

第十五屆旺宏科學獎

成果報告書

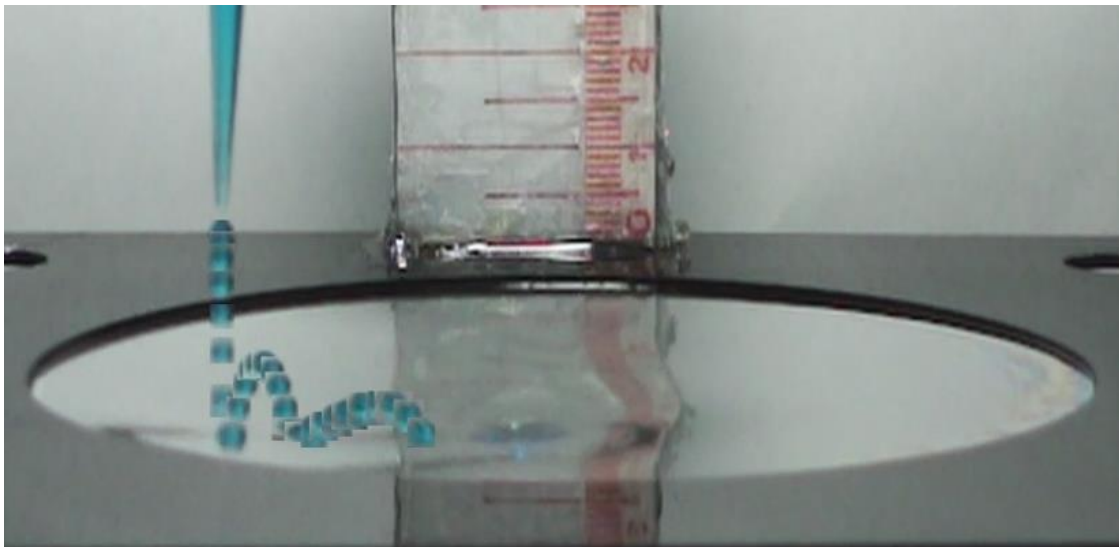
參賽編號：SA15-482

作品名稱：「彈」花一現，「膜」力再現

—皂水彈跳與皂膜彈簧之研究

姓 名：賴林鴻

關 鍵 字：肥皂膜、張力、皂水彈跳



目錄

| | |
|---------------------|----|
| 摘要 | 01 |
| 壹、研究動機 | 02 |
| 貳、研究目的 | 02 |
| 參、研究設備及器材 | 03 |
| 一、軟體 | |
| 二、硬體設備與器材 | |
| 三、皂水製備 | |
| 肆、研究過程及方法 | 05 |
| 一、實驗架構 | |
| 二、前置作業 | |
| 三、實驗流程圖 | |
| 四、實驗設計 | |
| 伍、研究結果 | 09 |
| 一、實驗一：皂水基本性質測量 | |
| 二、實驗二：皂水小球的彈跳模式研究 | |
| 三、實驗三：皂水小球與皂膜的交互作用 | |
| 四、實驗四：不同位置對於彈跳高度的影響 | |
| 五、實驗五：測量不同半徑皂膜的彈力常數 | |
| 陸、討論 | 18 |
| 一、皂水小球彈跳分析討論 | |
| 二、臨界動能探討 | |
| 三、彈力常數討論 | |
| 四、誤差分析 | |
| 柒、結論 | 25 |
| 捌、未來展望 | 25 |
| 玖、參考資料及其他 | 27 |
| 附錄 | 28 |

摘要

肥皂泡泡膜，簡稱皂膜 (Soap film)，是一種具流動性的薄膜，生活中時常能接觸到，然而，看似平凡的皂膜，你可曾想過它具有彈力嗎？

本研究發現一有趣現象：

皂水滴落至皂膜表面上，有時候會被反彈，有時候會穿透皂膜而不會破掉。

因此，許多疑問浮上心頭：

為何會反彈？彈跳時有何規律？不同位置彈跳的高度都相同嗎？

如果皂膜具有彈力，是否會像很多個彈簧合併而成，符合虎克定律呢？

本研究核心目的在於運用簡單的實驗設計，探討**皂膜上皂水小球的彈跳機制**，以及**皂膜彈簧之彈力常數測定**。

在彈跳機制部分，首先從建立分期著手。依據皂水小球碰到皂膜的瞬間，及溶入皂膜的瞬間，建構出三個發展期程：穩定平衡期、波動彈跳期、回復期。為了驗證皂水彈跳過程有無溶入皂膜，本實驗將皂膜加入 1M 氫氧化鈉溶液，在皂水中加入綠色廣用指示劑。若皂水小球接觸皂膜的過程中變為紫色，則可判定兩者產生互溶。其優點是變色明顯易辨別，而且反應迅速，不會產生延遲。此實驗成功證明**氣墊層 (air layer) 的保護作用**。

在彈力常數部分，為了檢驗皂膜提供的張力，透過靜力平衡概念，建立伸長量與受力的關係。經過數據分析，發現兩者呈現正比關係，這個特性突破傳統虎克定律 (Hooke's law) 僅討論固態材料，證實**流體皂膜亦能適用虎克定律**。研究結果同時指出，彈力常數隨著皂膜半徑增加而減小。進一步從表面位能的觀念分析，發現彈力常數反比於半徑平方，可作為彈力常數修正的參考。最後比對靜態的彈力常數與阻尼震盪計算出之 k 值，發現動態時會受到空氣阻力與黏滯力等因素，使得 k 值小於靜力平衡所求得的。

此外，臨界性質一向備受重視，而皂膜亦有此特性。藉由結合小球落至膜面速度與動能公式，將實驗測得的臨界高度代入，可計算出穿越時必須具備的動能。透過無因次參數 (如 Weber number、Ohnesorge number) 的輔助，可進一步**精準掌握小球行為**。

總而言之，本研究找出皂水小球彈跳的成因和各時期的特徵，對於其中探討的物理機制，包括氣墊層的保護作用，皂膜的臨界特性、減緩作用、與彈力和伸長量正比關係，未來將可應用於醫學、工業、物理上等多方面研究。

壹、研究動機

在老師上課講解到皂膜的表面張力時，我便很好奇皂膜的張力有多強。在多次測試實驗中，偶然把皂水滴落於桌上的泡泡上，意外的，這滴皂水快速穿過皂膜後，肥皂泡泡竟沒有破掉，且發現皂水在特定高度滴落時，並不會穿越，取而代之的是皂水小球在上面舞動，隨著波動的振盪，皂水小球就好像在上面跳舞。

但究竟為何會反彈？彈跳時有何規律？不同位置彈跳的高度都相同嗎？如果皂膜具有彈力，是否會像很多個彈簧合併而成，符合虎克定律呢？查閱文獻後，沒有任何人做過類似探討，於是著手研究這有趣的現象。

貳、研究目的

研究目的如下：

一、確立皂水小球的彈跳模式

- (一) 找出皂水小球彈跳的成因
- (二) 建構皂水彈跳的分期
- (三) 探討皂水小球與皂膜的交互作用

二、探討皂水小球的彈跳高度

- (一) 研究皂水在不同高度與位置滴下對皂水小球彈跳高度的影響
- (二) 找出決定彈跳高度的關鍵因素

三、研究皂膜彈簧的彈力常數

- (一) 建立皂膜受力與向下伸長量之關係
- (二) 探討不同半徑大小皂膜對彈力常數的影響

參、研究設備及器材

一、軟體

- (一) Logger Pro (運動分析軟體)
- (二) Microsoft Excel (圖表數據分析軟體)
- (三) Avidemux (影片影像擷取軟體)
- (四) i-SPEED Control 2Series (高速攝影機控制程式)

二、硬體設備與器材

- (一) 角鋼架、支架與垂直固定器。(如圖 3-1)
- (二) 點滴組：用以滴落皂水。(如圖 3-2)

【註：滴定管的流速極易受液面高度影響，進而使滴落的水滴大小不一致，不方便作定量測量，

因為液壓為 $P = \rho gh = \rho g \frac{V}{A}$ ，所以當體積流量固

定時，底面積越大，高度影響液壓便較小，因此本研究採用自製點滴管採用底面積較大的杯子，降低液壓的影響，並連接微量滴管之滴頭，其附有流量控制器，可調整皂水滴落大小與頻率。】

- (三) 微量滴管：採用以微升單位之微量滴管，精準固定每滴皂水體積。(如圖 3-3)
- (四) 游標卡尺：作為調整高度測量時的工具。(如圖 3-3)
- (五) 黑色壓克力皂膜框：中間圓形空洞的直徑分為四種規格：10cm、7.5cm、5cm 及 2.5cm。(如圖 3-4)
- (六) 一般攝影機 (Sony XR200)、高速攝影機 (ix Cameras iSpeed 211) 與燈具 (6W LED、日光燈、強光手電筒)



圖 3-1 角鋼與支架



圖 3-2 點滴組



圖 3-3 微量滴管與游標卡尺



圖 3-5 a. Nikon 鏡頭 (zoom 24~85mm) b. 高速攝影機主機 (912fps~1005fps) c. 高速攝影機專用強光手電筒(不會閃爍)



圖 3-4 皂膜框

三、皂水材料與設備

(一) 純水、冠盈牌洗碗精與甘油 (比例 8:1:1)

【註：原先要採用多數作皂膜論文使用的 SLES (十二烷基聚氧乙醚硫酸鈉) 和 CAPB (椰油醯胺丙基甜菜鹼) 混和成的清潔劑，但發現其成分容易致癌且已停產，故採用較易取得的洗碗精使用。洗碗精成分包含直鏈型烷基苯磺酸 (LAS) 軟性、椰子油醇衍生物、香精。】

(二) 油性藍色白板筆墨水

(三) 氫氧化鈉與廣用指示劑

(四) 電子秤與量筒 (10ml)



圖 3-6 全部儀器架設

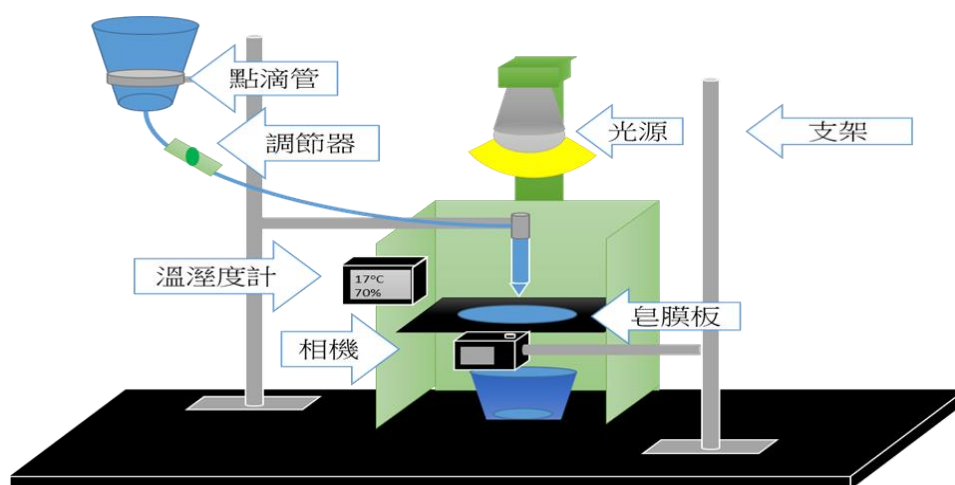
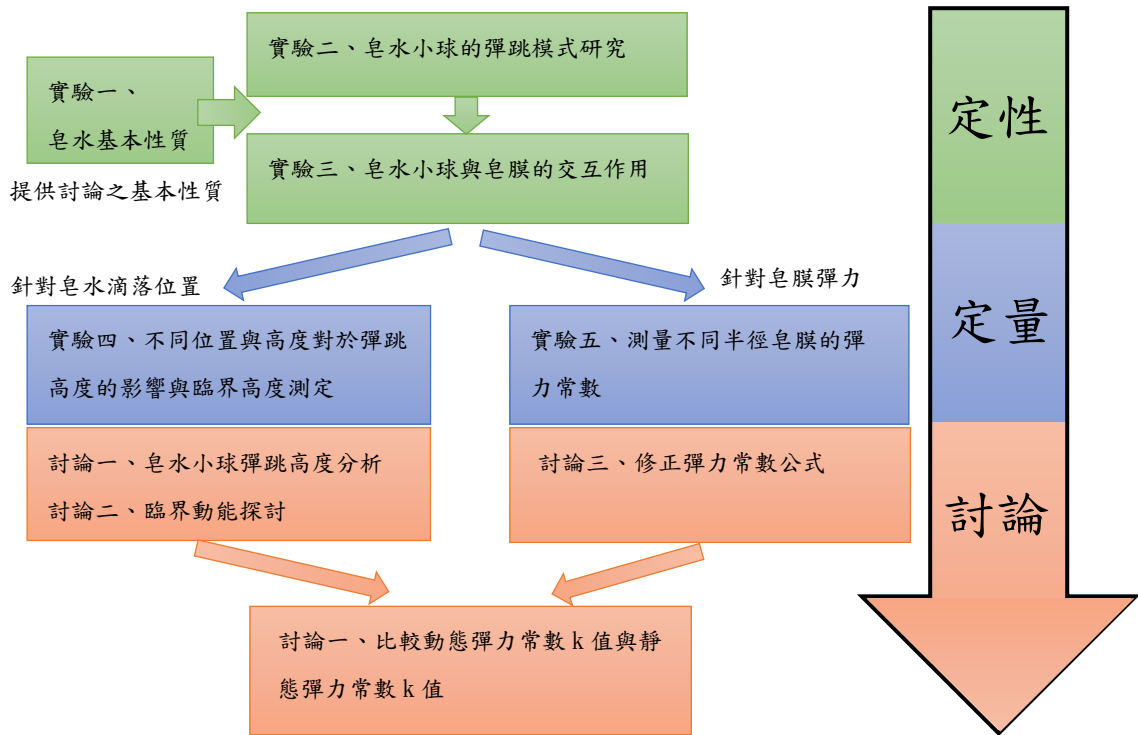


圖 3-7 設備示意圖

肆、研究過程及方法

一、實驗架構



二、研究前置作業

利用尺於壓克力板上拉出皂膜，探索皂水小球與皂膜間的變化，為了減少誤差和增加穩定性，本研究固定以下條件，以確保實驗精準度。

(一) 實驗環境

影響皂膜的條件包括溫度、濕度、壓力…等，為了減少不必要的因素影響，實驗均採用溫度 $16^{\circ}\text{C}\sim 18^{\circ}\text{C}$ ，濕度80%以上之條件下進行實驗。

(二) 皂膜框架架設

用螺絲調整皂膜框架水平，並確立皂膜是否位於正中心。

(三) 皂膜製備

試驗皂水最佳比例的過程中，發現皂水比例於特定區間，製成皂膜的穩定度持久度差異不大，故本研究採取較方便調配且穩定之比例，以水、甘油及洗碗精體積比8:1:1調配出肥皂水，其後皆固定此比例。而後依需求分別加入藍色染劑、廣用試劑，作為判別的依據。

(四) 拍攝角度

1. 水平拍攝：較易觀察振幅與彈跳高度，不需經由角度轉換。
2. 傾斜 10° 角拍攝：較易觀察小球跳動的模式，與膜表面的波動。

(五) 影片分析定位

分析影片時，採取皂膜板厚度中央作為零位面，而後方比例尺作為尺度的依據。

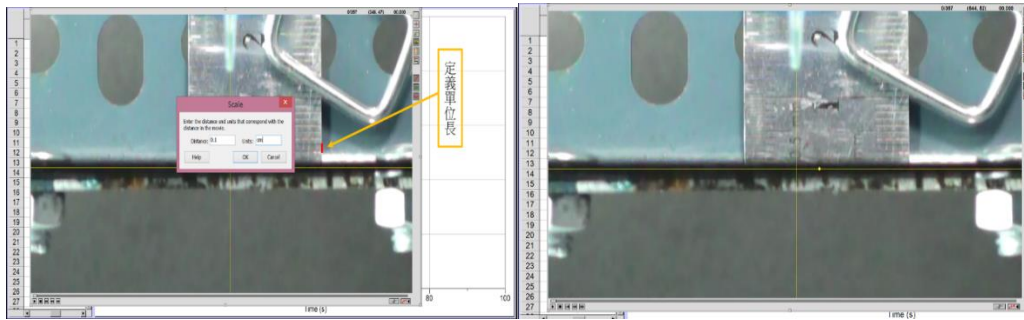
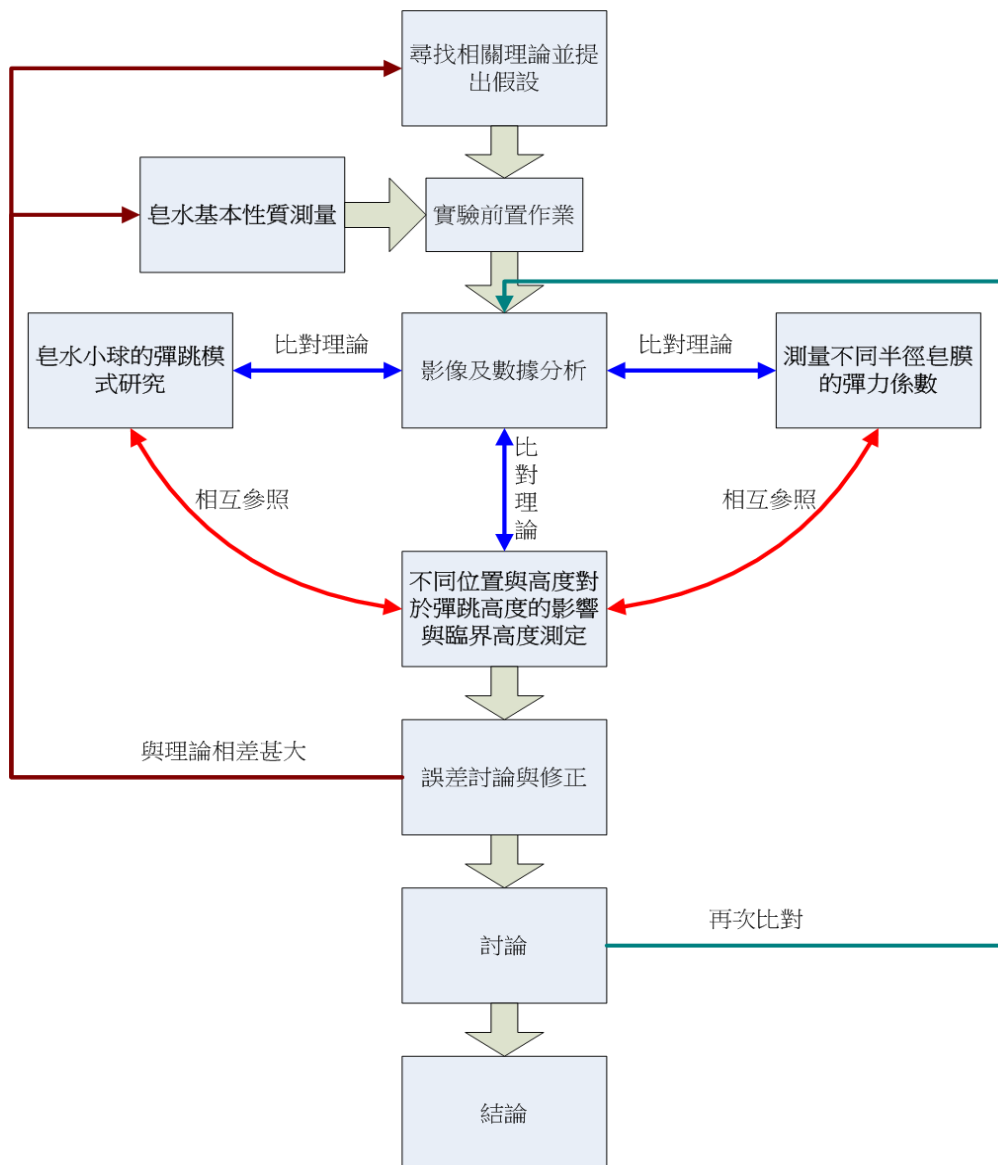


圖 4-1 影片定單位長圖

三、實驗流程圖



四、實驗設計

(一) 實驗一：皂水基本性質測量

實驗目的：確立清潔劑的皂膜之基本性質，包括密度與張力。

實驗步驟：

1. 密度（單位體積質量法）

取單位體積的皂水測量其質量。

2. 表面張力（電子秤量法）

皂膜破裂瞬間，皂膜能減少皂水的重量，來推算表面張力的最大值。

(1)取一燒杯置入皂水，放於電子秤上，並歸零

(2)取四公分長的直鐵絲，綁上細線，浸入皂水中

(3)待其穩定後，緩緩用細線將鐵絲拉起，此時會形成皂膜

(4)待皂膜破裂瞬間，紀錄電子秤的讀數



圖 4-2 皂膜表面張力測定

(二) 實驗二：皂水小球的彈跳模式研究

實驗目的：為了建構彈跳的分期，本實驗採用攝影機慢動作模式紀錄彈跳過程，同時使用高速攝影機觀察彈跳現象。

(三) 實驗三：皂水小球與皂膜的交互作用

實驗目的：為了驗證皂水彈跳過程有無溶入皂膜。

使用攝影機觀察皂水小球的彈跳現象，仍無法判定皂水小球有無溶入皂膜，在不清楚皂水小球與皂膜之間關係的情況下，提出兩個可能的假設：

1. 溶入皂膜：

滴落時，先突破表面張力，溶入皂膜，因為滴落時帶有動能，讓皂膜產生波動，而這個波動有其原本皂膜的臨界質量，故會把多餘的皂水甩出，甩出脫離皂膜後，再因重力使其再度溶入皂膜。

2. 未溶入皂膜：

皂水滴落時，因兩者之間張力過大，且其在動能不夠突破表面張力的情況下，並未溶入皂膜裡，而皂膜就類似彈簧床的概念，當皂水碰撞它時給它回復力，使其彈跳，而後因兩者張力都變小，最後便溶入皂膜裡。

實驗方法：本實驗將皂膜加入 1M 氫氧化鈉溶液，在皂水中加入綠色廣用指示劑。若皂水小球接觸皂膜的過程中變為紫色，則可判定兩者產生互溶。其優點是變色明顯易辨別，而且反應迅速，不會產生延遲。

(四) 實驗四：不同位置滴落對於彈跳高度的影響

實驗目的：本實驗針對在不同高度落下，記錄皂水小球的彈跳高度，並經由轉換可得速度與加速度，並且找出決定彈跳或穿越的關鍵因素。同時藉由觀察不同位置彈跳的高度，以了解皂膜上不同位置的特性。

實驗步驟：

1. 水滴滴落質量測量
 - (1)取一定滴數後，記錄質量變化量
 - (2)將質量除以滴數後即得該液滴之平均質量
2. 液滴高度與速度的關係
 - (1)轉開自製點滴管使液滴由上滴落
 - (2)打開攝影機一般模式錄影
 - (3)使用 Logger Pro 分析影片
3. 不同位置與高度之彈跳高度測量
 - (1)拿取半徑 5cm 的皂膜框，使用尺將皂膜拉出
 - (2)將染色皂水倒入自製點滴管內，轉開旋鈕使其緩慢等速滴落
 - (3)調整滴落點於中心處、離 1cm、2cm、3cm、4cm 處，和各處不同高度
0.5cm、1cm、1.5cm、2cm
 - (4)開始攝影機慢動作攝影捕捉一滴皂水的彈跳軌跡
 - (5)使用 Logger Pro 程式軟體逐滴追蹤其運動軌跡
 - (6)重複步驟 1~5，增加精準度
4. 臨界高度 H_{Max} 測量
 - (1)拿取不同皂膜框，使用尺將皂膜拉出
 - (2)向上調整滴落高度，當調至皂水小球無法反彈，而是穿透皂膜瞬間，以
游標卡尺測量並記錄此刻高度為 H_{Max} 。

(五) 實驗五：測量不同半徑皂膜的彈力常數

實驗目的：研究皂膜框半徑大小是否會影響張力，進而使 $F = kx$ 的 k 值改變。

實驗原理：使用微量滴管固定滴落皂水體積，藉由密度換算，可求得皂水重量，每滴皂水滴落時貼齊皂膜表面，減少衝量對其造成影響，而待其靜力平衡後，利用攝影機拍攝其向下伸長量，可得重量與伸長量的關係。藉由測定滴落水滴重量與皂膜向下伸長量，驗證皂膜的張力是否符合虎克定律 $F = kx$ 。

實驗步驟：

1. 分別拿取不同半徑 2.5cm、5cm、7.5cm、10cm 的皂膜框，使用尺將皂膜拉出
2. 將微量滴管調至每滴 $10.0\mu\ell$
3. 待皂膜穩定後，開啟攝影機，並逐滴滴落皂水
4. 滴至皂膜無法再承載下一滴水珠時，記錄此時滴數，是為彈性限度
5. 輸出影片，使用 Logger Pro 程式軟體分析各滴數對應的皂膜下凹伸長量
6. 重複步驟 1~6，增加實驗精準度

伍、研究結果

一、實驗一：皂水基本性質測量

(一) 密度：將質量除以單位體積，得出皂水密度平均值為 1.0165 g/ml 。

(二) 表面張力：由表面張力公式 $T = \frac{mg}{2L}$ ，將所得質量減少最大值除以兩倍鐵絲長，算出皂水表面張力平均值為 30.625 dyne/cm 。

表 4-1 本研究相關之物理基本性質

| 符號 | 名稱 | 定義 | 範圍 |
|--------|----------------------------|---------|-----------------------------|
| m | 一滴皂水質量 Mass | | $0.001 \sim 0.01 \text{ g}$ |
| V | 一滴皂水體積 Volume | | $100 \sim 500 \mu\text{l}$ |
| ρ | 皂水密度 Density | m/V | 1.0165 g/ml |
| T | 表面張力 Surface tension | $mg/2L$ | 30.625 dyne/cm |
| d | 皂膜厚度 Soap film thickness | | $\sim 1 \mu\text{m}$ |
| R | 皂膜半徑 Soap film radius | | $2.5 \sim 10 \text{ cm}$ |
| g | 重力加速度 Gravity acceleration | | 980 cm/s^2 |

二、實驗二：皂水小球的彈跳模式研究

根據影片分析結果，發現於不同高度下滴落皂水（意即不一樣動能）會有不一樣的結果。在較低動能情形，皂水小球會彈跳於膜面上（圖 4-1）；在較高動能情形，皂水小球會直接穿越，而皂膜並無破裂（圖 4-2）。



圖 4-1 皂水小球彈跳過程 ($t = 1/1005 \text{ s}$)：母球彈跳，子球亦彈跳。

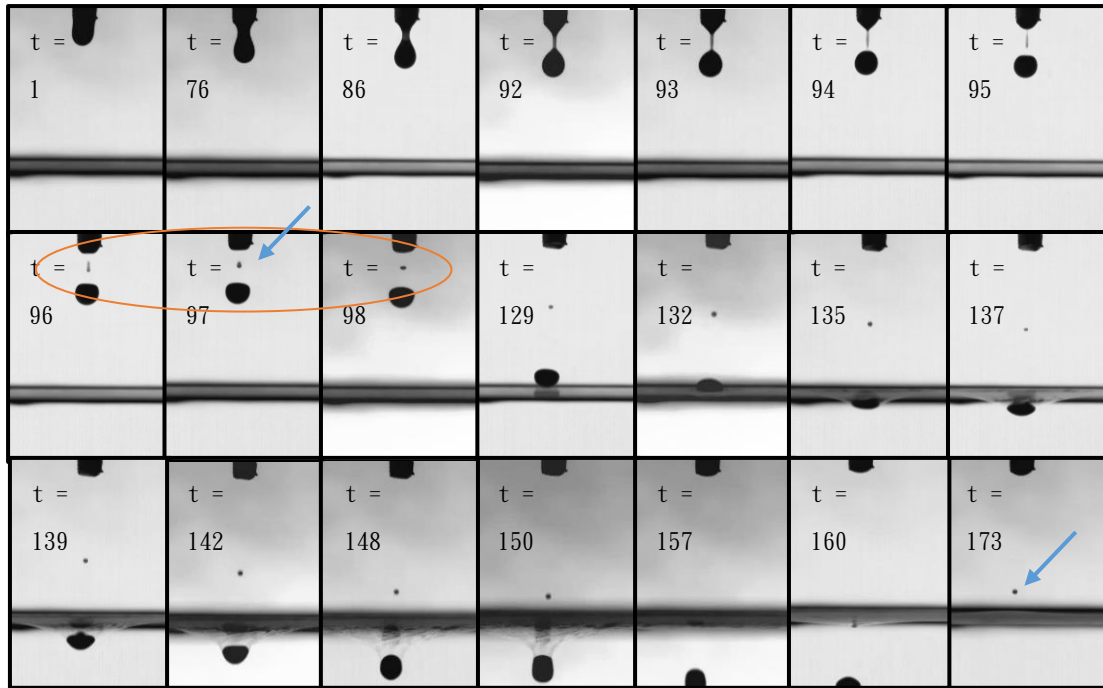


圖 4-2 皂水小球穿越過程 ($t=1/1005s$)：前面幾張圖可看到液滴滴落時，明顯有子球產生，這可能是造成誤差的原因。母球通過，而子球被反彈。

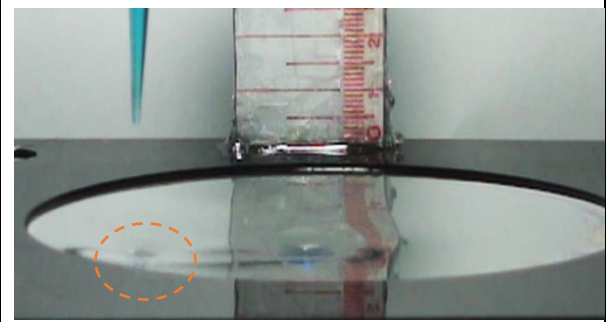
皂水小球彈跳模式主要為小球動能與皂膜位能之間的轉換，依據皂水小球碰到皂膜瞬間，及溶入瞬間，主要可以分三期：**穩定平衡期**、**波動彈跳期**、**回復期**。穩定平衡期，皂水小球將重力位能轉換為動能；波動彈跳期，則是皂水小球將大部分動能儲存於皂膜的位能，再釋放出，造成彈跳現象；最後回復期時，皂水溶入皂膜，形成上下震盪，以下表 4-2 作進一步說明。

表 4-2 皂水小球彈跳過程分期 a. 穩定平衡期 b. 波動彈跳期 c. 回復期

| | |
|--|--|
| <p>a. 穩定平衡期 1 (水珠未接觸皂膜)</p> <p>皂膜中心因皂水聚集於此，故成下凹狀態。而此時為皂水還未降落，故中心維持在中央附近的平衡位置。</p> | |
| <p>a. 穩定平衡期 2 (水珠未接觸皂膜)</p> <p>皂膜中心因皂水聚集於此的重量不夠大，故下凹時仍無法排出皂膜內中多餘的皂水。而此時皂水正要從點滴管脫離，未接觸到皂膜，中心仍維持在中央附近的平衡位置。</p> | |

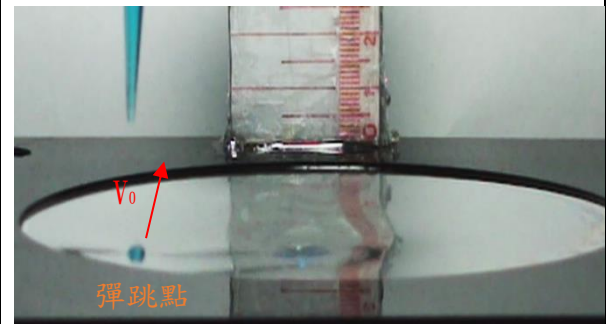
b. 波動彈跳期 1 (水珠接觸皂膜且下凹)

此時皂水滴落在皂膜上，可以看到皂膜撞擊處下凹，皂水小球動能轉換成彈力位能儲存。而波動未達中心，故中心位置不受影響。



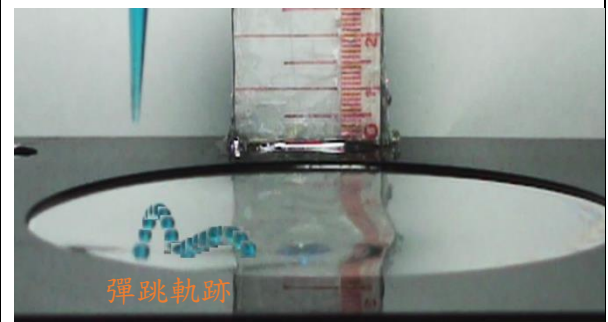
b. 波動彈跳期 2 (水珠接觸皂膜且彈起)

此時皂水小球把先前儲存於皂膜的彈力位能轉換成動能，使得小球獲得一斜向初速 V_0 ，從撞擊點彈出。



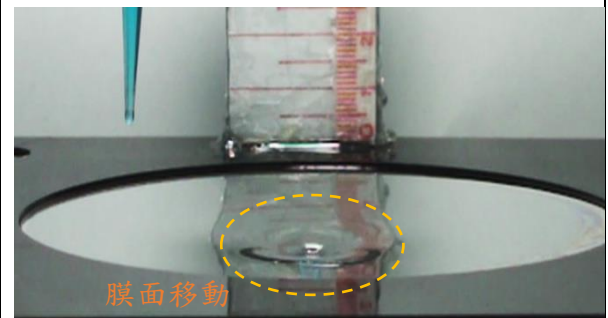
b. 波動彈跳期 3 (彈起後作斜拋)

此時皂水小球於空中作斜拋運動，其停留在空中的時間，取決於彈力位能轉移的動能，以及空氣阻力作的負功，此階段即位能與動能不斷的轉換。



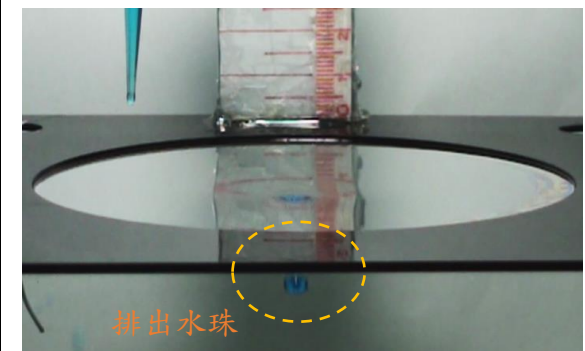
c. 回復期 1 (水珠已溶入皂膜且下凹)

此時皂水小球的動能已經無法抵抗重力與突破皂膜的表面張力，僅在皂膜面上移動，不斷的朝中心點移去。然而此時中心點因為皂水小球壓於皂膜上，使得重心改變，故中心點不斷找尋平衡位置，先往外跑再往內，直到與小球相遇。



c. 回復期 2 (溶入皂膜後作上下作震盪)

此時皂水小球碰到皂膜上的中心點，也就是相對低張力處，可輕易突破表面張力，溶入皂膜當中，使中心點更大。若重量足夠，下凹時便排出皂膜內中多餘的皂水。而中心點會隨著慣性來回微微震盪，逐漸回到穩定平衡期。



進一步由高速攝影機觀察回復期溶入的情形，這與水皇冠現象（water crown）形成機制類似。動能較大時，由波動激起的水珠會突破表面張力的束縛，形成一顆體積較小的子球（圖 4-3）；相對的動能較小時，子球無法突破表面張力，與母球再度合而為一（圖 4-4）。

而溶入的點，正是皂膜表面上最脆弱的點，由圖 4-5 可知。正如上述所提，在穿越的現象中，皂水小球動能大於皂膜面所能吸收的量，因此突破皂膜表面，然而，穿越後皂膜並無破裂，因此可推判皂膜有自我恢復的能力。

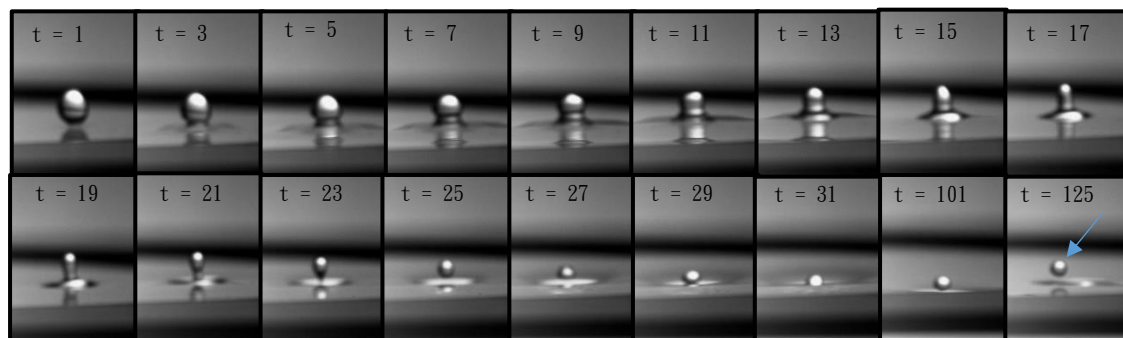


圖 4-3 皂水小球溶入過程產生子球 ($t=1/912s$)

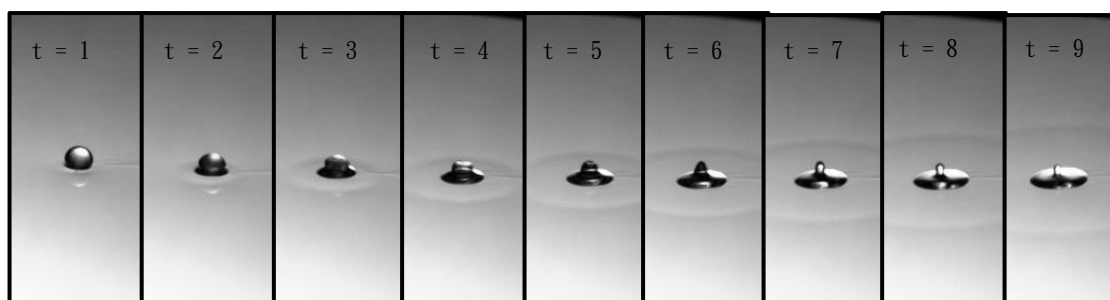


圖 4-4 皂水小球溶入過程無法產生子球 ($t=1/912s$)

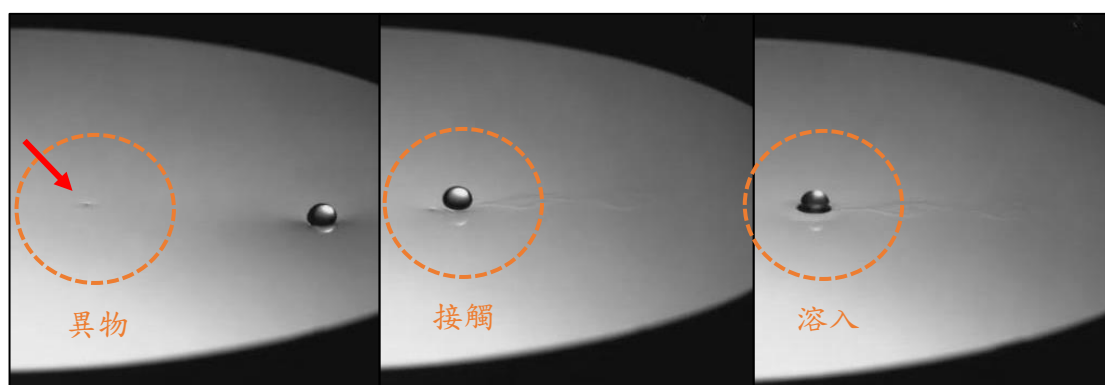


圖 4-5 膜面異物造成皂水小球溶入

三、實驗三：皂水小球與皂膜的交互作用

使用 Avidemux 軟體分析影片後，發現在彈跳的過程中，皂水小球一直維持綠色，如圖 4-6，兩者並無互溶，因此可以推翻實驗設計中的假設一，假設二才是正確的。而後我改用環己烯作為小球，因為環己烯為非極性分子，只要接觸到皂膜就會快速溶入，但結果環己烯在中央能彈跳多下，而在邊緣處卻直接溶入。進一步討論兩者不互溶的原因，引進氣墊層 (air layer) 理論作為解釋(參考資料六)，小球由膜面彈起，是因為小球與膜面的氣墊存在使小球可在膜面短暫的停留，而讓結合 (coalescence) 暫緩發生。然而在一段時間過去後，氣墊仍會消散，當氣墊層太薄時，小球與液面便會結合。上述理論合理的解釋有機溶劑環己烯能彈跳的現象，在空氣層保護下，隔絕小球與皂膜的接觸，使環己烯無法直接破壞皂膜，但是邊緣處皂膜張力較大，不易形成氣墊層，因此會直接溶入。

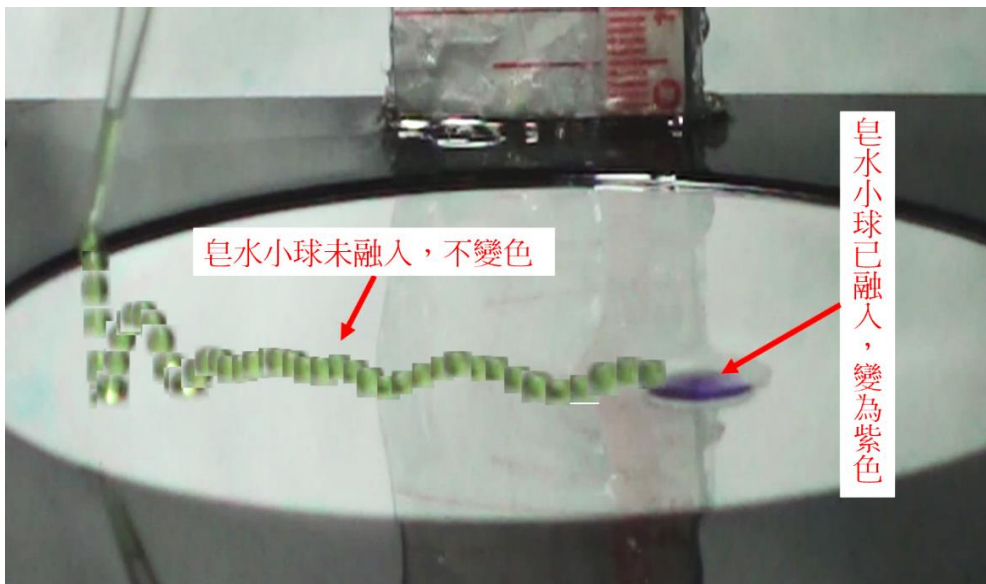


圖 4-6 皂水小球溶入檢驗

小球接觸膜面時，會有一些氣體被擠壓在水滴與水面間形成氣墊層，就是因為這層氣墊層 (如圖4-7) 的存在才會使液滴及膜面各自表現它們的表面張力。換句話說，氣墊層提供皂水小球極佳的**保護作用**，類似反泡沫的概念，利用空氣包覆液滴，可以**防止液體互溶**，而圖4-6的結果，皂膜之鹼性物質不與皂水小球內之酸鹼指示劑反應，彈跳過程中不變色，提供最佳的驗證。

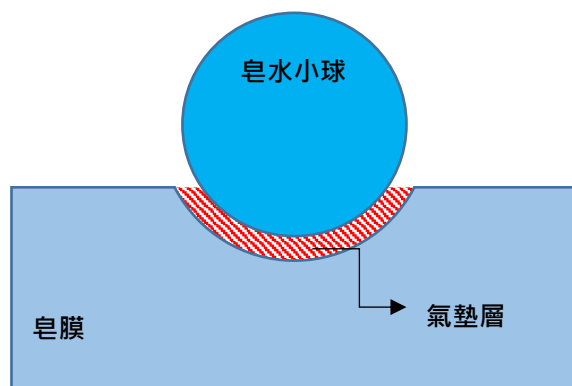


圖 4-7 皂水小球模型示意圖

然而速度過快的皂水小球落在皂膜表面時，下降到膜面的衝力會讓空氣層變得非常薄，不易形成氣墊，無法作為穿越時的保護層，因此穿越的小球落於衛生紙上可看出略有變色（圖4-8）。但仔細觀察圖片，僅外圍與中心點有變色，且穿越的瞬間並沒有觀察到變色（圖4-9），因此可以推判，穿越皂膜時帶來的鹼性皂水僅包覆在小球外圍。進一步探究理論，乃皂水小球上之界面活性劑成分影響，藉由親油端與親水端排列整齊（圖4-10），受內聚力作用，而使夾雜皂膜的鹼性物質不與皂水小球互溶，故穿越時儘管沒有氣墊層，仍具有保護作用。

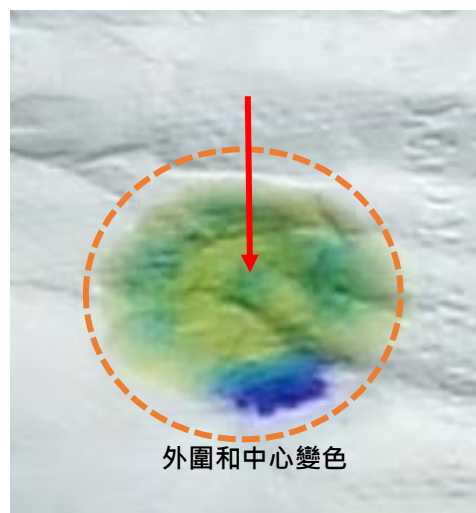


圖 4-8 穿越皂膜後落於衛生紙上

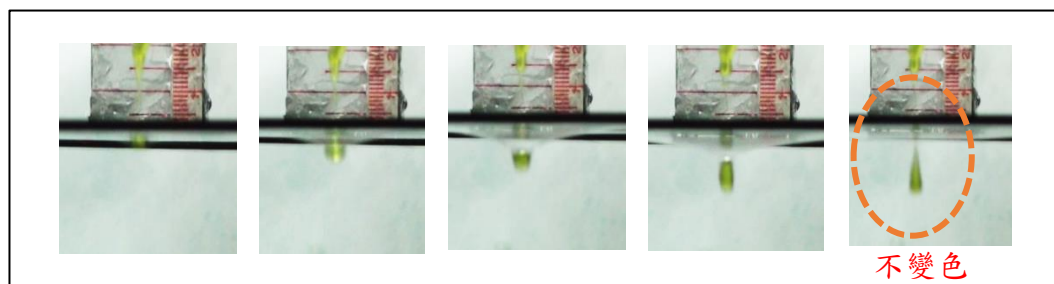


圖 4-9 皂水小球穿越皂膜仍不變色

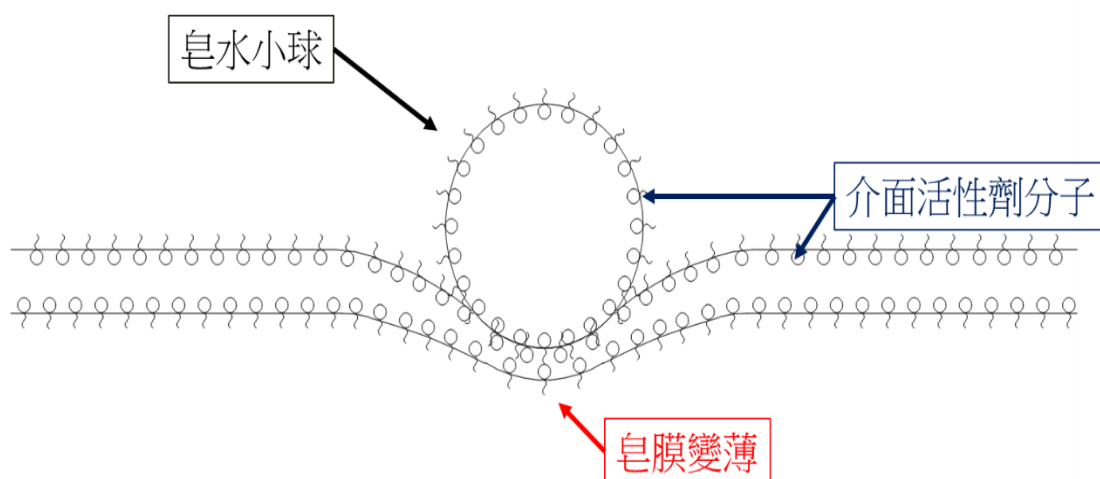


圖 4-10 皂水小球與皂膜之界面活性劑分子示意圖

四、實驗四：不同位置對於彈跳高度的影響

(一) 液滴滴落質量測量 (點滴管)

將質量除以滴數後即得該液滴之平均質量為 0.00642 (g/滴)。

(二) 液滴高度與速度的關係

皂水滴落流速固定，環境控制在預設範圍。因為不考慮空氣阻力及其內部形變，由等加速度公式：

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

而假定滴落時初速為 0，彈落高度 h ，故得： $v \propto \sqrt{h}$ 。

為了使初速為 0，將迴歸直線之鉛直截距去除，結果如圖 4-11：

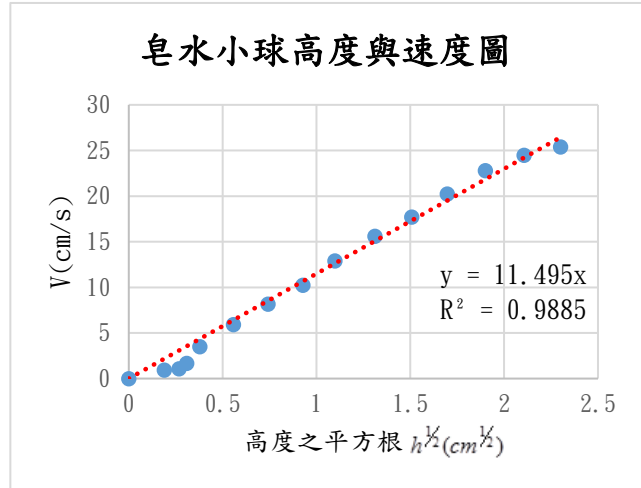


圖 4-11 皂水小球高度與速度圖

(三) 不同位置對於皂水小球彈跳高度的影響

根據實驗結果 (圖 4-12) 顯示，隨著滴落高度越高，皂膜凹陷越低，彈起的高度越高，且相關係數的絕對值大於 0.85。最低點代表下凹程度，最高點代表張力提供的大小，亦可得知在不同皂膜位置滴落時，其最低點的差異不大，但最高點的差異卻很明顯，越往邊緣移動，跳得越高，所受張力就越大，相同的下凹程度，張力越往邊緣越大，因此可推判皂膜的彈力常數會隨位置改變，且越往邊緣越大 (圖 4-13)。

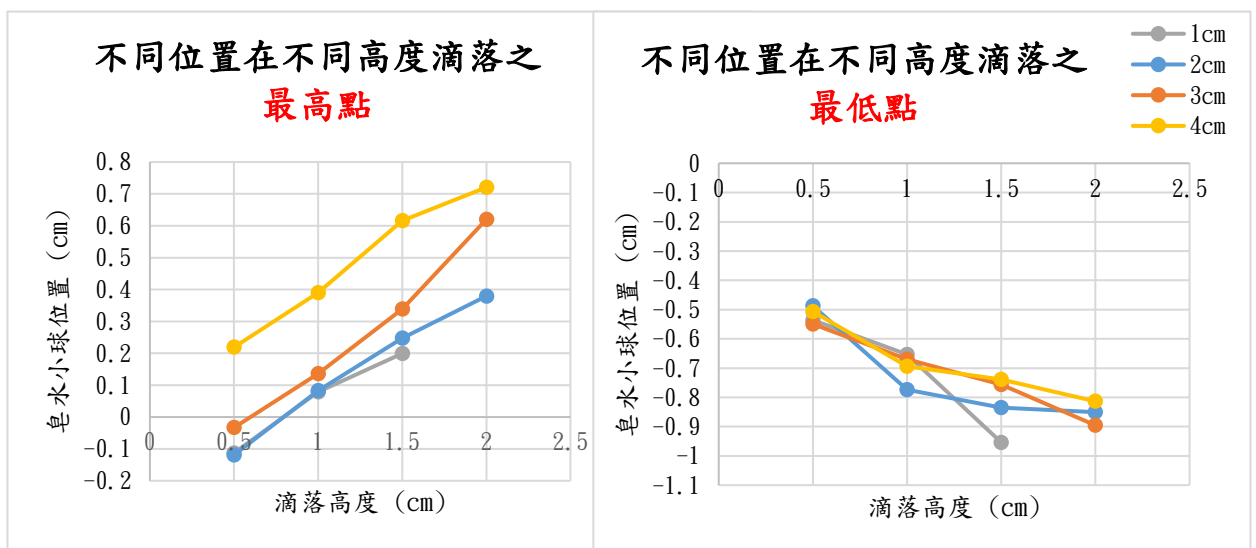


圖 4-12 不同位置在不同高度滴落之最高點與最低點

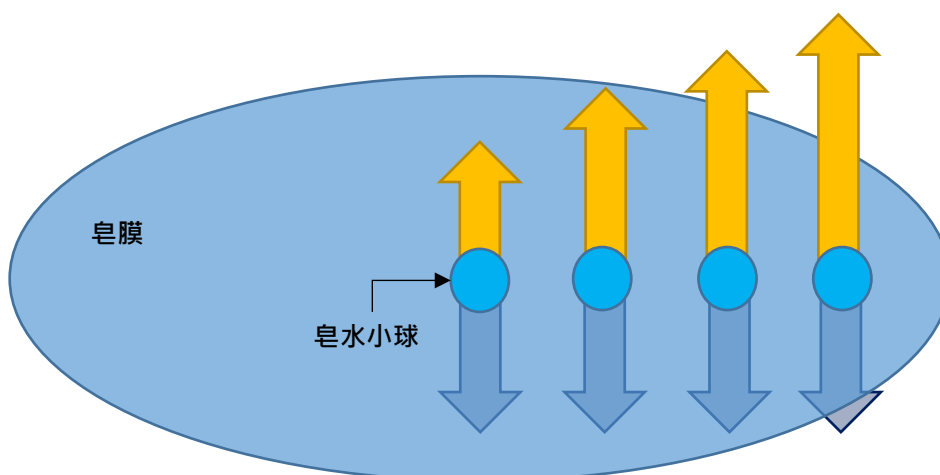


圖 4-13 不同皂水小球滴落位置與彈越高度示意圖

(四) 不同皂膜框的 H_{Max} 值測量

根據表 4-3，皂膜框越小，其臨界高度越大，但小至一定程度後，卻不再增加，因此推測 H_{Max} 有臨界限度的概念，即為皂膜越小，其 H_{Max} 值受半徑影響則越小。

表 4-3 不同皂膜框的 H_{Max} 值

| | | | | |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|
| 皂膜框大小 R (cm) | 10 | 7.5 | 5 | 2.5 |
| 臨界高度 H_{Max} (mm) | 18.50 | 22.61 | 26.04 | 24.92 |

同時，本研究結合實驗四之二的高度與速度關係和實驗五之四的 H_{Max} 值，進行討論二，探討各大小皂膜臨界動能。

五、實驗五：測量不同半徑皂膜的彈力常數

經由影片分析後（圖 4-12），得到不同皂膜向下受力（重量）與對應伸長量的大量數據，因此取這些數據的平均值，作受力與伸長量的關係圖，找尋彈力常數 k ，因此表格內定義 k 為重量分別除以向下伸長量，表 4-3 為結果：

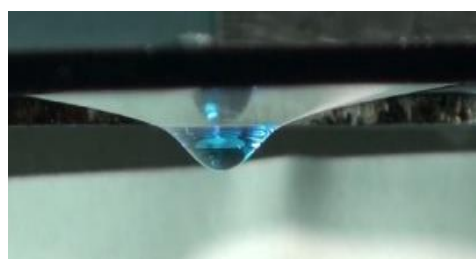


圖 4-12 皂膜因受皂水重量下凹

表 4-3 小球重量與向下伸長量比值

| 重量 mg (dyne) | 比值 $k_{10} = \frac{mg}{X}$ | 比值 $k_{7.5} = \frac{mg}{X}$ | 比值 $k_5 = \frac{mg}{X}$ | 比值 $k_{2.5} = \frac{mg}{X}$ |
|-----------------|----------------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 9.9620 | 43.2157 | 57.1486 | 65.4513 | 49.0040 |
| 19.9241 | 57.7174 | 63.8668 | 68.2524 | 65.0024 |
| 29.8861 | 63.6965 | 67.4078 | 71.1313 | 75.3028 |
| 39.8481 | 65.0207 | 66.3327 | 65.8726 | 79.9289 |
| 49.8101 | 63.3728 | 62.9721 | 65.3377 | 79.7819 |
| 59.7721 | 無法承載 | 63.9914 | 72.8163 | 81.0858 |
| 平均值 | 62.4518 | 63.6199 | 68.1436 | 76.2204 |
| 標準差 | 3.2358 | 1.8675 | 3.2540 | 6.6482 |

進行實驗過程中，發現第一滴時，皂膜特別不容易下凹，而是流向四周，因此導致實驗在第一滴時的誤差都較大，故以上計算 k 值時，將第一滴數據先排除，此時 k 較符合一定值。

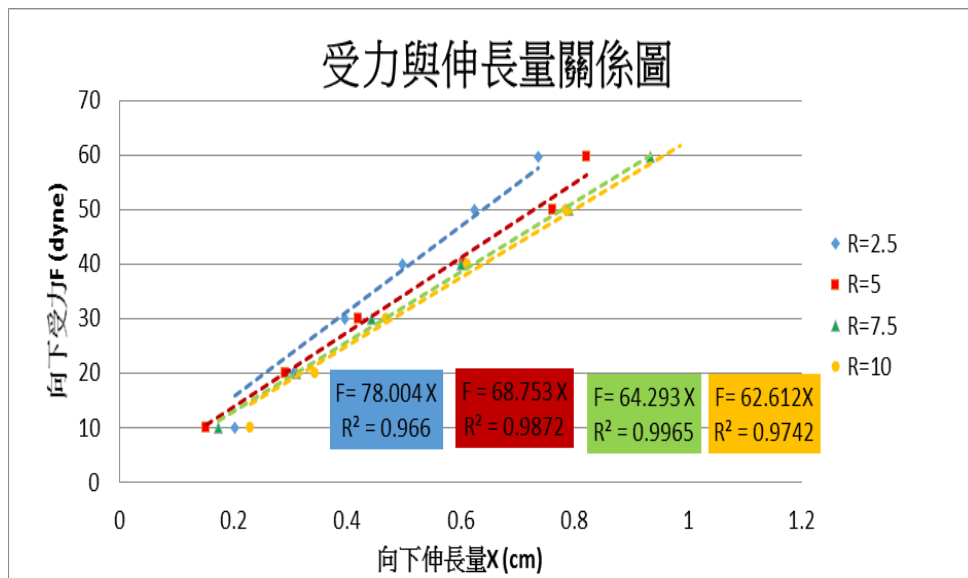


圖 4-13 受力與伸長量關係圖

根據圖 4-13 顯示受力與伸長量的關係為線性，亦即兩者成正比，這個特性突破傳統虎克定律 (Hooke's law) 僅討論固態材料，證實流體膜亦能適用虎克定律，因此本研究定義彈力常數為 $k = \frac{mg}{X}$ 。

在半徑 10cm 時，k 值約為 62.4518 dyne/cm；在半徑 7.5cm 時，k 值約為 63.6199 dyne/cm；在半徑 5cm 時，k 值約為 68.1436 dyne/cm；在半徑 2.5cm 時，k 值約為 76.2204 dyne/cm，由表 4-3 可知。綜觀四組不同大小的皂膜，k 值皆不一樣，隨著半徑 R 增加而減少，k 值與皂膜框大小有什麼關係呢？

陸、討論

一、皂水小球彈跳分析討論

在實驗二建構的三個期程中，僅作定性的觀察，為了更加了解皂水彈跳的高度在各期程的特徵，我取實驗四半徑 2.5cm 之皂膜板，皂水以 1cm 高的位置對準正中心點滴落度，再次進行多次實驗，對高度與時間作圖。下圖為其中一次的结果：

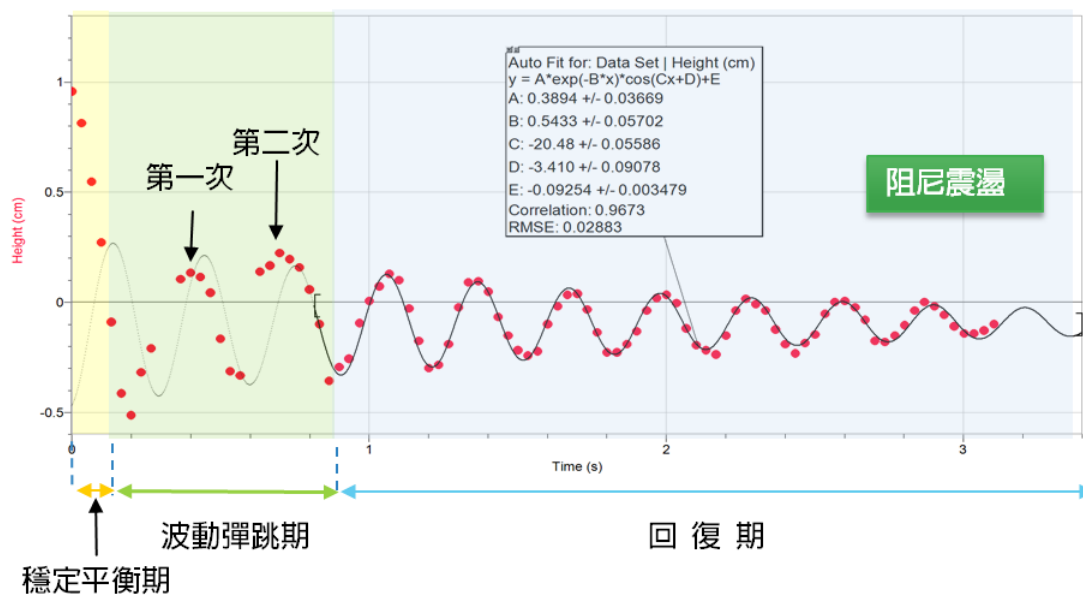


圖 6-1 Logger Pro 阻尼震盪曲線擬合結果

觀察上圖，在穩定平衡期中，主要是脫離滴管落至膜面的過程，這段期間膜面沒有太大變化，而影響皂水小球的因素，在討論二中，會有詳細的說明。

在波動彈跳期處，可發現極有趣的現象。第二次的彈跳高度竟然比第一次還來得高，但此現象僅發生於較小的皂膜，因此本實驗認為可能的原因是：

一、皂膜一開始為鬆弛的狀態，故第一次彈跳所提供之彈力較小，而第二次則是經過第一次彈跳後，分子排列較整齊且較緊繃，故提供之彈力較大。

二、皂膜的型態類似彈翻床 (Trampoline)，當人在上彈跳時，為了跳得越高，通常會施一向下的力，使彈簧儲存的位能增加；而皂水小球也可能因為本身的形變，對皂膜施力。

三、也是最可能的原因，因為滴落時皂水小球於平靜的皂膜面上產生波動，第一次彈跳時，皂水一部分的動能轉化為皂膜波動的動能，而再度掉落至皂膜面時，恰巧皂水小球位於波峰處，故皂水小球在波動的助力下，於第二次彈跳得更高。由於這需要皂膜的波動情形恰好符合，因此相較更大半徑的皂膜，並沒有此現象產生。

此外，觀察後半段回復期的震盪，和**阻尼震盪**情形類似，故將數據套進阻尼震盪公式趨勢線後，發現吻合度很高（圖 6-2），但不包括前兩次的彈跳，若將前兩次的彈跳與趨勢線比對，可見第一次掉下的最低點與第二次彈起的最高點皆超過阻尼震盪應有的振幅。因此將影片重新分析一次後，證實前兩次的彈跳皆有離開皂膜表面，而後就溶進皂膜裡，使皂膜上下作阻尼震盪，故可推測前兩次的彈跳應為**阻尼震盪和鉛直拋射的函數互相連接**，而此鉛直拋射所受的影響很多，包括皂膜對皂水小球的黏滯力、空氣阻力、水滴的形變，甚至是波動的影響，因此前兩次的震盪非常複雜，難以得出位移與時間的關係式。

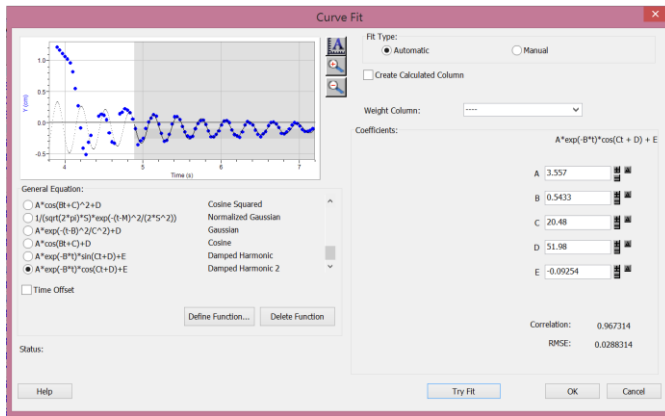


圖 6-2 Logger Pro 進行擬合

進一步探討阻尼震盪，由上圖可以從 Logger Pro 得出位移 y 與時間 t 關係式。設 Z 為平移值，公式如下：

$$y = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \delta) + Z \quad (6-1)$$

其中， β 為阻尼參數、 ω_1 為阻尼振子（水滴）的頻率。

又 $\omega_0^2 = \omega_1^2 + \beta^2$ ， ω_0 為無阻尼時的特徵頻率，故根據簡諧運動得：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6-2)$$

因此由式 6-2 可算出皂膜在此條件下的彈力常數，與實驗五靜力平衡所得的結果作比對，可得以下結果：

表 6-1 阻尼震盪所得 k 值比對數據（dyne）

| 實驗五所得 k 值 | 阻尼震盪所得 k 值 | 相差倍率 |
|-----------|------------|---------|
| 76.2204 | 2.7469 | 27.7474 |

由表 6-1 可發現阻尼震盪所得 k 值遠比實驗五所得 k 值小許多，竟相差了 27 倍，於是針對皂水小球的位置與時間推算最低點的加速度，乘上皂水小球質量，算出皂水小球實際受力，將結果分別與 k 值乘上最低點伸長量所得受力進行比較，得表 6-2 結果：

表 6-2 皂水小球首次碰到皂膜之速度與加速度

| V 與 a 位 置 | 首次碰到皂膜 | 最低點 | 首次彈起 脫離皂膜 |
|-----------------------------------|----------|----------|--------------|
| V 速度 cm/s | -10.8449 | | 9.4179 |
| a 加速度 cm/s ² | | 265.4135 | |
| 首次碰到皂膜與首次彈起脫離皂膜的速度得恢復係數 e= 0.8684 | | | |

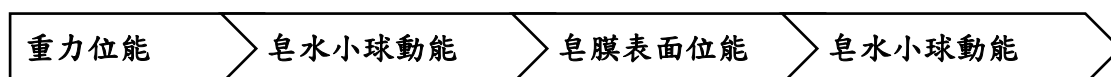
表 6-3 皂水小球受力比對

| $F = m_{\text{皂水小球}} \cdot a_{\text{最低點}}$ (dyne) | $F = k_{\text{阻尼震盪}} \cdot X$ (dyne) | $F = k_{\text{實驗五}} \cdot X$ (dyne) |
|--|---|--|
| 1.7040 | 1.4111 | 39.1547 |

根據表 6-3，得知阻尼震盪 k 值算出的受力與實際受力較為接近，而與實驗五靜力平衡的 k 值算出的受力相差較遠，且由表 6-2 回復係數可知皂水小球的碰撞為不完全彈性碰撞，過程有能量的損耗，因此動態時的彈力常數會受到空氣阻力與黏滯力等因素，使得 k 值小於靜力平衡所求得的。

二、臨界動能探討

臨界性質一向備受重視，因此本討論針對皂膜的臨界動能進行探討。藉由結合小球落至膜面速度與動能公式，將實驗四測得的臨界高度代入，即可計算出穿越時必須具備的動能。以下為力學能的轉換過程：



假設皂膜面為重力位能零位面，而初有的重力位能為 $U = mgH$ ，在皂水小球滴下的瞬間，因為水滴形成後才脫離點滴管，可視為初速為零，動能亦為零。而在皂水小球落下的過程中，若視為保守力場，可由力學能守恆公式，得知：

$$mg(h_f - h_0) = \frac{1}{2}m(V_f^2 - V_0^2) \quad (6-3)$$

然而，實際上仍有非保守力做功，由實驗四得到的高度與速度之迴歸直線

$$v = 11.495 \cdot \sqrt{h} \quad (6-4)$$

將式(6-4)帶入動能公式，求得落至皂膜表面時的動能式

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(11.495 \cdot \sqrt{h})^2 \quad (6-5)$$

將實驗四之四的結果代入式(6-5)得表 6-4：

表 6-4 皂水小球臨界高度及臨界動能

| 皂膜框大小 R (cm) | 臨界高度 (mm) | 臨界動能 (μJ) |
|--------------|-----------|------------------------|
| 10 | 18.50 | 0.0785 |
| 7.5 | 22.61 | 0.0959 |
| 5 | 26.04 | 0.1104 |
| 2.5 | 24.92 | 0.1057 |

為了更精準的控制小球，除了臨界動能外，一些無因次的參數常用來分析此現象。令液滴半徑 R 、液體的密度 ρ 、黏滯係數 μ 、表面張力 T 和撞擊時的速度 v_i ，大致將滴落的過程分為三步驟，分別討論不同無因次參數造成的影響：

(一)水滴尚未滴落時，皂水小球仍附著於微量滴管，此時小球不是圓形，會受到 Bo (Bound Number) 影響，小球本身的重力須克服它對微量滴管頭的張力，方可脫離。在實驗一中 (圖 4-2, $t=1\sim 95$) 即可看到此過程。

$$\text{Bound Number, } Bo = \frac{\text{重力}}{\text{表面張力}} = \frac{R^3 \rho g}{TR} = \frac{R^2 \rho g}{T} \quad (6-6)$$

(二)小球自空氣中下落，此時受到的外力有重力和空氣阻力，在滴落速度不大的情形，液滴會因內聚力而略呈球狀，表面張力視為內力不加以討論，因此常數 Re (Reynolds Number) 對運動的影響較為顯著。在 Reynolds Number 很低的時候 ($Re < 1$)，阻力大致和速度成正比，且和速度方向相反。

$$\text{Reynolds Number, } Re = \frac{\text{慣性力}}{\text{黏滯力}} = \frac{\rho v_i^2 R^2}{\mu v_i R} = \frac{\rho v_i R}{\mu} \quad (6-7)$$

(三)小球滴落至皂膜表面，此時 We (Weber number) 與 Oh (Ohnesorge number) 造成關鍵性的影響。

$$\text{Weber number, } We = \frac{\text{慣性力}}{\text{表面張力}} = \frac{\rho v_i^2 R^2}{TR} = \frac{\rho v_i^2 R}{T} \quad (6-8)$$

$$\text{Ohnesorge number, } Oh = \frac{\text{黏滯力}}{\text{表面張力}} = \sqrt{\frac{We}{Re^2}} = \sqrt{\frac{\frac{\rho v_i^2 R}{T}}{\frac{\rho^2 v_i^2 R^2}{\mu^2}}} = \frac{\mu}{\sqrt{\rho TR}} \quad (6-9)$$

其中 Oh (Ohnesorge number) 的大小，可看出液滴黏滯性對小球本身形變所造成的影響。當 $Oh > 1$ 時，液滴的形變易因黏滯效應而減弱，故液滴的形變可忽略；但當 $Oh \ll 1$ 時，液滴的形變就很明顯，不能加以忽視。

而 We (Weber number) 的大小，則是影響皂水小球彈跳與否的關鍵。當 Weber number 甚小時，也就是小球接觸膜面時的速度較小，會有一些氣體被擠壓在液滴與膜面間形成氣墊層，就是因為這氣墊層的存在，才會使小球及膜面各自表現它們的表面張力。反之，若 Weber number 過大時，形成的氣墊層較薄，會造成小球穿越皂膜的現象。

藉由以上的無因次參數，與臨界動能的概念結合，可以更精準的判斷小球的行為，掌握小球落下時的速度，控制氣墊層的生成，造成皂水小球彈跳，抑或是穿越，因此，臨界的性質便突顯而出。

三、彈力常數討論

根據實驗五的研究結果，皂膜向下受力與向下伸長量成正比，但不同皂膜框大小的 k 值卻不同，代表彈力常數似乎與半徑 R 有關，因此以下為對 k 值的討論。

根據文獻解釋，皂膜張力來自於分子間的作用力，皂膜下凹時，分子間的距離逐漸被拉大，庫侖作用力隨著距離變大而減弱，當庫侖作用力無法再承受更強拉扯時，皂膜就會破裂。由於皂膜張力並不朝同一方向，而是沿著曲面，故假設皂膜提供的張力皆來自皂膜與皂膜框接觸的表面張力，而方向為曲面的

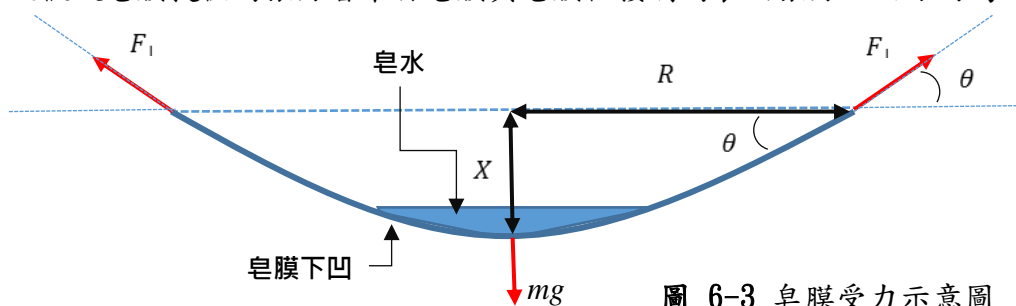


圖 6-3 皂膜受力示意圖

平均斜率 $\frac{X}{R}$ (圖 6-3) 所示，由表面張力公式：

$$F = TL \quad (6-10)$$

其中 T 為皂膜中央表面張力之定值， L 為表面張力作用的曲線長度，而因為皂膜是雙層膜，故得圓形皂膜的張力大小為

$$F = 2 \cdot 2\pi RT \quad (6-11)$$

若假設 θ 角為皂膜向下伸長量 X 與半徑 R 所形成直角三角形與水平面的切角 (圖 6-3)，則此張力提供水珠的鉛直向上作用力則是

$$F_{\perp} = 2 \cdot 2\pi RT \cdot \sin \theta \quad (6-12)$$

在等待下滴皂水滴落前的時間間隔內，

此時可視為靜力平衡，此時 $F_{\perp} = mg$

m 為此時皂水膜上水滴質量。

若 $X \ll R$ ， θ 極小，因此 $\sin \theta \cong \theta \cong \frac{X}{R}$ ，

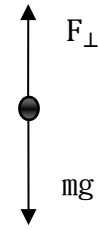


圖 6-4 皂膜受力力圖

故

$$F_{\perp} = 2 \cdot 2\pi RT \cdot \frac{X}{R} = 4\pi T \cdot X = mg \quad (6-13)$$

其中 $4\pi T$ 即為彈力常數，而 π 、 T 皆為定值，所以彈力常數 k 為定值，然而實際上， $X \ll R$ 並不成立，且根據實驗五結果指出，不同半徑皂膜框的 k 值不同，因此需在彈力常數中加入針對不同半徑的修正項。推論 k 值與 R 之間的關係，比較測各大小皂膜的 k 值與理論值，以迴歸曲線找此比例之方程式，得到以下修正結果：

表面張力的另一意義為每單位面積所做的功，而皂膜為雙層膜，作功為皂水小球重量乘上伸長量，亦即

$$T = \frac{W}{2A} = \frac{mg \cdot X}{2A} \quad (6-14)$$

又此時靜力平衡，小球重量等同皂膜提供向上的力量

$$k \cdot X = mg \quad (6-15)$$

因此，綜合式 (6-14) 和式 (6-15) 可得

$$k = \frac{m^2 g^2}{2AT} \quad (6-16)$$

因為 m 、 g 、 T 皆為定值

故彈力常數正比於受力面積倒數，也就是半徑平方的倒數

$$k \propto \frac{1}{A} \propto \frac{1}{R^2} \quad (6-17)$$

由圖 6-5 可得增加半徑平方之倒數修正項關係式，該修正為：

$$k = 4\pi T \cdot \left(\frac{0.2265}{R^2} + 0.1628 \right) \quad (6-18)$$

表 6-5 理論與實際 k 值相差倍率分析

| 半徑 R | 理論 k 值 ($4\pi T$) | 實際 k 值 ($\frac{mg}{X}$) | 相差倍率 $P \left(\frac{\text{實際}k}{\text{理論}k} \right)$ |
|--------|--------------------------|--------------------------------|--|
| 10 cm | 384.8451 | 62.4518 | 0.1623 |
| 7.5 cm | 384.8451 | 63.6199 | 0.1653 |
| 5 cm | 384.8451 | 68.1436 | 0.1771 |
| 2.5 cm | 384.8451 | 76.2204 | 0.1981 |

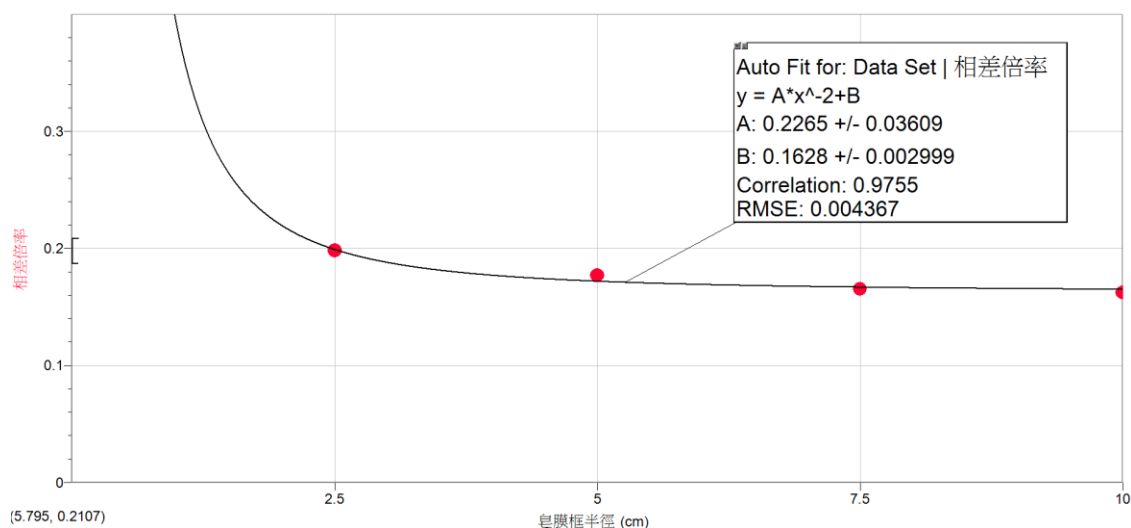


圖 6-5 Logger Pro 倍率曲線擬合結果

藉由修正 k 值，可進一步找出不同半徑皂模框的 k 值，因此利用向下伸長量，便可求得皂膜施予皂水小球的垂直作用力，即 $F_{\perp} = k \cdot X$ 。

四、誤差分析

主要的誤差來源如下：

(一) 皂膜的波動與皂水小球的形變

由高速攝影機拍攝的圖中，可以清楚看見皂水小球的形變，這些不同的形狀，可能對於形成氣墊層有影響。而當皂膜框越大時，波動的现象越明顯，無論是聲音、震動，甚至空氣擾動也可能對於皂膜產生波動。若皂水小球落在此尚未穩定的膜上，可能產生不同的彈跳高度，故實驗時必須以較多的時間等待。

(二) 皂膜流動造成厚度不均

因為 Marangoni 效應的影響，當皂膜受到來自皂水滴落所施之外力，皂膜產生局部變薄、表面濃度降低、膜強度下降，變形區周圍膜中的介面活性劑分子向此處遷移（附錄二），並因親水作用攜帶水分子流向此處，使液膜增厚。而在微觀下，皂膜初始的厚度分布仍有些微差異，使得彈起時給予皂水小球水平速度，進而導致誤差。

(三) 溫度對表面張力的影響

根據文獻資料（參考資料七），溫度對於皂膜的性質，包括表面吸附、Marangoni 效應、表面彈性、表面黏度。其得出的結論為：溫度越高，分子運動越激烈，獨佔面積增加，造成表面吸附量減少、表面黏度降低、Marangoni 效應減弱及表面彈性減少，而造成表面張力降低。

柒、結論

綜合實驗結果與討論，以下分三點做總結：

一、確立皂水小球之彈跳模式

- (一) 皂水小球彈跳時的分期：穩定平衡期、波動彈跳期、回復期
- (二) 波動彈跳期皂水並無溶入皂膜，原因乃氣墊層的保護
- (三) 回復期符合阻尼震盪，具有減速與穩定作用
- (四) 穿越時乃界面活性劑的助力，與皂膜的液體並無互染

二、皂水小球彈跳高度的影響

- (一) 皂膜面上之張力強度越靠近邊緣越大
- (二) 臨界動能與 Weber number 是判定皂水能否穿越的依據

三、皂膜彈簧的彈力常數

- (一) 皂膜中心點的受力與伸長量的關係成正比
- (二) 彈力常數 k 隨著半徑增加而減小
- (三) 建立彈力常數修正式， k 值與半徑平方成反比
- (四) 皂膜之動態 k 值受到空氣阻力、黏滯力影響而小於靜態 k 值

簡而言之，本研究成功運用簡單的實驗設計，證明皂水小球彈跳與皂膜的交互作用，同時建立彈跳模型，找出各時期的特徵，掌握穿越的關鍵，並且透過皂膜創立一套全新的質量測量方法。

捌、未來展望

近 20 年來，對於這種厚度薄、取材方便、形狀任意、又具流動性的皂膜，相關的研究並不少。然而大部分著重於探討皂膜干涉現象，而非張力，因此，這方面仍具有龐大的發展空間。

在醫學領域中，一項生化的癌症治療藥物—微脂體 (liposome) 與皂水小球的構造相似，同樣具有疏水性 (hydrophobic) 及親水性 (hydrophilic) 的特性，亦具有保護功能。一般抗癌藥物都有蓄積毒性，因此藉由類似細胞膜的雙層構造，將藥物包在微脂體內，可降低藥物毒性。隨著製程的改進，目前確實已有清潔劑透析法 (detergent dialysis) ，配合濾膜擠壓法 (filter

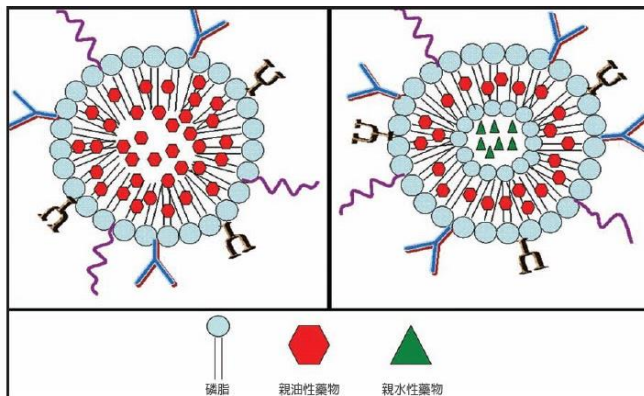


圖 8-1 微脂體(liposome)示意圖

來源:<http://marrble.com/2010/07/16/>

%E5%BE%AE%E8%84%82%E9%AB%94liposome/

membrane extrusion) 來製造單一脂雙層，因此同為清潔劑的皂水小球，未來亦可能作為微脂體，降低製造成本，對於癌症治療上經濟且有實質助益。

同時亦有研究指出，在微脂體上加入 cell-specific ligands，促進它和目標細胞的作用，達到定點釋放，可降低抗癌藥物對一般組織的毒性。因此掌握微脂體進出細胞是重要的技術，若能將皂膜的臨界動能特性運用於細胞膜上，限定誰能進，誰被反彈，進而減低抗癌藥物對正常細胞的傷害，對於癌症病人的治癒率，抵抗力與生活品質的提昇，將有顯著的幫助（詳見參考資料十二）。

而在工業上，藉由更精密的儀器和穩定的環境，透過無因次參數，與臨界動能結合，可以精準掌握小球的行為，因此皂膜的臨界特性和累積減緩特性得以量化，未來只要知道特定條件物質穿越的時間，便可像質譜儀一樣，測得物質種類。

此外，利用皂膜彈力與伸長量成正比的特性，亦可作為皂膜彈力秤（圖 8-2）。比起使用一般固體彈簧秤，不易觀察微小質量的伸長量，相較之下皂膜彈力秤較為顯著，對於微小質量的測量將有很大的幫助。

甚至，有研究論述用液滴和水龍捲來解釋黑洞理論，因此，未來若能整合皂水小球彈跳與膜龍捲的多心運動（圖 8-3），或許能提供探討天文學理論的工具。

本研究探討的物理機制，包括氣墊層的保護作用、皂膜的臨界特性、減緩作用、與彈力和伸長量正比關係，未來若能與各領域結合，有更深一層研究，則這項有趣的實驗，在醫學、工業、物理上等方面，將會有創新的突破。



圖 8-2 皂膜彈力秤

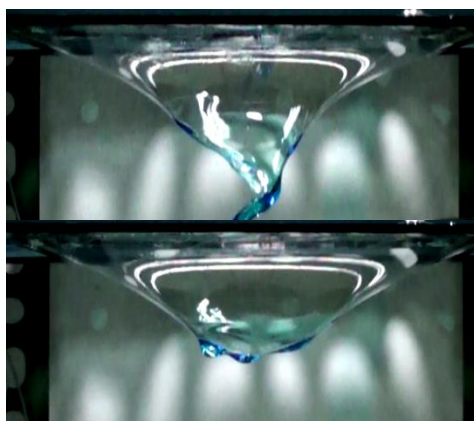


圖 8-3 膜龍捲與膜上多心運動

玖、參考資料及其他

- 一、 傅宗玖、陳正昉。2001。「冒泡的美」。科學發展月刊第 29 卷第 11 期，p. 788~P. 796。
- 二、 黃泰翔。2001。表面張力的誤差探討與實驗改進。九十年台灣國際科展優勝作品集。
- 三、 嚴凱傑、朱柏憲。2009。製作奈米的肥皂泡膜。第 49 屆全國中小學科展作品集。
- 四、 楊哲寧、葉昱廷、蔡荃宇。2011。魔力？膜力！泡膜形變力之研究。第 51 屆全國中小學科展作品集。
- 五、 許喆媛、呂汶諺、侯宜伶。2014。水舞-水滴在薄層液上的噴濺性。第 54 屆中小學科學展覽會作品集。
- 六、 蔣儀宣、朱鳳華、徐悅聲。2012。與波共舞的飄浮水滴。2012 年臺灣國際科學展覽會優勝作品專輯。
- 七、 劉德生、陳小榆、周承富。2006。溫度對泡沫穩定性的影響。鑽井液與完井液第 23 卷第 4 期，p. 10~p. 12。
- 八、 袁苙芸、蕭佩宛，2014，馬拉高尼效應與肥皂泡接近之機制，中學生小論文競賽作品。
- 九、 冉長壽（民 95）。質點和系統的古典動力學（增）。臺北市：徐氏基金會。
- 十、 蔣大鵬等（民 101）。普通物理。臺北市：東華。
- 十一、 Robert W. Fox 等著、王珉玟等譯（民 103）。流體力學。新北市：全華。
- 十二、 癌症關懷照護網。

附錄一：阻尼震盪公式推導

假設阻尼力為速度之線性函數， $F_d = \alpha v$ ，考慮一維阻尼的震動而改寫為

$F_d = -b \dot{x}$ 。因此對於一個質量 m 的質點受彈性恢復力 $-kx$ 和阻力 $-b \dot{x}$ ，則可假

設方程式： $m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx$ ，可改寫為： $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ 。上式中 $\beta \equiv \frac{b}{2m}$ 稱為

阻尼參數， $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 為無阻尼時的特徵頻率。由線性齊次方程式知，上式的通解為：

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 \exp(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t) + A_2 \exp(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t)]$$

對於次阻尼運動， $\omega_0^2 > \beta^2$ ，所以假定阻尼振子之頻率 $\omega_1 \equiv \omega_0^2 - \beta^2 > 0$ ，使得上式改寫為：

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}]$$

再由歐拉公式： $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ 、 $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ 可得：

$$x(t) = e^{-\beta t} \{A_1 [\cos(\omega_1 t) + i \sin(\omega_1 t)] + A_2 [\cos(\omega_1 t) - i \sin(\omega_1 t)]\}$$

整理得：

$$x(t) = e^{-\beta t} \{[A_1 + A_2] \cos(\omega_1 t) + i[A_1 - A_2] \sin(\omega_1 t)\}$$

設 $A_1 = \overline{A_2}$ ， $A \equiv A_1 + A_2$ ， $B \equiv i(A_1 - A_2)$ 且 $A, B \in \mathbb{R}$ 、 $\mu = \sqrt{A^2 + B^2}$ ，定義一個角 δ 使

$$\sin \delta = \frac{B}{\mu} ; \cos \delta = \frac{A}{\mu} ; \tan \delta = \frac{B}{A}$$

則解即變成

$$x(t) = \mu e^{-\beta t} [\cos \delta \cos(\omega_1 t) + \sin \delta \sin(\omega_1 t)]$$

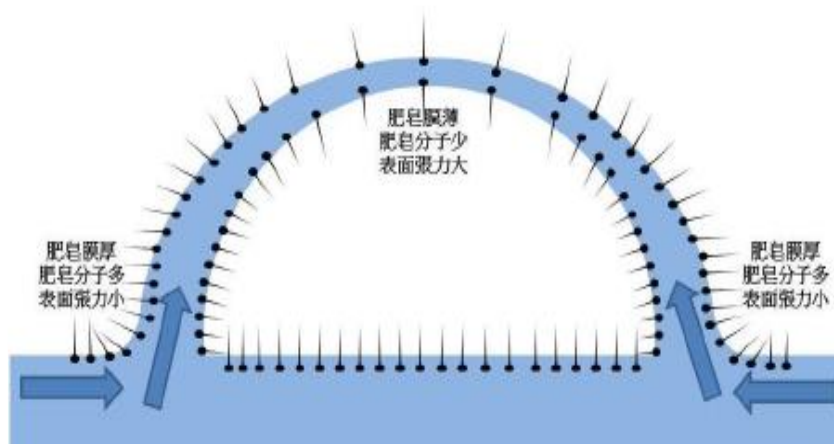
$$x(t) = \mu e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

經由些微的調整後，採用以下格式

$$y = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \delta) + Z$$

附錄二：Marangoni 效應

當肥皂膜變薄時，該處肥皂分子濃度下降，表面張力變大，而一旁肥皂膜較厚、肥皂分子濃度較高的區塊，表面張力較小，進而導致液體從肥皂膜厚的區域流向肥皂膜薄的區域，此一流動結果稱為馬拉高尼流（Marangoni Flow）。這可視為肥皂泡的自體修復能力，快破裂的薄區獲得厚區流來的液體補充，因此才不會破裂。而肥皂泡因受重力影響，會導致上方肥皂膜較薄、肥皂分子少、表面張力大，而下方與水接觸的地方肥皂膜較厚、肥皂分子多、表面張力小，此時就會產生馬拉高尼效應（Marangoni Effect）所造成的馬拉高尼流。在不考慮內外氣體影響，示意圖如下：



附錄三：重要實驗數據

一、單位體積的質量

| 數據 | 體積 (ml) | 質量 (g) | 密度 (g/ml) |
|----|---------|--------|-----------|
| 1 | 25 | 25.53 | 1.0212 |
| 2 | 25 | 25.38 | 1.0152 |
| 3 | 25 | 25.48 | 1.0192 |
| 4 | 25 | 25.35 | 1.0140 |
| 5 | 25 | 25.32 | 1.0128 |
| 平均 | 25 | 25.41 | 1.0165 |

二、皂水的表面張力

| 數據 | 質量變化量 m (g) | 鐵絲長度 l (cm) | 表面張力 $T = \frac{mg}{2l}$ (dyne/cm) |
|----|------------------|------------------|---------------------------------------|
| 1 | 0.25 | 4 | 30.625 |
| 2 | 0.24 | 4 | 29.400 |
| 3 | 0.26 | 4 | 31.850 |
| 平均 | 0.25 | 4 | 30.625 |

三、最低點平均位置

| 滴落高度 (cm) | 位移 1cm | 位移 2cm | 位移 3cm | 位移 4cm |
|--------------|---------|---------|---------|---------|
| 0.5 | -0.5365 | -0.4874 | -0.5496 | -0.5067 |
| 1 | -0.6539 | -0.7738 | -0.6701 | -0.6943 |
| 1.5 | -0.9538 | -0.8350 | -0.7560 | -0.7391 |
| 2 | 已穿越 | -0.8505 | -0.8954 | -0.8135 |

四、最高點平均位置

| 滴落高度 (cm) | 位移 1cm | 位移 2cm | 位移 3cm | 位移 4cm |
|--------------|---------|---------|---------|--------|
| 0.5 | -0.1126 | -0.1189 | -0.0331 | 0.2190 |
| 1 | 0.0792 | 0.0823 | 0.1359 | 0.3900 |
| 1.5 | 0.1993 | 0.2470 | 0.3393 | 0.6164 |
| 2 | 已穿越 | 0.3794 | 0.6199 | 0.7205 |

五、最低點標準差與相關係數

| 滴落高度 (cm) | 位移 1cm | 位移 2cm | 位移 3cm | 位移 4cm |
|--------------|---------|---------|---------|---------|
| 0.5 | 0.1401 | 0.0544 | 0.0350 | 0.0864 |
| 1 | 0.0322 | 0.1073 | 0.0454 | 0.0363 |
| 1.5 | 0.0611 | 0.0555 | 0.0616 | 0.0460 |
| 2 | 已穿越 | 0.0753 | 0.0323 | 0.0512 |
| 相關係數 | -0.9697 | -0.8765 | -0.9962 | -0.9532 |

六、最高點標準差與相關係數

| 滴落高度 (cm) | 位移 1cm | 位移 2cm | 位移 3cm | 位移 4cm |
|--------------|--------|--------|--------|--------|
| 0.5 | 0.1212 | 0.0323 | 0.0240 | 0.0197 |
| 1 | 0.0204 | 0.0359 | 0.0297 | 0.0293 |
| 1.5 | 0.0792 | 0.0724 | 0.0584 | 0.0216 |
| 2 | 已穿越 | 0.0555 | 0.0454 | 0.0387 |
| 相關係數 | 0.9913 | 0.9957 | 0.9932 | 0.9911 |

七、R=10cm k 值比對數據 (平均)

| 滴數 | 體積 V (ml) | 伸長量 X (cm) | 重量 mg (dyne) | 比值 $k_1 = \frac{mg}{\sqrt{X}}$ | 比值 $k_2 = \frac{mg}{X}$ | 比值 $k_3 = \frac{mg}{X^2}$ |
|----|-----------|------------|--------------|--------------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1 | 0.01 | 0.2305 | 9.9620 | 20.7489 | 43.2160 | 187.4739 |
| 2 | 0.02 | 0.3452 | 19.9241 | 33.9111 | 57.7174 | 167.1999 |
| 3 | 0.03 | 0.4692 | 29.8861 | 43.6307 | 63.6965 | 135.7570 |
| 4 | 0.04 | 0.6129 | 39.8481 | 50.9014 | 65.0207 | 106.0950 |
| 5 | 0.05 | 0.7860 | 49.8101 | 56.1837 | 63.3728 | 80.6284 |
| | | | 平均 | 46.1567 | 62.4518 | 122.4201 |
| | | | 標準差 | 9.6503 | 3.2358 | 37.3994 |

八、R=7.5cm k 值比對數據 (平均)

| 滴數 | 體積 V (ml) | 伸長量 X (cm) | 重量 mg (dyne) | 比值 $k_1 = \frac{mg}{\sqrt{X}}$ | 比值 $k_2 = \frac{mg}{X}$ | 比值 $k_3 = \frac{mg}{X^2}$ |
|----|-----------|------------|--------------|--------------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1 | 0.01 | 0.1743 | 9.9620 | 23.8603 | 57.1486 | 327.8408 |
| 2 | 0.02 | 0.3120 | 19.9241 | 35.6719 | 63.8668 | 204.7259 |
| 3 | 0.03 | 0.4434 | 29.8861 | 44.8838 | 67.4078 | 152.0378 |
| 4 | 0.04 | 0.6007 | 39.8481 | 51.4124 | 66.3327 | 110.4202 |
| 5 | 0.05 | 0.7910 | 49.8101 | 56.0058 | 62.9721 | 79.6120 |
| 6 | 0.06 | 0.9341 | 59.7721 | 61.8458 | 63.9914 | 68.5084 |
| | | | 平均 | 45.6133 | 63.6199 | 157.1908 |
| | | | 標準差 | 10.1224 | 1.86754 | 55.9741 |

九、R=5cm k 值比對數據 (平均)

| 滴數 | 體積 V (ml) | 伸長量 X (cm) | 重量 mg (dyne) | 比值 $k_1 = \frac{mg}{\sqrt{X}}$ | 比值 $k_2 = \frac{mg}{X}$ | 比值 $k_3 = \frac{mg}{X^2}$ |
|----|-----------|------------|--------------|--------------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1 | 0.01 | 0.1522 | 9.9620 | 25.5348 | 65.4513 | 430.0202 |
| 2 | 0.02 | 0.2919 | 19.9241 | 36.8763 | 68.2524 | 233.8074 |
| 3 | 0.03 | 0.4202 | 29.8861 | 46.1067 | 71.1313 | 169.2983 |
| 4 | 0.04 | 0.6049 | 39.8481 | 51.2337 | 65.8726 | 108.8933 |
| 5 | 0.05 | 0.7623 | 49.8101 | 57.0480 | 65.3377 | 85.7056 |
| 6 | 0.06 | 0.8209 | 59.7721 | 65.9726 | 72.8163 | 88.70719 |
| | | | 平均 | 47.1287 | 68.1436 | 186.0720 |
| | | | 標準差 | 10.9912 | 3.2540 | 63.5762 |

十、R=2.5cm k 值比對數據 (平均)

| 滴數 | 體積 V (ml) | 伸長量 X (cm) | 重量 mg (dyne) | 比值 $k_1 = \frac{mg}{\sqrt{X}}$ | 比值 $k_2 = \frac{mg}{X}$ | 比值 $k_3 = \frac{mg}{X^2}$ |
|----|--------------|---------------|-----------------|--------------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1 | 0.01 | 0.2032 | 9.9620 | 22.0947 | 49.0039 | 241.0541 |
| 2 | 0.02 | 0.3065 | 19.9241 | 35.9876 | 65.0024 | 212.0712 |
| 3 | 0.03 | 0.3968 | 29.8861 | 47.4394 | 75.3028 | 189.7377 |
| 4 | 0.04 | 0.4985 | 39.8481 | 56.4359 | 79.9288 | 160.3245 |
| 5 | 0.05 | 0.6243 | 49.8101 | 63.0392 | 79.7818 | 127.7881 |
| 6 | 0.06 | 0.7371 | 59.7721 | 69.6180 | 81.0857 | 109.9994 |
| | | | 平均 | 54.5040 | 76.2204 | 159.9842 |
| | | | 標準差 | 13.2077 | 6.6482 | 42.2300 |