第十六屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA16-271

作品名稱：熱的傳導於多層介質的應用

姓名：鍾尚軒

關鍵字：熱傳導、溫度波、python 程式模擬

壹、研究動機：

一、來自一次被湯燙到的經驗:在舌頭被燙傷之餘，突然靈光一閃:熱湯要冷卻多久才能喝?

二、發現市售的電熱水器相較其他電器用品都較為耗電，所以想探討這種能量損失的機制並試圖最小化。

三、地球暖化的現象日益嚴重，因此想探討有關地球大氣層對熱能的反射，進而導出其溫度分布。

貳、研究目的：

一、綜合理論推導與數值模擬，探討一杯液體的冷卻現象。

二、研究熱能在不同介質當中傳遞時滿足的方程式，並依此試圖設計出效率高的保溫裝置。

三、試圖由以上結果建立有關地球大氣的模型，並探討熱在其中的傳遞與對應的溫度分布。

參、研究過程:

一、訂定研究方向以及所用的方程式:傅立葉熱傳導以及牛頓冷卻定律，其方程式分別為$\vec{\dot{Q}} = -kA\nabla T$以及$\dot{Q} = hA\Delta T$。注意到這兩個方程式都是線性方程，因此適用疊加原理。

二、選定以 Python 程式進行數值模擬。

三、以理論推導求出圓柱型容器的形狀以及液體性質與冷卻時間t的關係，並設計程式來驗證結果。分成以下的操作變因:

(一)液體深度L。

(二)牛頓冷卻係數(熱傳係數)h。

(三)液體熱傳導率(熱導係數)k。

四、理論推導探討介質中熱的傳遞方式，並以程式模擬驗證。

(一)探討這種熱流動造成的溫度波動(此研究將簡稱此為溫度波)的性質。

(二)不同介質將具有不同熱傳導係數以及比熱，若將不同介質接合，將產生不同行為的熱傳遞，試圖求出等效折射率與透射/反射比率。

五、模擬一個簡化的加熱器，並研究不同加熱模式下會有什麼反應。

六、模擬具有真空夾層的保溫瓶，並探討最佳內外半徑比例。

七、應用以上的結果，建構出有潛力與研究價值的模型。

(一)隔熱裝置如何設計能夠更有效?

(二)模擬地球大氣的模型，並探討有關反照率的問題。

(三)排放高溫廢氣的工廠煙囪，如何找出最佳設計使其能夠有良好的排熱效應?

(四)未來展望:雷射醫療當中常常以脈衝形式的雷射光射向皮膚。皮膚分成許多性質不同的層次:表皮，真皮等。探討熱在這種系統如何傳遞。

肆、研究結論:

一、液體性質以及容器對冷卻時間影響:

(一)液體性質以及容器尺寸:

首先繪出研究模型圖，如下所示。

可以列出對應的邊界條件:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \; at \; x = 0 \\ -k\dfrac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_{air}) \; at \; x = L \\ T(x,0) = T_i \end{cases}$$

同時寫下熱擴散方程式:

$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{C}{k}\dfrac{\partial T}{\partial t}$，其中$C$是液體單位體積的熱容量。

定義一些無因次參數如下，並代入以上方程式:

$$\theta \equiv \frac{T(x,t) - T_{air}}{T_i}, X \equiv \frac{x}{L}, F_0 \equiv \frac{kt}{CL^2}, \mu \equiv \frac{hL}{k}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\partial \theta}{\partial F_0} \;;\; \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{X}} = -\mu\theta \; at \; \mathrm{X} = 1$$

對θ使用分別變量法得到:

$$\theta(X, F_0) \equiv \Theta(X)G(F_0)$$

代入熱擴散方程式可得:

$$\begin{cases} \Theta(X) = a_n \, sin(\beta_n X) + b_n cos(\beta_n X) \\ G(F_0) = c_n e^{-\beta_n{}^2 F_0} \end{cases}$$

將以上表達式代入邊界條件，並令$q_n \equiv b_n c_n$。分別代入杯底絕熱、邊界牛頓冷卻、初溫相同的條件，則依序可得:

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ \beta_n \, tan(\beta_n) = \mu \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q_n cos(\beta_n X) = 1 - \frac{T_{air}}{T_i} \end{cases}$$

由最後一式得到:

$$q_n = \frac{4\sin(\beta_n)}{2\beta_n + \sin(2\beta_n)}\left(1 - \frac{T_{air}}{T_i}\right)$$

代入θ的表達式可以解出:

$$T(x,t) = T_{air} + (T_i - T_{air})\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin(\beta_n)}{2\beta_n + \sin(2\beta_n)} \cos\left(\beta_n \frac{x}{L}\right) e^{-\beta_n{}^2 \frac{kt}{CL^2}} \;;$$

其中β_n滿足$\beta_n \, tan(\beta_n) = \mu$。

考慮日常生活的尺度，如果液體深度$L = 10(cm)$，則$\mu \approx \frac{50\times0.1}{0.6} \approx 8.33$，可以數值解得$\beta_1 \approx 1.4, \beta_2 \approx 4.3$。檢查可知當$t > 13000(s)$時可以只取到$\beta_1$項。

利用這種近似，可以得到$L = 10(cm)$且$t > 13000(s)$時:

$$T(x,t) = T_{air} + (T_i - T_{air}) \times 1.257\cos(1.4\frac{x}{L})e^{-2.8\times10^{-5}t}$$

計算平均水溫:

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{L}\int_0^L T(x,t)dx = T_{air} + (T_i - T_{air}) \times 0.885e^{-2.8\times10^{-5}t}$$

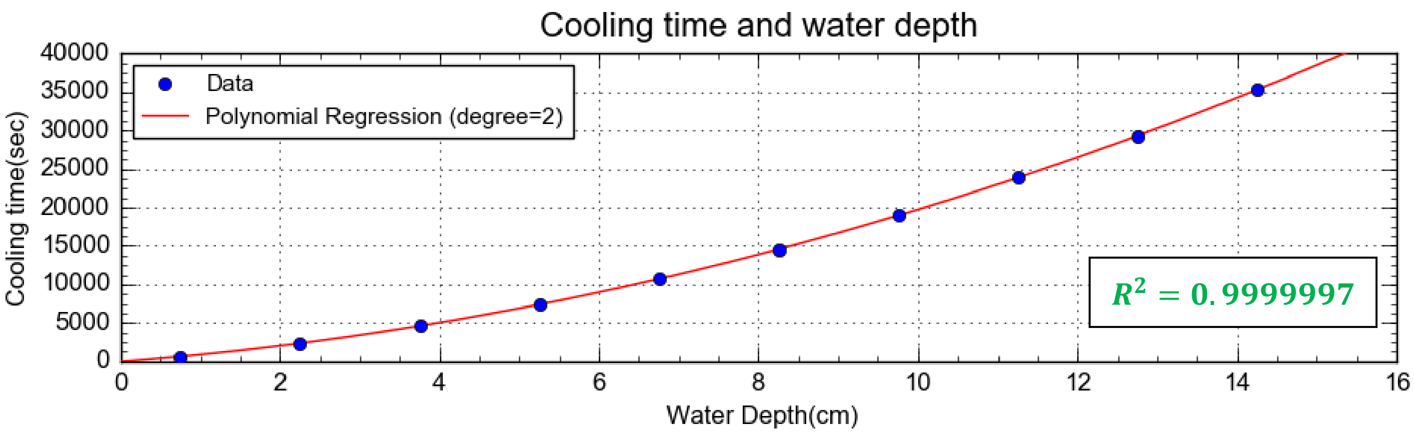
若其在15℃下從70℃冷卻到40℃，所需時間經計算大約為:

$$t_{cool} \approx 2.4 \times 10^4(s)$$

符合近似前提，故是一個合理的答案。

在深度較大時β_1的變化量不大: $1.5 \le \beta_1 < 1.57$時$25 \le L(cm) \le 2370$。如果把β_1近似常數，不同深度冷卻到同一溫度所需時間滿足${\beta_n}^2 F_0$為常數；即t_{cool}與L^2可近似正比。

有關冷卻時間t與深度L的 Python 數值模擬圖結果如下:



以上所顯示的回歸線其方程式為:

$$t = 118.1L^2 + 795.6L$$

由此可以發現冷卻時間t與深度平方L^2有關，且深度大的時候$t \propto L^2$。

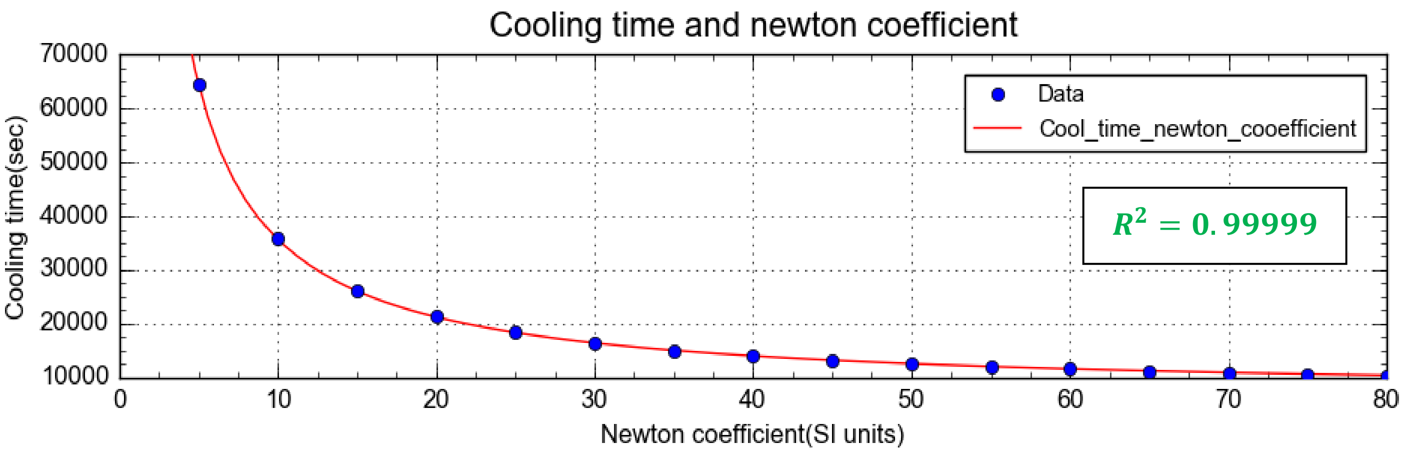
要探討熱導係數與熱傳係數與冷卻時間的關係，可以使用變數變換。

觀察下列兩式:

$$\begin{cases} -k\dfrac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_{air})\ at\ x = L \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{C}{k}\dfrac{\partial T}{\partial t} \end{cases}$$

可以發現，經由變數變換$k \to nk, h \to nh$時$dt \to \frac{1}{n}dt$。因此，在兩個係數都較小的時候，$t_{cool} \approx \frac{p}{k} + \frac{q}{h}$。

有關冷卻時間t與牛頓冷卻係數h的 Python 數值模擬圖結果如下:

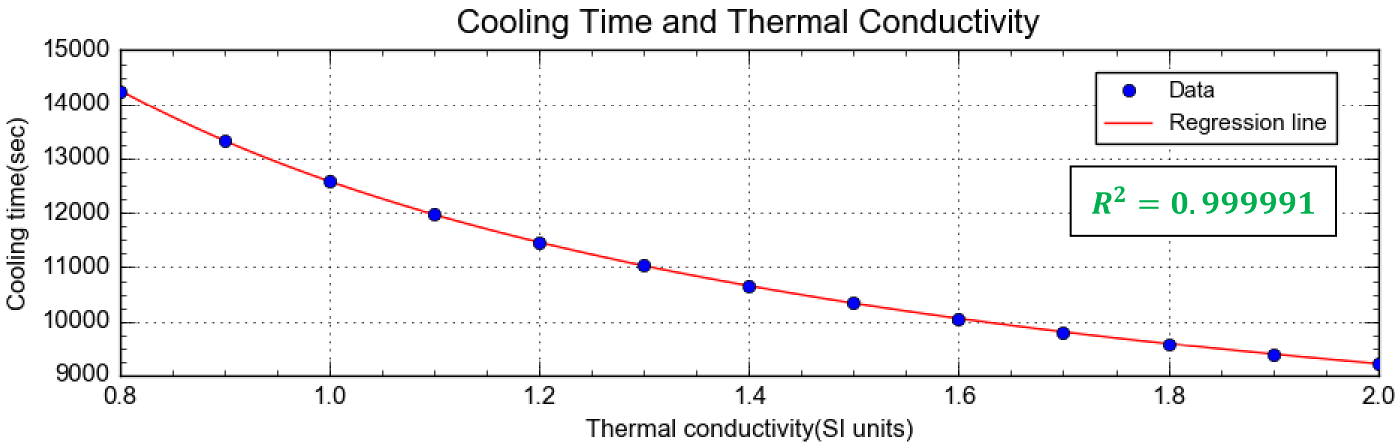


以上所顯示的回歸線其方程式為:

$$t = 6812 + \frac{2.89 \times 10^5}{h}$$

由此可以發現冷卻時間t與牛頓冷卻係數倒數$\frac{1}{h}$有關，這是小係數時的表達式。

有關冷卻時間t與熱傳導率k的 Python 數值模擬圖結果如下:



以上所顯示的回歸線其方程式為:

$$t = 5857 + \frac{6722}{k}$$

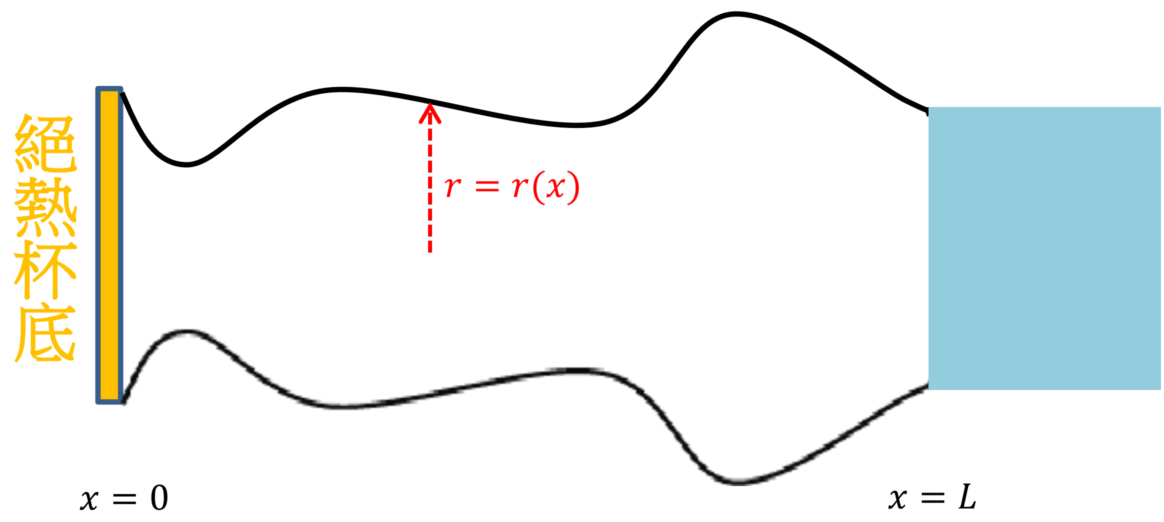
由此可以發現冷卻時間t與牛頓冷卻係數倒數$\frac{1}{k}$有關，這是小係數時的表達式。

綜上所述，由數值模擬可以測得在液體是水，深度為$L = 7.5(cm)$的情況下，$q \approx 2.88 \times 10^5 (J/_{m \cdot K}), p \approx 7 \times 10^3 (J/_{m^2 \cdot K})$。

註:所有程式模擬數據將會包括在附錄裡。

(二)容器形狀對冷卻的影響:

容器的形狀對冷卻快慢有著很大的關係。以下我將專注在考察柱對稱容器當中無對流液體的冷卻時間。系統的模型圖如下所示(為側視圖):



當然，這種形狀的計算極為複雜。於是使用數值模擬方法。一樣假設所有杯壁都絕熱，所以熱傳遞只發生在與空氣交界面上。另外，訂所有容器的長度為L。

首先為了測試形狀能夠帶來的影響有多大，作了以下兩個模擬:

(1) 杯壁形狀$r(x) = R_0 + \frac{1}{2}R_0 sin(\frac{2\pi x}{L})$

(2) 杯壁形狀$r(x) = R_0 - \frac{1}{2}R_0 sin(\frac{2\pi x}{L})$

注意此兩形狀的與空氣接觸面積相同，體積亦相同，因此有比較價值。

如同前面的研究，定義冷卻時間t_{cool}為:

$$T_{avg}(t_{cool}) = \frac{\iint T(r, x, t_{cool}) \times 2\pi r dr dx}{\int_0^L \pi r^2 dx} = \frac{3}{5}T_i$$

在此定義下進行數值模擬。以下為模擬參數:

牛頓冷卻係數$h = 80.0(^W/_{m^2 \cdot K})$

熱導係數$k = 1.0(^W/_{m \cdot K})$

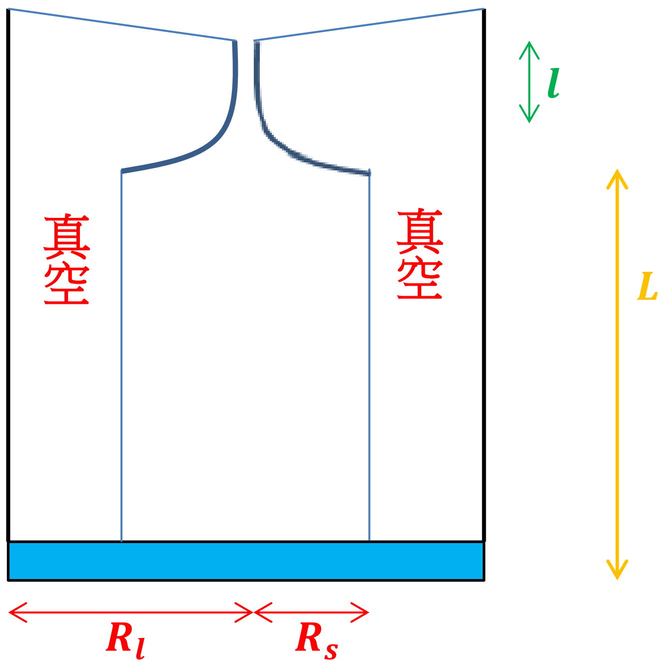
容器長度$L = 12(cm)$

長度參數$R_0 = 6(cm)$

使用這些參數，經由模擬得知兩種形狀分別需要的時間為:

$$t_1 \approx 33548(s), t_2 \approx 10703(s)$$

差了 3 倍以上。可以看出形狀的影響極為重大。因此我發想，如果在接近杯口的地方製造一個截面積為A_{sml}的瓶頸，效果會如何。考慮如下的圓柱型保溫杯形狀:



其中，認為所有半徑改變的地方，其所經歷的高度變化都可以忽略。

先假定由頂部從瓶頸逸散的熱相較於杯壁的輻射損耗熱可以忽略。另外由於輻射功率小，冷卻過程可視為準靜態。為計算輻射損耗熱功率，先定義以下參數:

$$\beta \equiv \frac{R_l}{R_s} > 1$$

且e_1, e_2分別為外壁，內壁材質的發射率，T_1, T_2, T_0分別為外壁，內壁，大氣的溫度。

根據史特凡−波爾茲曼定律搭配簡單的無窮級數求和，可以得到由

內壁流向外壁的熱功率$P_{2\to1}$為:

$$P_{2\to1} = \frac{e_1 e_2 \sigma}{1-(1-e_1)(1-e_2)} \times (\frac{1}{\beta}{T_2}^4 - {T_1}^4) \times (2\pi R_l L)$$

熱平衡時這個功率等於由外壁逸散至大氣的熱功率$P_{1\to0}$:

$$P_{1\to0} = 2\pi R_l L \times e_1 \sigma ({T_1}^4 - {T_0}^4)$$

由此得到總輻射熱損耗率P_{rad}:

$$P_{rad} = \frac{e_1 e_2 \sigma}{2-(2-e_1)(1-e_2)} \times (\frac{1}{\beta}{T_2}^4 - {T_0}^4) \times (2\pi R_l L)$$

$$\equiv \alpha \times (\frac{1}{\beta}{T_2}^4 - {T_0}^4) \times (2\pi R_l L)$$

為估計P_{rad},取:

$T_2 = 65℃, T_0 = 20℃$

$R_s = 2.25(cm), R_l = 3(cm), L = 18(cm)$

$e_1 = e_2 = 0.35$ (此為不鏽鋼實際數據)

計算得:

$$P_{rad} = 0.616(W)$$

若從瓶頸逸出的熱功率P_{top}能夠被忽略，則$P_{top} < P_{rad} \times 5\%$。考慮空氣的熱導係數$k_{air} = 0.026$，則:

$$k_{air} \times \frac{A_{sml}}{l} \times \Delta T < P_{rad} \times 5\%$$

考慮清洗及佔用空間等問題，l不可太長，取其為$l = 2(cm)$，即:

$$r_{sml} = \sqrt{\frac{A_{sml}}{\pi}} < 1.3(cm)$$

因此瓶口不需要很窄即可以有很大的效果，而瓶蓋還能有額外的保溫作用。因此此部分將假設**除了杯壁以外皆為絕熱(這與上一部分不相同)**。

接著要估計保溫瓶的保溫時間。由於冷卻過程為準靜態，若內壁溫度為T_2，整杯水的平均溫度是T_{avg}，則在杯中的溫度分布滿足:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0$$

即:

$$T(r)=a*ln(r)+b$$

其中a,b滿足:

$$\begin{cases} a*ln(R_s)+b=T_2 \\ a*(ln(R_s)-0.5)+b=T_{avg} \\ 2\pi kLa=-P_{rad} \end{cases}$$

故:

$$T_2-T_{avg}=-\frac{P_{rad}}{4\pi kL}=-\left(\frac{\alpha R_l}{2k}\right)\left(\frac{1}{\beta}{T_2}^4-{T_0}^4\right)$$

$$\rightarrow \dot{T_2}-\dot{T_{avg}}=-\left(\frac{2\alpha R_s}{k}\right)({T_2}^3\dot{T_2})$$

又因總功率等於負的能量時變率:

$$\dot{T_{avg}}\times\left(\rho s{R_s}^2\right)=-2R_l\alpha(\frac{1}{\beta}{T_2}^4-{T_0}^4)$$

代入上式得到:

$$-\frac{2R_l\alpha}{\rho s{R_s}^2}\left(\frac{1}{\beta}{T_2}^4-{T_0}^4\right)=(1+\frac{2\alpha R_s{T_2}^3}{k})\dot{T_2}$$

此式便是保溫瓶中溫度變化的表達式。

為分析上式，先定性分析。注意到:

$$\frac{2\alpha R_s{T_2}^3}{k}\ll 1$$

故:

$$\dot{T_2}=-\frac{2\alpha}{\rho s}(\frac{1}{R_s}{T_2}^4-\frac{R_l}{{R_s}^2}{T_0}^4)$$

即R_l越大，冷卻時間越長。至於$\dot{T_2}$應有一極大值，其條件為:

$$\frac{\partial\dot{T_2}}{\partial R_s}=0\rightarrow R_{s(cr)}=\frac{2{T_0}^4}{{T_2}^4}R_l$$

觀察上式，將保溫瓶分為高溫型與低溫型，分別代表杯內水溫高出外界溫度的幅度大小。對於高溫，應盡量使R_s盡量接近R_l；如此一來增加容量的同時還能增加保溫效果。對於低溫型，R_s接近R_l時反

而會造成保溫效果的降低，故應兼顧容量以及保溫效果來選取R_s。

接著定量分析保溫效果以及高低溫的定義。發現此式極難進行積分，故採$Python$程式數值模擬進行。結果指出，**當要盛裝的液體較室溫高出超過$\mathbf{40}$℃時為高溫，故應該使$\boldsymbol{R_s}$盡量接近$\boldsymbol{R_l}$。低溫情況時應盡量滿足關係:**

$$\boldsymbol{R_l \approx 1.304 R_s}$$

這是綜合考量保溫效果及容量後的結果，**於附錄中會有詳細模擬過程以及此比例的說明。**

這便是最有效率的保溫瓶尺寸選取。

二、溫度波動的一些性質:

(一)溫度波的色散關係

假設一個一維的半無限長介質，在$x = 0$處有強迫溫度震盪:

$$T(0,t) = T_0 e^{-i\omega t}$$

將穩態時的溫度$T(x,t)$函數表示為:

$$T(x,t) = T_0 e^{-mx} e^{i(nx-\omega t)}$$

代入一維熱擴散方程式:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} T(x,t)$$

$$\rightarrow (i(n+im))^2 = -\frac{i\omega}{\alpha}$$

其中$\alpha \equiv \frac{k}{c}$，稱為熱擴散係數。分別令實部與虛部相等:

$$m(\omega,\alpha) = n(\omega,\alpha)\text{；}2m(\omega,\alpha)n(\omega,\alpha) = \frac{\omega}{\alpha}$$

$$\rightarrow m(\omega,\alpha) = n(\omega,\alpha) = \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$$

由以上溫度數學表達式，可以寫下溫度波波向量:

$$\tilde{\vec{\gamma}} = (n+im)\hat{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}(1+i)\hat{\gamma}$$

$\hat{\gamma}$是溫度波的前進方向(即熱流方向)。

波向量是複數意味著這是一個空間上會衰減的波(對比於阻尼震盪

的時間上衰減)。

可以計算一些有關溫度波的性質:

$$\begin{cases} 相速度 v_p = \dfrac{\omega}{n} = \sqrt{2\alpha\omega} \\ 群速度 v_g = \dfrac{d\omega}{dn} = 2v_p \\ 介質等效折射率 n = n_0\sqrt{\dfrac{\omega}{2\alpha}}(1+i) \end{cases}$$

以上的n_0是一個與基準點選取有關的常數。這是因為折射率是一個相對的物理量，例如在光學中將真空的折射率定為 1。

(二)多介質當中的溫度波動行為:

溫度波在多介質當中傳遞時，會展現與單介質不同的特性。這是由於邊界上的透射以及反射。在理想邊界上，必須滿足溫度相等以及法向的熱流連續。

考量以上的邊界條件，如果定義入射、透射、反射波的溫度振福分別為T_i, T_t, T_r，法向熱流分別為J_i, J_t, J_r，列出方程式如下:

$$\begin{cases} T_i + T_r = T_t \\ J_i = J_r + J_t \end{cases}$$

但由傅立葉熱傳導定律: $J = -k\nabla T$，故一維情況下上兩式化為:

$$\begin{cases} T_i + T_r = T_t \\ k_i\gamma_i T_i = k_r\gamma_r T_r + k_t\gamma_t T_t \end{cases}$$

故一維情況下的透射率以及反射率可以解出:

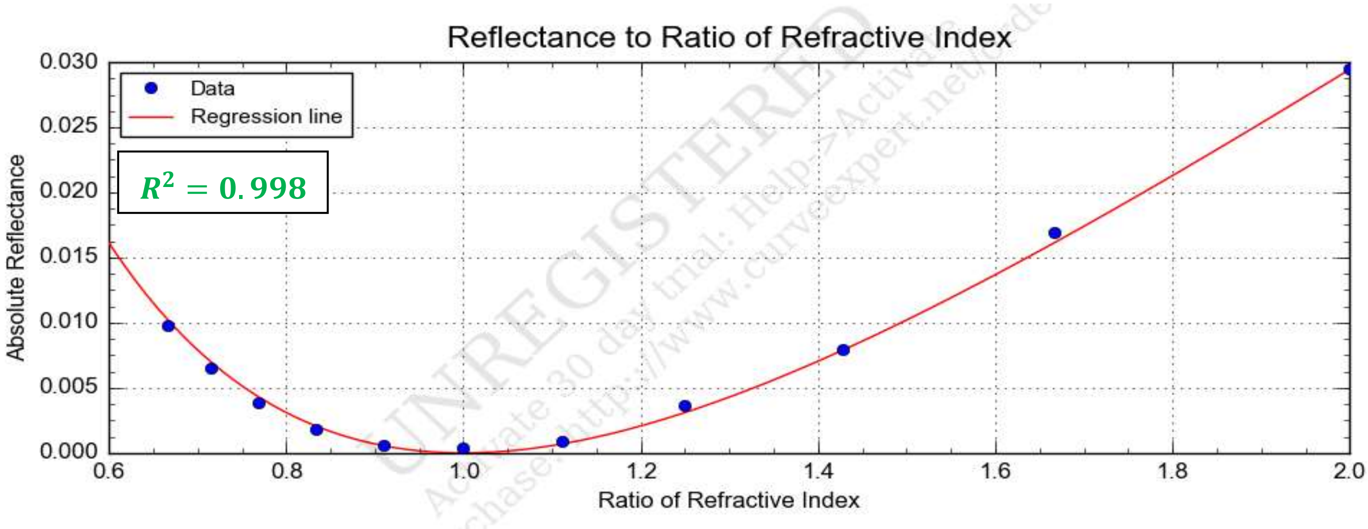
$$\begin{cases} R = \dfrac{T_r}{T_i} = -\left|\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{C'k'}{Ck}}}{1+\sqrt{\dfrac{C'k'}{Ck}}}\right| \le 0 \\ T = \dfrac{T_t}{T_i} = 1 + R \le 1 \end{cases}$$

其中定義加一撇的參數為透射介質，未加一撇的參數為入射介質。

R必須為負，這是由於熱力學第二定律所致；若R為正，則$T > 1$，

這會使得熵增加(封閉系統自發的變成一個溫度較低一個溫度較高的系統)。故反射波的相位永遠與入射波相位相差π。

有關反射率大小$|R|$與$\sqrt{\frac{C'k'}{Ck}}$的 Python 數值模擬圖結果如下:



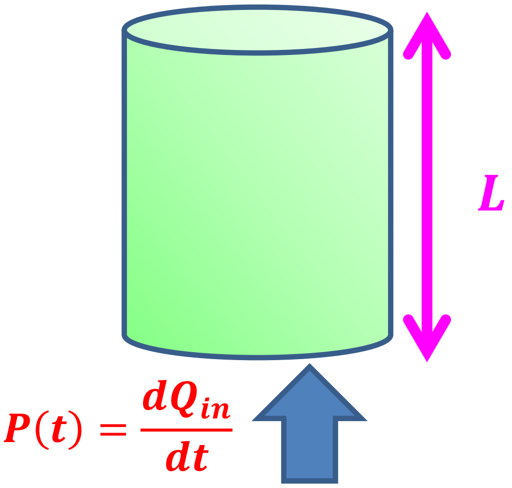
以上所顯示的回歸線其方程式為:

$$|R| = \left|\frac{1-\sqrt{\frac{C'k'}{Ck}}}{1+\sqrt{\frac{C'k'}{Ck}}}\right|$$

由此可以驗證上述推導是正確的。

(三)簡易的熱水器模型:

將熱水器模擬成一個**很長的圓柱形容器**，且底部有著熱源供給$P(t)$，頂部與空氣發生熱對流。模型圖如下所示。



將$P(t)$寫成$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos(\omega_n t)$，則最底層的水溫$T(0,t)$滿足:

$$P(t) = m_{bot} s \frac{dT(0,t)}{dt}$$

$$\rightarrow T(0,t) \propto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{\omega_n} cos(\omega_n t)$$

再套用溫度波的傳遞:

$$T(L,t) = T(0) e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}L} \propto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{\omega_n} cos(\omega_n t) e^{-\sqrt{\frac{\omega_n}{2\alpha}}L}$$

因此熱水器的效率η可以寫作:

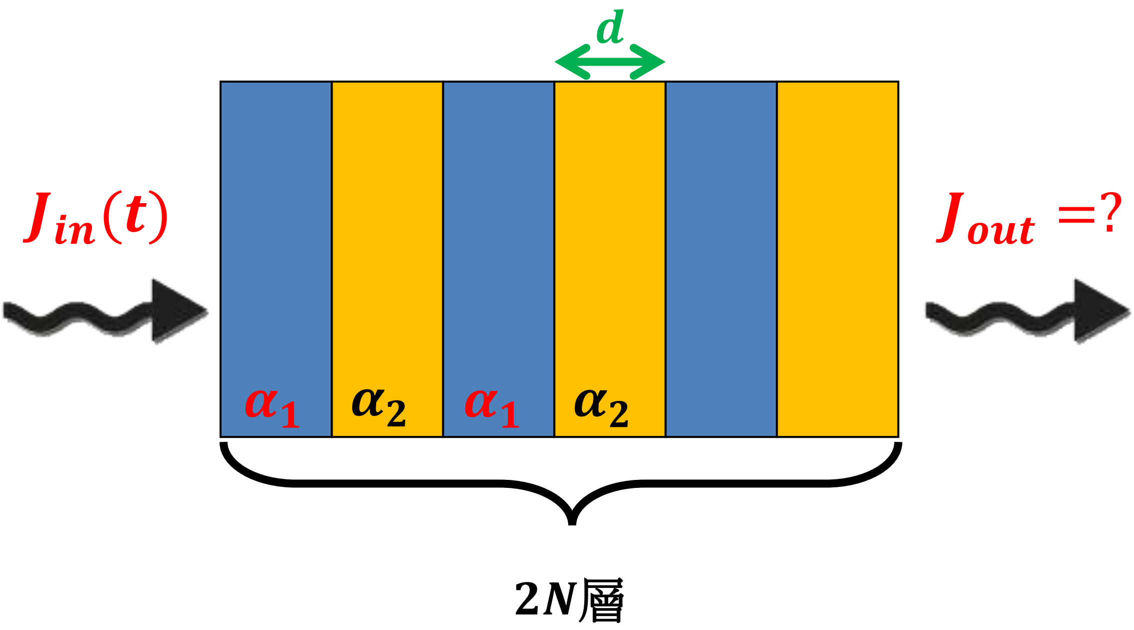
$$\eta = \frac{E_{use}}{E_{supply}} = 1 - \frac{hA \int_0^T (T(L,t) - T_{air}) dt}{\int_0^T P(t) dt}$$

熱的損失由牛頓冷卻產生。上式可以計算出這種模型下的熱水器效率。

三、多層介質的應用:

(一)隔熱元件/熱流穩定器:

元件模型圖如下:



首先，為了簡化問題做以下近似:

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \text{，} \Delta\alpha \equiv \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \ll \bar{\alpha}$$

$$\sqrt{\frac{\omega}{2\bar{\alpha}}}d = 2\pi$$

$$C_1 \approx C_2$$

由前面推得的反射率公式進行簡化，得到:

$$R \approx -\left|\frac{\Delta\alpha}{2\bar{\alpha}}\right| \to |R| \ll 1$$

因此所有多次反射的貢獻都可以被忽略。

考慮元件的透射率時，可以將損失分為傳遞損失r_{tran}與反射損失r_{rfl}。計算r_{tran}得:

$$r_{tran} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}*(\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}+\sqrt{\frac{1}{\alpha_2}})*(Nd)}$$

且:

$$\sqrt{\frac{1}{\bar{\alpha}+\Delta\alpha}}+\sqrt{\frac{1}{\bar{\alpha}-\Delta\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{\bar{\alpha}}}(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{\Delta\alpha}{\bar{\alpha}}}}+\sqrt{\frac{1}{1-\frac{\Delta\alpha}{\bar{\alpha}}}})\approx 2\sqrt{\frac{1}{\bar{\alpha}}}$$

故r_{tran}與一塊長為$2Nd$,熱擴散係數為$\bar{\alpha}$的介質之$r_{tran,\bar{\alpha}}$大略相同,$r_{tran}\approx r_{tran,\bar{\alpha}}$。

其次計算r_{rfl}以及$r_{rfl,\bar{\alpha}}$:

$$r_{rfl,\bar{\alpha}}=(\frac{2\sqrt{\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_0}}}{1+\sqrt{\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_0}}})^2$$

$$r_{rfl}=(\frac{2\sqrt{\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_0}}}{1+\sqrt{\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_0}}})^2\times(1+R)^{2N-1}=(1+R)^{2N-1}\times r_{rfl,\bar{\alpha}}$$

元件的總透射率T_{ML}可以表示為:

$$T_{ML}=r_{rfl}r_{tran}=r_{rfl,\bar{\alpha}}r_{tran,\bar{\alpha}}\times(1+R)^{2N-1}=T_{\bar{\alpha}}\times(1+R)^{2N-1}$$

若以ε表示T_{ML}與$T_{\bar{\alpha}}$之比,則:

$$\varepsilon=\frac{T_{tot}}{T_{\bar{\alpha}}}=(1+R)^{2N-1}=(1-\left|\frac{\Delta\alpha}{2\bar{\alpha}}\right|)^{2N-1}$$

若要估算ε,可以取$\frac{\Delta\alpha}{\bar{\alpha}}=\frac{1}{10}$,元件總長度$l=5(cm)=2Nd$,$d=2\pi\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\omega}}\approx 1\times 10^{-3}(m)$。計算可得$N\approx 25,\varepsilon\approx 0.08=8\%$。這說明了選用多層介質可以非常有效的阻隔所有週期形式的熱流。

其次考慮直流情形。設想一塊熱導係數為k的均勻材料,左端面固定溫度為T_i。右端面與溫度為T_{air}的空氣進行冷卻係數為$h(\Delta T)$的牛頓冷卻。介質厚度左右端之間的距離為d。牛頓冷卻係數$h(\Delta T)$可能是界面兩側的溫度差ΔT的函數。

考慮$h(\Delta T)=h_0$是常數的情況。設介質內的溫度遞減率為Λ。則介質內熱流為:

$$J = k\Lambda = h(T_i - T_{air} - d\Lambda)$$

解得:

$$\Lambda = \frac{h(T_i - T_{air})}{k + dh}$$

每單位面積損失熱功率:

$$P = h\left(T_i - T_{air} - \frac{dh(T_i - T_{air})}{k + dh}\right) = \frac{kh(T_i - T_{air})}{k + dh}$$

但牛頓冷卻係數的大小有個下限。如果$T_i = 100℃, T_{air} = 20℃$，且介質外側(即邊界)不得超過40℃(否則會燙傷)，則須滿足的條件為:

$$\frac{80dh}{k + dh} > 60 \rightarrow dh > 3k$$

滿足此上限的情況下:

$$P > \frac{60k}{d}$$

再考慮多層介質情況，對於以上元件的總熱阻(Thermal Resistance)可以寫為:

$$R_T = \frac{d}{2Ak_1} + \frac{d}{2Ak_2} = \frac{d}{2A}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

故:

$$k_{eff} = \frac{2}{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}$$

由算幾不等式可以知道:

$$k_{eff} < \bar{k}$$

即對於多層介質，其對穩態時的直流損失也較單介質小。

最後探討兩種情況下使用直流熱源時的加熱特徵時間。由於理論計算較複雜(以後期待能計算出來)，使用程式模擬來大略估計效果。實測在$T_i = 100℃, T_{air} = 0℃$且穩態時$T_{bound} \approx 96.5℃$的情況下(詳

細參數請詳見附錄)，加熱到$T_{bound}=70℃$分別所需要的加熱時間:

$$t_{\bar{\alpha}}\approx 1916(s), t_{ML}\approx 1952(s)$$

而在$T_i=100℃, T_{air}=0℃$且穩態時$T_{bound}\approx 93℃$的情況下(詳細參數請詳見附錄)，加熱到$T_{bound}=60℃$分別所需要的加熱時間:

$$t_{\bar{\alpha}}\approx 1965(s), t_{ML}\approx 2048(s)$$

這顯示元件亦能延緩達到穩態的時間。如鍋子的握把或隔熱手套等許多日常生活用具，能延長特徵加熱時間是很重要的工作。這顯示多介質也許也能應用在這個方面。

綜上所述，元件能夠幾乎完全阻隔交流形式的熱流，也能阻隔一部分直流熱流。**故元件能夠是良好的熱流穩定器同時也能夠做為一個隔熱元件。如果在洗澡的加熱管子周圍加裝此多層介質，將能大幅改善因加熱不穩造成的水溫不穩定現象。**

(二)地球大氣對流層模型

一般推導絕熱的溫度遞減率是聯立力平衡以及理想氣體的絕熱方程式求解。

這種推導下，假設的是空氣沒有大尺度下的對流運動，亦忽略了地球的運動，同時設所有氣體都是雙原子理想氣體。

推導的結果是一個線性下降的對流層溫度:

$$\frac{dT}{dz}=-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\approx -9.8\times 10^{-3}(K/m)$$

這與實際值很接近，也是目前的公認值。

接下來，欲使用熱流以及反射透射的想法處理這個問題。首先，為了簡化問題，除了以上的假設條件，額外做以下近似:

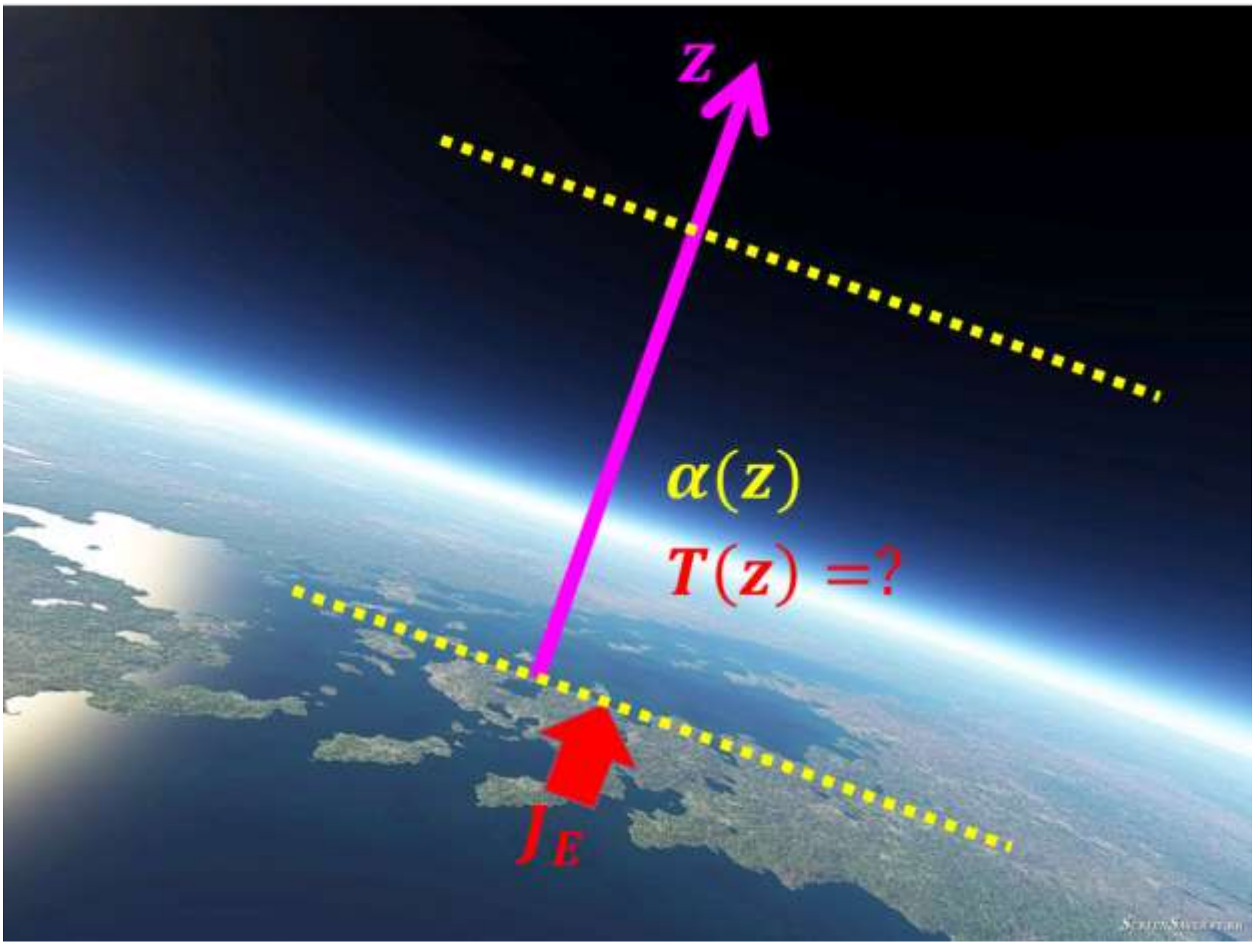
(a) 假設對流層的主要熱源是地球提供的熱流，這個熱流近似

穩定($\omega \approx 0$)。

(b) 假設對流層是一個多層介質，其中多次反射與相位問題可以忽略。

近似並沒有很真實，故未來希望能改善模型並移除這些假設。

模型圖如下所示。



為了解出這個模型，首先列出力平衡式:

$$dp(z) = -\rho(z)gdz = -\frac{p(z)\mu}{RT(z)}gdz$$

式中p是壓力，ρ式空氣密度，μ是空氣分子量，R是理想氣體常數。

對於理想雙原子氣體:

$$k = \frac{n\bar{v}\lambda c_v}{3N_A}$$

代入各符號的表達式，得:

$$k = \frac{5R}{3\sigma N_A} \times \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}}$$

計算單位體積熱容量:

$$C = \rho s = \frac{p(z)\mu s}{RT(z)}$$

並定義:

$$\tau(z) \equiv C(z)k(z)$$

熱流在對流層當中傳遞時，這個模型中可以忽略前述的傳遞損失 r_{tran}。這是由於假設太陽供熱穩定，$\omega \approx 0$。

於是只考慮反射損失r_{rfl}，由溫度波的透射率反射率公式:

$$r_{rfl} = -\left|\frac{1}{4\tau}\frac{d\tau}{dz}dz\right| = \frac{dT}{T}$$

積分上式得到:

$$(\frac{T(z)}{T(0)})^9 = (\frac{p(z)}{p(0)})^2$$

代入力平衡式得到:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2}{9}\frac{\mu g}{R} \approx -7.6 \times 10^{-3}(K/_m)$$

可以發現，這個數值十分接近實驗數值，並且也是線性下降的溫度分布。這說明以頻率極低的溫度波來模擬地球給予大氣的熱流是有效的模型。

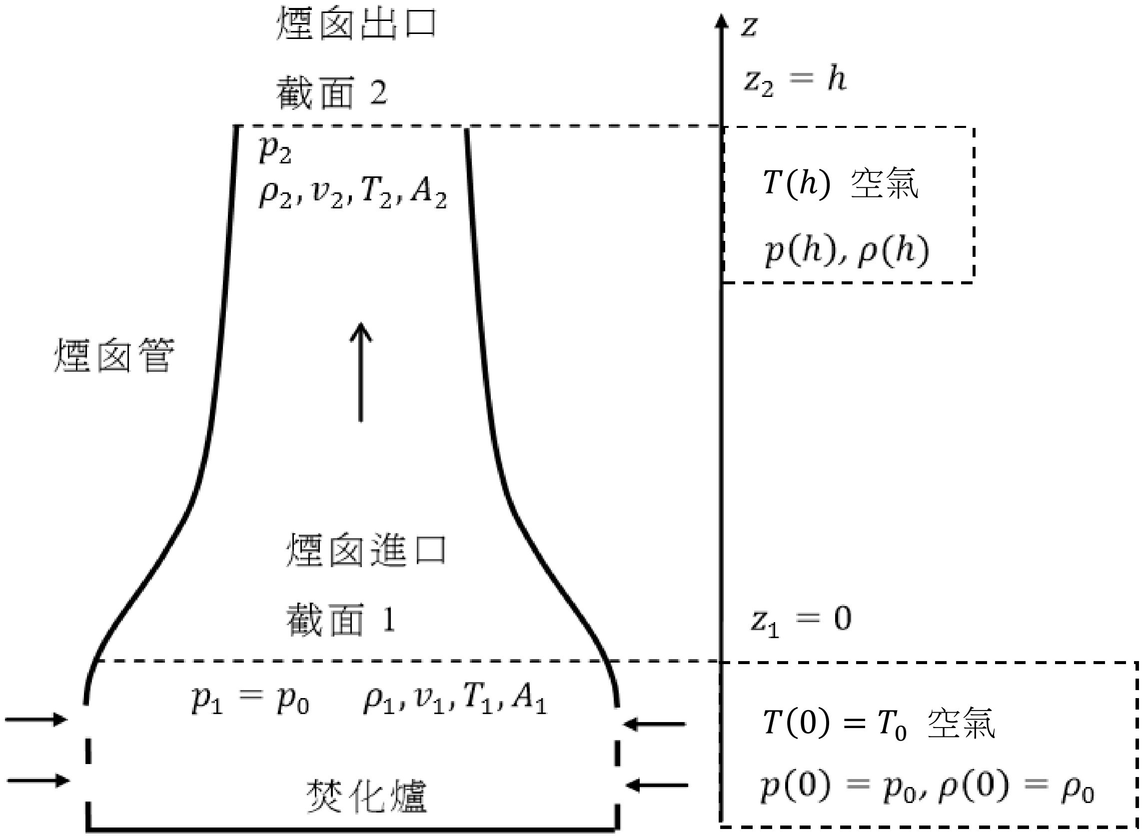
如欲得到總熱量反射率，對r_{rfl}進行積分即可得。

四、於工廠煙囪的應用:

(一)煙囪內的物理現象:

假設煙囪由焚化爐以及煙囪管兩個部分組成。一般認為煙囪有最小高度限制是因為排出煙氣的壓力必須等同該處大氣的壓力才能將煙氣完全排出。這種推導下，假設煙氣為理想氣體、上升過程為準

靜態絕熱過程、煙囪內的流動是一維穩流、焚化爐的截面大小遠大於煙囪管。示意圖如下:



首先計算大氣的性質:

假設溫度分布如同前部分的計算為線性分布，則$T(h)$為:

$$T(h) = T_0 - \Lambda h$$

其中:

$$\Lambda = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu_a g}{R}$$

則壓力由力平衡給出:

$$p(h) = p(0) \times \left(1 - \frac{\Lambda h}{T(0)}\right)^{\frac{\mu_a g}{R\Lambda}} \approx p(0) \times (1 - \frac{\mu_a g h}{RT(0)})$$

一般推導方法之使用公式:

$$(1)\ \frac{1}{2}({v_2}^2 - {v_1}^2) = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) - gh$$

$$(2)\ \rho_1 A_1 v_1 \equiv \rho_1 B = \rho_2 A_2 v_2$$

$$(3)\ p_2 = p(h)$$

$$(4)\ p \propto \rho^{\gamma}$$

此推導結果會給出:

$$h_{min} = \frac{1}{2g}\left(\frac{B}{A_2}\right)^2 \frac{1}{(\frac{\mu_a}{T(0)})(\frac{T_1}{\mu_{in}}) - 1}$$

上式在<煙囪可以完全排出煙氣的最小高度>一文中有詳細推導,此處不贅述。

溫度波的概念在此仍適用，但形式需要轉換。因為介質的流動速度不均勻,故對溫度波的熱傳導會產生影響。修正後的熱傳導公式為:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)T = 0$$

同樣尋找正弦波型態的穩態解，化簡得到:

$$(-i\omega + i\gamma v + \alpha\gamma^2) = 0$$

即:

$$\tilde{\gamma} = \frac{-\frac{iv}{\alpha} \pm \sqrt{-(\frac{v}{\alpha})^2 + \frac{4i\omega}{\alpha}}}{2}$$

現對溫度波的反射透射推導修正式，其中邊界條件如前述:

$$\begin{cases} T_i + T_r = T_t \\ k_i\gamma_i T_i = k_r\gamma_r T_r + k_t\gamma_t T_t \end{cases}$$

但因現在介質的速度不同，所以波向量γ亦不相同。考慮這個效應並且代入上式，可以得到修正後的反射率與透射率:

$$\begin{cases} R = \dfrac{T_r}{T_i} = -\dfrac{1 - \frac{k\gamma}{k'\gamma'}}{1 + \frac{k\gamma}{k'\gamma'}};\ |R| \le 0 \\ T = \dfrac{T_t}{T_i} = 1 + R;\ |T| \le 1 \end{cases}$$

可以看出若$v = v'$，則上式回歸前述表達式。且有發生相位突變。

未來期待能從此研究，推導出煙囪內部的溫度分布。

(二)煙囪外的物理現象:

造成台灣的空氣本土污染來源，很大之一便是工廠煙囪所排放的諸多物質。這些物質包括固液氣三態且化學組成繁雜，例如溫室氣體、硫化物、氮氧化物等。以下我專注在固體以及氣體排到大氣後的具體行為。固體將採用理論分析，氣體將採用程式數值模擬。

首先討論固體。對於人體危害來說，殺傷力最大的便是 PM2.5。PM2.5 具有極強的穿透力，可穿透肺部氣泡，直接進入血管中隨著血液循環全身。這類的懸浮微粒大約密度為$\rho = 1030({kg}/{m^3})$，而由定義，粒子的粒徑小於$2.5(\mu m)$。

估計粒子運動的雷諾數$(Renolds\ Number)$得:

$$Re = \frac{uL}{\nu} \approx \frac{0.1 \times (2.5 \times 10^{-6})}{1.5} \approx 10^{-7} \ll 1$$

故粒子適用斯托克斯阻力公式$(Stokes'\ Drag)$:

$$\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$$

其中η是大氣氣體黏滯係數。先忽略風的作用，列出粒子沿法向的運動方程式:

$$F = -6\pi\eta r v_r = m\dot{v_r} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \dot{v_r}$$

則系統達平衡的特性時間t_{ch}為:

$$t_{ch} = \frac{4}{3}\frac{r^2\rho}{6\eta} \approx 3 \times 10^{-4}(s)$$

在如此短暫的時間內，粒子運動的距離均很小可以忽略。故在離開煙囪時粒子具有的初始徑向速度都幾乎不產生任何影響。

類似的計算可得粒子在鉛直方向受重力產生的穩定向下速度:

$$v_{vert,stb} = \frac{mg}{6\pi\eta r} \approx 10^{-11}({m}/{s})$$

上式中忽略了微小的浮力。這個速度顯示粒子若不受鉛直風的影響，將永遠滯空。因此粒子所有的運動幾乎都由風影響。以下考慮水平方向上的移動。

觀察雲林麥寮六輕廠址 7/30~8/3 五天間的天氣，得知當地風向以及風速大約為平均風速$v_0 = 10({km}/{hr})$的西南風加上大約$v_{rand} = 8({km}/{hr})$，每兩小時變更一次的隨機風。由此得一天內粒子的最大概率移動距離d:

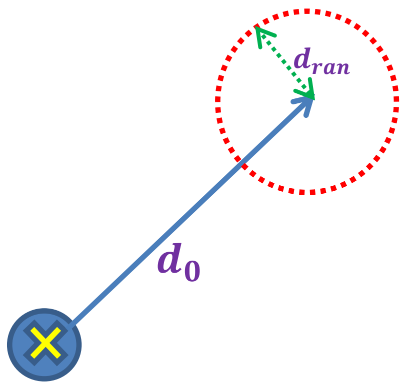
$$\vec{d} = \vec{d}_0 + \vec{d}_{rand}$$

其中$d_0 = 24 \times 10 = 240(km)$

套用無規行走公式計算d_{rand}，得到:

$$d_{rand} = N\sqrt{L} = \frac{24}{2} \times \sqrt{8 \times 2} = 48(km)$$

因此以下圖表示移動距離(叉叉者為工廠位置):



過了一天灰塵大略位於紅圈內之區域遍布各處。這個結果不僅能解釋冬天強勁的東北季風帶來的風沙，更顯示著，**若要降低工廠產生之 PM2.5 對人體的危害，須盡量將工廠設置在風較小，或是風向較不固定的地方。**

對於溫室氣體以及氮氧化物的排放則較固體的現象複雜的多。程式已在撰寫中，未來能推導出氮氧化物氣體對地面上污染的影響。

伍、討論及應用:

一、第一部分定量分析了忽略對流現象的液體冷卻過程。除了加入對流因素觀察其影響，利用同樣的方法，還希望未來能延伸至不同形狀的杯子，設計保溫效果好的瓶身。亦由程式模擬得出兼顧容量以及保溫效果的尺寸比例，這是一個應用。

二、第二部分提出了有關溫度振動波的性質。這是一個新的模型，而許多數值模擬實驗皆能驗證其的有效性(詳見附錄)。這有許多應用的可能性，其範圍還超過本研究目前的範圍，都還有待發掘。

三、第三部分則探討了兩個可能的應用。多層介質能夠作為熱流穩定器，亦能作為隔熱裝置。而使用熱流的透射反射做依據則提供了對大氣對流層的新模型，移除一些假設後可能讓數值更為準確。

四、未來還想使用多層介質於更多不同的模型，探討熱的傳導。煙囪由於其內的空氣密度，溫度皆不均勻，所以可以視為一個流動中的多層介質。使用溫度波的概念，探討其高度與熱排放的關係等問題。

五、雷射醫療當中常常以脈衝形式的雷射光射向皮膚。狄拉克函數(Dirac-Delta function, 即脈衝)能由正弦函數疊加而成。皮膚分成許多性質不同的層次:表皮，真皮等。探討熱在這種系統的傳遞。

六、本研究目前假設所有牛頓冷卻係數都是常數。但有些理論指出:

$$h(\Delta T) \propto \Delta T^{\frac{1}{4}}$$

將來欲推廣到這種情況，觀察會對先前的研究結果造成什麼影響。

陸、參考資料:

一、物理學第九版 作者: Halliday, Resnick, Walker

二、大學物理學(第三版) 作者:張三慧

三、煙囪可以完全排出煙氣的最小高度 作者:周章、蔡尚芳

第十六屆旺宏科學獎

成果報告書附錄

參賽編號：SA16-271

作品名稱：熱的傳導於多層介質的應用

姓名：鍾尚軒

關鍵字：熱傳導、溫度波、python 程式模擬

壹、所使用的方程式介紹：

(一)傅立葉熱傳導定律(Fourier’s Law):

$$\vec{\dot{Q}} = -kA\nabla T$$

其中$\dot{Q}$代表熱傳導速率(單位: W)

k代表熱傳導率(Thermal Conductivity)(單位: $W/_{m \cdot K}$)

A代表熱垂直通過的面積(單位:m^2)

T代表溫度(單位: K)，是一個位置的函數。

此方程式為線性，因∇是線性算符。

(二)牛頓冷卻定律(Newton’s Law of cooling):

$$\dot{Q} = hA\Delta T(t)$$

其中$\dot{Q}$代表熱對流速率(單位: W)

h代表熱傳係數(Heat transfer coefficient)，又稱為牛頓冷卻係數(單位: $W/_{m^2 \cdot K}$)

A代表兩種不同介質之間的界面面積大小(單位:m^2)

ΔT代表界面兩側不同介質的溫度差(單位: K)。

此方程式亦為線性，因$\dot{Q}$與ΔT成正比。

確認所使用方程式皆為線性後，即可使用疊加定律。

貳、研究結果：

一、液體性質對冷卻時間的影響:

首先定義冷卻時間t為容器中整杯水之平均水溫降為初始值之五分之二所需時間。經過嘗試，所取冷卻溫度定義對回歸直線形式沒有影響(二次方關係)，故定義五分之二能兼顧誤差與程式執行速度。

以下第一部分皆假設水的初溫為1℃，外界溫度為0℃(定義初溫為多少度對結果亦沒有影響，因所使用方程式皆為線性)。

使用水做為模擬對象，即熱傳導率$k = 1.0(^{\mathrm{W}}/_{\mathrm{m\cdot K}})$。水的熱傳導率$k$實為 0.6$(^{\mathrm{W}}/_{\mathrm{m\cdot K}})$，此為近似取法，以下會討論熱傳導係數$k$對冷卻時間$t$影響。比熱取為$s = 4184(^{\mathrm{J}}/_{\mathrm{kg\cdot K}})$，密度取為$\rho = 1000(^{\mathrm{kg}}/_{\mathrm{m^3}})$，牛頓冷卻係數$h = 50.0(^{\mathrm{W}}/_{\mathrm{m^2\cdot K}})$。

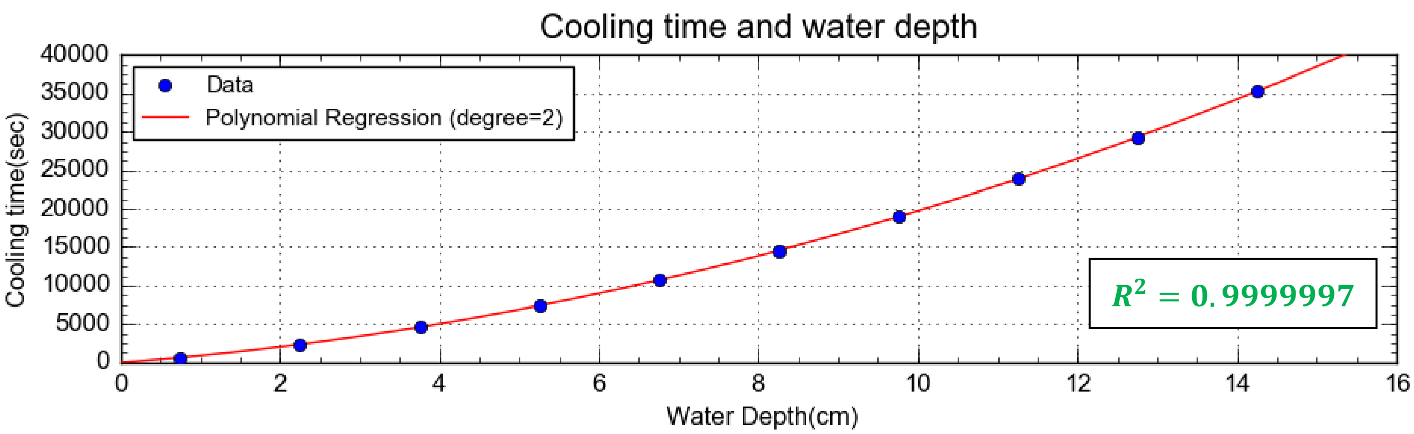
(一) 不同容器深度L對於冷卻時間t的影響(圓柱型容器):

以程式模擬出深度L為 0.75~13.25(cm)的水冷卻時間，每 1.5(cm)取一數據，冷卻時間以秒為單位。其中水的體積不固定，與深度成正比。將以上數據代入所設定模型(牛頓冷卻定律以及傅立葉熱傳導定律)，得到結果。

深度L(cm)	0.75	2.25	3.75	5.25	6.75	8.25	9.75	11.25	12.75	14.25
冷卻時間t(s)	643.5	2352.1	4605.6	7396.7	10721	14576	18960	23873	29314	35283

將以上數據製成圖表，如圖。回歸線的函數為:

$$t = 118.1L^2 + 795.6L$$



二次方關係與理論推導符合。在水深較大時，一次方項可以完全忽略，與說明書當中的預測相同。

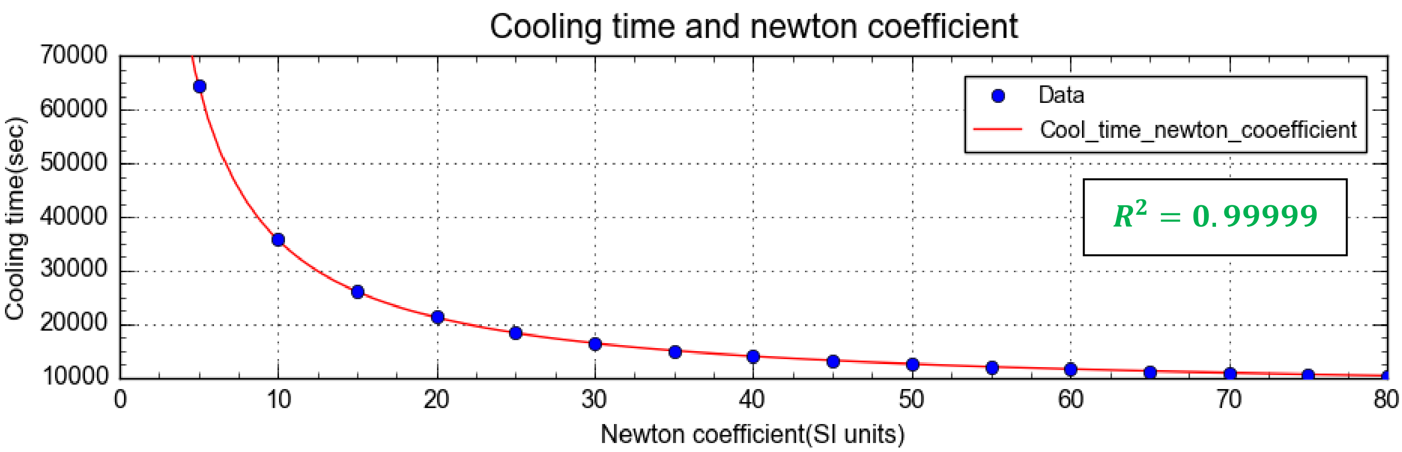
(二) 不同的牛頓冷卻係數h對於液體的冷卻時間t的影響:

取液體的深度L= 7.5(cm)，冷卻時間以及剩下參數定義同水，僅牛頓冷卻係數改變。以程式模擬出牛頓冷卻係數h= 5~80($^{W}/_{m^2 \cdot K}$)之液體的冷卻時間，每差 5.0($^{W}/_{m^2 \cdot K}$)取一數據點。

液體體積、深度、接觸面積皆固定，容器形狀為圓柱形。

牛頓冷卻係數h($^{W}/_{m^2 \cdot K}$)	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0	40.0
冷卻時間t(s)	64529	35751	26140	21323	18423	16485	15096	14051
牛頓冷卻係數h($^{W}/_{m^2 \cdot K}$)	45.0	50.0	55.0	60.0	65.0	70.0	75.0	80.0
冷卻時間t(s)	13236	12582	12046	11599	11219	10893	10610	10362

將以上數據製成圖表，如圖。回歸線的函數為:



$$t = 6812 + \frac{2.89 \times 10^5}{h}$$

此關係與理論推導相同。

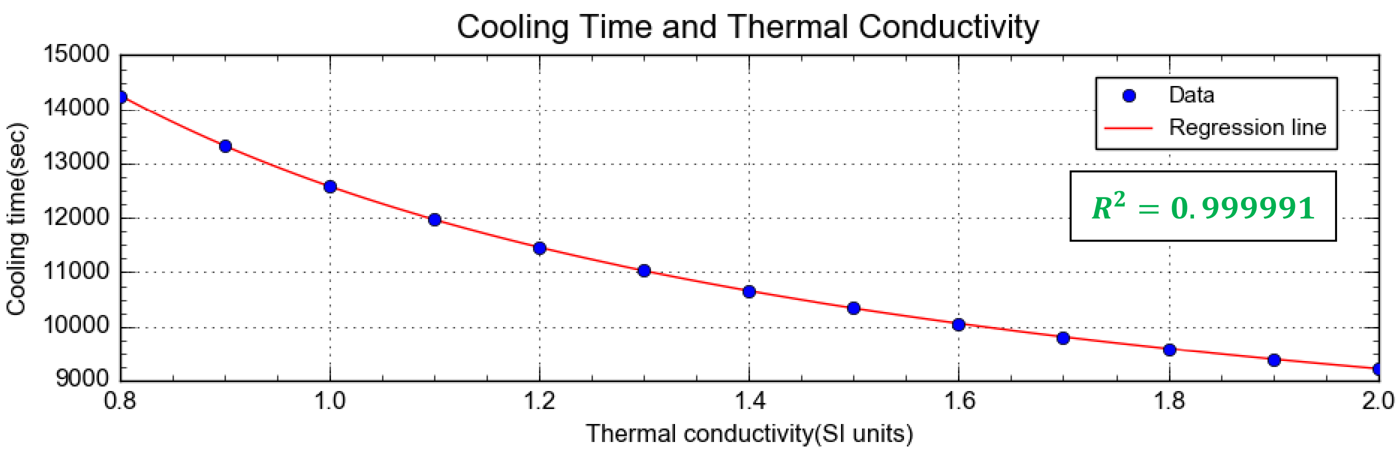
(三) 液體熱傳導率k對冷卻時間t的影響:

取液體的深度L= 7.5(cm)，除了改變熱傳導率k，定義剩下的參數同水。以程式模擬出熱傳導係數k為 0.8~2.0($^{W}/_{m \cdot K}$)之液體的冷卻時間，每差 0.1($^{W}/_{m \cdot K}$)取一數據點。

體積、深度、接觸面積皆固定，容器形狀為圓柱形。

熱傳導率k($^{W}/_{m \cdot K}$)	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
冷卻時間t(s)	14251.5	13324.9	12582.0	11973.0	11464.4	11033.2	10662.9
熱傳導率k($^{W}/_{m \cdot K}$)	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	
冷卻時間t(s)	10341.5	10059.7	9810.7	9589.0	9390.3	9211.3	

將以上數據製成圖表，如圖。回歸線的函數為:



$$t = 5857.0 + \frac{6722.5}{k}$$

綜上所述，在h, k都較小時，冷卻時間$t_{cool} \approx \frac{p}{k} + \frac{q}{h}$。

再由模擬結果，得出在以上條件下，$q \approx 2.88 \times 10^5 (^{J}/_{m \cdot K}), p \approx 7 \times 10^3 (^{J}/_{m^2 \cdot K})$。

二、保溫瓶形狀對保溫效果的影響:

這部分定義冷卻時間t為容器中整杯水之平均水溫降為初始值之三分之二所需時間。此部分皆假設外界溫度為0℃。

使用水做為模擬對象，即熱傳導率$k = 0.591(^{W}/_{m \cdot K})$。比熱取為$s = 4184(^{J}/_{kg \cdot K})$，密度取為$\rho = 1000(^{kg}/_{m^3})$，發射率$e = 0.3$。

(一) 不同內半徑R_s以及溫度差ΔT對於冷卻時間t以及容量V的影響:

固定外半徑$R_l = 3(cm)$，以程式模擬出R_s為 2.0~2.9(cm)時的冷卻時間，每 0.1(cm)取一數據，冷卻時間t以秒為單位。另外改變杯內液體溫度與室溫的溫度差ΔT。取捨時定義尺寸相對效率$E = t \times {R_s}^2$，這是由於$V \propto {R_s}^2$。**以紅字標出評估後的最理想半徑。**

$\Delta T = 30℃$

內半徑$R_s(cm)$	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
冷卻時間$t(s)$	∞	∞	∞	167500	96100	73400	61800	54600	49900	46500
尺寸效率E	N/A	N/A	N/A	88.59	55.33	45.89	41.75	39.83	39.10	39.11

$\Delta T = 40℃$

內半徑$R_s(cm)$	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
冷卻時間$t(s)$	∞	161300	92600	71800	61100	54600	50300	47200	45000	43400
尺寸效率E	N/A	71.12	44.83	37.96	35.18	34.12	33.98	34.44	35.32	36.51

$\Delta T = 50℃$

內半徑$R_s(cm)$	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
冷卻時間$t(s)$	92700	70200	59400	53100	49000	46200	44200	42800	41700	41000
尺寸效率E	37.09	30.94	28.76	28.10	28.24	28.9	29.91	31.20	32.73	34.47

$\Delta T = 60℃$

內半徑$R_s(cm)$	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
冷卻時間$t(s)$	57900	51300	47200	44400	42500	41200	40300	39600	39200	38900
尺寸效率E	23.18	22.62	22.82	23.50	24.50	25.80	27.22	28.90	30.73	32.74

$\Delta T = 90°C$

內半徑$R_s(cm)$	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
冷卻時間$t(s)$	33500	33000	32600	32400	32500	32600	32900	33100	33500	33900
尺寸效率E	13.40	14.52	15.78	17.19	18.73	20.40	22.21	24.16	26.25	28.48

由以上的結論可以看出，當要盛裝的液體較室溫高出超過40℃時為高溫，故應該使R_s盡量接近R_l。

不超過40℃時(即低溫情況)應盡量滿足關係:

$$R_l \approx \frac{30}{22} R_s \approx 1.304 R_s$$

三、簡易加熱器模型:

將此程式分成兩步驟進行。

第一步驟為底部溫度振幅對輸入正弦波振幅的比值$a(\omega)$，第二步驟為容器頂部溫度振幅對底部溫度振幅的比值$b(\omega)$，則總比值:

$$\eta(\omega) = a(\omega)b(\omega)$$

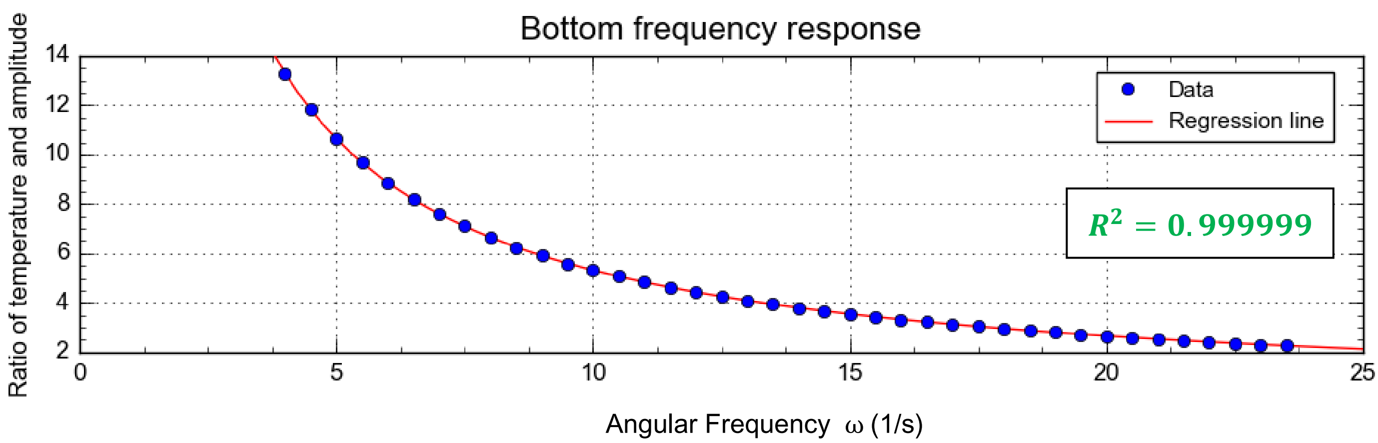
兩步驟當中，取水深L = 15(cm)，接觸面積A= 0.5(m^2)，熱傳導係數k= 0.59($W/_{m \cdot K}$)，以程式模擬出角頻率ω為 4.0~23.5(rad/s)時容器底部溫度的振幅與輸入正弦波振幅的比值a，每差 0.5(rad/s)取一數據點，令此比值$a = r \times 10^{-6}$。

體積、深度、接觸面積皆固定。

角頻率ω(rad/s)	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5
比值參數r	13.3	11.83	10.64	9.68	8.87	8.19	7.6	7.1	6.65	6.26
角頻率ω(rad/s)	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
比值參數r	5.91	5.6	5.32	5.07	4.84	4.63	4.44	4.26	4.1	3.94
角頻率ω(rad/s)	14.0	14.5	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5
比值參數r	3.8	3.67	3.55	3.44	3.33	3.23	3.13	3.04	2.96	2.88
角頻率ω(rad/s)	19.0	19.5	20.0	20.5	21.0	21.5	22.0	22.5	23.0	23.5
比值參數r	2.8	2.73	2.66	2.6	2.54	2.48	2.42	2.37	2.32	2.27

將以上數據製成圖表，如下圖。回歸線函數為:

$$r = \frac{53.2}{\omega} \rightarrow a = \frac{53.2}{\omega} \times 10^{-6}$$



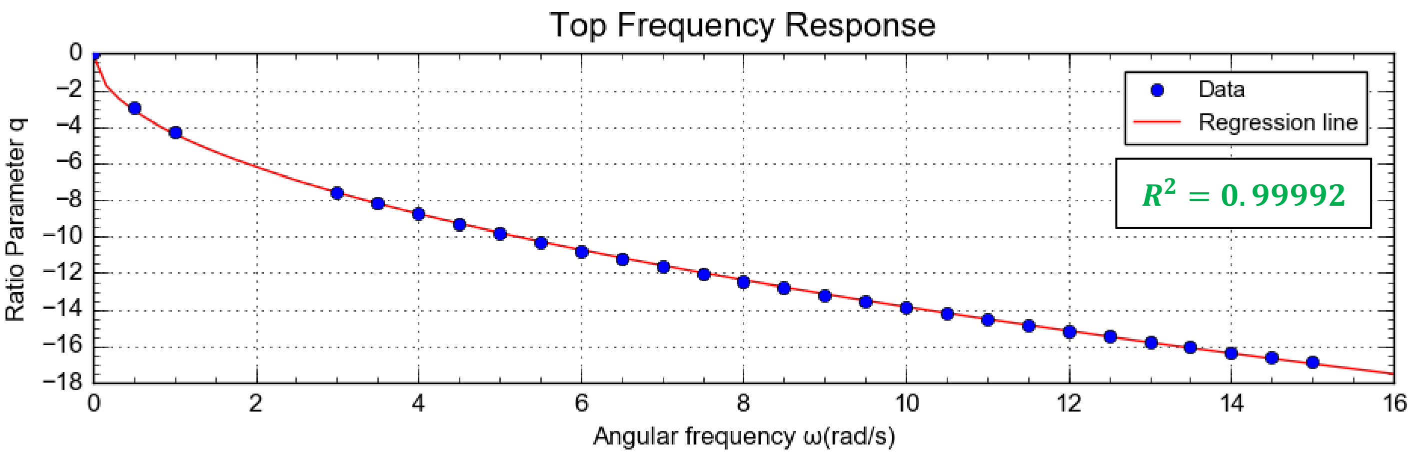
r反比於ω的結果與說明書當中的理論推導完全符合。

第二部分當中，參數皆取如同第一部分。以程式模擬出角頻率ω不同時容器頂部溫度的振幅與容器底部溫度的振幅的比值b，令此比值$b = 10^q$。

角頻率ω(rad/s)	0.0	0.5	1.0	3.0	3.5	4.0	4.5
比值參數q	0	-2.930	-4.260	-7.575	-8.197	-8.774	-9.315
角頻率ω(rad/s)	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
比值參數q	-9.824	-10.307	-10.767	-11.207	-11.629	-12.034	-12.425
角頻率ω(rad/s)	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5
比值參數q	-12.803	-13.169	-13.524	-13.867	-14.201	-14.527	-14.844
角頻率ω(rad/s)	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0
比值參數q	-15.153	-15.455	-15.749	-16.034	-16.320	-16.596	-16.863

將以上數據製成圖表，如下圖。回歸線函數為:

$$q = -4.3768\sqrt{\omega} \rightarrow b = 10^{-4.3768\sqrt{\omega}}$$



此結果則與溫度波之波向量呼應。總結果則與推導相同，即:

$$T(L,t) \propto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{\omega_n} cos(\omega_n t) e^{-\sqrt{\frac{\omega_n}{2\alpha}}L}$$

四、溫度波的波向量以及反射透射率驗證:

(一) 材料長度對波的相位影響:

定義熱擴散係數(Thermal diffusivity)$\alpha \equiv \frac{k}{\rho s}$，其中$k$為熱傳導係數，$s$為比熱，$\rho$為介質密度。

以程式模擬出液體在介質長度l不同時發生波峰的時間。

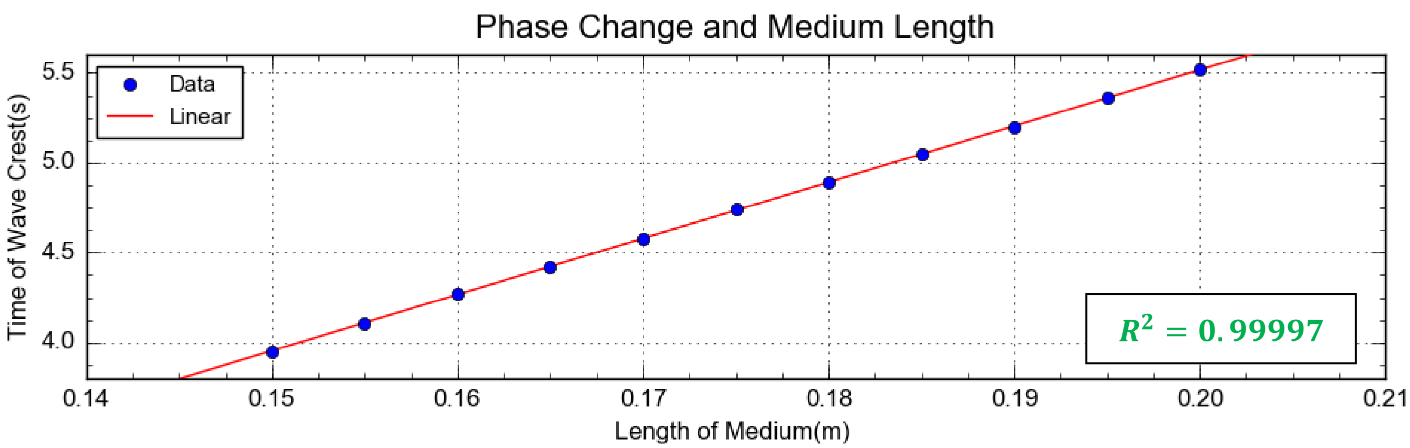
時間以 0.01(s)為單位，溫度波的角頻率ω=5(rad/s)，液體熱擴散係數$\alpha = 1 \times 10^{-4}(\mathrm{m}^2/_\mathrm{s})$

介質長度l(cm)	15	15.5	16	16.5	17	17.5
時間(s)	3.95	4.11	4.27	4.42	4.58	4.74
介質長度l(cm)	18	18.5	19	19.5	20	
時間(s)	4.89	5.05	5.20	5.36	5.52	

將以上數據製成圖表，如下圖。回歸線函數為:

$$t = -0.74 + 31.291l \rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta l} \approx 31.3(^\mathrm{s}/_\mathrm{m})$$

於是相位變化與溫度波行進距離成正比。



(二) 材料熱擴散係數α對波的相位影響:

定介質長度l=15(cm)，以程式模擬出介質之α不同時發生波峰的時間。

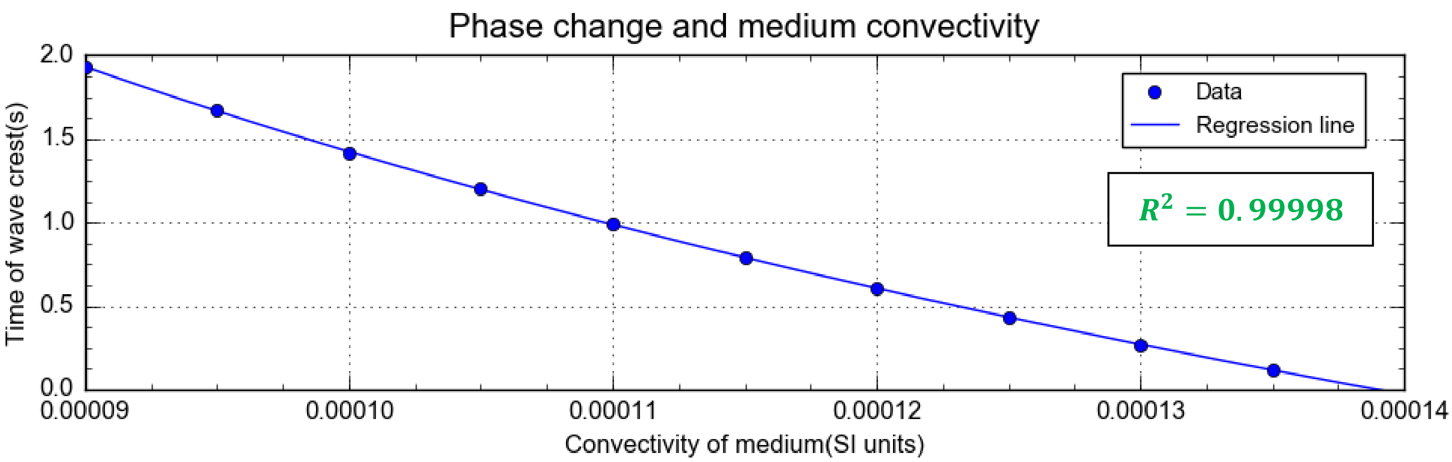
單位時間為 0.005(s)，溫度波的角頻率ω=5(rad/s)。

熱擴散係數$\alpha(\times 10^5\ {m^2}/{s})$	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0
時間(s)	1.93	1.67	1.42	1.20	0.99
熱擴散係數$\alpha(\times 10^5\ {m^2}/{s})$	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
時間(s)	0.79	0.61	0.43	0.27	0.12

將以上數據製成圖表，如下圖。回歸線函數為:

$$t = \frac{9.3745 \times 10^{-2}}{\sqrt{\alpha}} - 7.9505$$

也就是波向量的實數部分應該反比於$\sqrt{\alpha}$，與理論預測符合。



(三) 材料熱擴散係數α對溫度波的振幅影響:

定介質長度l=20(cm)，以程式模擬出介質α不同時振幅隨深度增加的衰減情況。

單位時間為 0.005(s)，測試波的角頻率ω=10(rad/s)。

由於振幅衰減的形式為$10^{-\beta x}$，其中$x = 0$對應未衰減波，故取β為判斷衰減的依據。

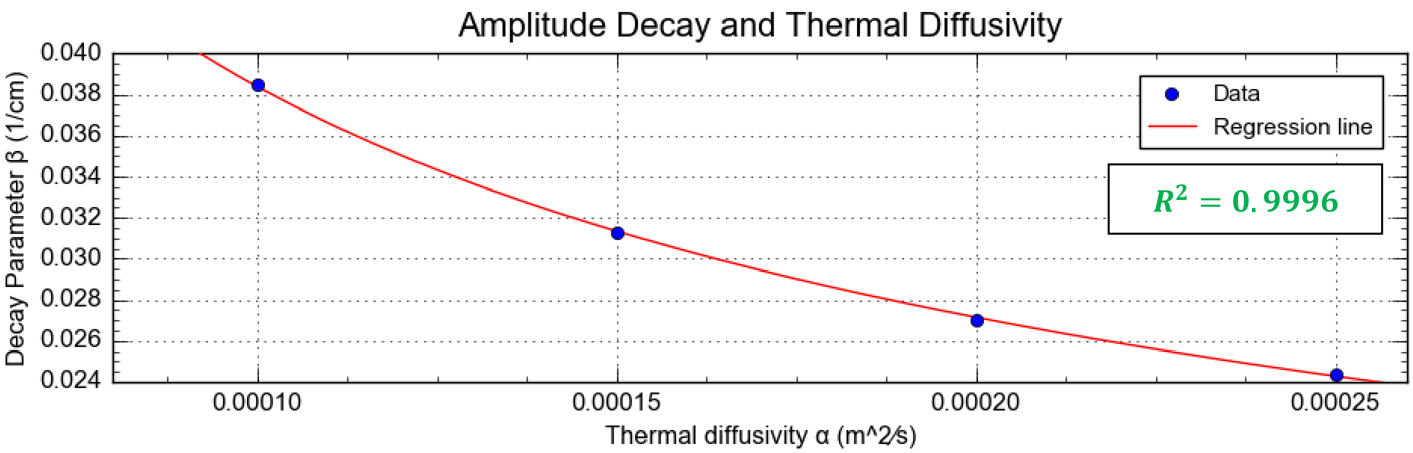
以下β之值，取x單位為公分，即β單位為$^1/_{\text{cm}}$。

熱擴散係數$\alpha(\times 10^4\ ^{\text{m}^2}/_{\text{s}})$	1.0	1.5	2.0	2.5
衰減係數$\beta(^1/_{\text{cm}})$	0.03852	0.031275	0.02700	0.02436

將以上數據製成圖表，如下圖。回歸線函數為:

$$\beta = \frac{3.84 \times 10^{-4}}{\sqrt{\alpha}}$$

於是波向量的虛數部分也應該反比於$\sqrt{\alpha}$，與理論預測符合。



(四) 溫度波的角頻率ω對振幅衰減影響:

定介質長度l=20(cm)，以程式模擬出波源頻率不同時震幅隨深度增加的衰減情況。

單位時間為 0.005(s)，材質的熱擴散係數為$\alpha = 1 \times 10^{-4}(\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$。

由於震幅衰減的形式為$10^{-\beta x}$，其中$x = 0$對應未衰減波，故取β為判斷衰減的依據。

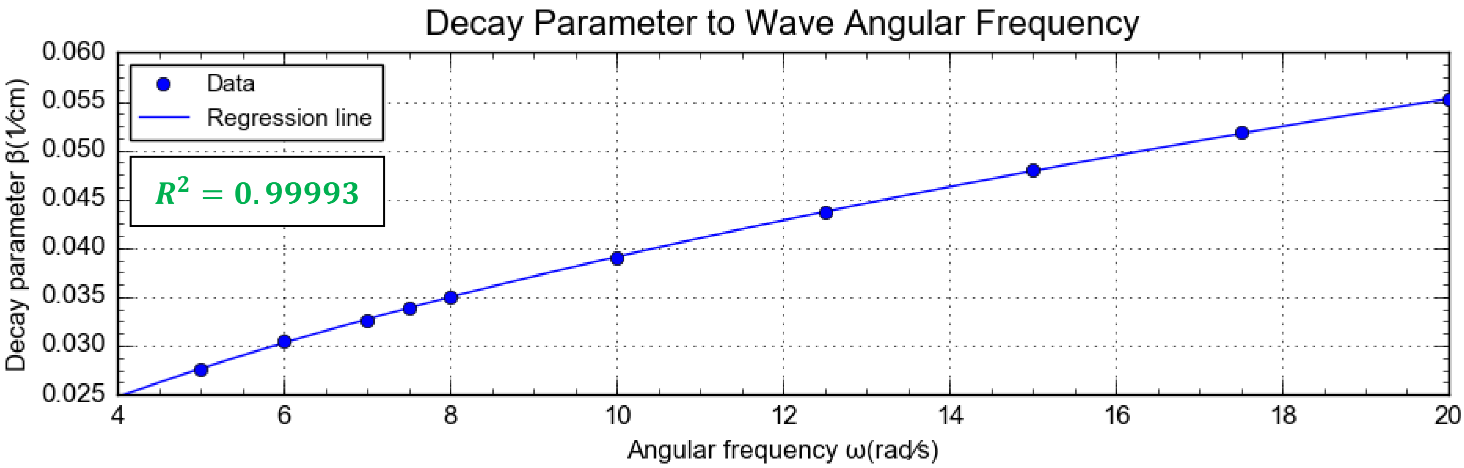
以下β之值，取x單位為公分，即β單位為$1/cm$。

角頻率$\omega(\mathrm{rad}/\mathrm{s})$	5.0	6.0	7.0	7.5	8.0
衰減係數$\beta(1/\mathrm{cm})$	0.0276	0.0304	0.0326	0.0338	0.0350
角頻率$\omega(\mathrm{rad}/\mathrm{s})$	10.0	12.5	15.0	17.5	20.0
衰減係數$\beta(1/\mathrm{cm})$	0.0390	0.0437	0.0480	0.0518	0.0552

將以上數據製成圖表，如下圖。回歸線函數為:

$$\beta = \sqrt{\omega} \times 1.2363 \times 10^{-2}$$

這表示波向量的虛數部分也應該正比於$\sqrt{\omega}$，與理論預測符合。



(五) 溫度波角頻率ω對波的相速度v_p影響:

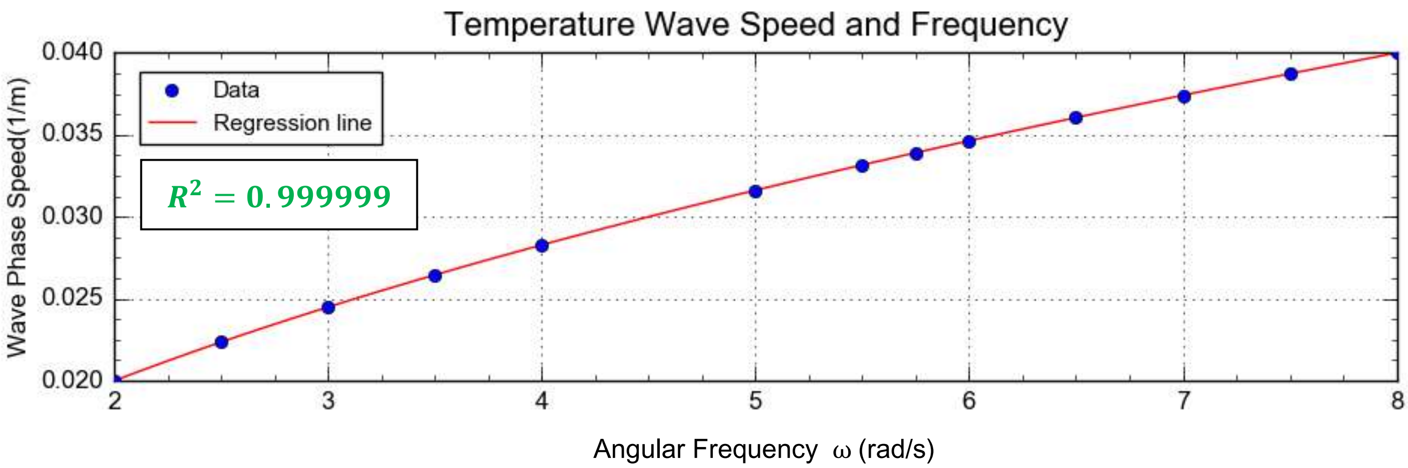
定介質長度l=20(cm)，以程式模擬出波源頻率不同時溫度波的相速度v_p。

單位時間為 0.01(s)，材質的熱擴散係數為$\alpha = 1 \times 10^{-4}(\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$。

角頻率ω(rad/s)	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	5.00	5.50
相速度v_p(m/s)	0.02000	0.02236	0.02450	0.02646	0.02828	0.03161	0.03315
角頻率ω(rad/s)	5.75	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00	
相速度v_p(m/s)	0.03391	0.03464	0.03606	0.03742	0.03873	0.04000	

以上數據製成圖表，如下圖。回歸線函數為:

$$v_p = \sqrt{\omega} \times 1.4141 \times 10^{-2}$$



這與理論預測符合。

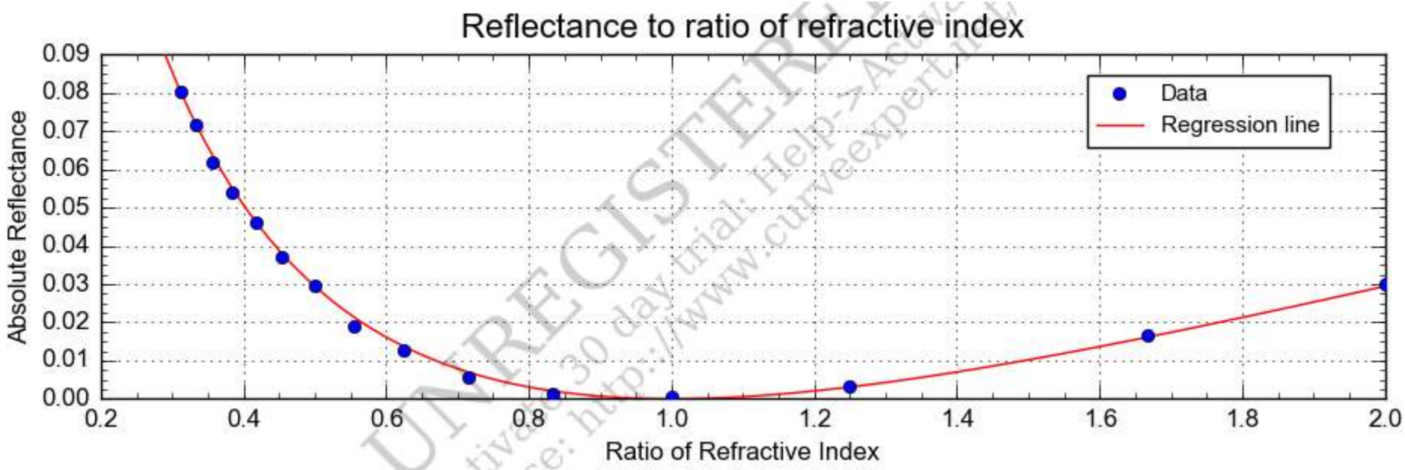
(六) 溫度波的反射率R^2與$\frac{C'k'}{Ck}$之關係:

取溫度波角頻率$\omega = 2\pi(\frac{rad}{s})$，以程式模擬反射率大小與$\frac{C'k'}{Ck}$的關係。

比值參數$\frac{C'k'}{Ck}$	0.3125	0.3333	0.3571	0.3846	0.4167	0.4545	0.5000	0.5556
反射率R^2	0.0802	0.0717	0.0620	0.0540	0.0460	0.0370	0.0296	0.0192
比值參數$\frac{C'k'}{Ck}$	0.6250	0.7143	0.8333	1.0000	1.2500	1.6667	2.0000	
反射率R^2	0.0127	0.0058	0.0015	0.0003	0.0032	0.0167	0.0300	

以上數據製成圖表，如下圖。回歸線函數為:

$$R^2 = \left(\frac{1-\sqrt{\frac{C'k'}{Ck}}}{1+\sqrt{\frac{C'k'}{Ck}}}\right)^2$$



這與理論推導結果一致。

三、達到穩態所需的特徵加熱時間:

在這部分當中，考慮一個熱庫分別與兩種元件的左端分別接觸，並觀察介質右端的溫度T_{bound}上升現象。除了兩端外元件皆為絕熱，即這是一個一維問題。

如說明書當中所提到，第一種是一塊熱擴散係數$\bar{\alpha}$的材質，第二種是由兩種介質多層疊合而成。

分別以$t_{\bar{\alpha}}, t_{ML}$表示第一、第二種介質的加熱特性時間。

參數定義如下:

兩種介質的長度都是 10(cm)

熱庫溫度為$T_i = 100℃$，空氣為$T_{air} = 0℃$

多層介質是由 10 層熱擴散係數α_1, α_2的材料疊合而成

$$\alpha_1 = \frac{4}{5}\bar{\alpha} \ , \alpha_2 = \frac{6}{5}\bar{\alpha} \ , \bar{\alpha} = 7 \times 10^{-5} (\mathrm{m^2}/_{\mathrm{s}})$$

所有單位體積比熱皆為$C = 2 \times 10^6 (\mathrm{J}/_{\mathrm{kg \cdot m^3}})$

熱庫與材料之熱傳係數$h_0 = 200 (\mathrm{W}/_{\mathrm{m^2 \cdot K}})$

模擬一:

材料與空氣之間的牛頓冷卻係數$h = 50 (\mathrm{W}/_{\mathrm{m^2 \cdot K}})$

這種情況下兩種材料的右端穩態溫度分別是$96.41℃, 96.55℃$，差異不大。

則加熱到$T_{bound} = 70℃$分別所需要的加熱時間:

$$t_{\bar{\alpha}} \approx 1916(s), t_{ML} \approx 1952(s)$$

模擬二:

材料與空氣之間的牛頓冷卻係數$h = 100 (\mathrm{W}/_{\mathrm{m^2 \cdot K}})$

這種情況下兩種材料的右端穩態溫度分別是$93.33℃, 93.52℃$，差異不大。

則加熱到$T_{bound}=60$℃分別所需要的加熱時間:

$$t_{\bar{\alpha}}\approx 1965(s), t_{ML}\approx 2048(s)$$

未來希望能理論推導上述結果，或模擬更多組數據觀察結果。

參、Python 程式碼

以下附上兩個較為單純的 python 程式碼以供參考。

(一)不同容器深度L對於冷卻時間t的影響(圓柱型容器):

```
import numpy
from matplotlib import pyplot

nx = 100
nt = 4000000
dt = 0.01
q = 0
h = 50
kp = 1.0
p = numpy.zeros(10)
C = 4184000
nu = kp/C

for q in range(0,10):
    dx = (0.01 + q * 0.02)/nx
    u = numpy.ones(nx)
    u[0:nx/4] = 0
    un = u
    b = 0
    for n in range(nt):
        if sum(u)>30:
```

```
            un = u.copy()
            u[nx/4] = un[nx/4] + nu*dt/dx**2*(u[nx/4+1]-u[nx/4])-
(u[nx/4]-u[nx/4-1]) * h/C * dt/dx
            u[nx/4+1:-1] = un[nx/4+1:-1] +
nu*dt/dx**2*(un[nx/4+2:]-2*un[nx/4+1:-1]+un[nx/4:-2])
            u[nx-1] = un[nx-1] - nu*dt/dx**2*(u[nx-1]-u[nx-2])
            b = b + 1
    p[q]= b * dt
    print(sum(u))
    print(q)
    q = q + 1

print(p)
pyplot.plot(p)
```

(二)不同的牛頓冷卻係數 h 對於液體的冷卻時間 t 的影響:

```
import numpy
from matplotlib import pyplot

nx = 100
nt = 4000000
dt = 0.01
q = 0
dx = 0.1/nx
kp = 1.0
p = numpy.zeros(16)

for q in range(0,16):
    h = 5 + 5 * q
    u = numpy.ones(nx)
    u[0:nx/4] = 0
    un = u
```

```
    b = 0
    C = 4184000
    nu = kp/C
    for n in range(nt):
        if sum(u)>30:
            un = u.copy()
            u[nx/4] = un[nx/4] + nu*dt/dx**2*(u[nx/4+1]-u[nx/4])-
(u[nx/4]-u[nx/4-1]) * h/C * dt/dx
            u[nx/4+1:-1] = un[nx/4+1:-1] +
nu*dt/dx**2*(un[nx/4+2:]-2*un[nx/4+1:-1]+un[nx/4:-2])
            u[nx-1] = un[nx-1] - nu*dt/dx**2*(u[nx-1]-u[nx-2])
            b = b + 1
    p[q]= b * dt
    print(sum(u))
    print(q)
    q = q + 1

print(p)
pyplot.plot(p)
```