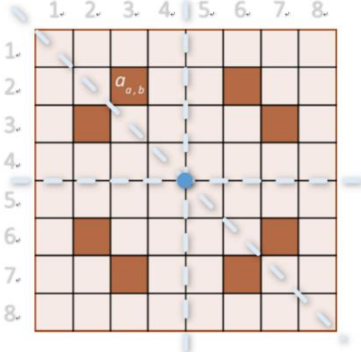
由左上向右下給定編號 1~64，並且將$3k+1$的部分塗黑（如圖(1-1)）。我們確實發現無論怎樣放，每個 1*3 的長條恰碰到 1 個塗黑的格子，又因為塗黑的格子有 22 個，而填入的長條只有 21 個，故最後剩下的格子恆存在於黑格子，而不會出現在其他格子。

實際將此編號方式沿縱對稱軸翻轉後（如圖(1-2)），並不難發現到每個 1*3 的長條亦只碰到 1 個塗黑的格子，塗黑的部分照樣比插入的長條還多出 1 個，因此實際虧格應當存在於此圖形塗黑的部分。同理，將此編號方式沿其他對稱軸翻轉後的圖形亦有此現象。此時，所謂實際虧格即滿足：無論原先的編號方式（見圖(1-1)）如何翻轉，它都站在塗黑的格子上。（如圖(1-3)）

比較圖(1-1)與圖(1-2)並不難發現：沿著對稱軸做翻轉時，各格所得之新編號即為其對稱點的原先編號。如：(5,3)的編號原先為 35，對縱對稱軸作對稱時，其編號為 38，恰為(5,3)之縱軸對稱點(5,6)的原先編號。因此，實際虧格需要滿足它對於各對稱軸之 8 個對應點皆為黑格子（如圖(1-4)）。

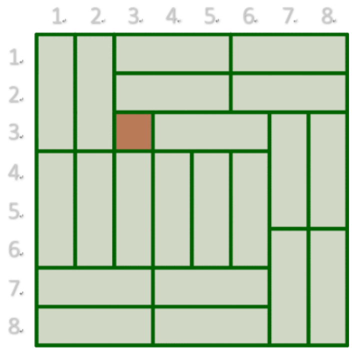


圖(1-3)



圖(1-4)

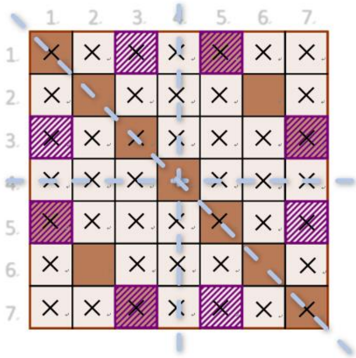
因此，我們將各個格子由四個對稱軸不斷作對稱後後所得到的 8 個格子(如圖(1-4))，只要有其中一格沒有塗黑即剔除原來格子，最後剩下的點即可能為實際虧格（如圖(1-3)）。我們之後發現到只有(3,3), (3,6), (6,3), (6,6) 這四個點最終還沒被剔除掉，之後以畫圖驗證那些虧格，發現可以順利用 1*3 的長條填滿其它格子。



圖(1-5)

至於剛剛方法的依據，其實並不難說明出來。觀察 8*8 的方陣中，編號為 $3k+1, 3k+2, 3k+3$ 的格子分別有 22, 21, 21 格。而無論 1*3 的長條擺在甚麼方向，對於 $3k+1, 3k+2, 3k+3$ 的格子，它將各佔 1 格。因此，當我們以該長條填到只剩最後一格時，那格勢必為 $3k+1$ 的形式。

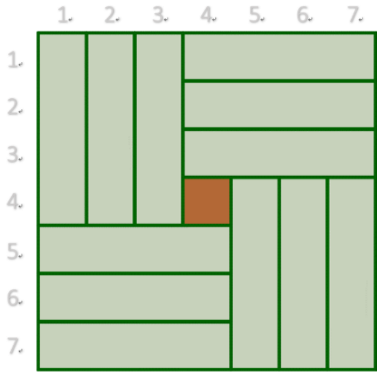
不過，在把這方法推廣到 7*7 方陣中，插入 1*4 的長條時，情況卻開始出現變化。



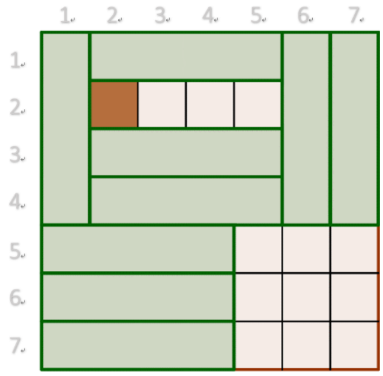
圖(1-6)

首先，標記出$4k+1$的格子並將其塗黑。之後就遵循上面的作法尋找從哪個角度看都是$4k+1$的格子，得到了$(2,2),(2,6),\ (6,2),(6,6),(4,4)$這 5 個虧格（嚴格來說，$(2,2),(2,6),(6,2),(6,6)$相互等價，因為他們互為原方陣對稱軸之對稱點）。

畫圖檢驗時，卻發現只有$(4,4)$可以當虧格，其他那 4 點卻沒辦法這麼做，代表這方法確實存在漏洞。



圖(1-7)



圖(1-8)

最後發現，我們找尋虧格的依據只是從一個實際虧格必然出現的結果下去探討，而忽略長條的排法過程，也就是此方法未嚴格限制填入的是$1*N$的長條，有可能是 L 字形、T 字形，甚至不連續。不過此方法可以大量剔除掉不適用的候選者，減少最終需畫圖驗證的虧格數量。

從前面所述，我們雖然沒辦法找到一個能將虧格與非虧格完全分隔開來的性質，卻得到了作為虧格的必要條件：

1　由(1,1)開始編號時，該格編號為$kN+1$

2　該格對於原方陣對稱軸之 4 個對稱點，及對方陣中心點旋轉$90^{\circ},180^{\circ},270^{\circ}$後所得到的另外 3 個，其編號仍為$kN+1$

前面方法其實就是照這兩個性質來做篩選的。對於符合上述條件之點，我們將稱它們為「理論虧格」。

（二）由代數化的方式求出理論虧格

針對$M*M$方陣填入$1*N$長條的命題而言，最先想到的切入點大概是確定以下同餘式是否成立，來確定填完長條後，該方陣能剩下單一虧格。

$$M^2 \equiv 1 \pmod N$$

學過數論的人都知道這個式子就是二次剩餘，所以給定任意一個正整數N都有辦法求出滿足方程式的所有M。但是我們想要找出M和N的關係式，所以先從N為質數的情況討論。

1. N為質數時

$\because N \mid (M-1)(M+1)$ 且$N \in$質數

$\therefore N \mid M-1$或$N \mid M+1$

故 $M \equiv \pm 1 \pmod{N}$

2. N為奇合數時

令 $N = p_1^{b_1} * p_2^{b_2} * p_3^{b_3} * \cdots$ (其中$b_1, b_2, \cdots \in \mathbb{N}$，且 $3 \le p_1 < p_2 < \cdots$)

$$\Rightarrow \begin{cases} M^2 \equiv 1 \pmod{p_1^{b_1}} \\ M^2 \equiv 1 \pmod{p_2^{b_2}} \\ M^2 \equiv 1 \pmod{p_3^{b_3}} \\ \cdots \end{cases}$$

做到這裡，我們得以將這種情況轉化為多個質數次方命題，使得整體過程更靠近我們所熟悉的質數情況。

現在觀察一下 $M^2 \equiv 1 \pmod{p^b}$，($p \in$奇質數)

$\because p^b \mid (M-1)(M+1)$ 且$(M+1)-(M-1)=2$

$\therefore (M-1, M+1) \mid 2$，即他們的公因數不可能為 $p(\because p>2)$

故 $p^b \mid M-1$ 或 $p^b \mid M+1 \Rightarrow M \equiv \pm 1 \pmod{p^b}$，情況如同 $N = p$ 時。

綜合上述情況，可得

$$\begin{cases} M \equiv \pm 1 \pmod{p_1^{b_1}} \\ M \equiv \pm 1 \pmod{p_2^{b_2}} \\ M \equiv \pm 1 \pmod{p_3^{b_3}} \\ \cdots \qquad \cdots \end{cases}$$

3. N為偶合數時

令 $N = 2^a * p_1^{b_1} * p_2^{b_2} * p_3^{b_3} * \cdots$ (其中 $a, b_1, b_2, \cdots \in \mathbb{N}$，且 $3 \le p_1 < p_2 < \cdots$)

$$\Rightarrow \begin{cases} M^2 \equiv 1 \pmod{2^a} \\ M^2 \equiv 1 \pmod{p_1^{b_1}} \\ M^2 \equiv 1 \pmod{p_2^{b_2}} \\ \cdots \end{cases}$$

其中 $M^2 \equiv 1 \pmod{p^b}$，($p \in$奇質數) 的情況可解為$\mathrm{M} \equiv \pm 1 \pmod{p^b}$

此時探討 $M^2 \equiv 1 \pmod{2^a}$ 的情況

$a=1$ 或 2 時，

顯然的，當 $M^2 \equiv 1 \pmod{2^a} \Rightarrow M \equiv \pm 1 \pmod{2^a}$

$a \geq 3$ 時，

我們發現到後面有些例外：

$$a=3\text{時} \Rightarrow M \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod{2^3}$$
$$a=4\text{時} \Rightarrow M \equiv \pm 1, \pm 7 \pmod{2^4}$$
$$a=5\text{時} \Rightarrow M \equiv \pm 1, \pm 15 \pmod{2^5}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

從這些例子，似乎能得到一些結論：

$$a \geq 3\text{時，}M \equiv \pm 1, 2^{a-1} \pm 1 \pmod{2^a}$$

而證明如下：

$\because 2^a \mid (M-1)(M+1) \quad \Rightarrow (M-1, M+1) = 2$

$\Rightarrow 2^{a-2} \mid (\frac{M-1}{2})(\frac{M+1}{2})$

$\because (\frac{M-1}{2}, \frac{M+1}{2}) = 1 \quad \Rightarrow 2^{a-2} \mid \frac{M-1}{2}$ 或 $2^{a-2} \mid \frac{M+1}{2}$

故 $M \equiv \pm 1, 2^{a-1} \pm 1 \pmod{2^a}$

將上述兩種情況結合起來可整理出下列形式：

$$\begin{cases} \begin{cases} M \equiv \pm 1 & \pmod{2^a} \quad (\text{a} = 1, 2\text{ 時}) \\ M \equiv \pm 1, 2^{a-1} \pm 1 & \pmod{2^a} \quad (\text{a} \geq 3\text{ 時}) \end{cases} \\ M \equiv \pm 1 & \pmod{{p_1}^{b_1}} \\ M \equiv \pm 1 & \pmod{{p_2}^{b_2}} \\ M \equiv \pm 1 & \pmod{{p_3}^{b_3}} \\ \cdots & \cdots \end{cases}$$

由中國剩餘定理即可推得

$a=1, 2$時，

$$M \equiv (\tfrac{N}{2^a})k(\pm 1) + (\tfrac{N}{{p_1}^{b_1}})k_1(\pm 1) + (\tfrac{N}{{p_2}^{b_2}})k_2(\pm 1) + \cdots \pmod{N}$$

$a \geq 3$時，

$$M \equiv (\tfrac{N}{2^a})k(\pm 1) + (\tfrac{N}{{p_1}^{b_1}})k_1(\pm 1) + (\tfrac{N}{{p_2}^{b_2}})k_2(\pm 1) + \cdots \pmod{N}$$

或$(\tfrac{N}{2^a})k(2^{a-1} \pm 1) + (\tfrac{N}{{p_1}^{b_1}})k_1(\pm 1) + (\tfrac{N}{{p_2}^{b_2}})k_2(\pm 1) + \cdots \pmod{N}$

其中 $k = \frac{N}{2^a}$ 對於模 2^a 的乘法逆元，$k_i = \frac{N}{{p_i}^{b_i}}$ 對於模 ${p_i}^{b_i}$ 的乘法逆元 $(i = 1, 2, 3, \cdots)$

舉 N=24 為例：

$\because 24 = 2^3 * 3$ 且 $M^2 \equiv 1 \pmod{24}$

$$\Rightarrow \begin{cases} M^2 \equiv 1 & \pmod{2^3} \\ M^2 \equiv 1 & \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \equiv \pm 1, 2^2 \pm 1 & \pmod{2^3} \\ M \equiv \pm 1 & \pmod{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M \equiv (\tfrac{24}{2^3}) * 3 * (\pm 1) + (\tfrac{24}{3}) * 2 * (\pm 1) \pmod{24}$$

$$\text{或}(\tfrac{24}{2^3})*3*(2^2 \pm 1)+(\tfrac{24}{3}) * 2 * (\pm 1) \pmod{24}$$

$$\Rightarrow M \equiv \pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 11 \pmod{24}$$

實際代入檢驗時，證實結果無誤。

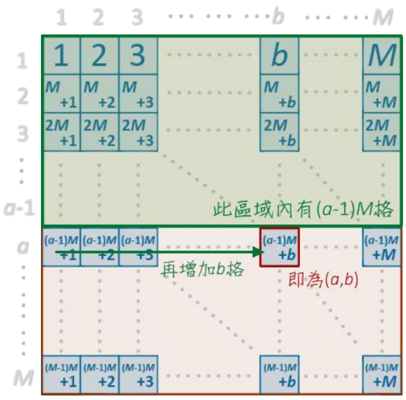
不過因為 N 為合數時，M 模 N 的可能情況實在太多（以前段例子來看，出現的可能性即高達 8 種），難以逐一討論，因此我們將把焦點集中於 $M = kN \pm 1$ 的情況。

在找出理論虧格之前，我們先對格子上的編號做個定義：

$M * M$ 方陣中，當我們從左上向右下給定編號 $1 \sim M^2$ 時（如圖(2-1)），則某個選定格子 (a,b) 之編號將為

$$M(a-1)+b$$

而這對於尋找理論虧格過程的代數化有很大的幫助。



圖(2-1)

在給定列數 a 的情況下，(a,b) 及其對稱點 $(a,(M+1)-b)$ 編號之和為一定值。由先前對格子編號定義可知，兩格子編號和

$$((a-1)M+b)+((a-1)M+(M+1)-b)=(2a-1)M+1$$

顯然的，上式中的 b 已經被消掉了，只剩下一個變數 a，因此兩格子編號和便取決於它們在第幾列。

在第一節末尾，我們已經知道理論虧格 (a,b) 及其對稱點 $(a,(M+1)-b)$ 皆模 N 同餘 1，故兩格子編號和 $(2a-1)M+1$ 必模 N 同餘 2。因為兩格子編號和只取決於所在列數 a，故我

們只需要先求出滿足這項同餘式的列數 a，再找出該列中形式為 $kN+1$ 的格子，即為「理論虧格」。

接下來我們的研究將分為兩步驟進行，並將焦點集中於 $M=kN\pm1$ 的情況：

- 先利用之前所推導出來的分析法求出「理論虧格」
- 再從推得的理論虧格當中，實際畫圖驗證其是否可行

以下就是我們的推導過程：

1. $M\equiv -1 \pmod N$ 時

令選定的理論虧格為 (a,b) $\Rightarrow$ 其編號 $(a-1)M+b$ 將模 N 同餘 1

$\because$ 該格子及其對稱點之編號和 $(2a-1)M+1\equiv 2 \pmod N$

且 $M=kN-1(k\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow (2a-1)(kN-1)+1 \;=kN(2a-1)-2a+2 \;\equiv -2a+2 \pmod N$

$\Rightarrow 2a\equiv 0 \pmod N$

此時，當 N 為奇數時 $a=N,2N,\cdots,(k-1)N$，即 $a\equiv 0 \pmod N$

當 N 為偶數時 $a=\frac{1}{2}N,\frac{2}{2}N,\cdots,\frac{2k-1}{2}N$，即 $a\equiv 0,\frac{N}{2} \pmod N$

$\because$ 該格子編號 $M(a-1)+b\equiv 1 \pmod N$

$\Rightarrow b\equiv -M(a-1)+1\equiv (a-\cancel{1})+\cancel{1} \pmod N$ $\Rightarrow b\equiv a \pmod N$

此時，當 N 為奇數時 $b=N,2N,\cdots,(k-1)N$

當 N 為偶數時 $b=\frac{1}{2}N,\frac{3}{2}N,\cdots,\frac{2k-1}{2}N$ （當 $\frac{a}{N}\notin\mathbb{N}$）

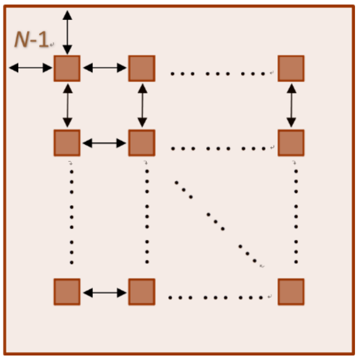
$b=N,2N,\cdots,(k-1)N$ （當 $\frac{a}{N}\in\mathbb{N}$）

之後做個整理，可以發現：

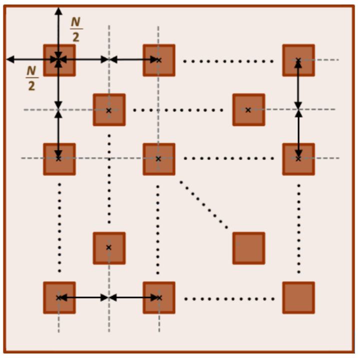
當 N 為奇數時，理論虧格 $(a,b)=(xN,\,yN)$ （$x,y=1,2,\cdots,k-1$）（如圖(2-2)）

當 N 為偶數時，理論虧格 $(a,b)=(xN,\,yN)$ （$x,y=1,2,\cdots,k-1$）（如圖(2-3)）

或 $(xN+\frac{N}{2},\,yN+\frac{N}{2})$ （$x,y=0,1,\cdots,k-1$）（如圖(2-3)）



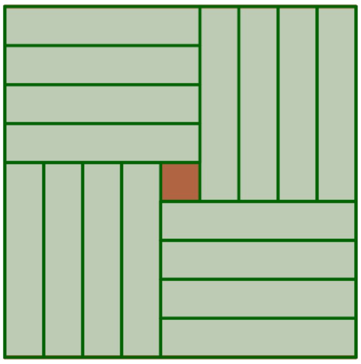
圖(2-2)



圖(2-3)

然而，僅有理論虧格中座標為 (xN,yN) 的格子，我們可以確定它是可行的虧格：

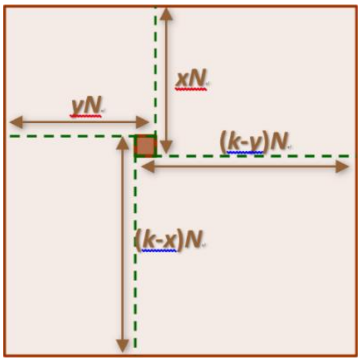
先來看看 $M=2N-1$ 的情況：$N=5$，$M=9$



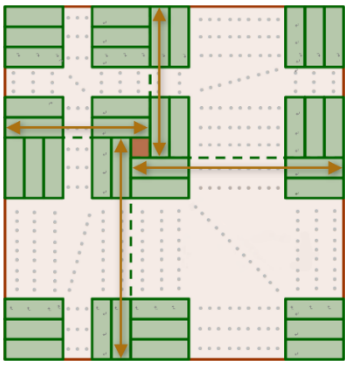
圖(2-4)

容易的，我們可以把 k 的數值放大，而推出的圖形依然有如此性質。

現在任取一個理論虧格 M(xN，yN)，且 $1\le x\le k-1$、$1\le y\le k-1$



圖(2-5)



圖(2-6)

由上圖小正方形外的四個長方形區域恰有一邊為 N 的倍數，因此能照上圖右的方式將虧格外的區域填滿。亦即形式為 (xN, yN) 的虧格即為實際虧格，而這些虧格正是 $N=$ 奇數時的所有理論虧格。至於 $(xN+\frac{N}{2}, yN+\frac{N}{2})$ 的部分，則無法填滿該格外的其他區域。

2. $M\equiv 1 \pmod N$ 時

令選定的理論虧格為 (a,b) $\Rightarrow$ 其編號 $(a-1)M+b\equiv 1 \pmod N$

$\because$ 該格子及其對稱點之編號和 $(2a-1)M+1\equiv 2 \pmod N$

且 $M=kN+1 (k\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow (2a-1)(kN+1)+1 = kN(2a-1)+2a \equiv 2a \quad (mod\ N)$

$\Rightarrow 2a\equiv 2 \pmod N$

此時，當 N 為奇數時 $a=1, N+1, \cdots, kN+1$，即 $a\equiv 1 \pmod N$

當 N 為偶數時 $a=1, \frac{1}{2}N+1, \cdots, \frac{2k}{2}N+1$，即 $a\equiv 1, \frac{N}{2}+1 \pmod N$

$\because$ 該格子編號 $M(a-1)+b\equiv 1 \pmod N$

$$\Rightarrow b \equiv -M(a-1)+1 \equiv -(a-1)+1 \equiv -a+2 \pmod N$$

此時，當 N 為奇數時　$b = 1, N+1, \cdots, kN+1$

當 N 為偶數時　$b = \frac{1}{2}N+1, \frac{3}{2}N+1, \cdots, \frac{2k-1}{2}N+1$　（當 $\frac{a}{N} \notin \mathbb{N}$）

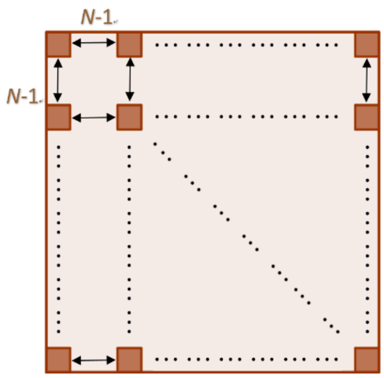
$b = 1, N+1, \cdots, kN+1$　（當 $\frac{a}{N} \in \mathbb{N}$）

之後做個整理，可以發現：

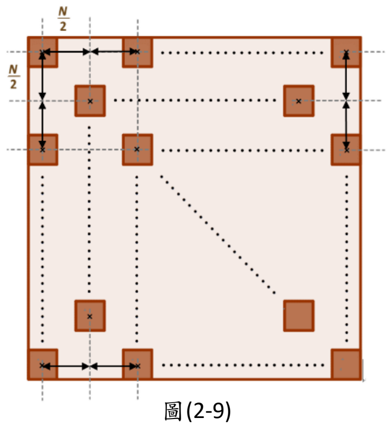
當 N 為奇數時，理論虧格 $(a,b) = (xN+1,\ yN+1)$（$x, y = 1, 2, \cdots, k$）（如圖(2-8)）

當 N 為偶數時，理論虧格 $(a,b) = (xN+1,\ yN+1)$（$x, y = 1, 2, \cdots, k$）（如圖(2-9)）

或 $(xN+\frac{N}{2}+1,\ yN+\frac{N}{2}+1)$（$x, y = 0, 1, \cdots, k-1$）（圖(2-9)）



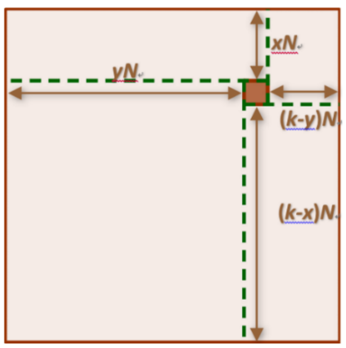
圖(2-8)



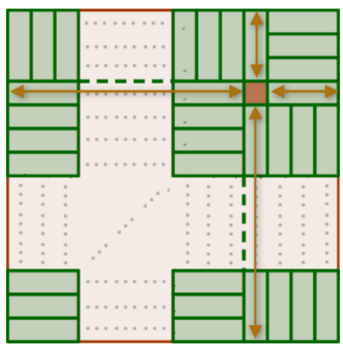
圖(2-9)

在這些「理論虧格」中，我們可以確定 $(xN+1,\ yN+1)$ 為可行虧格：

任取一個理論虧格 $M(xN+1, yN+1)$，且 $x \le k$、$y \le k$



圖(2-10)



圖(2-11)

這四個被切割出來的長方形區域各有一邊為 N 的倍數（如圖(2-10)），故 $1*N$ 長條可以用圖(2-11)的方式填滿虧格外的區域，亦即形如 $(xN+1,\ yN+1)$ 的理論虧格即為實際虧格。

而這些 $(xN+1,\ yN+1)$ 的虧格即為 $N=$ 奇數時的理論虧格。

綜合以上兩結果，證明了 $M = kN+1$ 且 N 為奇數時理論虧格即為實際虧格。

到了這裡，或許會觀察到理論虧格與實際虧格之間仍有一些差距。如 N 為偶數時，形如 $(xN+\frac{N}{2}, yN+\frac{N}{2})$ 的理論虧格找不到使 $1*N$ 排滿方陣的具體排法。並且在 N 為合數時，

M 可能會對應到多種情況，而我們只討論到 $M = kN \pm 1$ 的情況。藉著這個理由，我們決定寫一個程式，借用電腦的力量來求出 $M*M$ 方陣對 $1*N$ 長條的實際虧格。

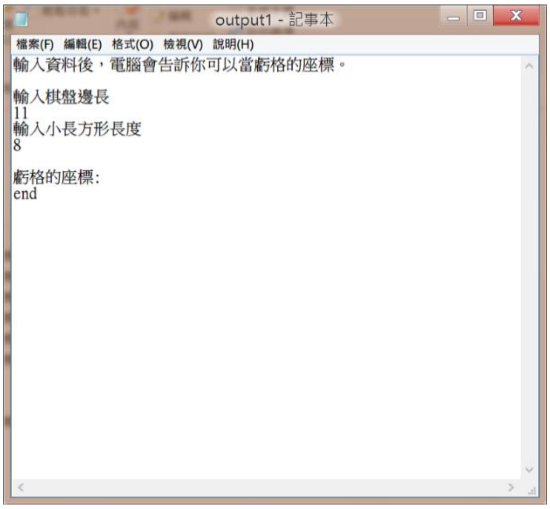
（三） 利用程式找虧格

接下來我們要試著討論 $M^2 \equiv 1 \pmod N$ 但 $M \neq kN \pm 1$ 的情況。

在先前的討論已經知道理論虧格和實際虧格之間還有一些差距，所以我們寫了一個程式來觀察 $M^2 \equiv 1 \pmod N$ 但 $M \neq kN \pm 1$ 的情況。

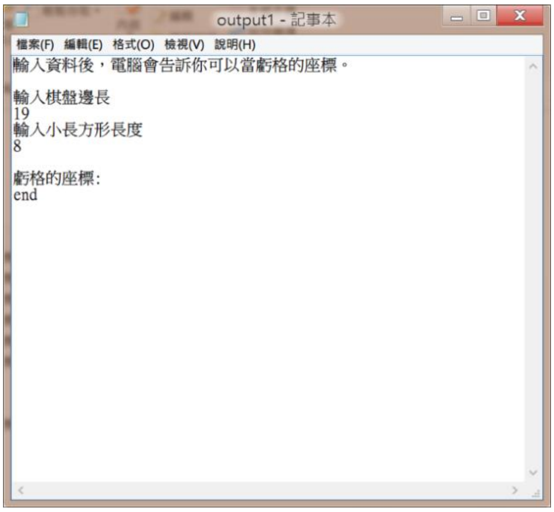
首先來看看 $N = 8$ 且 $M = kN + 3$ 的情況：

$k = 1$ 代入，$(M, N) = (11, 8)$



結果竟然是 0 個!!!

$k = 2$ 代入，$(M, N) = (19, 8)$



竟然還是 0 個!!!

多看幾個例子後(因為顯示不便，故只取幾個代表性的)，發現 $M \neq kN + 1$ 的圖形中理論虧格沒有一個是實際虧格，這是一個震撼性的發現，接著我們做了一個大膽的猜測：

只有當 $M = kN \pm 1 (k \in \mathbb{N})$，$M \neq N - 1$ 時，找出的理論虧格才有可能為實際虧格。

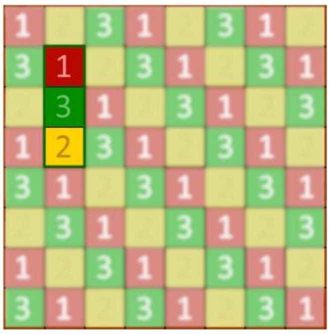
（四） 找出實際虧格位置

走到這個步驟，我們已經窮盡了當初的所有想法，不過所求出的理論虧格和實際虧格之間仍存在一些差距。當我們嘗試找出實際虧格的其他性質時，卻毫無進展，於是我們決定重新審視當初的想法，希望能突破盲點。

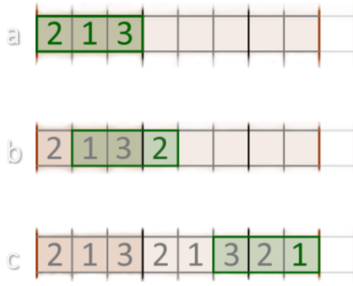
我們原先想法是根據一個基礎的條件而來：

無論被插入的長條如何擺放，當中各格將一一對應至各類數字

我們稱它為有效排序法。試想在一個 $M*M$ 方陣中插入多個 $1*N$ 長條，使得最後剩下一個虧格。我們暫時把數字換成顏色（如圖(4-1)），現在用 N 種顏色填滿此方陣，根據有效排序法的定義，無論 $1*N$ 長條任意擺放，其恰會碰到 N 種不同顏色。對於一個實際虧格，該虧格外的區域勢必被 $1*N$ 長條填滿，即該區域中各種顏色的個數相同，因此虧格所塗上的顏色就不會太難發現。故對於任何有效排序法，虧格恆存在於該排序法中的虧格顏色。疊合所有有效排序法的虧格可能位置，就能知道實際虧格分布於何處。



圖(4-1)



圖(4-2)

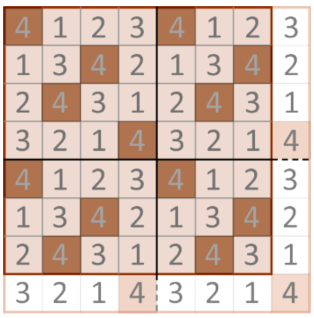
現在，我們打算利用前面的概念，找出所有可用的排序法。為了方便說明，我們先針對方陣中的某一列作個探討。（如圖(4-2)）

對於該列前 N 個數字，基於有效排序法的原則，那些格子必須一一對應到 $1\sim N$ 。（圖(4-2a)）接下來，當我們取該列第 $2\sim N+1$ 個數字時，因為第 $N+1$ 個數字不能和第 $2\sim N$ 個數字重複，因此它的值即相等於第 1 個數字。（圖(4-2b)）同理，當我們探討到第 $3\sim N+2$ 個數字時，就會發現第 $N+2$ 個數字相對應於第 2 個數字。以此類推，我們發現到第 $kN+r$ $(0<r\le N)$ 個數字將對應於第 r 個數字，因此整個數列即取決於前 N 個數字。稍微做個整理我們將得到一個概念：

整個數列取決於前 N 個數字，且前 N 個數字不能重複。

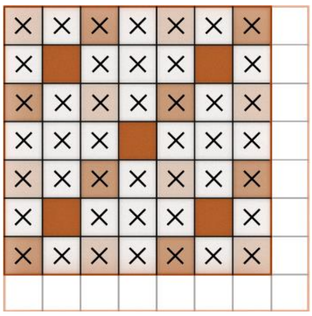
當我們將這個概念繼續推廣到 $M*M$ 方陣的每一列時，就會發現到整個方陣將取決於前 N 行的數字，其中各列不能出現重複的數字。再將這個概念延伸至方陣中的各行時，就會發現到前 N 行的數字取決於左上角 $N*N$ 正方形區域，其中各行各列不能重複。因此，整個方陣即取決於左上角 $N*N$ 的區域，且區域中各行各列皆不能重複。因為數字填法很像數獨，我們於是稱這個排序法為：「數獨排序法」。

我們以當初碰到問題的 $N=1*4$ 來作為例子，作法如下：



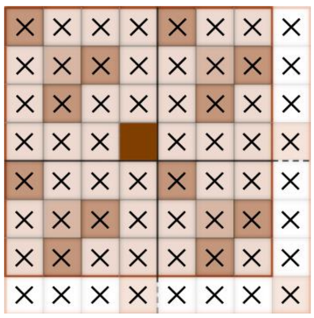
圖(4-3)

+



圖(4-4)

=



圖(4-5)

在圖(4-3)中，於$7*7$的方陣中，取左上方的$4*4$區域，並於其中填入 1~4 這幾種數字，使得各行、各列中不出現重複的數字(方式即類似解出$4*4$的數獨)。之後再將此小方陣不斷向右及向下延伸，直到原方陣中的每個格子都有數字為止。因此在這個方陣中，可以發現座標為(k_1N+r_1, k_2N+r_2) $(1 \le r_1, r_2 \le N)$的格子，將對應於座標為(r_1, r_2)的格子。

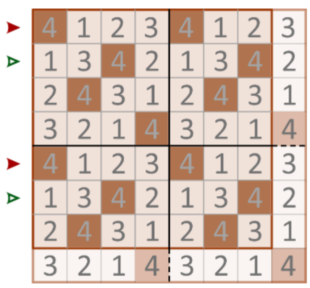
由於 4 的倍數中，最接近 7 的數字為 8，故我們將方陣$7*7$向右下延伸至$8*8$的新方陣，以方便檢視哪個數字比其他數字還要多出 1 個。顯然的，因為$4*4$方陣中的各行各列中 1~4 各出現 1 次，故由超出$7*7$方陣的部分來看，該區塊中有 1 個數字比其他數字還少一個，而它就在於新方陣的右下角(8,8)。又因為$8*8$方陣中，每個數字都一樣多，故扣除掉超出來的部分，$7*7$方陣中所求得比其他數字還多的，就是新方陣中右下角(8,8)的部分。因此，右下角的數字即為我們所要的「虧格數字」。

此時再觀察一下圖(4-3)，並不難發現出現在右下角的 4 比其他數字多出 1 個，又因為無論$1*4$長條怎麼擺，1~4 將各出現 1 次。故最後所留下的虧格其值必為 4，而我們在標有 4 的格子塗黑。此時，與先前所得到的理論虧格(圖(1-6), 圖(4-4))圖形相疊合後，發現它們共同的黑格子即為(4,4)，而實際虧格就正好在這個位置。亦即，這方法可完全剔除掉非虧格的部分，只會留下最終的實際虧格，就這樣巧妙解決了先前的疑惑。

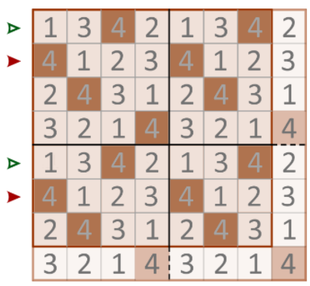
接下來，只要找出哪一類數字正好比其他種類多出 1 個，那麼標上那一類數字的格子就有機會成為虧格，並加以塗黑。因此，實際虧格必須在任何數獨排序法當中站在塗黑的格子上。而上面那兩張圖所用的排序法都符合上述的基本性質，故它們所求出的理論虧格都包含著實際虧格，只需要把那兩張圖形疊合起來，就有辦法找出實際虧格。

然而，我們並無法確定每次尋找虧格的過程都能如此幸運，只疊了兩張圖就找到實際虧格，理論上我們需要將所有數獨排序法疊圖分析，才能確定實際虧格的位置。不過如果真要這樣做，就要花很久時間才能完成。因此，我們一直在尋找更快、更系統性的作法來找出實際虧格，最後我們成功了！找到了叫作「對調法」的神招。

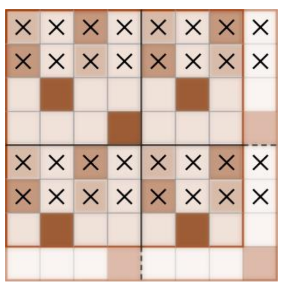
「對調法」大概是將兩行或兩列對調後，因為不影響其數獨排序法的性質（即仍為數獨排序法），而能和原先排序法相互比對，進而有效消除非虧格的部分。以下便是實證：



圖(4-6)



圖(4-7)

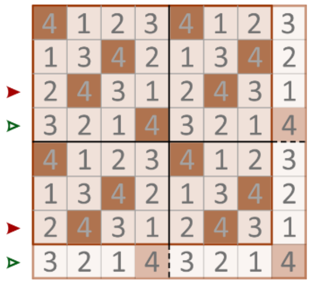


圖(4-8)

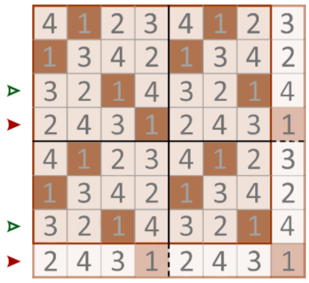
在圖(4-6)中，我們先將圖形中的第$4k+1$列（紅箭頭）及第$4k+2$列（綠箭頭）對調後可得到圖(4-7)的排序法，仔細看就可以發現圖(4-7)仍為一種數獨排序法。我們可以發現這兩張圖形被對調部分（標上箭號的部分）的黑格子並沒有交集，因為在一個數獨排序法當中，

那兩列（第$4k+1, 4k+2$列）的同一行數字不可能相等，更不可能同時被塗黑。因此疊圖比對後，可以發現那兩列並不存在虧格。(如圖(4-8))

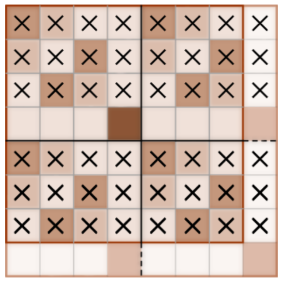
同理，我們可以利用這個方法證明第$4k+1, 4k+2, 4k+3$列並不存在虧格。不過，當我們試著對調第$4k+3$及$4k+4$列時，情況卻出現例外：



圖(4-9)



圖(4-10)



圖(4-11)

在圖(4-9)及(4-10)中，我們把第$4k+3$行（紅色箭頭）及第$4k+4$行（綠色箭頭）交換位置，顯然這樣並不失數獨排序法的性質。神奇的是，將圖(4-9)做調換後，所謂「虧格數字」竟然由4變成1，因此座標$(4,4)$的格子仍為黑格子。不過這現象並非偶然，如果繼續將第$4k+1, 4k+2$列與第$4k+4$列互換，也能得到相同的結果，這是為甚麼呢？

由先前的結論可知道$M*M$方陣右下角的數字即為「虧格數字」，而座標為$(4,4)$的格子數字即與此格相同。沒錯這不是巧合，在一個數獨排序法當中，座標為(k_1N+r_1, k_2N+r_2)的格子將對應於(r_1, r_2)的格子，因此在$N=4$時，座標為$(4k_1, 4k_2)$的格子將對應於右下角的格子$(8,8)$。透過「對調法」，想要說明的就是無論怎麼對調列與列，實際虧格永遠與右下角的$1*1$小正方形有著關聯性，也就是實際虧格的位置出現在$4*4$的十六宮格的右下角。

將情況推廣到$M=kN-1$時，我們也可以利用「對調法」確定第$k_1N+1 \sim k_1N+(N-1)$列並不出現實際虧格，只有與右下角格子(kN, kN)相對應的格子(k_1N, k_2N)才是實際虧格。同樣的，在$M=kN+1$時，我們同樣可以確定只有與右下角格子$(kN+1, kN+1)$相對應的點(k_1N+1, k_2N+1)才是實際虧格。因此，對$M=kN\pm1$之實際虧格尋找工作就大致完成了。

接下來我們來證明當初跑程式的結果中$M=8k+3$為何完全無虧格。

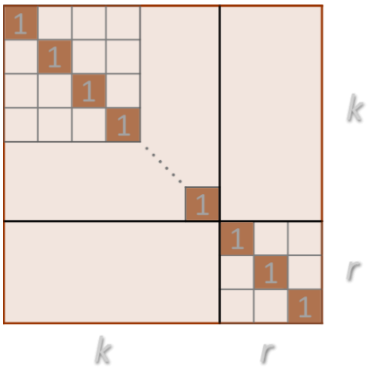
舉$(M,N)=(11,8)$為例子

圖(4-12)

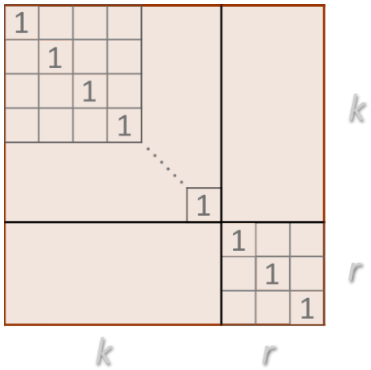
圖(4-13)

先前已經討論過虧格要在任何的排序法中都必須存在，一開始的排序法(按照順序排列)算是最狹義的。利用「數獨排序法」，在圖(4-13)的例子中可以明顯的發現沒有任何數字比其他數字都多出 1 個（即無論去除哪個數字，都無法使得每一種數字一樣多），代表在這種排序法下，並不存在虧格。

將情況延伸到 M 非 $kN \pm 1$ 的情形，不妨令 $M = kN + r\ (0 \le r < N)$。如同前面所探討 $M = kN \pm 1$ 的情況，右下角 $r * r$ 的區域同樣可以讓我們快速檢驗個數間的關係，像是在上面 $M = 8k + 3$ 的圖形中，可以確定在右下角 $3*3$ 的區域外，數字 $1 \sim 8$ 有一樣多個，因此方陣中數字間的關係將反映於右下角 $3*3$ 的區域。換言之，虧格的有無取決於右下角的小長方形是否有「虧格數字」。而最近我們發現在某種數獨排序法中，只有在 $M = kN \pm 1$ 時，才有可能出現虧格：



圖(4-14)



圖(4-15)

首先，將數字1沿對角線由左上排到右下，此時在右下角 $r * r$ 的區域當中，將出現 r 個 1。假設這個區域具有「虧格數字」且其值為1（如圖(4-14)），此時虧格數字將有 r 個，而其他 $N-1$ 種數字有 $r-1$ 個，此區域內各數字的個數將滿足：

$$r^2 = r + (r-1)(N-1) \quad \Rightarrow r^2 - Nr + (N-1) = 0$$

由上式可得 $r = 1, N-1$，即符合這項條件的只有 $M = kN \pm 1$ 的情況。又假設這個區域之「虧格數字」不是1（如圖(4-15)），則此時虧格數字將有 $r+1$ 個，而其他數字（包含1）有 r 個，此區域內各數字的個數將滿足：

$$r^2 = (r+1) + r(N-1) \quad \Rightarrow r^2 - Nr - 1 = 0$$

注意上式的 r 並沒有整數解（由公式解可推得 $r = \frac{N \pm \sqrt{N^2+4}}{2}$，其中 4 不可能為平方差，因此 $\sqrt{N^2+4}$ 不可能為整數），因此沒有任何情況能滿足這項條件。綜合前兩項使右下角 $r * r$ 區域具有「虧格數字」的條件，我們證明了當初的猜想：

只有 $M = kN \pm 1\ (k \in \mathbb{N}), M \ne N-1$ 的情況下，找出的理論虧格才有可能為實際虧格

所有的說明都完全結束了，剩下最後我們要把這個想法推廣至任意正方形並求得其實際虧格。

我們來做個整理：

1 $M = kN - 1 (k \in \mathbb{N})$時，虧格位置在$(k_1 N, k_2 N)$ (其中$k_1, k_2 = 1, 2, 3, \cdots, k-1$)

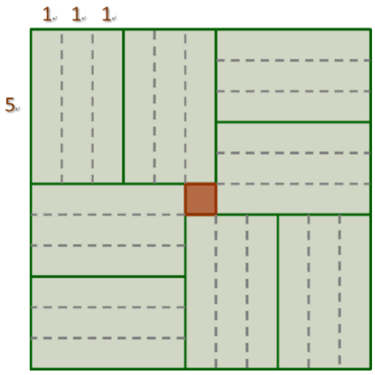
2 $M = kN + 1 (k \in \mathbb{N})$時，虧格位置在$(k_1 N + 1, k_2 N + 1)$ (其中$k_1, k_2 = 0, 1, \cdots, k$)

非常幸運地這裡的結果剛好與我們先前討論 N 為質數時的公式一模一樣，所以當然地也一併證明了上述公式找出的虧格確實是實際虧格。

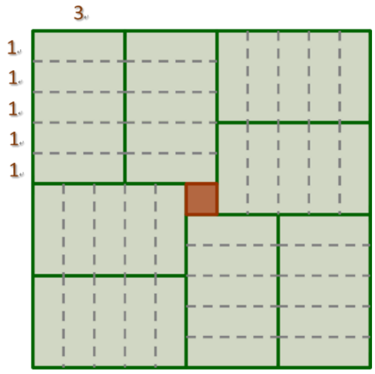
（五） 將情況推廣到 $N' * N$ 的小長方形

當我們將前面 $M * M$ 方陣中插入$1 * N$ 長條的問題完結之後，打算把問題中的長條加寬，則原問題將變為：

如果將該長條加寬為 $N' * N$ 的長方形，那麼出現的虧格會有甚麼變化？

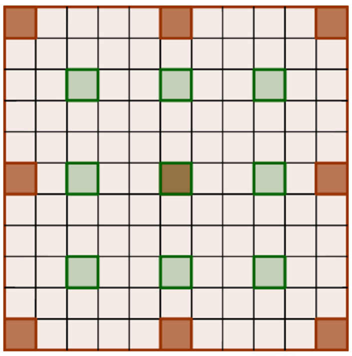


圖(5-1)



圖(5-2)

因為 $N' * N$ 可被切割成數個$1 * N$ 長條或$1 * N'$ 長條（如圖(5-1)及(5-2)），故只要給定 $M * M$ 方陣能夠被 $N' * N$ 小長方形填滿，並僅僅剩下一個格子（所求虧格），那麼 $M * M$ 方陣必能被$1 * N$ 長條或$1 * N'$ 長條完全填入。反過來想，該格子（虧格）必須是 $M * M$ 方陣對$1 * N$ 長條與$1 * N'$ 長條所得虧格圖形（見上節末尾）之交集。取完交集所得之圖形因為尚未驗證其是否可行，我們暫且將它們稱為「理論虧格」。（如圖(5-3)）

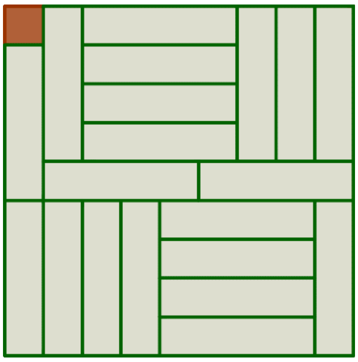


棕色部分為 11*11 方格對 1*5 長條的虧格位置

綠色部分為 11*11 方格對 1*3 長條的虧格位置

圖(5-3)

然而，需要有某些先決條件才能使得一個方陣對 $N'*N$ 長方形具有實際虧格。首先，我們從 N,N' 之間的關係做討論，發現到它們必須互質，否則無論置入哪個方陣皆無法出現虧格，以下是對它的證明：



圖(5-4)

令 $(N,N')=k$

$\Rightarrow$ 考慮圖形出現單一虧格時，因為虧格至多只能接觸到方陣的兩條邊

$\Rightarrow$ 至少會有兩條邊（長度為 M ）整段都接觸到其它 $N'*N$ 的長方形，即 M 可以表示為 k_1N+k_2N' 的形式

$\Rightarrow M=k_1N+k_2N'$，又 $M\equiv\pm1 \pmod N$

$\Rightarrow M\equiv k_2N'\equiv\pm1 \pmod N$，即 $(k_2N',N)=1$

但此時 $k\mid(k_2N',N) \quad \Rightarrow k=1$

因此 $(N,N')=1$ 時，才能使圖形出現虧格

得知可能具有虧格的第一個先決條件後，我們打算探討 $(N,N')=1$ 時，M 需要滿足哪些條件。因為理論虧格是 $M*M$ 對 $1*N$ 長條及 $1*N'$ 長條所得虧格之交集，故需要確定此方陣對這兩種長條都要具有虧格，它們的交集才可能為非空集合。回顧上一節末尾，M 必須模 N 同餘 ±1，$M*M$ 方陣才具有虧格，同理 M 也必須模 N' 同餘 ±1。因此 M 必須滿足以下的同餘式：

$$\begin{cases} M\equiv\pm1 \pmod N \\ M\equiv\pm1 \pmod{N'} \end{cases}$$

之後，我們將對這些滿足上式的 M 分成三種情況來做討論。

1. $\begin{cases} M\equiv-1 \pmod N \\ M\equiv-1 \pmod{N'} \end{cases}$ 時

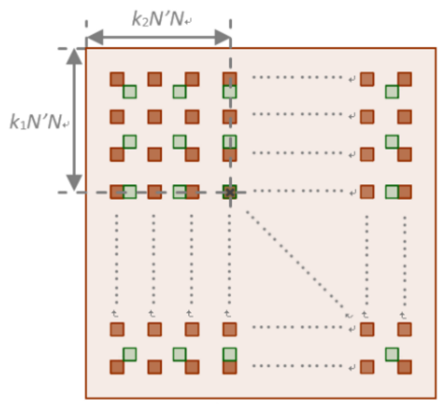
$\because (N,N')=1 \quad \Rightarrow M\equiv-1 \pmod{N'*N}$

不妨假設 $M=kNN'-1$

已知理論虧格應為 $M*M$ 方陣對 $1*N$ 及 $1*N'$ 的交集，使得虧格位置 (x,y) 滿足下列聯立式：

$$\begin{cases} x,y\equiv0 \pmod N \\ x,y\equiv0 \pmod{N'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x,y\equiv0 \pmod{N'*N}$$



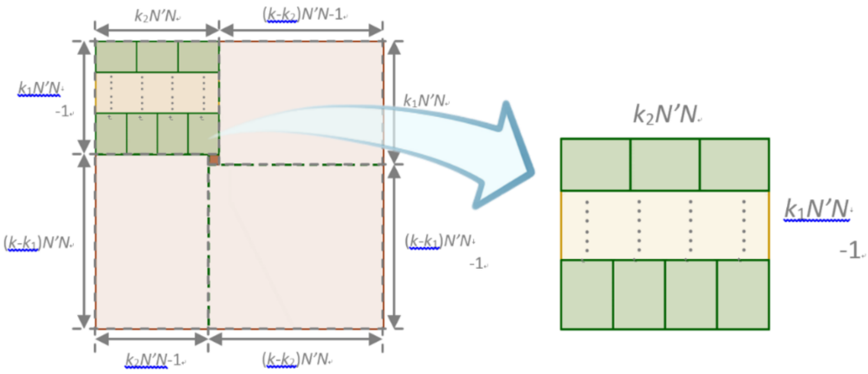
棕色部分為 $(kN'N-1)*(kN'N-1)$ 方格對 $1*N$ 長條的虧格位置

綠色部分為 $(kN'N-1)*(kN'N-1)$ 方格對 $1*N'$ 長條的虧格位置

圖(5-5)

此時，理論虧格位置(x,y)應該在$(k_1N'*N, k_2N'*N)$（如圖(5-4)）(其中$1\le k_1,k_2\le k-1$)

接下來，我們將驗證其中有哪些虧格是實際可行的：



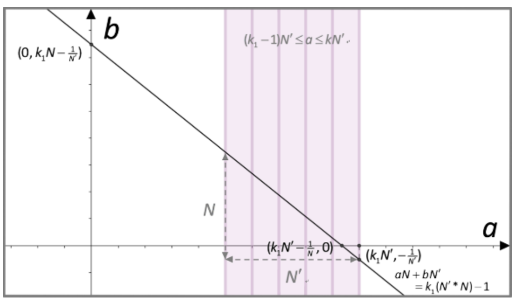
圖(5-6)

將虧格外的區域依上圖切成長方形，

可以看出這四個長方形各有一條邊為N與N'的公倍數，故我們依圖(5-6)的方式排長方形時，只需要考慮非N或N'倍數的那一邊是否能表示為$aN+bN'$ (其中$a,b\in\mathbb{N}$) 的形式。

對於左上角的長方形$(k_1(N'*N)-1)*(k_2(N'*N))$，我們就只需要考慮$k_1(N'*N)-1$是否能表示為$aN+bN'$ (其中$a,b\in\mathbb{N}$)的形式：

令$aN+bN'=k_1(N'*N)-1$
只要(a,b)有非負整數解，該長方形區域就能被$N'*N$填滿。



圖(5-7)

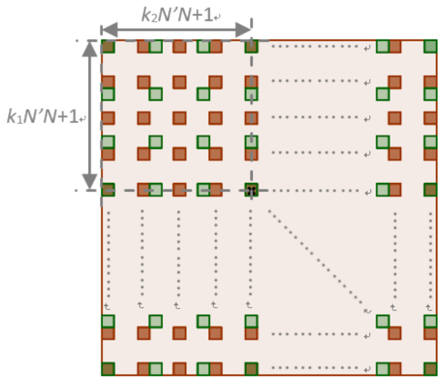
現在針對$aN+bN'=k_1(N'*N)-1$作圖，以a為橫軸，b為縱軸(N,N'在此為常數項)，所以只要證明必有格子點(a,b)出現在第一象限即可。

藉著二元一次不定方程式求整數解的經驗，得知每個長度為$(N',-N)$的區間皆有一個格子點。於是我們取$(k_1-1)N'\le a\le k_1N'$的區間時，該區將有一個格子點(a,b)。然而$(k_1N',-\frac{1}{N})$並不是格子點，且在$a\le k_1N'-\frac{1}{N}$時，b將開始≥ 0，因此給定格子點(a,b)將出現於$0\le(k_1-1)N'\le a\le k_1N'-1$且$b>0$的情況下，其中$k_1$只須滿足$k_1\ge 1$。(證明完畢)

在上面證明中，在 $k_1 \ge 1$ 的情況下，$k_1(N' * N) - 1$ 皆能表示為 $aN + bN'$（其中 $a, b \in \mathbb{N}$）的形式，所以對於左上角的長方區塊 $(k_1(N' * N) - 1) * (k_2(N' * N))$ 能被 $N' * N$ 填滿。

同樣地，我們能順便推導出 $k - k_2, k_2, k - k_1 \ge 1$ 時，就能分別使右上角、左下角及右下角的長方區塊順利被 $N' * N$ 填滿。因此，一個實際虧格必須使得 $k_1, k - k_1, k_2, k - k_2$ 皆 ≥ 1，從中推得 $1 \le k_1, k_2 \le k - 1$ 時，$(k_1 N' * N\ , k_2 N' * N)$ 即為實際虧格。

2. $\begin{cases} M \equiv 1 \pmod{N} \\ M \equiv 1 \pmod{N'} \end{cases}$ 時



棕色部分為 $(kN'N+1)*(kN'N+1)$ 方格對 $1*N$ 長條的虧格位置
綠色部分為 $(kN'N+1)*(kN'N+1)$ 方格對 $1*N'$ 長條的虧格位置

圖(5-8)

$\because (N, N') = 1 \quad \Rightarrow M \equiv 1 \pmod{N' * N}$

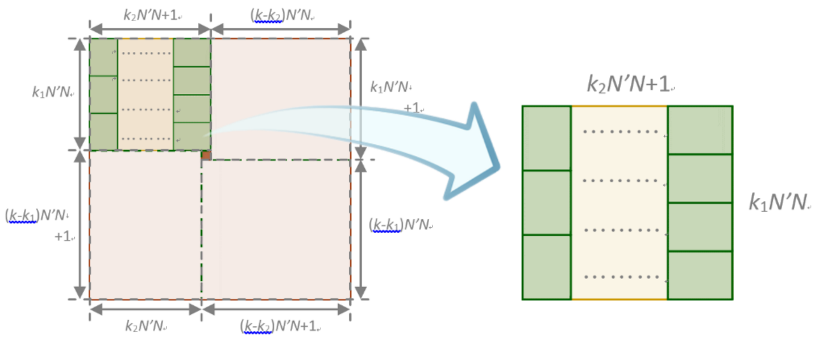
不妨假設 $M = kNN' + 1$

已知理論虧格應為 $M * M$ 方陣對 $1 * N$ 及 $1 * N'$ 的交集，使得虧格位置 (x, y) 滿足下列聯立式：

$$\begin{cases} x, y \equiv 1 \pmod{N} \\ x, y \equiv 1 \pmod{N'} \end{cases}$$
$$\Rightarrow x, y \equiv 1 \pmod{N' * N}$$

此時，理論虧格位置 (x, y) 應該在 $(k_1(N' * N) + 1, k_2(N' * N) + 1)$（其中 $0 \le k_1, k_2 \le k$）（如圖(5-8)）

接下來，我們將驗證其中有哪些虧格是實際可行的：

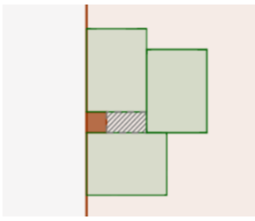


圖(5-9)

將虧格外的區域依上圖切成長方形，

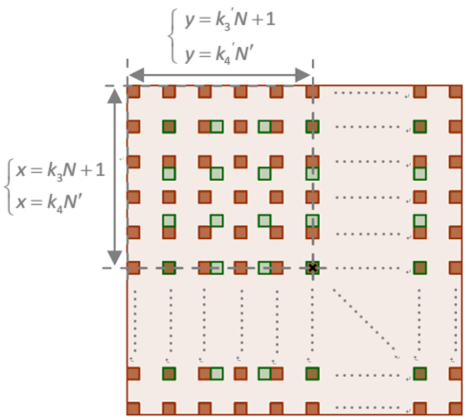
因為這四個區塊各有一邊為 N 與 N' 的公倍數，故我們照上圖方式填入長方形時，只需考慮非 N 或 N' 公倍數的一邊是否可以表示為 $aN + bN'$ 的形式。

利用前一節的想法，並不難證出$1 \le k_1, k_2 \le k-1$時，這四個區塊就能被$N'*N$填滿，亦即滿足上述條件的虧格即為實際虧格。唯有太靠近邊界的理論虧格（即k_1或$k_2 = 0$和k的其中一個）將因為其四周怎麼排都會留下寬度為1而排不進去的區域（見圖(5-10)），而被驗證為非虧格。



圖(5-10)

3. $\begin{cases} M \equiv 1 \pmod{N} \\ M \equiv -1 \pmod{N'} \end{cases}$時



棕色部分為邊長$kN'N + N'*k_{N',N} - N*k_{N,N'}$的方格對$1*N$長條的虧格位置

綠色部分為邊長$kN'N + N'*k_{N',N} - N*k_{N,N'}$的方格對$1*N'$長條的虧格位置

圖(5-11)

$\because (N, N') = 1$

$\Rightarrow M \equiv N'*k_{N',N} - N*k_{N,N'}$

$\pmod{N'*N}$

其中$k_{N',N}$ $k_{N,N'}$分別為N'對模N的乘法反元素及N對模N'的乘法反元素。

已知理論虧格應為$M*M$方陣對$1*N$及$1*N'$的交集，使得虧格位置(x, y)滿足下列聯立式：

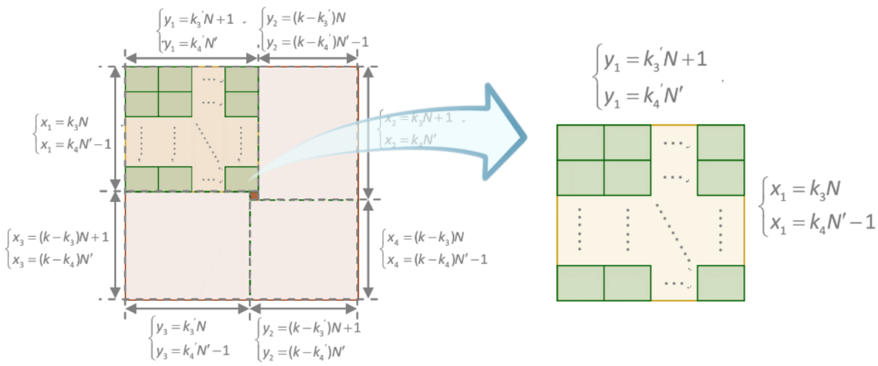
$$\begin{cases} x, y \equiv 1 \pmod{N} \\ x, y \equiv 0 \pmod{N'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x, y \equiv N'*k_{N',N} \pmod{N'*N}$$

此時，理論虧格位置(x, y)應該在$(k_1(N'*N)+N'*k_{N',N}, k_2(N'*N)+N'*k_{N',N})$(其中$0 \le k_1, k_2 \le k-1$)，不過因為這種表示法實在太過繁複，之後將用聯立式表示各線段的長度，此時理論虧格位置將為

$$\begin{cases} x = k_3N+1 \\ x = k_4N' \end{cases} \text{且} \begin{cases} y = k_3'N+1 \\ y = k_4'N' \end{cases}$$

之後，我們將驗證哪些虧格實際可行：



圖(5-12)

將虧格外的區域依上圖切成四個長方形，

此時將注意到這四個區塊各有一邊為 N 的倍數，另一邊則恰為 N' 的倍數。因此，對於所有理論虧格，只要依照上右圖排長方形時，該區塊就能被 $N'*N$ 填滿。亦即這種情況下，其實際虧格即為 $(k_1(N'*N)+N'*k_{N',N}, k_2(N'*N)+N'*k_{N',N})$（其中 $0\le k_1, k_2 \le k-1$）。

最後我們將前面做出來的結果做個整理：

1　當方陣邊長 M 滿足 $\begin{cases} M\equiv -1 \pmod N \\ M\equiv -1 \pmod{N'} \end{cases}$ 時

此時：方陣邊長 $M = kN'*N-1$

實際虧格 $(x,y)=(k_1N'*N,\ k_2N'*N)$

(其中 $1\le k_1,\ k_2\le k-1$)

2　當方陣邊長 M 滿足 $\begin{cases} M\equiv 1 \pmod N \\ M\equiv 1 \pmod{N'} \end{cases}$ 時

此時：方陣邊長 $M = kN'*N+1$

實際虧格 $(x,y)=(k_1N'*N+1,\ k_2N'*N+1)$

(其中 $0\le k_1,\ k_2\le k$)

3　當方陣邊長 M 滿足 $\begin{cases} M\equiv 1 \pmod N \\ M\equiv -1 \pmod{N'} \end{cases}$ 時

此時：方陣邊長 $M = kN'*N+N'*k_{N',N}-N*k_{N,N'}$

(備註： $k_{a,b}$ 為 a 對模 b 的乘法反元素)

$$實際虧格(x,y)=(k_1(N'*N)+N'*k_{N',N},k_2(N'*N)+N'*k_{N',N})(其中 0\le k_1, k_2 \le k-1)$$

伍、研究結果

我們證明出了在 $M*M$ 的正方形中實際虧格的出現位置。
現在把重要的結論列在下面：

一、只有當 $M=kN\pm 1(k\in\mathbb{N})$，$M\ne N-1$ 時，找出的理論虧格才有可能為實際虧格。
二、利用數獨排序法
三、利用對調法

三種方法結合在一起的結論就是虧格的位置與右下角的 $1*1$ 小正方形的數字是相同的。

最後得出虧格位置的公式：

1 $M=kN-1(k\in\mathbb{N})$ 時，虧格位置在 (k_1N,k_2N) (其中 $k_1, k_2=1,2,3,\cdots,k-1$)
2 $M=kN+1(k\in\mathbb{N})$ 時，虧格位置在 (k_1N+1, k_2N+1) (其中 $k_1, k_2=0,1,\cdots,k$)

另外，當填入長條的情形推廣到 $N'*N$ 的長方形時，得到了更新的結論：

一、具有虧格的先決條件：

（一）小長方形 N 與 N' 需要互質
（二）方陣邊長 M 需要滿足 $M\equiv\pm 1\ (\mathrm{mod}\ N)$ 且 $M\equiv\pm 1\ (\mathrm{mod}\ N)$

二、所得之虧格位置就是長條為 $1*N$ 或 $1*N'$ 所得虧格位置之交集

利用前兩項規則，我們可以得出下列虧格位置：

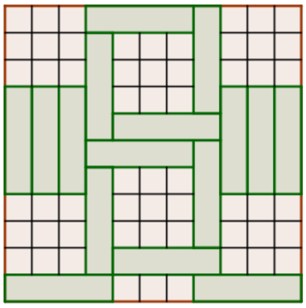
$\begin{cases} M\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ N) \\ M\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ N') \end{cases}$	方陣邊長 $M=kN'*N-1$ 實際虧格 $(x,y)=(k_1N'*N, k_2N'*N)$ (其中 $1\le k_1, k_2\le k-1$)
$\begin{cases} M\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ N) \\ M\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ N') \end{cases}$	方陣邊長 $M=kN'*N+1$ 實際虧格 $(x,y)=(k_1N'*N+1, k_2N'*N+1)$ (其中 $0\le k_1, k_2\le k$)
$\begin{cases} M\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ N) \\ M\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ N') \end{cases}$	方陣邊長 $M=kN'*N+N'*k_{N',N}-N*k_{N,N'}$ 實際虧格 $(x,y)=(k_1(N'*N)+N'*k_{N',N},k_2(N'*N)+N'*k_{N',N})$(其中 $0\le k_1, k_2\le k-1$) (備註：$k_{a,b}$ 為 a 對模 b 的乘法反元素)

陸、討論與結論

在做這次科展的過程中，查過許多資料發現我們的題目算是新穎的（雖然已經有探討虧格位置的作品，不過所探討的都是 L 型覆蓋，所以並未參考），所以許多研究步驟都算是我們自己摸索出來的（除了最剛開始在書上看到的解法外）。我們的突破點都是在初始想法上做一些靈活的變換，一步步的朝結果邁進，得出來的結論也相當幸運地不需考慮實際排法就完成，而且做出的結果並不難推廣。利用我們科展過程中的想法可以在二維平面中把$1*N$的長條形改成填入$N'*N$的長方形，其結果也可以算是本科展的附加品。礙於時間上的問題無法把立體的情況加入本作品之中，但是解決立體情況的方法和平面大同小異，討論的範圍也更小（因為解的情況數量較平面來的少），所以得出的結果也相當漂亮。

柒、未來展望

經過這次評審教授的提點，給了我們一個嶄新的研究方向。在這件作品當中，我們只有探討到給定的方陣中，如何用長條或長方形盡量填到最滿，而那些教授就希望我們能換個想法，探討如何用長條圍出最多不能再排進去的空格（即弄到最空的情況，如右圖）。回想起來，這件作品的確有很多美中不足的地方，因此我們希望在日後能得到下列結果：



虧格數：57/121

一、在找不出單一虧格的情況下，求出最少虧格數。

二、在一個方陣中，如何用長條圍出最多無法填入的空格（即求出最多虧格數）。

三、整理出排入長條後，對於任意給定的區域（未必為完整的方型區域，可以在中間挖掉數個空格，或在旁邊加入幾個格子），求出最少或最多虧格數的法則。

四、將長條改成填入非長條狀（L 字形、T 字形）的情況。

捌、參考資料與其他

一、 數學傳播 149 第 38 卷第一期—幾種常見的數學思維辦法（作者：周春荔）

二、 數學傳播 139 第 35 卷第三期—中國剩餘定理（作者：王翼勳）

三、 初等數論第四章第 5 節—模為素數的二次同餘方程（作者：潘承洞、潘承彪，凡異出版社）