

第十六屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA16-431

作品名稱：「試」其所以，「管」其所由

姓名：吳建翰

關鍵字：界面張力、甲苯

摘要

在試管中同時加入水與甲苯，甲苯浮於水之上，形成兩層界面，即空氣與水的界面（以下稱為第一界面）、甲苯與水的界面（以下簡稱第二層界面）。試管鉛直豎立時，兩界面均與重力場垂直（即所謂水平狀態）。

傾斜試管時，一般預期兩界面仍將與重力場垂直，與試管傾斜程度無關。

令人訝異的是，實驗結果顯示，傾斜試管時，第一界面大致如一般預期，與重力場垂直，與試管傾斜程度無關。但第二界面卻與試管壁維持垂直，隨試管傾斜而傾斜。當試管近乎水平時，第二界面近乎鉛直，且不再呈直線，而略呈 S 形彎曲。

我們設計了兩個實驗，觀察界面隨試管傾斜產生的變化。第一個實驗是觀察甲苯的揮發對第二界面（水與甲苯界面）和試管壁之夾角的影響；第二個實驗是傾斜試管，觀察試管傾斜程度對第二界面（水和甲苯的界面）的影響。

最後我們嘗試以由界面的照片，取得界面形狀的數據，撰寫程式，由 Young-Laplace equation 求出壓力差，與實驗情況作對照。

壹、研究動機

偶然的機會，我們在甲苯和水是否可互溶的實驗中，很驚訝地發現當傾斜試管時，甲苯與水的第二層界面，並不隨著傾斜角改變，反之，和試管壁幾乎維持同一個夾角，如圖 1-1。

我們對此有著極濃厚的興趣，因而希望能藉由實驗來找出影響第二界面（水與甲苯界面）和試管壁夾角的變因及其中的趨勢。

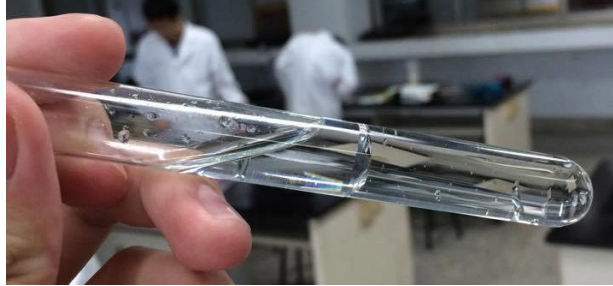


圖 1-1 水與甲苯的界面，和試管壁幾乎維持同一個夾角



貳、研究目的

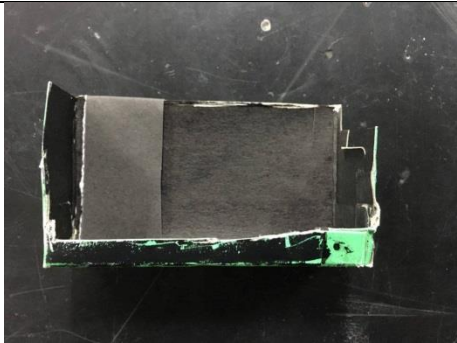



- 一、設計實驗，觀察第二界面（甲苯與水界面）隨甲苯揮發的變化。
- 二、設計實驗，觀察第二界面（甲苯與水界面）隨試管傾斜所產生的變化。
- 三、設計實驗，觀察第二界面（甲苯與水界面）隨溫度改變所產生的變化。
- 四、搜集文獻，嘗試以理論解釋第二界面的形狀。



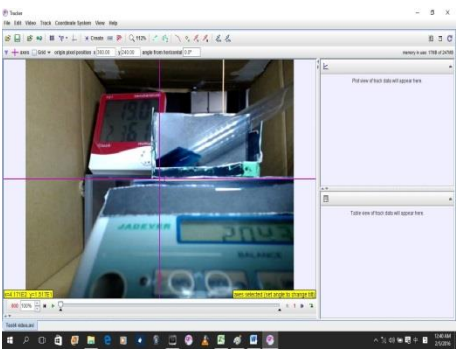
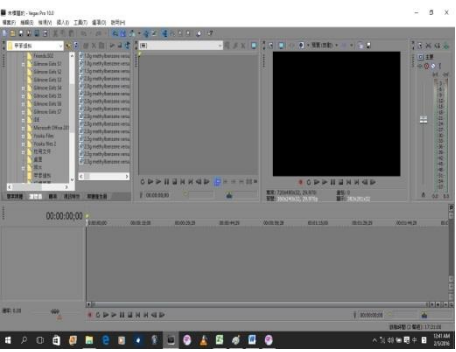

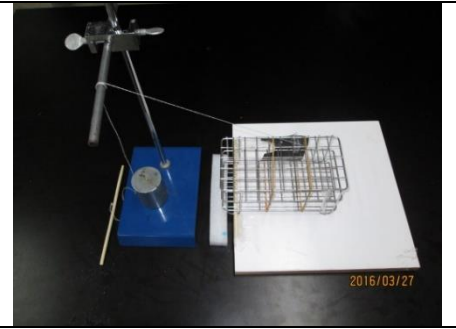


參、研究設備與器材



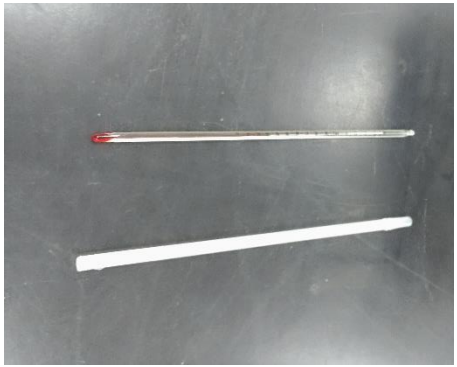



一、器材：

(表 3-1)

名稱	試管組	甲苯
圖片		
使用	於實驗中盛裝甲苯與水，並作為觀測之容器	用作試劑，觀察表面張力之現象

名稱	粉筆盒子 (8.9 公分)	筆記型電腦
圖片		
使用	固定傾斜試管的角度，使之於攝影時不會傾倒或滑動	連接檯燈及網路攝影機，並使用 RGSavaCam 攝影軟體拍攝、Sony Vegas 軟體及 Tracker 軟體處理拍攝結果。
名稱	滴定組	紙箱
圖片		
使用	滴定試劑、水	模擬暗室，防止實驗室中日光燈、風扇之干擾，影響觀測品質。
名稱	網路攝影機	電子秤
圖片		
使用	定時拍攝相片以便於日後之觀察	量取固定質量之試劑與水
名稱	溫溼度計	檯燈
圖片		
使用	於實驗中可知當時之溫度及濕度	單一照明來源，有利於夜間拍攝，且不使試管產生反光

名稱	紅藍綠三色染劑(水性染劑)	重錘
圖片		
使用名稱	將水染色，以便觀察兩液體之交界面 Tracker 軟體	作為鉛錘線使用，相片中角度判讀的基準線 SonyVegas 軟體
圖片		
使用名稱	追蹤液面上一特定點於一時刻時之位置，繼而測量欲得之物理量 RGSavaCam 攝影軟體	將定時攝影所得之相片製成影片，以便匯入 Tracker 軟體進行分析 支架組
圖片		
使用名稱	提供定時攝影、錄影等功能 竹筷	用於試管傾斜的實驗。使用支架組拉動試管，液面震動較輕微，不影響實驗 數位相機
圖片		
使用	固定支架並作為試管架轉動時的支點	拍攝實驗流程與器材

名稱	棉線	膠帶
圖片		
使用	拉動試管架	固定支架組於桌面上，防止實驗進行中與桌面相對滑動
名稱	溫度計	美食鍋
圖片		
使用	溫度實驗中測量缸中水溫	加熱水
名稱	魚缸	單眼相機(含角架、快門線)
圖片		
使用	溫度實驗中裝水	縮時拍攝水溫變化

二、軟體：

1. Tracker：

我們利用此軟體，追蹤與記錄拍攝影片中，第二界面（水與甲苯界面）的座標點、界面與試管壁之交點。分析這些數據，討論第二界面（水與甲苯界面）與試管傾斜程度的關係。

2. Sony Vegas：

實驗中，利用此軟體，剪接長時間拍攝之影片，以利於利用 Tracker 分析。

3. RGSavaCam :

利用此軟體定時拍攝之功能，在長時間下，每間隔固定時間自動拍攝。

4. Matlab:

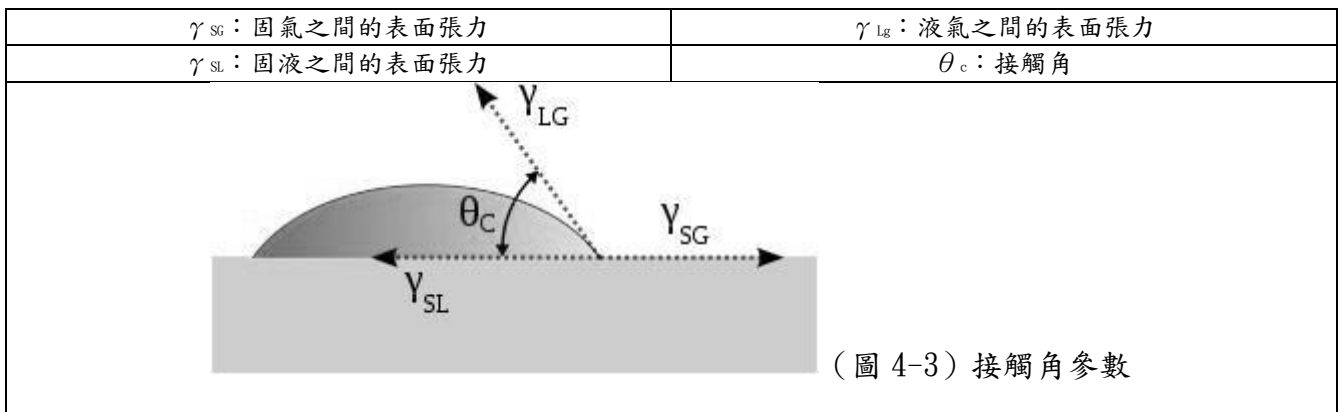
我們使用 Matlab 撰寫程式，算出液面數據點的曲率半徑，再套用 Young-Laplace equation 算出界面所提供的壓力差。

肆、研究相關原理

一、接觸角

在理想平整的固體表面上，接觸角 θ_c 與每單位面積附著力所作的功 W 可以透過 Young-Dupre Equation 求得：

$$\gamma_{Lg} \cos \theta_c = \gamma_{SG} - \gamma_{SL} \Rightarrow W = \gamma_{SG} + \gamma_{LG} - \gamma_{SL} \Rightarrow W = \gamma_{LG}(1 + \cos \theta_c)$$



一般認為接觸角為定值，但由文獻可得知，除了靜態接觸角外，動態接觸角又可分為前進角 θ_a (Advancing angle) 與後退角 θ_r (Resending Angle)。

本實驗在試管傾斜時，上方試管壁的接觸角為後退角 θ_r (Resending Angle)，下方試管壁的接觸角為前進角 θ_a 。

二、Young-Laplace Equation :

Young-Laplace Equation 是一非線性偏微分方程，用來計算兩靜態流體界間因表面張力或壁張力造成的毛細管壓力差，如：水與空氣。Young-Laplace Equation 連結了此壓力差與表面形貌的關係，對靜態毛細管表面的研究很有幫助。此方程式描述了液體界面間正向壓力的平衡(界面厚度為零)，但在此，只考慮正向壓力，因切線方向之壓力存在會導致界面的不穩定。

$$\Delta p = -\gamma \nabla \cdot \hat{n} = 2\gamma H = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

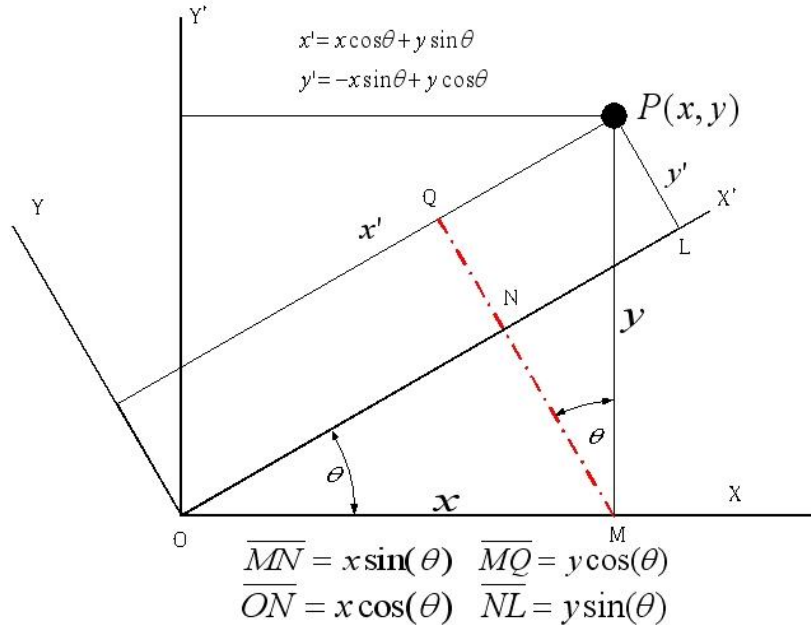
Δp : 界面間的壓力差	γ : 表面張力係數
\hat{n} : 往界面外的單位法向量	H : 平均曲率
R_1 與 R_2 : 主要曲率半徑	

又我們可導出軸狀對稱的 Young-Laplace Equation :

$$\Delta p = p' - p'' = \gamma \left[\frac{z_x}{x(1+z_x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{z_{xx}}{(1+z_x^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

三、座標旋轉：

在我們的實驗中，攝影機固定在試管架上，隨著試管架傾斜，所以由照片所取得的數據，都必需撰寫程式，經過座標軸旋轉的方式來呈現數據點正確的位置。



在二維座標之迴轉，以兩座標間之夾角 θ 決定之。設原座標為 (x, y) ，同一點 P 經座標旋轉一個角度 θ 後，其新座標為 (x', y') 。由圖中可以獲得下列關係式：

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

四、由曲率半徑求壓力差

液面上連續的三個數據點，可視為在同一圓上。此圓的半徑即三點所構成曲線的曲率半徑，此圓的圓心即曲率中心。

設此 3 個點座標，分別為 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

$$\overleftrightarrow{AB} \text{ 方程式為 } \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad \overleftrightarrow{BC} \text{ 方程式為 } \frac{y-y_2}{x-x_2} = \frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$$

$$\overline{AB} \text{ 中點坐標 } \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right) \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overleftrightarrow{AB} \text{ 斜率 } m_1 = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, \text{ 與 } \overleftrightarrow{AB} \text{ 垂直之斜率 } m_1' = -\frac{1}{m_1} = -\left(\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} \right) \dots\dots \textcircled{2}$$

\overline{AB} 之垂直平分線為經 \overline{AB} 中點，且垂直 \overline{AB} 之直線

設 \overline{AB} 之垂直平分線方程式為 $y = m_1'x + b$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 代入 } \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = -\left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 - y_2}\right)\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + b, \quad b = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + \frac{x_1^2 - x_2^2}{2(y_1 - y_2)}$$

$$\overline{AB} \text{ 之垂直平分線方程式為 } y = -\left(\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}\right)x + \left[\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + \frac{x_1^2 - x_2^2}{2(y_1 - y_2)}\right]$$

$$\text{同理 } \overline{BC} \text{ 之垂直平分線方程式為 } y = -\left(\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}\right)x + \left[\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + \frac{x_2^2 - x_3^2}{2(y_2 - y_3)}\right]$$

$$\text{令角垂直平分線方程式為 } \begin{cases} y = A_2x + B_1 \\ y = A_3x + B_2 \end{cases}$$

$$\text{解得交點坐標 } \left[-\frac{A_1 - A_2}{B_1 - B_2}, -A_1\left(\frac{A_1 - A_2}{B_1 - B_2}\right) + B_1 \right]$$

伍、實驗過程與方法

實驗一：甲苯揮發時，第二界面（水與甲苯界面）的變化

1. 實驗簡介：甲苯的揮發對第二界面（水與甲苯界面）和試管壁之夾角的影響。

- (1) 選取某一試管傾斜度，靜置試管，使甲苯隨時間揮發。
- (2) 甲苯揮發而逐漸減少時，使用軟體驅動網路攝影機，定時拍攝第二界面（水與甲苯界面）和試管壁之夾角的變化。
- (3) 改變試管傾斜程度，重覆上述兩實驗步驟。

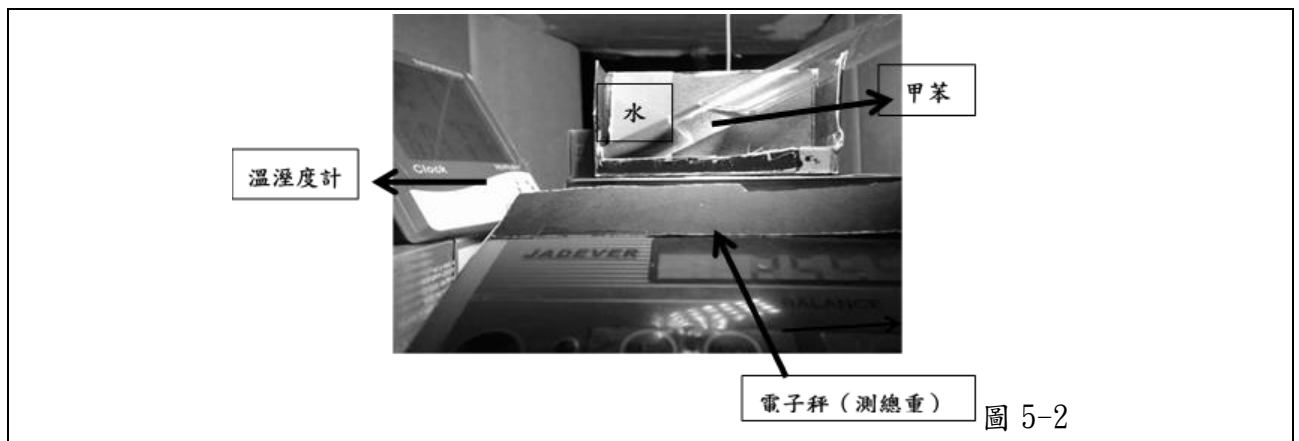
2. 實驗步驟：

- (1) 將試管、粉筆盒及測量儀器（電子秤、溫溼度計）放入暗室中，連接網路攝影機於電腦，並在所有器材的擺設位置做標記，避免不同次實驗拍攝時結果受到拍攝角度影響，調整光源角度，使第二界面能清楚地顯示於拍攝的相片上。如下圖 5-1：



圖 5-1

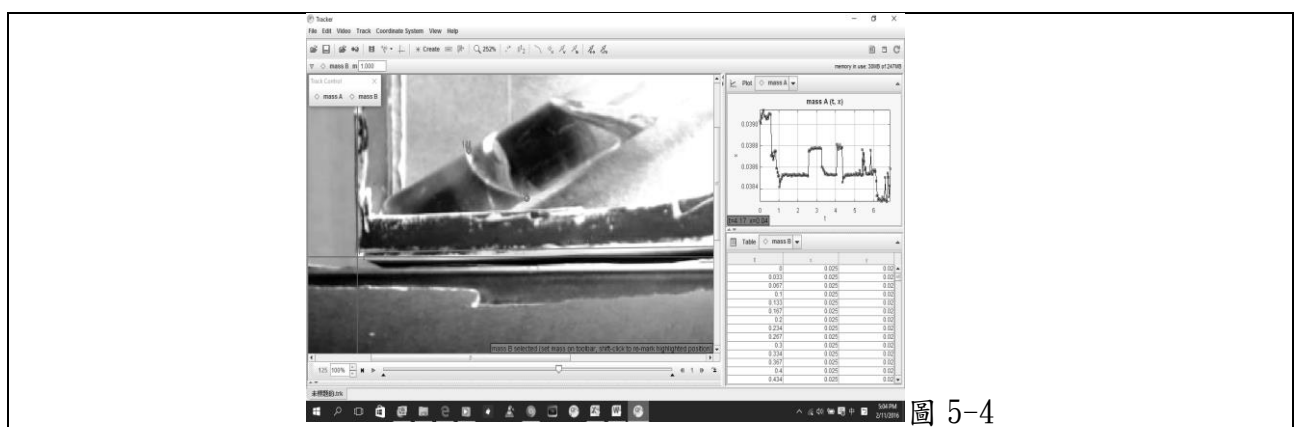
- (2) 歸零電子秤後，緩緩加入定量之兩液體，使達到需求量；將紙箱兩側之開口封閉，避免箱環境光線進入，使試管壁產生反光而遮住液面；設定網路攝影機於每三十分鐘拍攝一張相片。如下頁圖 5-2：



- (3) 靜候數日，於甲苯完全揮發後，將所得之相片以 Sony Vegas 軟體製成影片。如下圖 5-3：



- (4) 將影片匯入 Tracker 軟體，追蹤接觸面與試管壁左右兩側交點 AB 點之路徑變化，並蒐集所得之數據。如下圖 5-4：

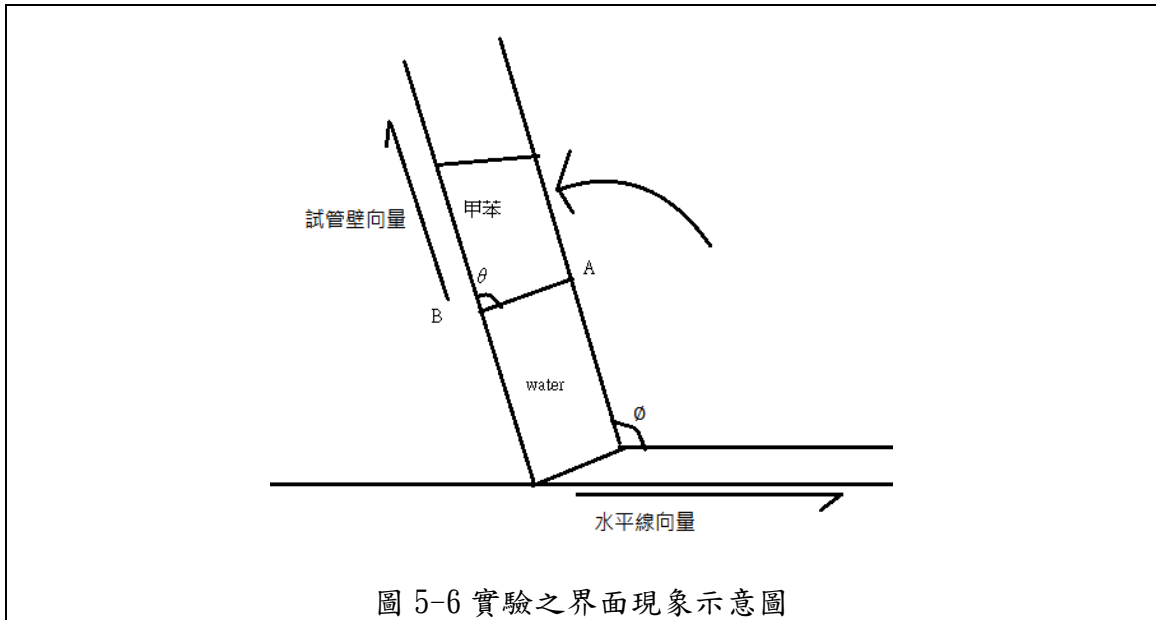


- (5) 在 Excel 中處理由 Tracker 追蹤出的數據，並輸入每一影格中相對應之水與甲苯之質量；觀察數據中甲苯質量對於傾斜面之影響（由於水層被甲苯層覆蓋，水不易蒸發至空氣中，故此實驗水質量視為不變），並繪製成試管壁與水和甲苯界面夾角與甲苯質量之關係圖；設定四種水與甲苯的質量比並重複上述步驟。

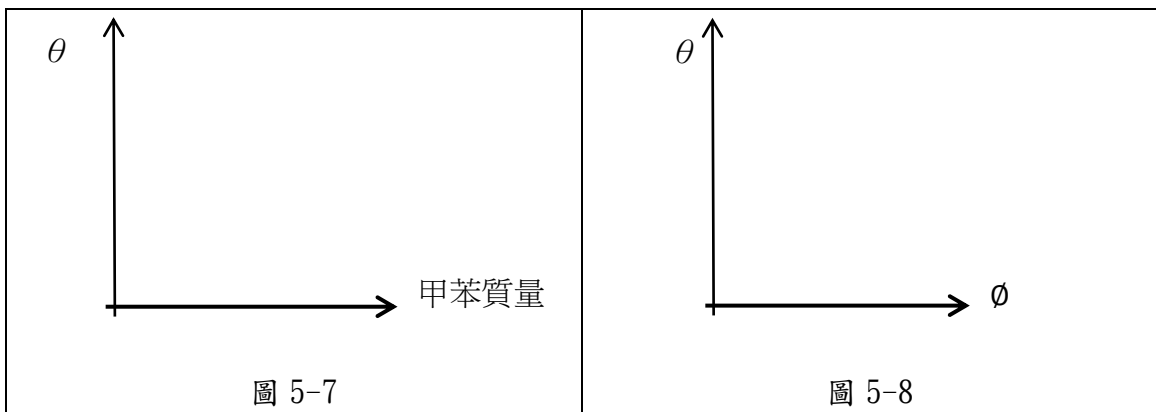
實驗二：試管傾斜時，第二界面（水與甲苯界面）的變化

1. 實驗簡介：試管傾斜之實驗：

- (1) 選取某甲苯與水之質量比，改變試管傾斜程度，以錄影方式記錄試管傾斜程度對第二界面（水和甲苯的界面）的影響
- (2) 調整甲苯與水之質量比，重覆步驟 1。
- (3) 實驗相關物理量示意圖：



- (4) 利用 Tracker 取上圖中 A、B 二點於影格中的位置，求得第二界面（第二界面（水與甲苯界面））之 \overline{BA} 與試管壁向量夾角 θ ，以及試管壁向量與水平線向量之夾角 ϕ ；如此便可以畫出水與甲苯質量比與角度之間的關係圖，形式如下：



2. 實驗步驟：

- (1) 用 Excel 記錄下水量（1.5g~7.0g）與甲苯量（1.5g~4.0g），以便接續的實驗如下 5-9 圖：

〔備註：由於是將試管放於試管架內觀察，因此加水時，為避免水與甲苯間界面被試管架擋住（圖 5-10），所以於此實驗中不討論 4.0g~5.5g 的水〕。

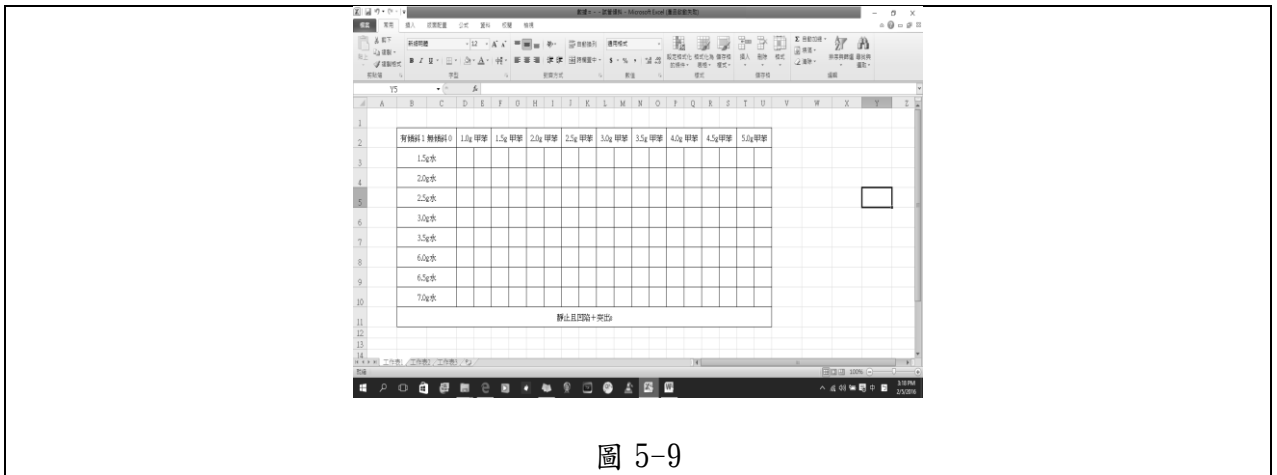


圖 5-9

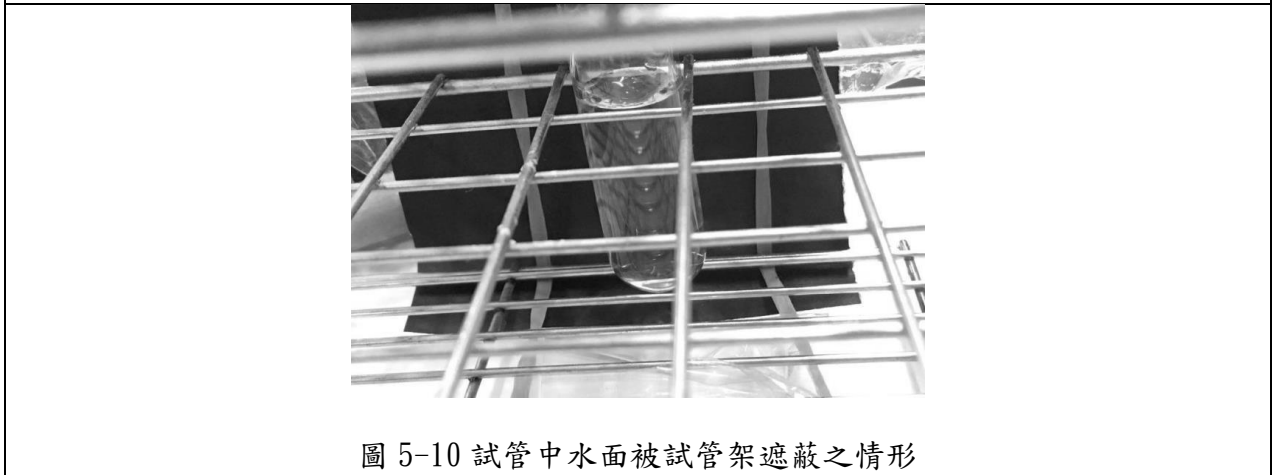


圖 5-10 試管中水面被試管架遮蔽之情形

(2)配置定量的水和甲苯〔先加水，再緩緩加入甲苯，以減少第二界面（水與甲苯界面）之干擾，並於配置完試劑後轉動試管（此時試管垂直於地面），使接觸面垂直試管壁再開始進行實驗〕，固定網路攝影機與裝有兩液體的試管於試管架上。如下圖 5-11：



圖 5-11

(2)以類似滑輪的方式帶動試管架旋轉，藉由將細繩繞在支架上，以降低因手部抖動使液面晃動之影響，並錄製完整過程。如下圖 5-12：

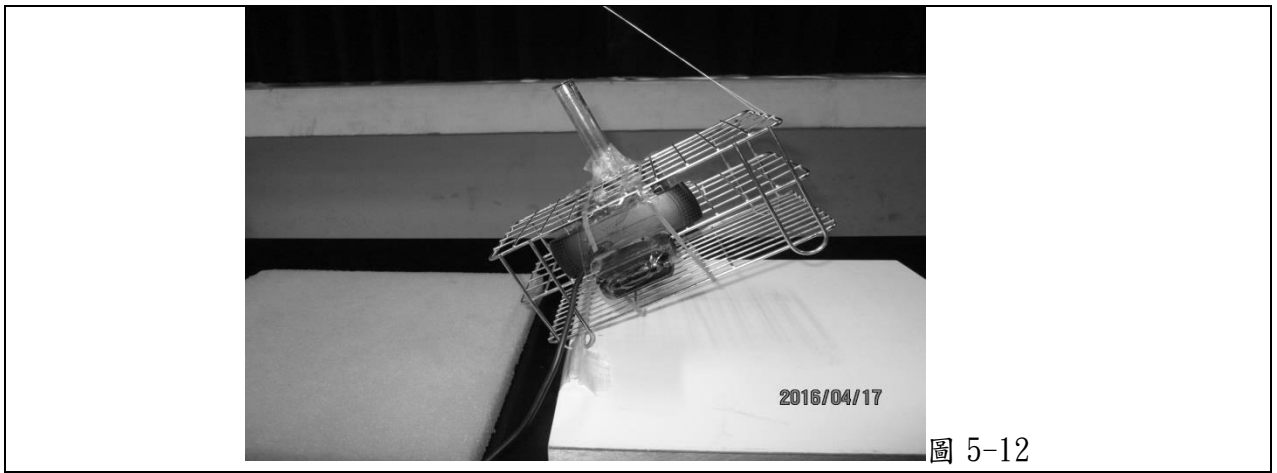


圖 5-12

- (4) 觀察影片中第二界面（水與甲苯界面）於影片中的改變，並記錄；最後，於不同水量、不同甲苯量時（同時計算兩液體質量的比值），探討傾斜試管對於第二界面的影響。並藉由使用 Tracker 軟體進行特定點的路徑分析，求此界面與試管壁之夾角，以及試管壁向量與水平線向量之夾角；並分析所得之數據。如下圖 5-13：

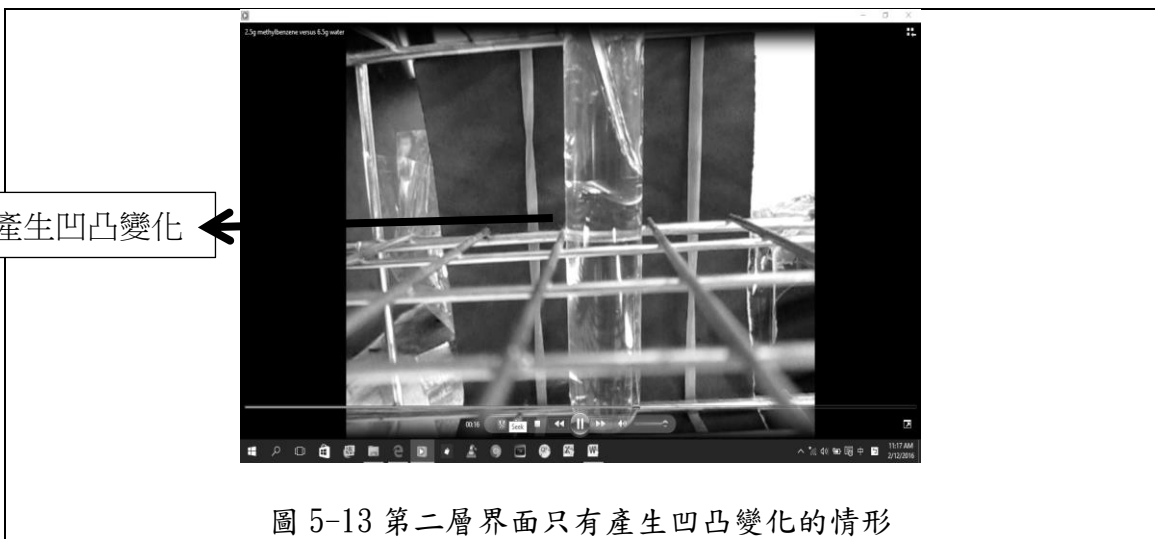


圖 5-13 第二層界面只有產生凹凸變化的情形

實驗三、溫度對第二層界面的影響

1. 實驗簡介：

- (1) 透過改變溫度觀察第二層界面在不同溫度下的形狀變化。
- (2) 比較縮時攝影的相片，觀察液面的改變。

2. 實驗步驟：

- (1) 將鉛錘線、試管與試管架放於魚缸中；對焦單眼相機使缸中的液面能被清楚辨識，並將相機固定於腳架上。

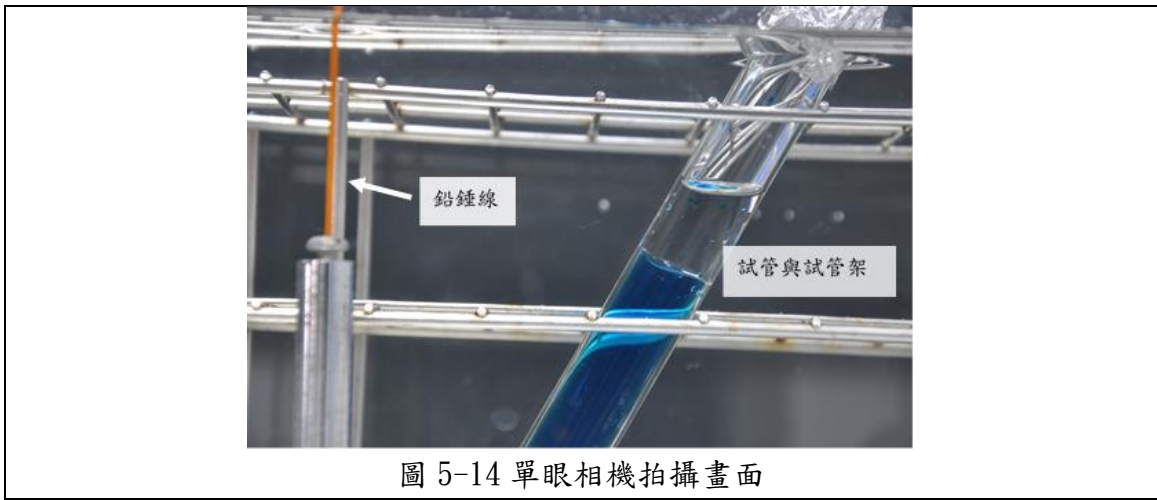


圖 5-14 單眼相機拍攝畫面

- (2) 調整快門線，使單眼相機於開始攝影後 4 分 10 秒開始自動拍攝第一張，每隔 4 分鐘拍攝下一張。
- (3) 掛置溫度計於魚缸邊，使其不得旋轉、碰觸缸壁；架設 Webcam 網路攝影機，使其對焦能夠清晰辨識溫度計刻度。調整 AVACAM 軟體，控制攝影機每四分鐘擷取一張相片，使其和單眼相機同步。由於 AVACAM 再按下「開始拍攝」之後必須間隔四分鐘後才會拍攝第一張，因此需如(2)的方法設定快門線，其中十秒是緩衝時間，提供實驗者按下攝影機和相機的開關使其同步。

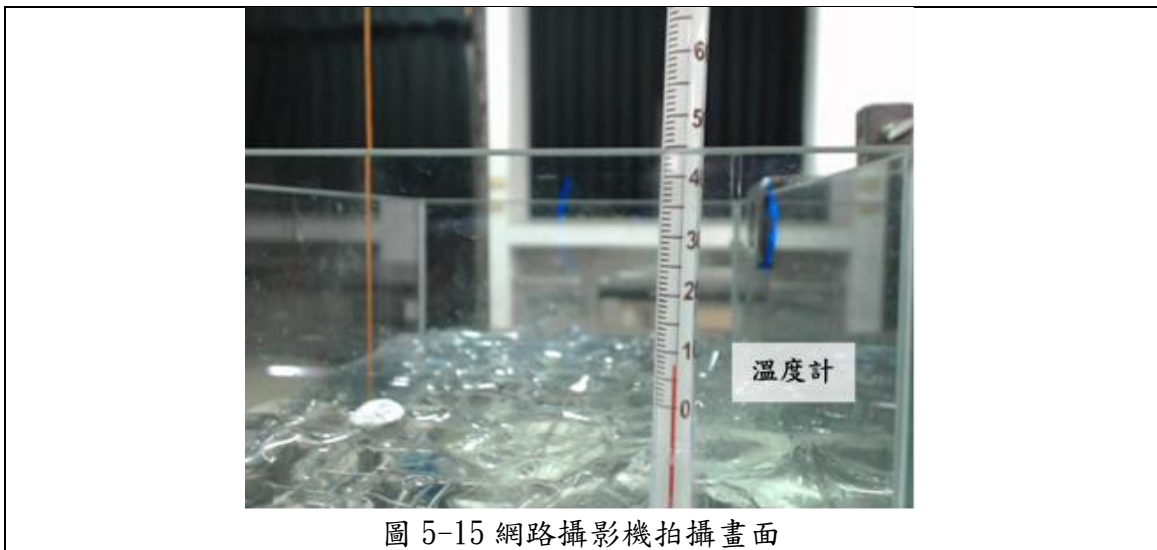


圖 5-15 網路攝影機拍攝畫面

- (4) 高溫實驗：本實驗使用沸騰水，將其加入魚缸中並影響試管中液體的溫度（約攝氏 80 度），並進行拍攝。
- (5) 冷卻實驗：本實驗透過添加冰塊，以降低魚缸中水溫至約攝氏 10 度，間接改變試管中液體溫度，並進行拍攝。
- (6) 待溫度回至室溫（約攝氏 35 ± 5 度），將所拍攝之相片製作成影片（包含溫度與液面），並觀察液面隨時間的變化。

四、液面形狀的解釋

關於第二界面的形狀，經過長時間的文獻查詢與教授間的書信往來，找不出具體的理論解釋。

後來我們查詢到 Dr. Pallab Ghosh 的一系列課程，知道 Young-Laplace equation 可以用來解釋第二界面的形狀，但 Young-Laplace equation 是個微分方程式，只有少數幾種特定狀況才能得到方程式解。

由於試管傾斜時已失去對稱性，本實驗無法列出微分方程式求解，畫出理論曲面形狀與實驗作對照。經過討論，我們打算由界面的照片，取得界面形狀的數據，經 Young-Laplace equation 求出壓力差，看是否和實驗情況相吻合，作法有 2 種。

第一種方法：在實驗曲線上選定相鄰的 3 個數據點，假設它們在同一個圓上，求出其圓心與半徑。有了曲率半徑就有了壓差。

$$\frac{1}{R_c} = \pm \frac{d^2 z / dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

第二種方法：使用 Excel 找出實驗曲線的經驗方程式，由經驗方程式經算出曲率，再由 Young-Laplace equation 換算成壓力差。

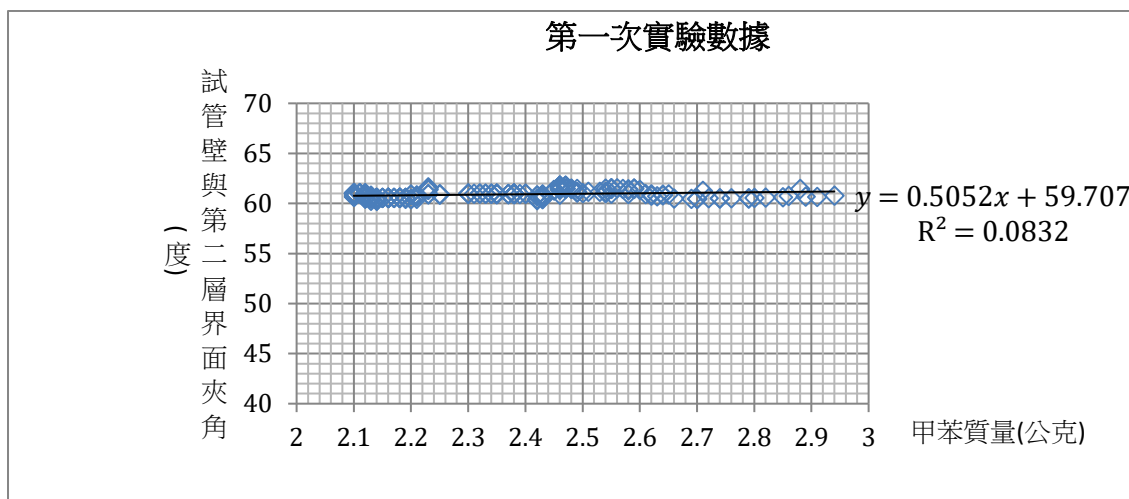
在此，我們採用方法一，以數位相機拍攝液面，將照片旋轉到水平，使用 Tracker 標示出液面數據點，得此液面為 5 次多項式，以 Matlab 撰寫程式作擬合，求出此 5 次多項式的係數。再求出這 5 次多項式的曲率，由 Young-Laplace equation 求出壓力差，來解釋液面的形狀。

陸、研究結果與討論

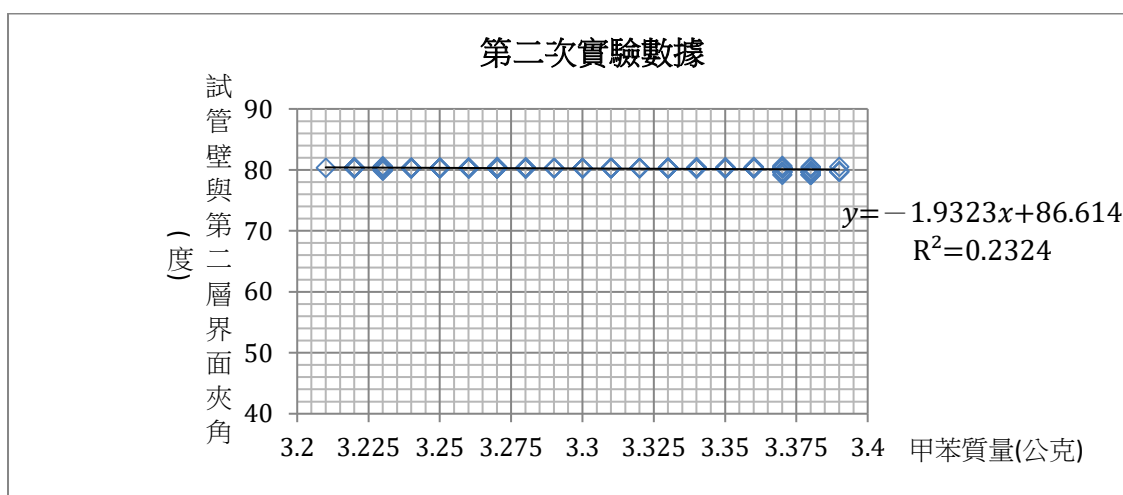
一、實驗結果一：甲苯揮發時，第二界面（水與甲苯界面）的變化

1、實驗數據

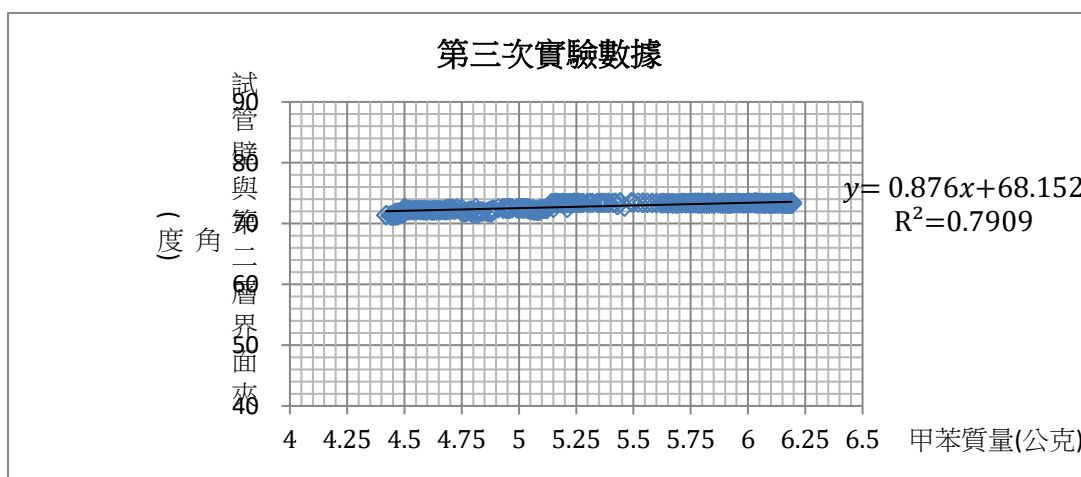
(1) (下圖 5-2) 第一次實驗—試管與水平角固定為 27.20 度



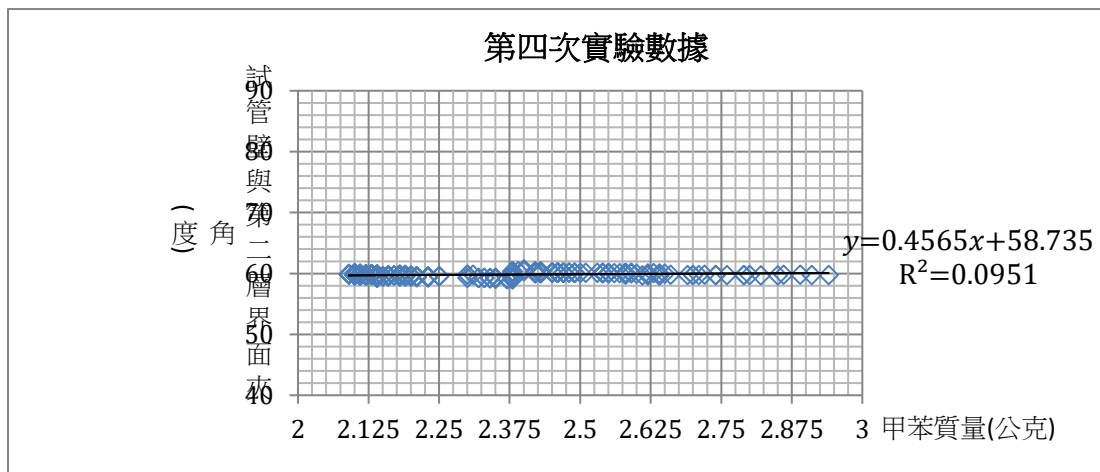
(2) (下圖 5-3) 第二次實驗—試管與水平角固定為 28.09 度



(3) (下圖 5-4) 第三次實驗—試管與水平角固定為 26.105 度



(4) (下圖 5-5) 第四次實驗—試管與水平角固定為 59.867 度



2、數據分析：

(1)根據第一個實驗，發現到第二界面（水與甲苯界面）與試管壁之夾角變化如下：

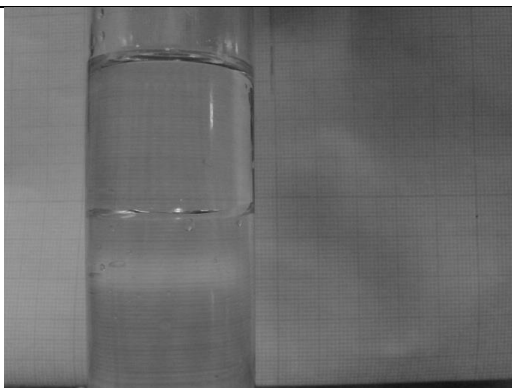
(表 6-1)

	第一次實驗	第三次實驗	第四次實驗
斜率	0.5052	0.876	0.4565
夾角變化	隨時間遞減 但變化極小	隨時間遞減 但變化極小	隨時間遞減 但變化極小
R ² 值	0.0832	0.7909	0.0951
甲苯質量變化	約 0.61 克	約 1.77 克	約 0.77 克
夾角變化	0.62°	1.95°	0.10°

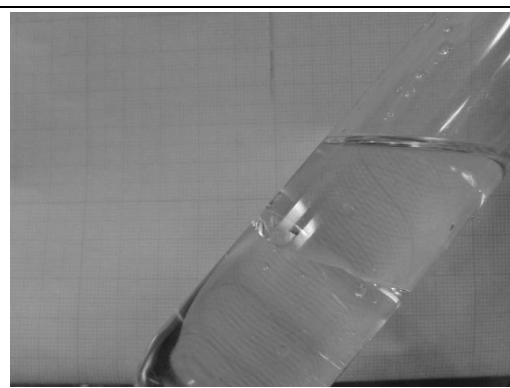
(2)不管試管傾斜程度為何，隨著甲苯揮發，甲苯的質量漸小，但第二界面（水與甲苯界面）的傾斜程度幾乎不變。

(3)當甲苯持續揮發，直到第一界面（甲苯與空氣界面）與第二界面（水與甲苯界面）相交時，才可明顯看出第二界面（水與甲苯界面）和試管壁的夾角漸趨小。

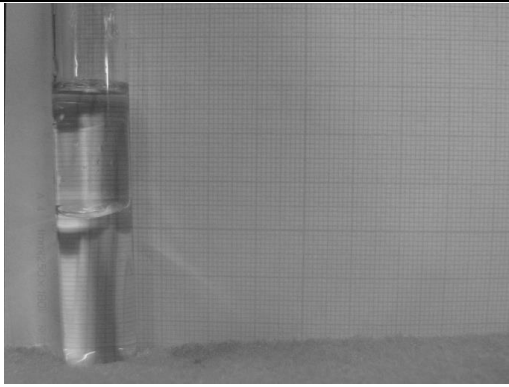
(4)如果更換較粗的試管，試管稍微傾斜，第二界面（水與甲苯界面）會有較大幅度的改變，如以下四圖。



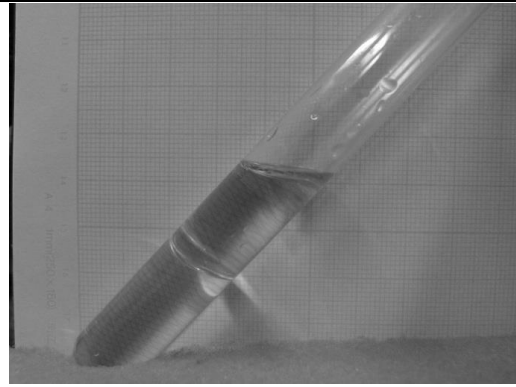
粗試管鉛直放置（近拍）



粗試管傾斜放置（近拍），可見第二界面已不再與管壁完全垂直且略呈 S 形彎曲。



粗試管鉛直放置（遠拍）



粗試管傾斜放置（遠拍）

3、理論解釋：

(1) 我們利用第二界面（水與甲苯界面）兩端的壓力差，來探討實現結果的可能原因。

(2) 如圖， h 為原本之甲苯液柱高， r 為試管之半徑， θ ：新液面與試管壁的夾角。

P 至新液面高度：

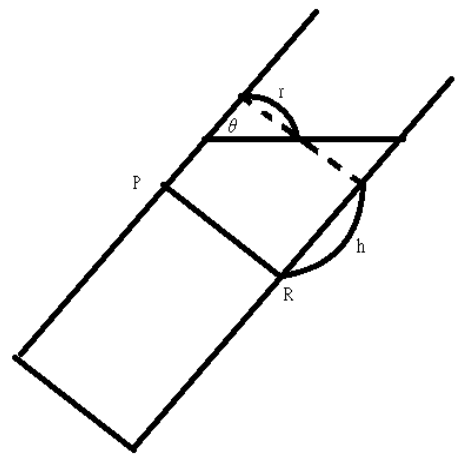
$$h'_P = h \sin \theta - r \cot \theta \sin \theta = h \sin \theta - r \cos \theta;$$

R 至新液面高度： $h'_R = h \sin \theta + r \cos \theta$

→ P 與 R 的高度差 = $2r \cos \theta$ ；

P 與 R 的壓力差 = $2\rho gr \cos \theta$ — (1) 式

(其中 ρ 為甲苯密度)



(3) 由(1)式，壓力差 = $2\rho gr \cos \theta$ ，得知與上方甲苯液柱高 h 無關，故與甲苯體積（試管固定）無關，即與甲苯質量無關，與實驗結果大致吻合。

(4) 由(1)式，當試管傾斜程度增加時，即 $\theta \downarrow \Rightarrow \cos \theta \uparrow \Rightarrow \Delta P \uparrow$ ，故試管傾斜至相當程度時，第二界面（水與甲苯界面）才有稍微變化，此亦與實驗結果大致吻合。

(5) (1) 式僅考慮壓力，並不考慮甲苯與水之界面張力。由 Young-Laplace equation 可知，界面曲率與界面張力形成壓力差。我們可以推論，第二界面（水與甲苯界面）呈現的彎曲程度，是界面張力與壓力差達到平衡後的結果。

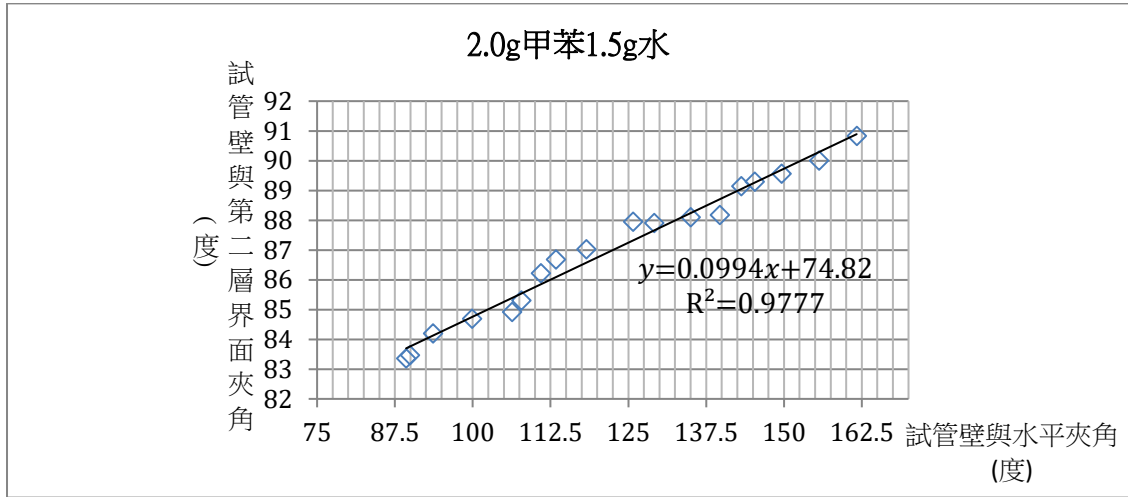
(6) 又由(1)式，當試管半徑 $r \uparrow$ 時， $\Delta P \uparrow$ ，此時第二界面（水與甲苯界面）會因此而隨之變得較為水平，再次地與實驗結果吻合。

二、實驗結果二：試管傾斜時，第二界面（水與甲苯界面）的變化：

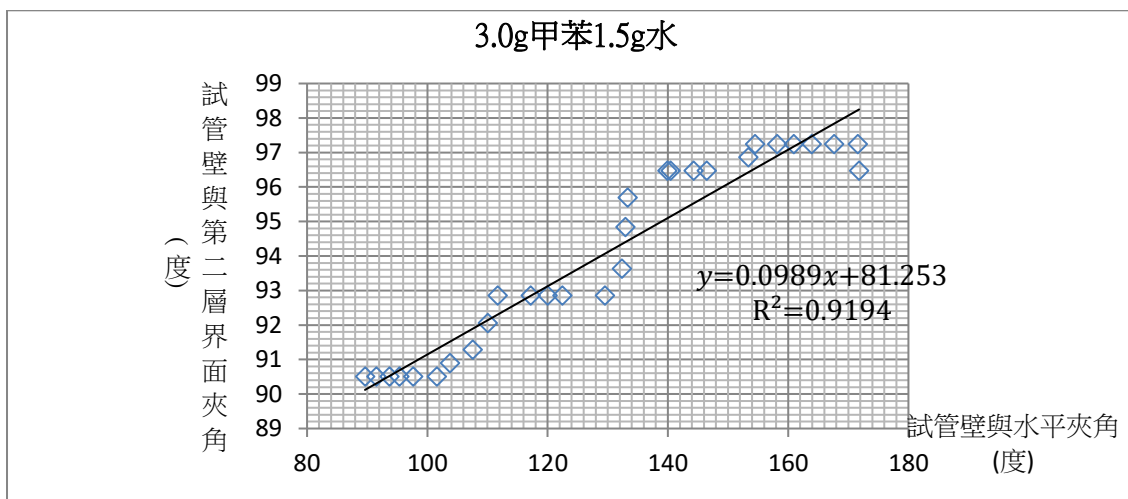
1、實驗數據

(1) 水的質量固定為 1.5 克：

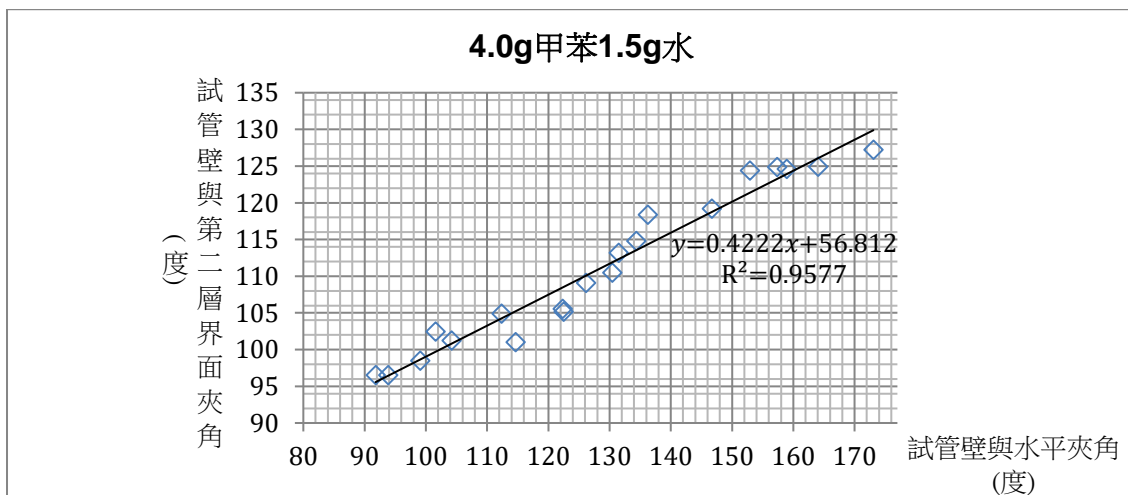
a. (下圖 5-6) 水的質量固定為 1.5 克，取 2.0 克甲苯



b. (下圖 5-7) 水的質量固定為 1.5 克，取 3.0 克甲苯

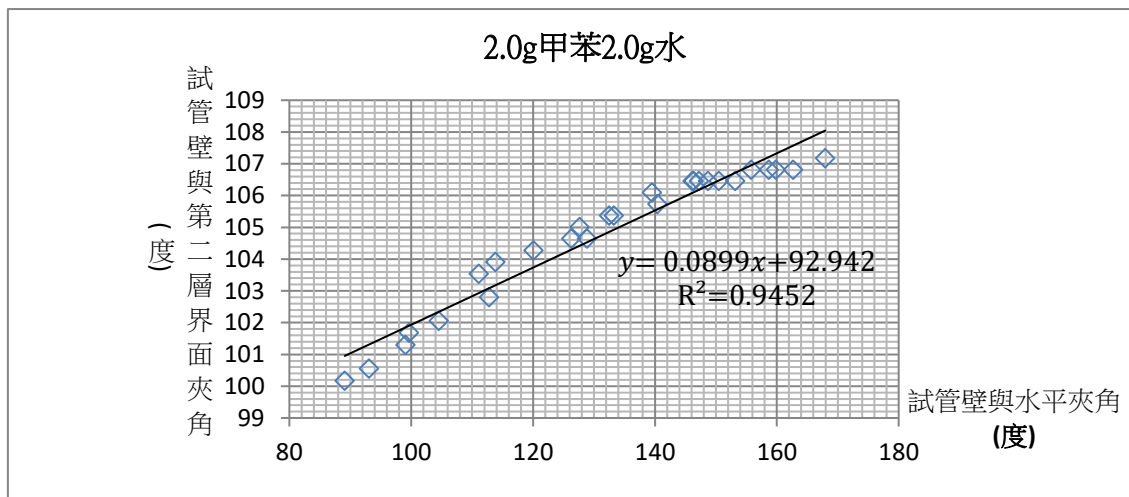


c. (下圖 5-9) 水的質量固定為 1.5 克，取 4.0 克甲苯

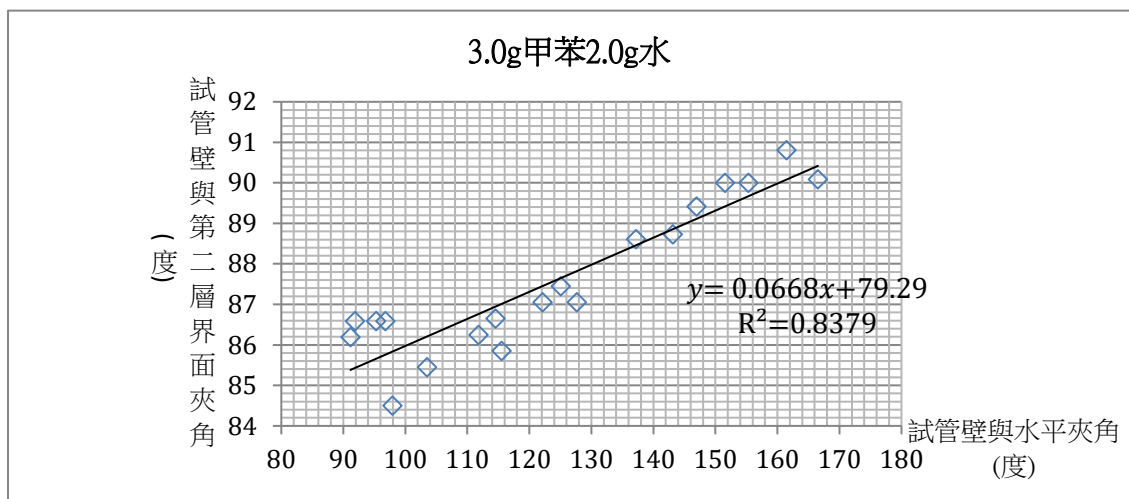


(2) 水的質量固定為 2.0 克：

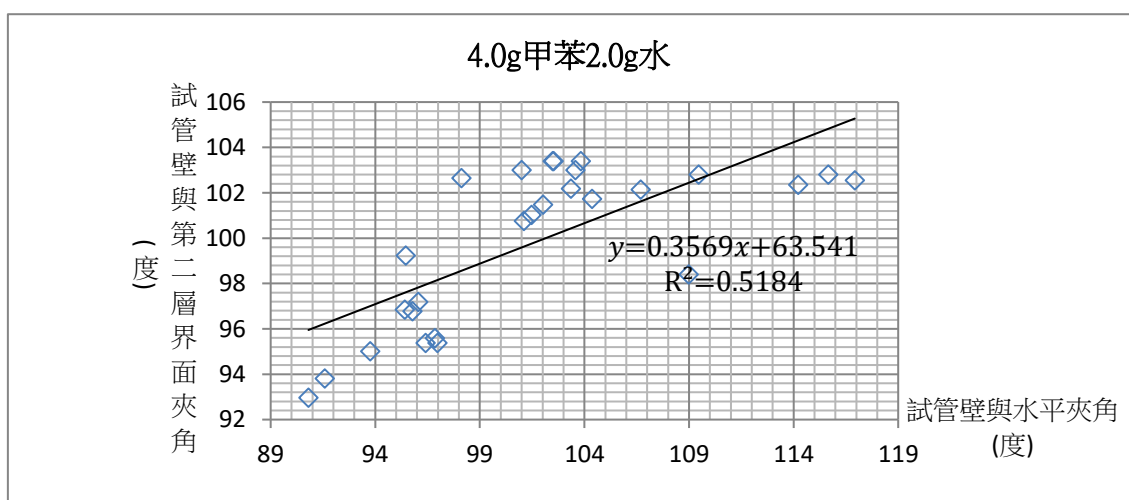
a. (下圖 5-10) 水的質量固定為 2.0 克，取 2.0 克甲苯



b. (下圖 5-11) 水的質量固定為 2.0 克，取 3.0 克甲苯

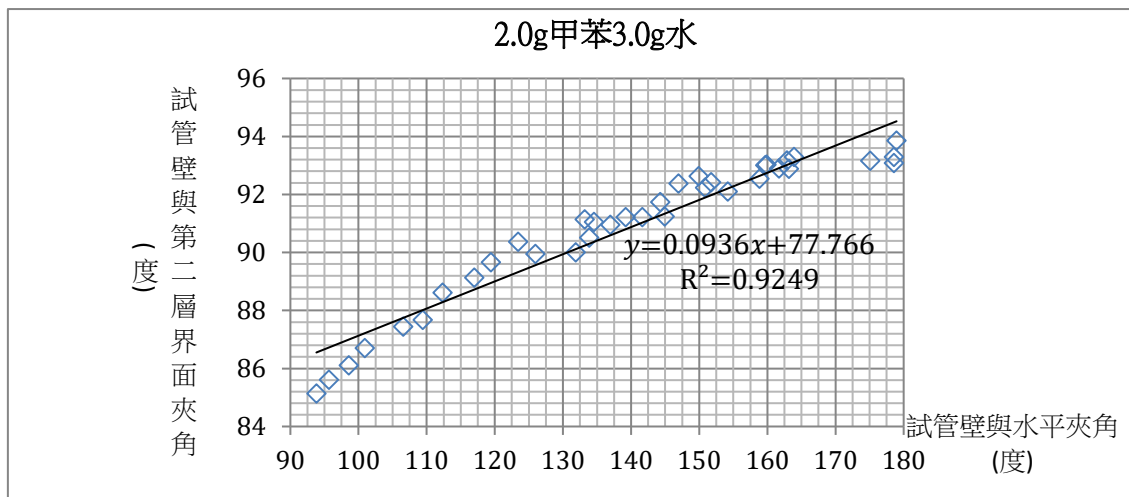


c. (下圖 5-12) 水的質量固定為 2.0 克，取 4.0 克甲苯。

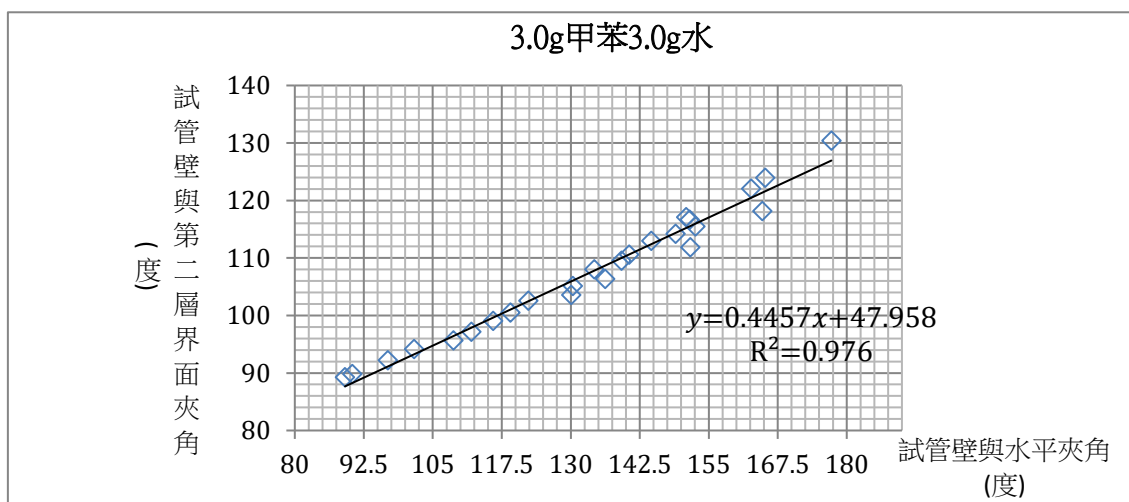


(3) 水的質量固定為 3.0 克：

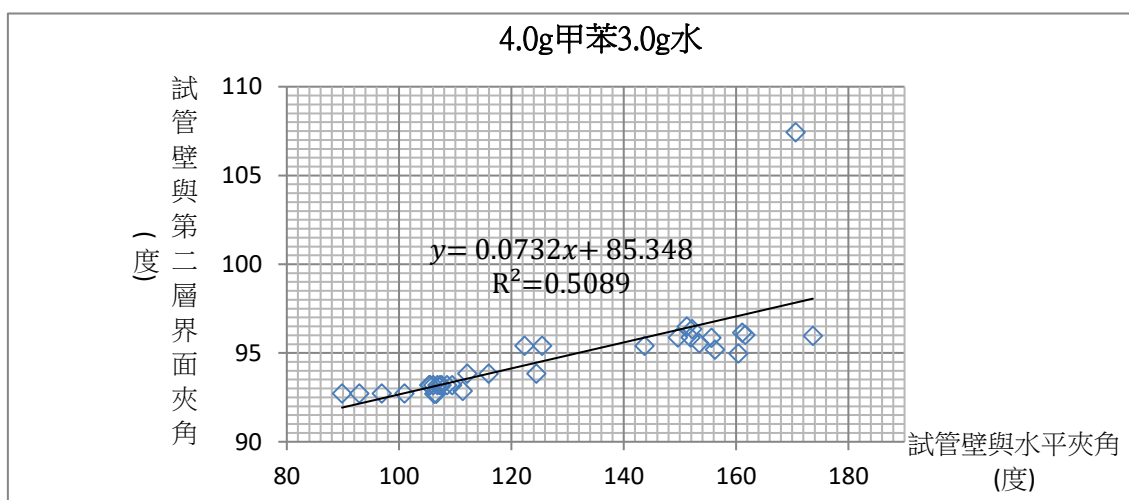
a. (下圖 5-13) 水的質量固定為 3.0 克，取 2.0 克甲苯



b. (下圖 5-14) 水的質量固定為 3.0 克，取 3.0 克甲苯

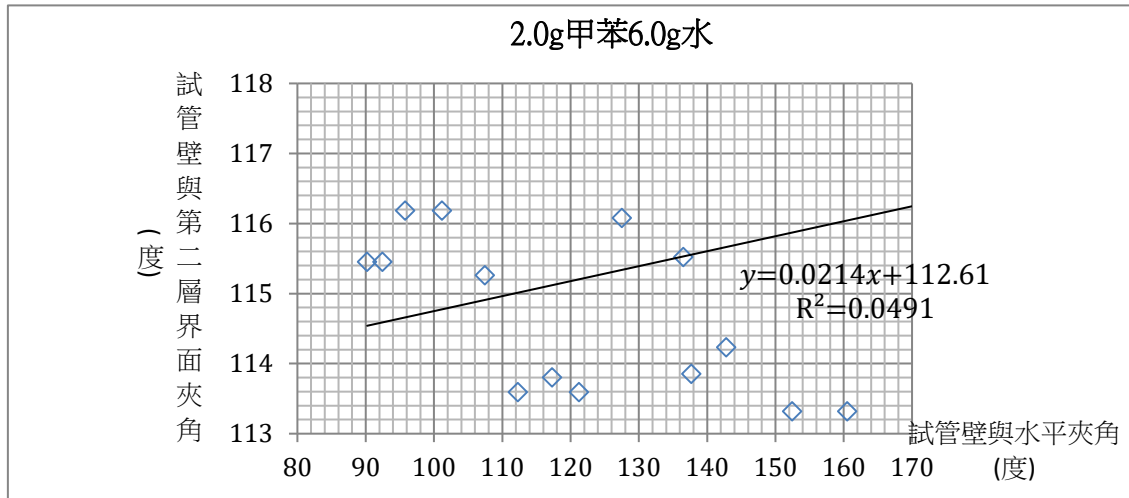


c. (下圖 5-15) 水的質量固定為 3.0 克，取 4.0 克甲苯

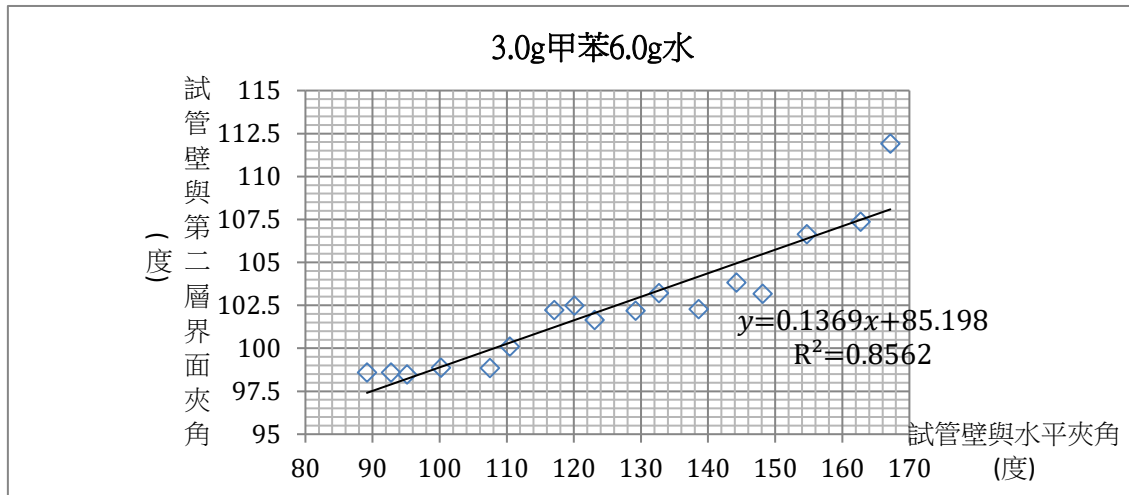


(4) 水的質量固定為 6.0 克：

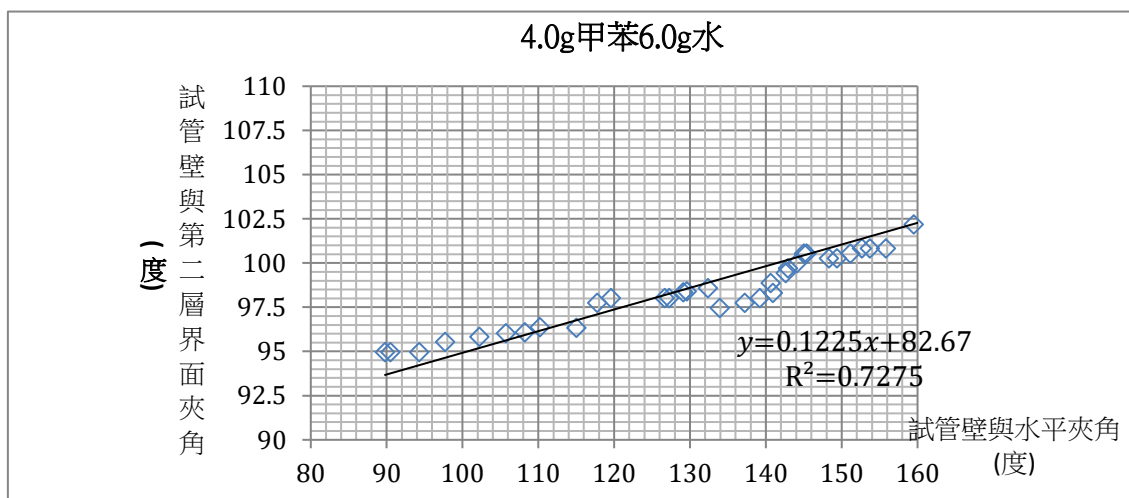
a. (下圖 5-16) 水的質量固定為 6.0 克，取 2.0 克甲苯



b. (下圖 5-17) 水的質量固定為 6.0 克，取 3.0 克甲苯



c. (下圖 5-18) 水的質量固定為 6.0 克，取 4.0 克甲苯



2、數據分析

- (1) 選取某甲苯與水之質量比，改變試管傾斜程度 φ ，以錄影方式記錄試管傾斜程度對第二界面（水和甲苯的界面）的影響。
- (2) 第二界面（水和甲苯的界面）與試管壁交點的連線，隨試管傾斜程度 φ 而改變，改變的趨勢若視之為直線，此直線斜率與質量配置的關係整理如下表。

(表 6-3)

甲苯質量(公克)	水質量(公克)	甲苯/水(比值)	斜率
1.5	1.5	1.00	0.4765
2.0	1.5	1.33	0.09940
2.5	1.5	1.67	0.52930
3.0	1.5	2.00	0.09890
3.5	1.5	2.33	0.08400
4.0	1.5	2.67	0.42220
2.0	2.0	1.00	0.08990
2.5	2.0	1.25	0.36140
3.0	2.0	1.50	0.06680
3.5	2.0	1.75	0.07170
4.0	2.0	2.00	0.35690
2.0	2.5	0.80	0.05860
2.5	2.5	1.00	-0.0076
3.0	2.5	1.20	0.01045
3.5	2.5	1.40	0.31980
4.0	2.5	1.60	0.47540
2.0	3.0	0.67	0.09360
2.5	3.0	0.83	0.11070
3.0	3.0	1.00	0.44570
3.5	3.0	1.17	0.02830
4.0	3.0	1.33	0.07320
2.0	3.5	0.57	0.04270
2.5	3.5	0.71	0.11900
3.0	3.5	0.86	0.38340
3.5	3.5	1.00	0.03720
4.0	3.5	1.14	0.14850
2.0	6.0	0.33	0.02140
2.5	6.0	0.42	0.01210
3.0	6.0	0.50	0.13690
3.5	6.0	0.58	0.10000
4.0	6.0	0.67	0.12250
2.0	6.5	0.31	0.14180
2.5	6.5	0.38	0.10390
3.0	6.5	0.46	0.15080
3.5	6.5	0.54	0.00820
4.0	6.5	0.62	0.12090
2.0	7.0	0.29	0.08500
2.5	7.0	0.36	0.03700
3.0	7.0	0.43	0.06160
3.5	7.0	0.50	0.06380
4.0	7.0	0.57	0.11390

(3)不同質量配置的甲苯與水，我們得到下列數據：

(表 6-2) 其中 0 表示第二層接觸面與試管壁夾角於傾斜過程中不改變；1 表示會改變；0s 則表示只有液面形狀之改變

有傾斜1 無傾斜0	比值	1.0g 甲苯		1.5g 甲苯		2.0g 甲苯		2.5g 甲苯		3.0g 甲苯		3.5g 甲苯		4.0g 甲苯	
1.5g水	0	0.667	1	1	0	1.33	1	1.67	0s	2	0	2.33	1	2.67	
2.0g水	x	0.5	x	0.75	0	1	1	1.25	0s	1.5	0	1.75	0s	2	
2.5g水	x	0.4	x	0.6	0	0.8	0s	1	0s	1.2	1	1.4	1	1.6	
3.0g水	x	0.333	x	0.5	0	0.67	0	0.83	1	1	0	1.17	0s	1.33	
3.5g水	x	0.286	x	0.43	0	0.57	0	0.71	1	0.86	0	1	0s	1.14	
6.0g水	x	0.167	x	0.25	0s	0.33	0	0.42	1	0.5	0	0.58	0s	0.67	
6.5g水	x	0.154	x	0.23	0s	0.31	0s	0.38	0	0.46	0	0.54	0	0.62	
7.0g水	x	0.143	x	0.21	0s	0.29	0	0.36	0s	0.43	0	0.5	0	0.57	

(4)表中發現：

(甲苯, 水) <單位：公克>=(1.5, 1.5) ; (2.5, 1.5) ; (3.0, 3.0) ; (3.0, 3.0) ; (3.0, 6.0) ; (3.5, 2.5) ; (4.0, 1.5) ; (4.0, 2.5) 時，在試管傾斜時，第二界面會隨著傾斜角的變動而跟著產生劇烈變化。→我們觀察這些數據值，發現，當質量比於某一特定值時，會造成第二界面（水與甲苯界面）極易改變。

3、程式模擬

我們取兩種液面進行擬合，分別是甲苯 3.0 克水 3.5 克與甲苯 4.0 克水 3.5 克。

(1)甲苯 3.0 克水 3.5 克：

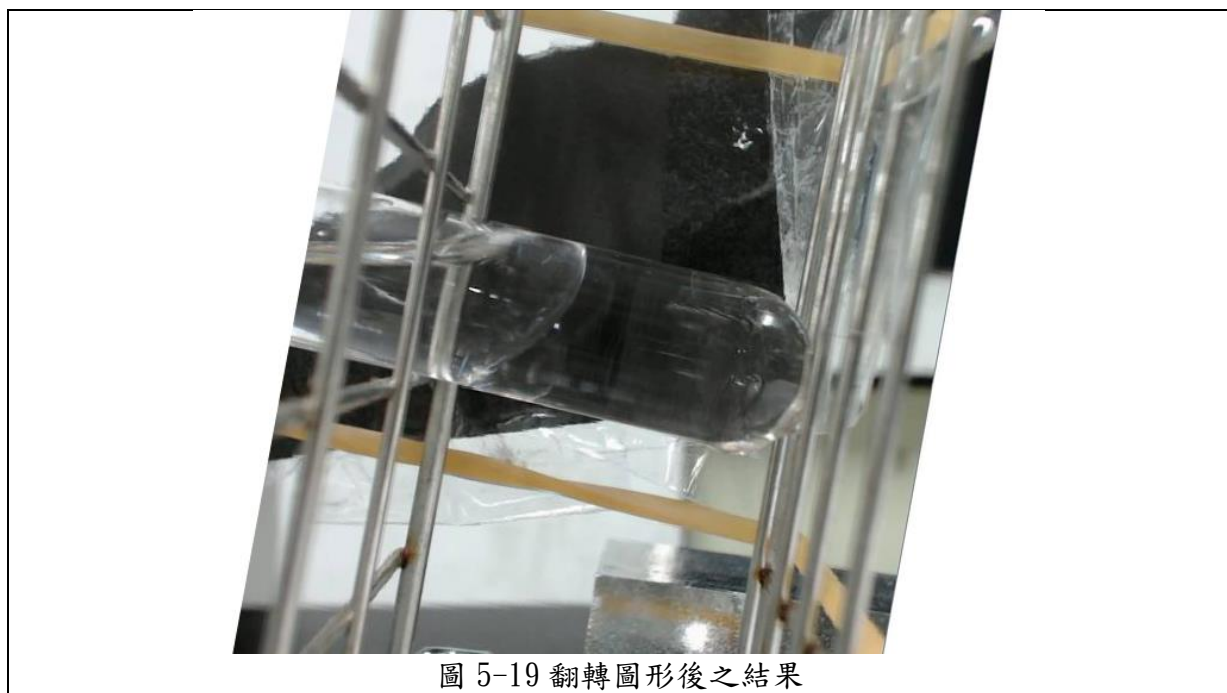
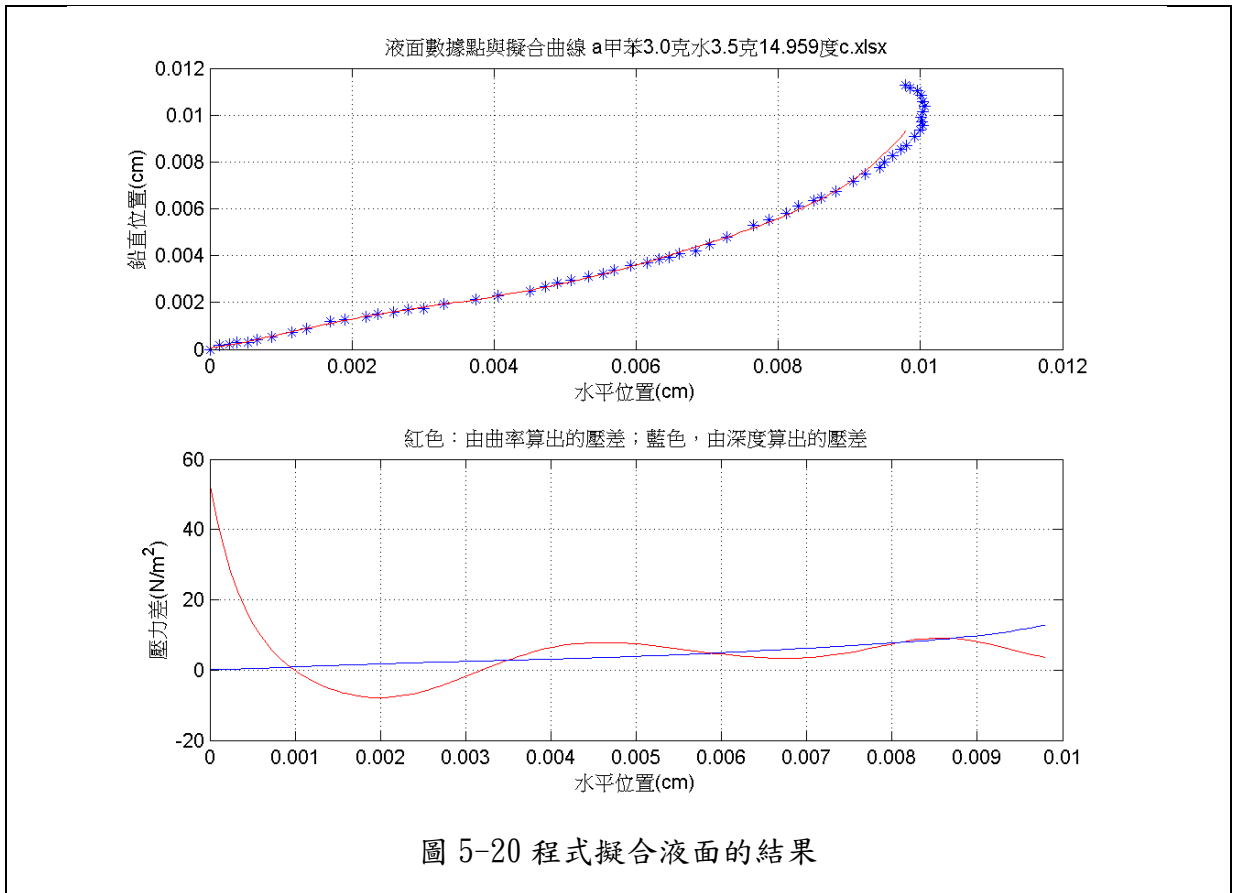
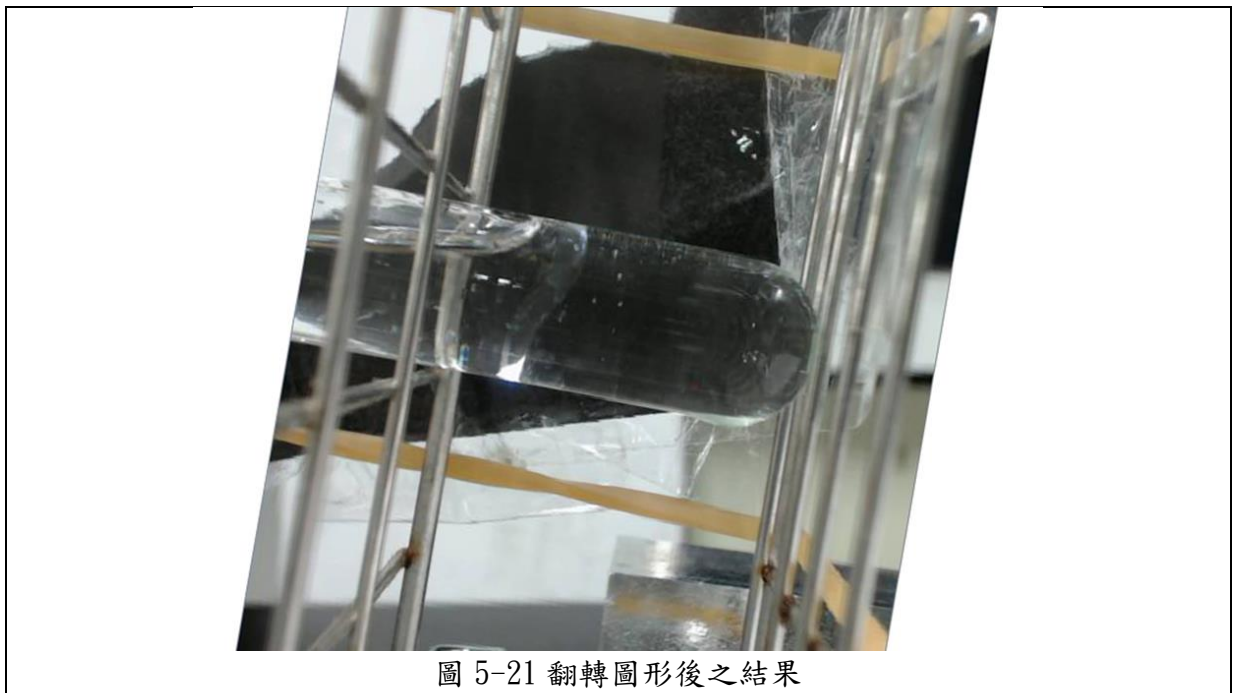
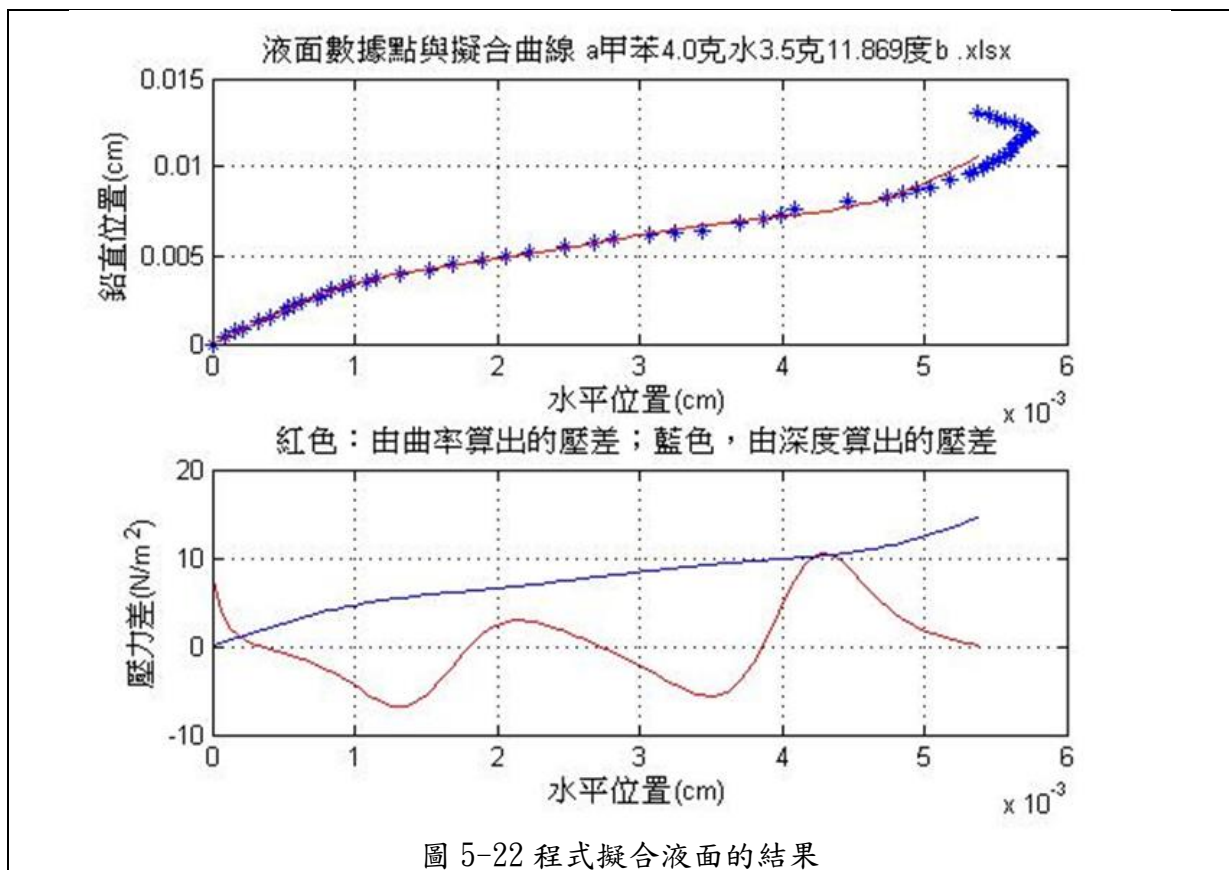


圖 5-19 翻轉圖形後之結果



(2) 甲苯 4.0 克水 3.5 克：



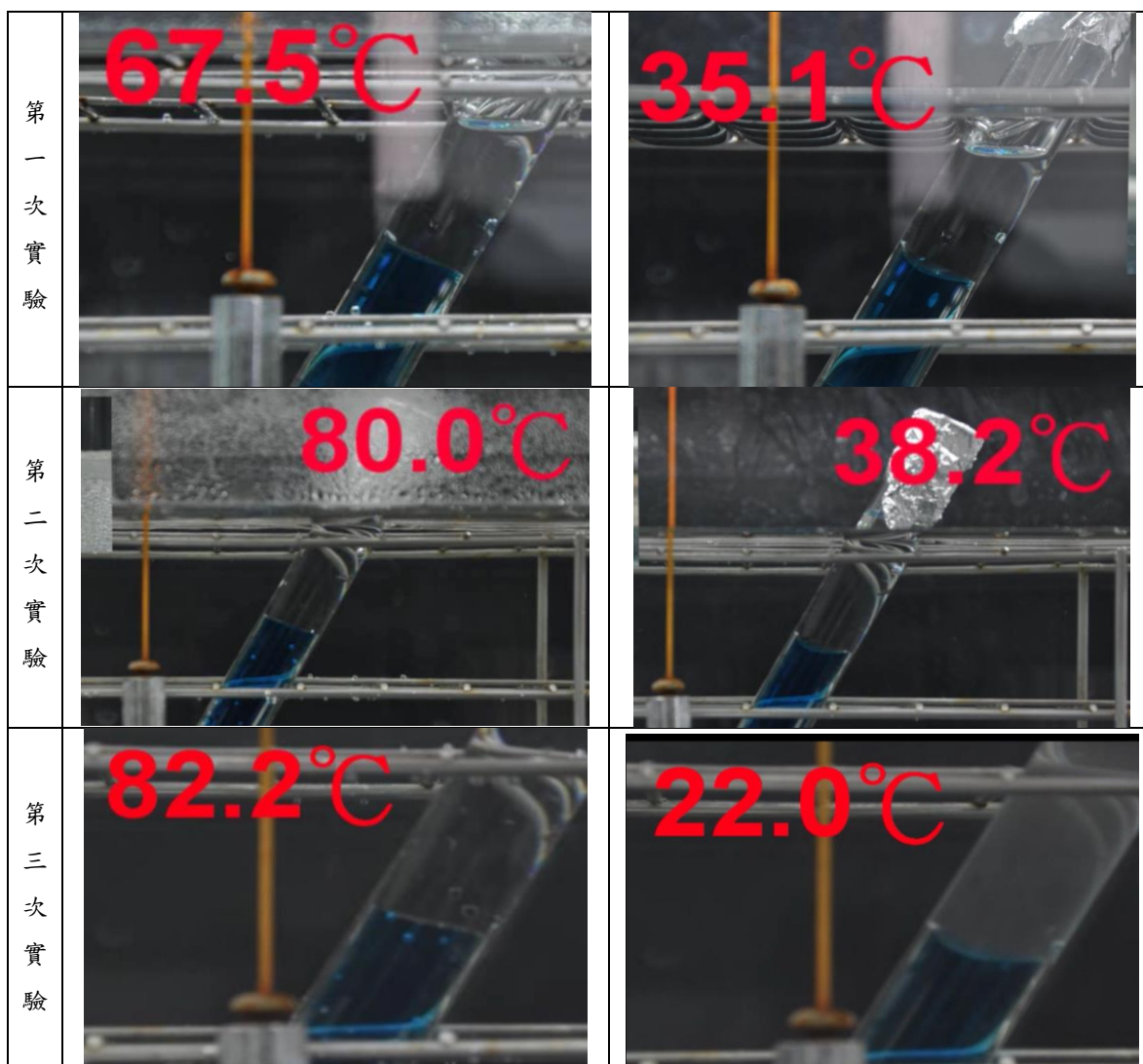


擬合的結果發現：曲率所計算出壓力差與深度計算出的壓力差在試管中央位置大部分相符，唯獨在試管兩側會稍有偏差；推測是因為試管壁亦影響了界面張力，導致不能只以簡單的計算求得真正的壓力差。(b)的錯誤是在於取點數較少，導致計算出來的壓差相差較大，但以深度計算壓差與以曲率計算壓差，所得到數值大致相符。

三、實驗結果三、溫度改變時，第二界面（水與甲苯界面）的變化：

1、高溫實驗：

(1)將影片頭尾的相片做比較。

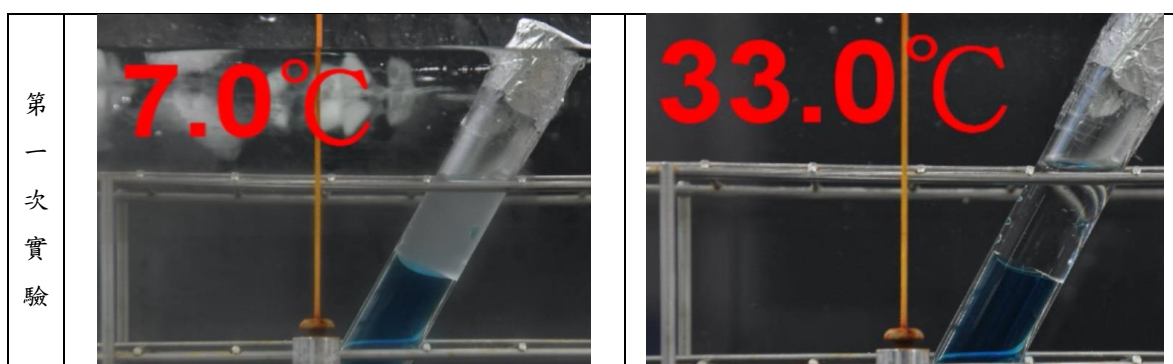


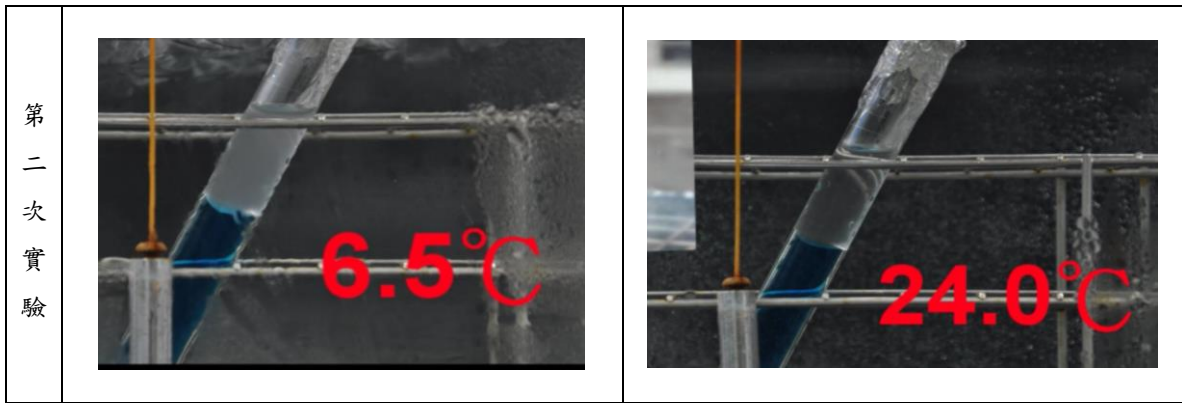
(2)實驗觀察：

實驗發現，隨著溫度下降，第二界面將緩慢地變得較為彎曲。

2、低溫實驗：

(1)將影片頭尾的相片做比較。





(3) 實驗觀察：

實驗發現，隨著溫度上升，第二界面將緩慢地變得較為平直。

(4) 結果討論：

兩次溫度實驗可知，當溫度升高時，液面均相對變得平直，解釋方法如下：

由 Young-Laplace Equation $\Delta P = -\gamma \nabla \cdot \hat{n} = 2\gamma H = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ ，若壓差 Δp 不變，溫度上升時，界面張力減小，則曲率半徑 R 隨之減小，液面將較為平直；與觀察結果相符。

本實驗之最高溫為攝氏 82.2 度；最低溫為攝氏 6.5 度。雖然溫差高達 88.7 度，但因為低溫與高溫實驗室分開來做，導致常溫時數據並非連續，進而使液面變化不大。

四、誤差討論：

- 1、由於液面為分佈於三度空間上的曲面，使用 Tracker 在二維空間取點時，可能因試管管壁形成的透鏡效應，導致取點上面的誤差，而導致實驗數據有些微不準確。
- 2、使用方形試管可以消除試管壁所造成的透鏡效應，方便觀察液面形狀。但方形試管非常昂貴，化學上常用的比色管雖然是方形的，但長度不夠，不易觀察。

柒、結論

1. 在試管中同時加入水與甲苯，甲苯浮於水之上，形成兩層界面，即空氣與水的界面（第一界面）、甲苯與水的界面（第二界面）。試管鉛直豎立時，兩界面均與重力場垂直（即所謂水平狀態）。
2. 傾斜試管時，一般預期兩界面仍將與重力場垂直，與試管傾斜程度無關。令人訝異的是，實驗結果顯示，傾斜試管時，第一界面如一般預期，與重力場垂直。但第二界面卻與試管壁維持垂直，隨試管傾斜而傾斜。
3. 當試管傾斜至近乎水平時，第二界面近乎鉛直，且不再呈直線，而略呈S形彎曲。
4. 當甲苯因揮發而質量漸小時，第二界面幾乎沒有變化，直到第一界面幾乎與第二界面接觸，第二界面才有明顯的變化。
5. 利用第二界面（水與甲苯界面）兩端的壓力差 $\Delta P = 2\rho g r \cos \theta$ ，可以解釋上述現象，由於壓力差與試管半徑成正比，也解釋了為什麼粗試管中第二界面（水與甲苯界面）較易變化。
6. P 與 R 的壓力差 $= 2\rho g r \cos \theta$ ，亦與密度有關。空氣與水的界面（第一界面）與甲苯與水的界面（第二界面），此兩界面均可視為上有張力的薄膜。試管傾斜時，第一界面被拉開，而第二界面不被拉開的原因，即為第一界面的壓力差較大。第二界面的壓力差較小。
7. 除了以力的觀點說明外，亦可由表面能或游離能的「能量」觀點解釋這個現象。系統會傾向能量較小，亦即面積較小，的方向變化。
8. 界面可視為張緊的皮膜，皮膜上的張力稱為「界面張力」，若形成界面的兩介質中其一為空氣，此時的界面張力又稱為「表面張力」。界面張力使得界面面積有趨於最小值的傾向。
9. 一般認為接觸角為定值，但由文獻可得知，除了靜態接觸角外，動態接觸角又可分為前進角 θ_a (Advancing angle) 與後退角 θ_r (Resending Angle)。本實驗在試管傾斜時，上方試管壁的接觸角為後退角 θ_r (Resending Angle)，下方試管壁的接觸角為前進角 θ_a 。由實驗觀察可得知，試管傾斜程度不大時，上方試管壁的接觸角與下方試管壁的接觸角均為定值，不隨傾斜程度而改變。但傾斜程度增大至某一程度，接觸角將大幅改變。
10. 根據 Young-Laplace equation，平面界面不會造成任何的壓力差。但曲面界面將於界面的兩邊形成壓力差，凹面側的壓力較大，凸面側的壓力較小。界面在試管中呈現的平衡位置與形狀，由接觸角與壓力差共同決定。
11. 曲率所計算出壓力差與深度計算出的壓力差在試管中央位置大部分相符，唯獨在試管兩側會稍有偏差；推測是因為試管壁亦影響了界面張力，導致不能只以簡單的計算求得準正的壓力差。
12. 由高溫降溫的試管中，第二界面會有向下彎曲的特性；而在低溫升溫的試管中，第二界面反而有轉變成較為平直的趨勢。由 Young-Laplace Equation 若壓差 Δp 不變，溫度上升時，界面張力減小，則曲率半徑 R 隨之減小，液面將較為平直；與觀察結果相符。

捌、參考文獻

- 1、Surface Tension, Dr.Pallab Ghosh, Associate Professor, Department of Chemical Engineering IIT Guwahati, Guwahati-781039 India
<http://nptel.ac.in/courses/103103033/module2/lecture1.pdf>
- 2、Interfacial Tension, Dr.Pallab Ghosh, Associate Professor, Department of Chemical Engineering IIT Guwahati, Guwahati - 781039 India
<http://nptel.ac.in/courses/103103033/module2/lecture2.pdf>
- 3、Shape of the Interfaces, Dr.Pallab Ghosh, Associate Professor, Department of Chemical Engineering IIT Guwahati, Guwahati - 781039 India
<http://nptel.ac.in/courses/103103033/module2/lecture3.pdf>
- 4、Laplace Pressure and Young-Laplace Pressure
<http://nptel.ac.in/courses/103105065/>
- 5、円玉の沈み量と水面形状の近似計算例
https://drive.google.com/drive/folders/0B29_HMSEHg5tdD11cD11SmJSTEk
- 6、「深」在「浮」中不知「浮」～探討表面張力對『沉體』浮於水面行為之影響
<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/53/pdf/030107.pdf>
- 7、Surface Free Energy—Theory and Calculations
http://www.biolinscientific.com/zafepress.php?url=%2Fpdf%2FAttension%2FTheory%20Notes%2FAT_TN_4_sfe.pdf
- 8、Surface Energy
<http://ocw.nctu.edu.tw/upload/classbfs120912440363933.pdf>
- 9、<https://ir.nctu.edu.tw/bitstream/11536/79225/7/550807.pd>

附註：Matlab 程式碼

程式碼一、

```
function [x_center, y_center, radius]=findcurvature(x1, y1, x2, y2, x3, y3)
%A 點：
%x1=19;
%y1=26;
%B 點
%x2=35;
%y2=58;
%C 點
%x3=73;
%y3=70;
%畫圖用的 x 座標
%x=1:0.01:100;
%以下處理 AB 的垂直平分線
%AB 的斜率
m1=(y1-y2)/(x1-x2);
%AB 之中點座標
xc1=(x1+x2)/2;
yc1=(y1+y2)/2;
%plot(xc1, yc1, 'x')
%hold on
%AB 的垂直平分線斜率
m1=-1/m1;
%垂直平分線的常數項
b1=yc1-m1*xc1;
%畫垂直平分線
%yv1=m1*x+b1;
%plot(x, yv1)
%以下處理 BC 的垂直平分線
%BC 的斜率
m2=(y2-y3)/(x2-x3);
%AB 之中點座標
xc2=(x2+x3)/2;
yc2=(y2+y3)/2;
%plot(xc2, yc2, 'x')
%BC 的垂直平分線斜率
m2=-1/m2;
%垂直平分線的常數項
b2=yc2-m2*xc2;
%畫垂直平分線
%yv2=m2*x+b2;
```

```

%plot(x, yv2)
y_center=(b1*m2-b2*m1)/(m2-m1);
x_center=(y_center-b1)/m1;
radius=sqrt((xc1-x_center)^2+(yc1-y_center)^2)
%plot(x1, y1, 'o', x2, y2, 'o', x3, y3, 'o', x_center, y_center, 'x')
%hold on
%plot the circle
%y=sqrt(radius^2-(x-x_center).^2)+y_center;
%plot(x, y)
%axis image

```

程式碼二、

```

%watersurface.m
clear;
clf;
filename='testtest.xlsx';
%表面張力
%tension=73mN/m
tension=18*10^(-3); %Newton/meter
[N,A,rawdata]=xlsread(filename);
x=N(:,1)*100;
y=N(:,2)*100;
%plot(x,y)
%更換座標原點
x=x-x(1);
y=y-y(1);
%figure
hold on
%現在作多項式曲線擬合
[P,S] = POLYFIT(x,y,5);
x1=linspace(x(1),x(length(x)),100);
y1 = polyval(P,x1);
subplot(211);plot(x,y,'*',x1,y1,'r')
xlabel('水平位置(cm ?)')
ylabel('鉛直位置(cm?)')
title('液面數據點與擬合曲線');
grid;
%plot(x1,y1,'r')
%現在用印度人(2.3.11)式求曲率半徑
P1=polyder(P);
P2=polyder(P1);
P1value=polyval(P1,x1);

```



```

P2value=polyval(P2,x1);
curvature=P2value./((1+P1value.^2).^3/2); %這個曲率的單位應為 1/cm
%under=(1+P1value.^2).^3/2;
%curvature=P2value./under;
%現在用 Young-Laplace equation 求壓差
deltaP=tension*(100*curvature); %這壓差的單位應是 Nt/m^2; 吧! ? (curvature*100)的單位為 1/m
subplot(212);plot(x1,deltaP);
grid;
xlabel('水平位置')
ylabel('壓力差')
title('由液面曲率計算所得的壓力差')
%找出 deltaP 為零的位置在那?
i=1;
j=1;
while i<length(deltaP)
if deltaP(i)*deltaP(i+1)<0
    thex(j)=i;
    j=j+1;
end
i=i+1;
end
thex
%水面重設座標，將 y 座標設在壓力差為零的所在
y=y-y1(thex(1));
y1=y1-y1(thex(1));
figure
subplot(211);plot(x,y,'*',x1,y1,'r')
xlabel('水平位置(cm)')
ylabel('鉛直位置(cm)')
title('液面數據點與擬合曲線');
grid;
subplot(212);plot(x1,deltaP);
grid;
xlabel('水平位置')
ylabel('壓力差')
title('由液面曲率計算所得的壓力差')
%現在由水壓公式來算壓差
rho=1000;
g=9.8;
deltaP2=rho*g*(y1/100);
figure
plot(x1,deltaP,'r',x1,deltaP2,'b')

```

title('紅色：由曲率算出的壓差；藍色，由深度算出的壓差')