第十六屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA16-528

作品名稱：求期所望-猜球期望值的探討

姓名：林宜潔

關鍵字：<u>機率</u>、<u>期望值</u>、<u>方格路徑</u>

摘要

設定箱中有 m 顆黑球、n 顆白球，隨機逐一抽出，玩家在抽球前預先猜測球的顏色，探求總猜對次數的期望值。

在原題情境中，玩家知道箱中黑球白球的數量，在每次抽球前都以最可能出現的顏色做猜測。我們將抽球過程對應到格線路徑行走，得以大幅簡化計算，並利用遞迴與歸納法，得到簡潔的期望值公式。

在隱藏情境中，若玩家只知道球的總數量但不知黑球白球的個數，則只能以過去的抽球歷程做猜測。我們比較以檯面多的顏色做猜測與以檯面少的顏色做猜測，兩種策略間的優劣。

最後，考慮固定總球數 N，黑白球數量為二項分布時，驚喜地發現隱藏情境中任意策略的期望值均相等，且原題情境期望值高於隱藏情境的量，將與 $\sqrt{N}$ 成正比，這顯示黑白球數量訊息的價值。

壹、研究動機

在專題課中，聽學長姐分享了一題台大電機系在 2015 年申請入學的數學筆試題目，題目敘述如下：「今已知箱中有 4 顆黑球、4 顆白球，玩家每次隨機取出一球，取後不放回，直到取完為止。若玩家在每次取球前，皆預先**猜測最可能出現的顏色**，則總猜對次數的期望值為何？」我想要由此推廣，探討玩家在已知箱中有 m 顆黑球、n 顆白球時，總猜對次數的期望值為何？我將之命名為「**原題情境**」。

之後，改變該問題的條件，設想若玩家只知道箱中球的總數量，但不知黑球、白球各自的初始數量，我將之命名為「**隱藏情境**」。我關心在該情境下，玩家該如何猜測球的顏色？以及總猜對次數的期望值為何？

貳、研究目的

一、在原題情境中

（一）探求總猜對次數期望值的精確公式；

（二）利用近似方法，推導期望值估計式，作為簡易計算之用。

二、在隱藏情境中

（一）探求不同猜球策略的總猜對次數的期望值；

（二）比較不同猜球策略的優劣。

三、在固定總球數之下，假設黑球、白球的初始數量服從二項分布

（一）探求隱藏情境下各策略的總猜對次數期望值；

（二）比較原題情境與隱藏情境，兩者期望值的差異。

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦、軟體 Geogebra

肆、研究過程與方法

一、原題情境設定與計算

已知箱中有 m 顆黑球、n 顆白球，今從箱中任取一顆球，若每顆球被取中的機會相等，取後不放回，直到取完為止。玩家在每次取球前皆猜測最可能出現的顏色，求全部取完時總猜對次數的期望值，並定義其為 $E_{m,n}$。

在此，我舉例說明題目情境該如何進行。假設此時箱中剩下 5 顆黑球與 3 顆白球，則在下一次取得黑球的機率為 $\frac{5}{8}$，取得白球的機率為 $\frac{3}{8}$，這時在取球前應該猜測將取得黑球；而另一種情況是當箱中黑球白球數量相等，例如 3 顆黑球與 3 顆白球時，則不論猜測取得黑球或白球，猜對的機率皆為 $\frac{1}{2}$，在這種情況下可選擇任一顏色猜測。

另外，球的顏色具有可交換性，黑球 m 顆、白球 n 顆時的總猜對次數期望值，會與黑球 n 顆、白球 m 顆時的期望值相同，即 $E_{m,n}=E_{n,m}$。故當 $m<n$ 時，例如 $m=3$、$n=5$ 的 $E_{3,5}$ 等同於 $E_{5,3}$，因此，我只需要討論 $m\geq n$ 時的 $E_{m,n}$ 即可。

(一)、特例計算

我先以 $m=n=3$ 為例（即箱中 3 顆黑球、3 顆白球），一一考慮所有可能的取出情形做期望值計算。由於排列情形的對稱性，故在共 $\frac{6!}{3!3!}=20$ 種取出情形中，只在下頁表中列出第一顆是黑球的 10 種情形，剩餘第一顆是白球的 10 種情形可依此類推。

編號	取出情形	各次猜對的期望值	合計
1	●　●　●　○　○　○	$\frac{1}{2}$　0　0　1　1　1	$\frac{7}{2}$
2	●　●　○　●　○　○	$\frac{1}{2}$　0　1　0　1　1	$\frac{7}{2}$
3	●　●　○　○　●　○	$\frac{1}{2}$　0　1　1　$\frac{1}{2}$　1	4
4	●　●　○　○　○　●	$\frac{1}{2}$　0　1　1　$\frac{1}{2}$　1	4
5	●　○　●　●　○　○	$\frac{1}{2}$　1　$\frac{1}{2}$　0　1　1	4
6	●　○　●　○　●　○	$\frac{1}{2}$　1　$\frac{1}{2}$　1　$\frac{1}{2}$　1	$\frac{9}{2}$
7	●　○　●　○　○　●	$\frac{1}{2}$　1　$\frac{1}{2}$　1　$\frac{1}{2}$　1	$\frac{9}{2}$
8	●　○　○　●　●　○	$\frac{1}{2}$　1　$\frac{1}{2}$　1　$\frac{1}{2}$　1	$\frac{9}{2}$
9	●　○　○　●　○　●	$\frac{1}{2}$　1　$\frac{1}{2}$　1　$\frac{1}{2}$　1	$\frac{9}{2}$
10	●　○　○　○　●　●	$\frac{1}{2}$　1　$\frac{1}{2}$　0　1　1	4

表格1

（黑球以●表示、白球以○表示）

現在，以編號1的“●●●○○○”的情形為例，解釋如何得出後面的值。最初，因為黑白球數相等，不論猜測黑球或者白球，猜對的機率皆為$\frac{1}{2}$。而接下來的二次中，因箱中所剩白球數大於黑球，故會猜測取出白球，但在此情況下取出的是黑球，因此猜對次數是0。最後，在已知黑球全部被取出的情況下，猜測接下來盡取出白球且必會猜對，此時猜對次數加1。於是，此種取出情形的猜對次數合計為：$\frac{1}{2}+0+0+1+1+1=\frac{7}{2}$。

因此在$m=n=3$（即3黑3白）的例子中，共有$\binom{6}{3}=20$種可能的取出情形，各取出情形可能性均等，故總猜對次數期望值即為：

$$E_{3,3}=\frac{2\times\left[\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+4+4+4+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+4\right]}{\binom{6}{3}}=\frac{41}{10}\text{ 。}$$

利用這種窮舉法，我繼續計算其他m、n值下的期望值$E_{m,n}$，如下表：

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{31}{6}$
2			$\frac{17}{6}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{67}{15}$	$\frac{113}{21}$
3				$\frac{41}{10}$	$\frac{169}{35}$	$\frac{317}{56}$
4					$\frac{373}{70}$	$\frac{380}{63}$
5						$\frac{823}{126}$

表格2

（二）、對應至方格路徑

1. 探求在 n 黑 n 白情況中，總猜對次數的期望值

在進行表格1（箱中3黑3白）的計算時，我觀察到各種取出情形的猜對期望值有下列兩個現象：

（1） 每一種取球情形（共 $\binom{6}{3}$ 種）都恰出現三個1。

（2） 若箱中所剩黑白球數相等時，則下一次會出現 $\frac{1}{2}$。

為了詮釋上述的現象，我可將表格1的各種取球情形對應到方格格線的路徑走法，以下圖1呈現：

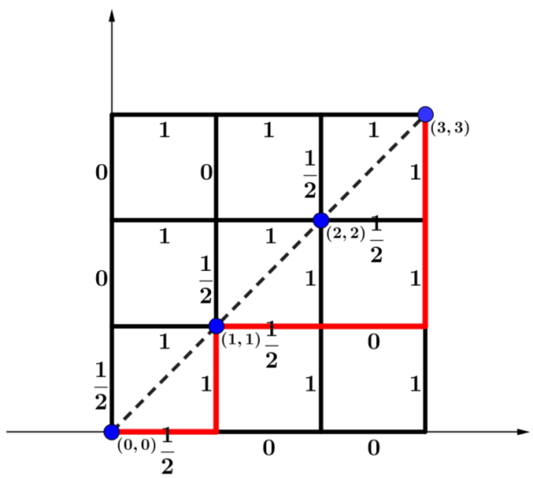

圖1

在圖1中，各路徑皆是從 $(0,0)$ 沿格線走捷徑至 $(3,3)$，取到黑球為向右走，取到白球為向上走。我舉例說明，設取球情形為●○●●○○（表格1中的編號5），將對應到圖1中的紅色路徑，此路徑的總猜對次數期望值為 $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+0+1+1$，第一個 $\frac{1}{2}$ 出現在箱中剩下3黑3白之後，第二個 $\frac{1}{2}$ 出現在箱中剩下2黑2白之後，也就是當路徑走法通過點 $(0,0),(1,1),(2,2)$ 之後便會出現 $\frac{1}{2}$。

在計算 $E_{3,3}$ 全部 20 條路徑的猜對期望值時，我知道每條路徑都恰有 3 個 1，只需再計數各路徑 $\frac{1}{2}$ 的個數即可。然而各路徑出現 $\frac{1}{2}$ 的次數不一，故我換個方式，就 $\frac{1}{2}$ 出現的位置，作以下三種情況的分類相加：

（1）通過 $(0,0)$ 的路徑數：共 $\binom{6}{3}$ 條；

（2）通過 $(1,1)$ 的路徑數：共 $\binom{2}{1}\times\binom{4}{2}$ 條；

（3）通過 $(2,2)$ 的路徑數：共 $\binom{4}{2}\times\binom{2}{1}$ 條，

故 $\frac{1}{2}$ 總共被加了 $\binom{6}{3}+\binom{2}{1}\binom{4}{2}+\binom{4}{2}\binom{2}{1}$ 次。

因此可得

$$E_{3,3}=\frac{\binom{6}{3}\times 3+\left[\binom{6}{3}+\binom{2}{1}\binom{4}{2}+\binom{4}{2}\binom{2}{1}\right]\times\frac{1}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{20\times 3+44\times\frac{1}{2}}{20}=\frac{82}{20}\text{ 。}$$

以此類推，把 n 黑 n 白的取球情形對應到 $(0,0)$ 至 (n,n) 的格線行走，則將有 $\binom{2n}{n}$ 條路徑，每條路徑都恰有 n 個 1，且 $\frac{1}{2}$ 出現在 $(0,0),(1,1),(2,2),\ldots,(n-1,n-1)$ 共 n 個位置，分類加總如下：

（1）　通過 $(0,0)$ 的路徑數：共 $\binom{2n}{n}$ 條；

（2）　通過 $(1,1)$ 的路徑數：共 $\binom{2}{1}\times\binom{2n-2}{n-1}$ 條；

（3）　通過 $(2,2)$ 的路徑數：共 $\binom{4}{2}\times\binom{2n-4}{n-2}$ 條；

…

（4）　通過 $(n-1,n-1)$ 的路徑數：共 $\binom{2n-2}{n-1}\times\binom{2}{1}$ 條，

故 $\frac{1}{2}$ 總共被加的次數為：

$$\binom{2n}{n}+\binom{2}{1}\binom{2n-2}{n-1}+\binom{4}{2}\binom{2n-4}{n-2}+\cdots+\binom{2n-4}{n-2}\binom{4}{2}+\binom{2n-2}{n-1}\binom{2}{1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\text{ ，}$$

因此，我得到：

$$E_{n,n}=\frac{\binom{2n}{n}\times n+\frac{1}{2}\times\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{\binom{2n}{n}}$$

$$=\frac{\binom{2n}{n}\times\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{\binom{2n}{n}}$$

$$=n-\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2\times\binom{2n}{n}}\text{ 。}$$

接下來，嘗試化簡上式中的分子項。我成功地以組合方法得證

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=2^{2n}\text{ ，}$$

證明過程詳述於附錄一。另外，透過文獻探討，亦查得其他證明手法，請見參考文獻[2]、[3]。因此，$E_{m,n}$ 公式將可化簡成下列更簡潔的形式：

定理1

當 $m=n$ 時，總猜對次數的期望值為

$$E_{n,n}=n-\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2\times\binom{2n}{n}}=n-\frac{1}{2}+\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}}\text{ 。}$$

作為例子，試算了 $E_{4,4}$ 與 $E_{5,5}$ 如下，其數值與前一小節窮舉法所得的表格 2 數據相同。

$$E_{4,4}=4-\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{4}\binom{2k}{k}\binom{8-2k}{4-k}}{2\times\binom{8}{4}}=4-\frac{1}{2}+\frac{256}{2\times70}=\frac{373}{70}\text{ ，}$$

$$E_{5,5}=5-\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{5}\binom{2k}{k}\binom{10-2k}{5-k}}{2\times\binom{10}{5}}=5-\frac{1}{2}+\frac{1024}{2\times252}=\frac{823}{126}\text{ 。}$$

2　探求在 m 黑 n 白情況中，總猜對次數的期望值

接下來我以相同的手法，對 $m>n$ 的情況得到了公式。

我以 $m=5$ 且 $n=3$ 為例，說明計算的歷程，各取球情形將對應到圖 2 中從 $(0,0)$ 至 $(5,3)$ 的格線行走，如下圖：

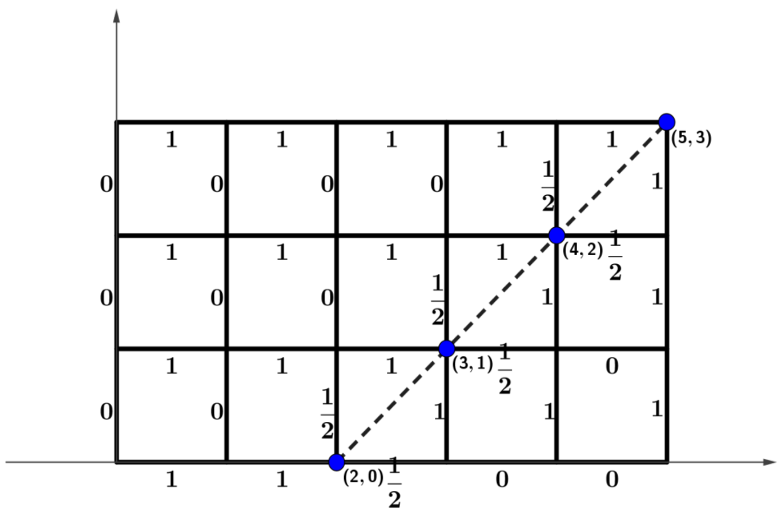

圖 2

首先，由圖中得知在 5 黑 3 白的情況下，不論是哪種（共 $\binom{8}{3}$ 種）取球路徑皆恰有 5 個 1 的出現，而 $\frac{1}{2}$ 將出現在箱中兩色剩餘球數相同時：第一個 $\frac{1}{2}$ 出現在從箱中取出 2 黑球後，即箱中剩下 3 黑 3 白的情況，對應到點 $(2,0)$；第二個 $\frac{1}{2}$ 則是出現在取出 3 黑 1 白球後，即箱中剩下 2 黑 2 白的情況，對應到點 $(3,1)$；第三個 $\frac{1}{2}$ 則出現在取出 4 黑 2 白球後，即箱中剩下 1 黑 1 白的情況，對應到點 $(4,2)$。因此，我可以得出 $\frac{1}{2}$ 會出現在點 $(2,0),(3,1),(4,2)$ 之後。將經過以上三點的路徑數分別算出，可得 $\frac{1}{2}$ 共有 $\binom{2}{0}\times\binom{6}{3}+\binom{4}{1}\times\binom{4}{2}+\binom{6}{2}\times\binom{2}{1}$ 個。

綜合以上，我得到

$$E_{5,3}=\frac{\binom{8}{3}\times 5+\left[\binom{2}{0}\binom{6}{3}+\binom{4}{1}\binom{4}{2}+\binom{6}{2}\binom{2}{1}\right]\times\frac{1}{2}}{\binom{8}{3}}=\frac{56\times 5+74\times\frac{1}{2}}{56}=\frac{317}{56}\text{ 。}$$

對於一般 m 黑 n 白的取球情形，將對應到 $(0,0)$ 至 (m,n) 的格線行走，恰有 $\binom{m+n}{n}$ 條路徑，每條路徑都恰有 m 個1，而 $\frac{1}{2}$ 出現在 $(m-n,0)$, $(m-n+1,1)$, $(m-n+2,2)$, $\cdots$, $(m-1,n-1)$ 共 n 個位置，通過 $(m-n+k,k)$ 的路徑數恰有 $\binom{m-n+2k}{k}\times\binom{2n-2k}{n-k}$ 條，其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$。故 $\frac{1}{2}$ 總共被加的次數為 $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m-n+2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$。

因此，$E_{m,n}$ 的計算如下：

$$E_{m,n}=\frac{\binom{m+n}{n}\times m+\frac{1}{2}\times\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m-n+2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{\binom{m+n}{n}}$$

$$=\frac{\binom{m+n}{n}\times\left(m-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{m-n+2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{\binom{m+n}{n}}$$

$$=m-\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{m-n+2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2\times\binom{m+n}{n}}\text{。}$$

我把以上的結果寫成了《定理2.1》。

定理 2.1

當 $m>n$ 時，總猜對次數的期望值為

$$E_{m,n}=m-\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{m-n+2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2\times\binom{m+n}{n}}\text{。}$$

在這裡，我希望可以對《定理 2.1》進行簡化，首先定義 $f(m,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{m-n+2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$，其中 $m\geq n$。計算並觀察數據如下表：

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	5	6	7	8	9	10	11
2		16	22	29	37	46	56	67
3			64	93	130	176	232	299
4				256	386	562	794	1093
5					1024	1586	2380	3473
6						4096	6476	9949
7							16384	26333
8								65536

表格3

觀察上表，我發現：

$$f(3,1)+f(2,2)=6+16=22=f(3,2)\text{，}$$

以此類推，我猜測 $f(m,n)$ 有以下的性質：

$$f(m,n)=f(m-1,n)+f(m,n-1)\text{，}$$

我將此寫成《引理1》並證明之。

引理1

當 $m>n$ 時，有 $f(m,n)=f(m-1,n)+f(m,n-1)$。

證明

由巴斯卡定理

$$\binom{m-n+2k}{k}=\binom{m-n+2k-1}{k}+\binom{m-n+2k-1}{k-1}\text{，}$$

故

$$f(m,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{m-n+2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{m-n+2k-1}{k}\binom{2n-2k}{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{m-n+2k-1}{k-1}\binom{2n-2k}{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{(m-1)-n-2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{m-n+2j+1}{j}\binom{2n-2j-2}{n-j-1}$$

$$=f(m-1,n)+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{m-(n-1)+2j}{j}\binom{2(n-1)-2j}{(n-1)-j}$$

$$=f(m-1,n)+f(m,n-1)\text{ 。} \qquad \square$$

另一方面，在 $m=n$ 時（即表格3的對角線），我已有

$$f(n,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}=2^{2n}\text{ 。}$$

我猜測 $f(m,n)$ 是否也跟 2^{2n} 有關係，竟發現了有趣的規律，如表格4所示：

n \ m	1	2	3	4	5
1	2^2	$2^3-\binom{3}{1}$	$2^4-\left[\binom{4}{1}+\binom{4}{2}\right]$	$2^5-\left[\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}\right]$	$2^6-\left[\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}\right]$
2		2^4	$2^5-\binom{5}{2}$	$2^6-\left[\binom{6}{2}+\binom{6}{3}\right]$	$2^7-\left[\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}\right]$
3			2^6	$2^7-\binom{7}{3}$	$2^8-\left[\binom{8}{3}+\binom{8}{4}\right]$
4				2^8	$2^9-\binom{9}{4}$
5					2^{10}

表格4

由此規律我猜測， $f(m,n)=2^{m+n}-\sum_{k=n}^{m-1}\binom{m+n}{k}$ 。

引理2

設 $m\geq n\geq 1$，則

$$f(m,n)=\begin{cases}2^{m+n} & \text{,if } m=n\\ 2^{m+n}-\sum_{k=n}^{m-1}\binom{m+n}{k} & \text{,if } m>n\end{cases}\text{ 。}$$

$\boxed{\text{證明}}$

1.邊界情況

（1） 當 $m=n$ 時，已得證 $f(n,n)=2^{2n}=2^{n+n}$ 。

（2） 當 $m>n=1$時，

$$f(m,1)=\sum_{k=0}^{1}\binom{m-1+2k}{k}\binom{2-2k}{1-k}=2+(m+1)=\binom{m+1}{0}+\binom{m+1}{m+1}+\binom{m+1}{m}$$

$$=2^{m+1}-\sum_{k=1}^{m-1}\binom{m+1}{k}$$ ，成立。

2.以下我做數學歸納法，

當 $m+n=2,3,4$ 時，即 $(m,n)=(1,1),(2,1),(3,1),(2,2)$ ，皆為邊界情況，故公式成立；

當 $m>n\geq 2$ 時，假設 $f(m-1,n)$ 和 $f(m,n-1)$ 公式成立，則由《引理1》知

$$f(m,n)=f(m-1,n)+f(m,n-1)$$

$$=2^{m-1+n}-\sum_{k=n}^{m-2}\binom{m-1+n}{k}+2^{m+n-1}-\sum_{k=n-1}^{m-1}\binom{m+n-1}{k}$$

$$=2\times 2^{m+n-1}-\left[\sum_{k=n}^{m-2}\binom{m+n-1}{k}+\sum_{k=n-1}^{m-1}\binom{m+n-1}{k}\right]$$

$$=2^{m+n}-\left[\sum_{k=n}^{m-1}\binom{m+n-1}{k}-\binom{m+n-1}{m-1}+\sum_{k=n}^{m-1}\binom{m+n-1}{k-1}+\binom{m+n-1}{m-1}\right]$$

$$=2^{m+n}-\sum_{k=n}^{m-1}\binom{m+n}{k}$$ ，成立。

由上述兩部份得證本引理。 □

由《引理2》可知當 $m>n$ 時，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m-n+2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=2^{m+n}-\sum_{k=n}^{m-1}\binom{m+n}{k}=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}-\sum_{k=n}^{m-1}\binom{m+n}{k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}+\sum_{k=m}^{m+n}\binom{m+n}{k}$$

$$=\binom{m+n}{m}+2\times\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}$$ 。

利用我所證明的恆等式，我可以將公式簡化成下面形式：

定理 2.2

當 $m>n$ 時，總猜對次數的期望值為

$$E_{m,n}=m-\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{m-n+2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2\times\binom{m+n}{n}}=m+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}。$$

其實，將 $m=n$ 代入《定理 2.2》的 $E_{m,n}$ 公式，經過一番化簡後，亦將得到《定理1》的

$E_{n,n}=n-\frac{1}{2}+\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}}$。這就表示，公式 $E_{m,n}=m+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}$ 適用於 $m\geq n$ 的情況。

以上我將抽球歷程轉化為方格路徑的行走，透過技巧性累加、觀察數據、推導化簡，成功地得到簡潔的 $E_{m,n}$ 的一般化公式。

在漫長的探究過程中，我亦曾嘗試從遞迴觀點處理原問題。在巧妙地設計出負值 m,n 的擴展表格後，亦成功地得到 $E_{m,n}$ 公式！其過程詳述於附錄二。

二、原題情境中 $E_{m,n}$ 公式的估計式

這裡，在分別得到 $E_{n,n}$ 和 $E_{m,n}$ 的公式後，我考慮到在數值極大時的計算困難，因此，我進行了估計式的計算。

(一)、$E_{n,n}$ 的簡易估計式

我想計算當 n 很大時，$E_{n,n}$ 的估計式。

由 Stirling 近似公式可得：

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}\approx\frac{\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}}{e^{2n}}\times\frac{(e^{n})^{2}}{2\pi n\times(n^{n})^{2}}=\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}},$$

故

$$E_{n,n}=n-\frac{1}{2}+\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}}\approx n-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi n}}{2}。$$

此估計式提供 $E_{n,n}$ 值的簡易計算，其估計精確度頗為良好，如下表：

n 值	$E_{n,n}$ 理論值	$E_{n,n}$ 估計值	誤差百分比
$n=100$	100+8.3734	100+8.3623	-0.0102%
$n=200$	200+12.0410	200+12.0331	-0.0037%
$n=300$	300+14.8563	300+14.8499	-0.0020%
$n=400$	400+17.2301	400+17.2245	-0.0013%

表格 5

我們知道在 n 黑 n 白的情形下，總猜對次數至少是 n 次，故由 $E_{n,n}-n\approx\frac{\sqrt{\pi n}-1}{2}$ 理解到總猜對次數期望值比保證猜對的次僅大約多了 $\frac{\sqrt{\pi n}-1}{2}$ 次，例如在表格中的 $E_{400,400}\approx 400+17.2245$，僅大約多了 17 次，而且這個多的部分大約與 $\sqrt{n}$ 成正比。

（二）、$E_{m,n}$ 的的簡易估計式

仿前一小節，我想探究當 m,n 很大時，$E_{m,n}$ 的估計式。由《定理 2.2》知，當 $m>n$ 時，

$$E_{m,n} = m + \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}} ,$$

我將利用二項分配與常態分配對上式進行估算，

令隨機變數 X 為參數 $\left(m+n,\frac{1}{2}\right)$ 的二項分配，則

$$Pr(x=k)=\binom{m+n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-k}=\frac{\binom{m+n}{k}}{2^{m+n}}$$ ，其中 $k=0,1,2,...,m+n$ ，

且

$$E\left(X\right)=\frac{m+n}{2} \text{ ，} Var\left(X\right)=\frac{m+n}{4} \text{ 。}$$

當 m 、 n 夠大時，$\dfrac{X-E\left(X\right)}{\sqrt{Var\left(X\right)}}$ 近似於標準常態分配 Z ，

故

$$\frac{\sum_{k=n}^{m-1}\binom{m+n}{k}}{2^{m+n}}=Pr\left(X\le n-1\right)=Pr\left(X<n-1+\frac{1}{2}\right)\approx Pr\left(Z<\frac{(n-\frac{1}{2})-(\frac{m+n}{2})}{\frac{\sqrt{m+n}}{2}}\right)$$

$$=Pr\left(Z<\frac{n-m-1}{\sqrt{m+n}}\right) \text{ 。}$$

以同樣方法作近似，可得

$$\frac{\binom{m+n}{n}}{2^{m+n}}\approx Pr\left(\frac{n-m-1}{\sqrt{m+n}}<Z<\frac{n-m+1}{\sqrt{m+n}}\right) \text{ 。}$$

以符號 Z_x 表示 $Pr\left(Z<x\right)$ ，則

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}} \approx \frac{Pr\left(Z<\frac{n-m-1}{\sqrt{n+m}}\right)}{Pr\left(\frac{n-m-1}{\sqrt{n+m}}<Z<\frac{n-m+1}{\sqrt{n+m}}\right)} = \frac{Z_{\frac{n-m-1}{\sqrt{n+m}}}}{Z_{\frac{n-m+1}{\sqrt{n+m}}}-Z_{\frac{n-m-1}{\sqrt{n+m}}}} \text{ 。}$$

將上式代回 $E_{m,n}$ 估計式：

$$E_{m,n} = m + \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}} \approx m + \frac{Z_{\frac{n-m-1}{\sqrt{n+m}}}}{Z_{\frac{n-m+1}{\sqrt{n+m}}} - Z_{\frac{n-m-1}{\sqrt{n+m}}}}$$ 。

此估計式避開了原公式中組合數的大量計算與加總，而採取標準常態分配 Z 查表的簡易計算，其估算精確度頗為良好，如下表的例子：

m 值	n 值	$E_{m,n}$ 理論值	$E_{m,n}$ 估計值	誤差量	誤差百分比
100	100	100+8.3734	100+8.3697	-0.0037	-0.0034%
150	100	150+1.8100	150+1.8380	0.0281	0.0185%
200	100	200+0.9632	200+1.0152	0.0521	0.0259%
400	100	400+0.3304	400+0.4270	0.0966	0.0241%
400	400	400+17.2301	400+17.2282	-0.0018	-0.0004%
600	400	600+1.9440	600+1.9757	0.0317	0.0053%

表格6

三、隱藏情境

(一)、策略 A 與策略 $\overline{A}$ 的總猜對次數期望值

在原題情境中，玩家知道箱中黑球白球的各自數量，得以用最可能出現的顏色來猜測下一球，但若玩家無法知道黑球白球各有幾顆，那該如何猜測呢？總猜對次數期望值為何？

我命名這樣的情境為隱藏情境。

在隱藏情境中，玩家只知道箱中球的總數量，但不知黑球、白球的初始數量，在抽球歷程中，玩家可以知道已抽出球的顏色、數量及順序。

玩家在此情境下只能以抽球歷程作為猜測下一球的資訊參考，容易想到的猜球策略是：綜觀檯面上已抽出的球，推理檯面上較多球的顏色是因為最初在箱中便有較多數量，故有較大機率被抽中，所以，下一球猜測檯面上球數較多的那一顏色，我稱其為策略 A；相反的，若玩家進行反向思考，認為該顏色在被抽出較多球後，在箱中的剩餘球數應已占少數，而選擇猜檯面上球數較少的顏色，就是與之互補的策略 $\overline{A}$。即：

策略 A：第一球隨機猜色，之後猜檯面上球數較多的顏色；

策略 $\overline{A}$：第一球隨機猜色，之後猜檯面上球數較少的顏色。

定義隨機變數 X_A 為使用策略 A 的總猜對次數，$E_{m,n}(X_A)$ 為在策略 A 之下的總猜對次數期望值；類似的，$X_{\overline{A}}$ 為使用策略 $\overline{A}$ 的總猜對次數，$E_{m,n}(X_{\overline{A}})$ 是在策略 $\overline{A}$ 之下的總猜對次數期望值。我發現兩互補策略的總猜對次數期望值相加為總球數，稱之為互補策略性質，如下：

引理3

$E_{m,n}(X_A)+E_{m,n}(X_{\overline{A}})=m+n$ 。

證明

由於策略 A 及策略 $\overline{A}$，除了第一球猜對期望值各為 $\frac{1}{2}$ 之外，其餘各球當策略 A 猜對時，策略 $\overline{A}$ 就猜錯，反之亦然。因此總和為 $m+n$ 顯然成立。 □

有了《引理3》，我將只需要計算策略 A 或 $\overline{A}$ 其中一個的期望值便可以知道另一個。而我發現策略 $\overline{A}$ 的證明更具趣味性，故下文以策略 $\overline{A}$ 進行討論。

我以$m=3$，$n=2$（即3黑2白）為例說明期望值的計算方式與流程。此時共有10種取出情形，在策略$\overline{A}$之下，每一種取出情形的各次猜對期望值恰有2個1出現，請參照下表：

編號	取出情形	各次猜對的期望值	合計
1	● ● ● ○ ○	$\frac{1}{2}$ 0 0 1 1	$\frac{5}{2}$
2	● ● ○ ● ○	$\frac{1}{2}$ 0 1 0 1	$\frac{5}{2}$
3	● ○ ● ● ○	$\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$ 0 1	3
4	○ ● ● ● ○	$\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$ 0 1	3
5	● ● ○ ○ ●	$\frac{1}{2}$ 0 1 1 $\frac{1}{2}$	3
6	● ○ ● ○ ●	$\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
7	○ ● ● ○ ●	$\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
8	● ○ ○ ● ●	$\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
9	○ ● ○ ● ●	$\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
10	○ ○ ● ● ●	$\frac{1}{2}$ 0 1 1 $\frac{1}{2}$	3

表格7

仿照前文的方式，將上述表格的各種取球情形對應到$(0,0)$至$(3,2)$的格線行走，每條路徑恰有2個1，且$\frac{1}{2}$出現在$(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$共3個位置，如下圖：

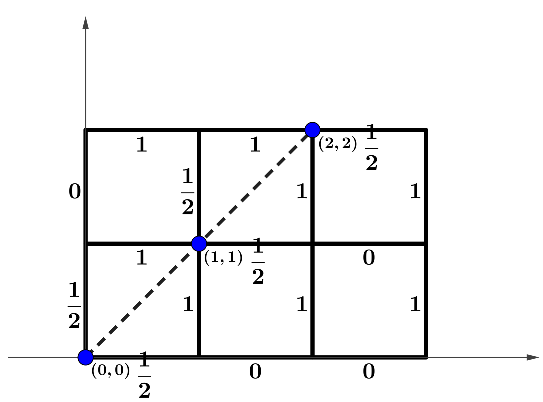

圖3

因此可得

$$E_{3,2}\left(X_{\overline{A}}\right)=\frac{\binom{5}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times\left[\binom{5}{2}+\binom{2}{1}\binom{3}{1}+\binom{4}{2}\binom{1}{0}\right]}{\binom{5}{2}}=\frac{10\times 2+\frac{1}{2}\times 22}{10}=\frac{31}{10}\text{ 。}$$

對於一般m黑n白（$m>n$）的情況，將取球情形對應到$(0,0)$至(m,n)的格線行走，計算手法類似於原題$E_{m,n}$計算方式，對於一般m黑n白（$m>n$）的情況，將取球情形對應到$(0,0)$至(m,n)的格線行走，則有$\binom{m+n}{n}$條路徑，每條路徑都恰有n個1，且$\frac{1}{2}$出現在
$(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, ..., (n,n)共$n+1$個
位置，而通過(j,j)的路徑數為$\binom{2j}{j}\times\binom{m+n-2j}{n-j}$，其中$j=0,1,2,...,n$。

計算策略$\overline{A}$的總猜對次數期望值，如下：

$$E_{m,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=\frac{\binom{m+n}{n}\times n+\frac{1}{2}\times\sum_{j=0}^{n}\binom{2j}{j}\binom{m+n-2j}{n-j}}{\binom{m+n}{n}}=n+\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{m-n+2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2\times\binom{m+n}{n}}=n+\frac{f(m,n)}{2\binom{m+n}{n}}$$

又知

$$f(m,n)=2^{m+n}-\sum_{k=n}^{m-1}\binom{m+n}{k}=\binom{m+n}{m}+2\times\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}\text{ ，}$$

代回即得

$$E_{m,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=n+\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}\text{ 。}$$

由於策略A與策略$\overline{A}$互補，因此可以得到在策略A下的總猜對次數期望值為：

$$E_{m,n}\left(X_{A}\right)=(m+n)-E_{m,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=(m+n)-\left[n+\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}\right]$$

$$=m-\frac{1}{2}-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}\text{ 。}$$

然而，當 $m=n$ 時，$E_{m,n}(X_{\overline{A}})$ 公式略有不同。依相同的推導方式，計算 $(0,0)$ 至 (n,n) 的格線行走，每條路徑都恰有 n 個 1，但 $\frac{1}{2}$ 出現在 $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, ..., $(n-1,n-1)$ 共 n 個位置，（少了點 (n,n) ），故

$$E_{n,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=\frac{\binom{2n}{n}\times n+\frac{1}{2}\times\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{\binom{2n}{n}}=n+\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}-\binom{2n}{n}}{2\times\binom{2n}{n}}=n+\frac{f(n,n)-\binom{2n}{n}}{2\binom{2n}{n}},$$

又知

$$f(n,n)=2^{2n}=\binom{2n}{n}+2\times\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k},$$

代回即得

$$E_{n,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=n+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}},$$

故

$$E_{n,n}\left(X_{A}\right)=(n+n)-E_{n,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=n-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}}。$$

將結果整理後，我得到《定理 3》。

定理 3

在隱藏情境中，使用策略 A 、 $\overline{A}$，總猜對次數的期望值分別為

(1) 當 $m>n$ 時，$E_{m,n}\left(X_{A}\right)=m-\frac{1}{2}-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}$；當 $m=n$ 時，$E_{n,n}\left(X_{A}\right)=n-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}}$。

(2) 當 $m>n$ 時，$E_{m,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=n+\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}$；當 $m=n$ 時，$E_{n,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=n+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}}$。

然而，我心中的疑惑是：究竟策略 A 、 $\overline{A}$ 何者較優？將於下一小節做比較。

（二）、策略 A 與策略 $\overline{A}$ 的優劣比較

在固定總球數 N 之下，策略 A、$\overline{A}$ 該如何選擇呢？我以 N=100 為例將總猜對次數的期望值繪成折線圖。

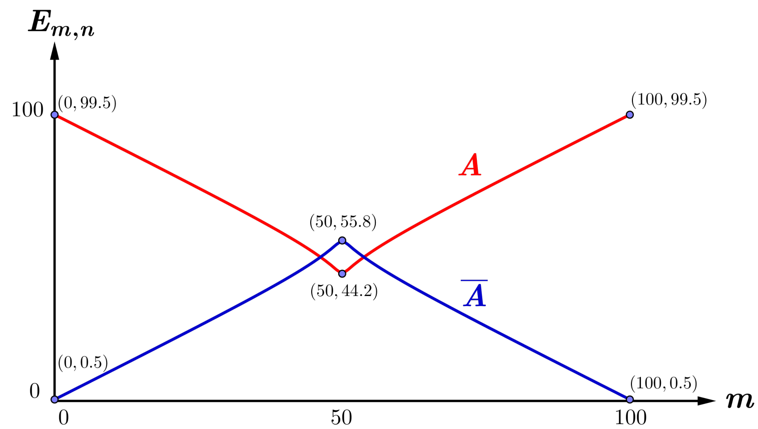

圖 4

上圖呈現兩策略的期望值隨著 m 增加（n 同步減少）的變化情形，當黑白球數相差很大的時候，策略 A 為較佳選擇；反之，黑白球數相近時，策略 $\overline{A}$ 為較佳選擇。圖中兩折線的交點代表不管使用策略 A 或 $\overline{A}$，得到的期望值皆相同。

然而，在隱藏情境中，玩家無法事先得知箱中黑白球各自數量，自然無從推斷黑白球數是否相近？又或者在圖中策略 A 在多數的 $E_{m,n}$ 值勝過策略 $\overline{A}$，故讀者可能認為策略 A 整體平均而言較優，真的可以這麼推論嗎？我將在下一節建立數學模型比較之。

四、二項分布模型

在前一節，我得出了在隱藏情境中，策略 A、$\overline{A}$ 下的公式，而在公式中，仍需知道 m、n 值才能計算出期望值。但此情境下玩家無法得知箱中黑白球各自的數量，也無從判斷此時該採用何種猜球策略。

在固定總球數 $m+n=N$ 之下，我對於黑白球各自數量的機率分布進行合理的模型假設：黑球數量 m 背後機率分布為參數 $(N,\frac{1}{2})$ 的二項分布，即

$$Pr\,(\,m\text{ 黑 }n\text{ 白}\,)=\binom{N}{m}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\text{，其中 } m=0,1,2,...,N\text{ 。}$$

定義新符號，令 $B_N\left(X_\Omega\right)$ 表示在隱藏情境中，球數服從二項分布的情形下，使用策略 Ω 的總猜對次數期望值的平均，因此，使用策略 A 、$\overline{A}$ 的總猜對次數期望值的平均如下：

1. $B_N\left(X_A\right)=\sum_{m=0}^{N} E_{m,n}\left(X_A\right)\times Pr$（$m$ 黑 n 白），

2. $B_N\left(X_{\overline{A}}\right)=\sum_{m=0}^{N} E_{m,n}\left(X_{\overline{A}}\right)\times Pr$（$m$ 黑 n 白）。

我將比較 $B_N\left(X_A\right)$ 與 $B_N\left(X_{\overline{A}}\right)$ 的大小，以判別在二項分布模型下，策略 A 、$\overline{A}$ 的優劣。以下先計算策略 $\overline{A}$ 的平均。

注意到 $E_{m,n}$ 公式有 $m>n$ 、$m=n$ 、$m<n$ 三種不同情形，所以總球數 $m+n=N$ 為奇數或偶數時有不同情況，分別計算如下：

1. 當 N 為奇數：

$$
\begin{aligned}
B_N\left(X_{\overline{A}}\right)&=\sum_{m=0}^{N} E_{m,n}\left(X_{\overline{A}}\right)\times Pr\text{（}m\text{ 黑 }n\text{ 白）}\\
&=2\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\left[n+\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}}{\binom{N}{n}}\right]\times\binom{N}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^N\\
&=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\binom{N}{n}+\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}\right]\\
&=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\binom{N}{n}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N-1}{2}}+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\binom{N}{n}\right]\\
&=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}\frac{N}{2}\binom{N}{n}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N-1}{2}}\right]\\
&=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\frac{N}{2}\binom{N}{n}\\
&=\frac{N}{2}
\end{aligned}
$$

2. 當 N 為偶數：

在總球數 N 是偶數的情況下，以相同的手法但更冗長的計算過程，得到了策略 $\overline{A}$ 的總猜對次數期望值的平均也是 $\frac{N}{2}$ ，其過程參見附錄三。

因此，不論在總球數 N 為奇數或偶數的情況下，使用策略 $\overline{A}$ 猜對次數的平均皆為 $\frac{N}{2}$ 。

同理，我亦計算得證使用策略 A 的平均值為 $\frac{N}{2}$ ，其過程參見附錄四。

因此，我發現在此二項分布模型下，策略 A 、 $\overline{A}$ 的優劣程度竟然相同，這真是個驚奇的結果！由以上結果，我大膽推測任何策略 Ω 皆符合此結論，將之記錄為《定理 4》，並以另種觀點完成證明。

定理 4

在參數 $(N,\frac{1}{2})$ 的二項分布假設下，隱藏情境中任何策略 Ω 總猜對次數期望值的平均皆為 $\frac{N}{2}$ 。

證明

由於黑白球各自數量的機率分布為參數 $(N,\frac{1}{2})$ 的二項分布，我可將此抽球過程視為從一個黑球白球被取出機率皆為 $\frac{1}{2}$ 的球庫中，取出 N 顆丟入箱內，且過程中，黑白球被取出的機率不變。

玩家此時再從箱中一一取球並進行猜測。而我把球從球庫取出放入箱內，再從箱中取球進行猜測的過程，視為玩家直接從球庫中抽球猜測。因為球庫中黑球白球被取出的機率為 $\frac{1}{2}$ ，所以玩家每次有 $\frac{1}{2}$ 的機率會猜對。故在猜測 N 次的情況下，不論使用何種策略，總猜對次數期望值皆為 $\frac{N}{2}$ 。 □

伍、研究結果

一、原題情境

設定玩家知道箱中有 m 顆黑球、n 顆白球，探求總猜對次數期望值。我將各次取球情形，一一對應至方格路徑，計算後得到：

$$E_{m,n}=m+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}\text{，其中 } m\ge n\text{ 。}$$

而在 m,n 夠大時，有以下的簡易估計式：

(1) 當 $m=n$ 時，$E_{n,n}\approx n-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi n}}{2}$ 。

(2) 當 $m>n$ 時，$E_{m,n}\approx m+\frac{Z_{\frac{n-m-1}{\sqrt{n+m}}}}{Z_{\frac{n-m+1}{\sqrt{n+m}}}-Z_{\frac{n-m-1}{\sqrt{n+m}}}}$ 。

二、隱藏情境

設定玩家只知道箱中的總球數，但不知 m、n 值的情況下進行猜測。在此情境中，策略 A（猜測檯面上被抽出較多的那一顏色）與其互補策略 $\overline{A}$（猜測檯面上較少的那一顏色）的總猜對次數期望值分別如下：

(1) 當 $m>n$ 時，$E_{m,n}\left(X_A\right)=m-\frac{1}{2}-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}$；當 $m=n$ 時，$E_{n,n}\left(X_A\right)=n-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}}$ 。

(2) 當 $m>n$ 時，$E_{m,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=n+\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}$；當 $m=n$ 時，$E_{n,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=n+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}}$ 。

而後，比較兩策略的優劣，得到：

(1) 當黑白球數相差較大的時候，策略 A 為較佳選擇；

(2) 當黑白球數相近時，策略 $\overline{A}$ 為較佳選擇。

三、二項分布模型

在總球數 N 固定下，黑白球數服從參數 $(N,\frac{1}{2})$ 的二項分布時，隱藏情境中任何策略的總猜對次數期望值的平均皆為 $\frac{N}{2}$ 。

陸、討論

在這一節，我將討論資訊落差所帶來的「價值」。

在原題情境中，玩家知初始的黑白球數，得以在猜球過程中以最可能出現的顏色來猜測，此方式顯然已是該情境下的最佳策略。而在隱藏情境中，玩家並不知道初始黑白球各自數量，得靠檯面上已抽出的球的顏色來預測，因此總猜對次數期望值應該較低。我列出了兩者的差值，這顯示出「初始黑白球數」這項資訊的價值。

1. 當 $m>n$ 時，$E_{m,n}-E_{m,n}\left(X_A\right)=\dfrac{2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}+\dfrac{1}{2}>0$，$E_{m,n}-E_{m,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=m-n-\dfrac{1}{2}>0$；

2. 當 $m=n$ 時，$E_{n,n}-E_{n,n}\left(X_A\right)=\dfrac{2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}}>0$，而 $E_{n,n}-E_{n,n}\left(X_{\overline{A}}\right)=0$。

以上僅在 $m=n$ 時發生兩者相等的特例。

接下來，我想對原題情境與隱藏情境的期望值差距得到更整體的概念。繼續引入二項分布模型，在固定總球數 $m+n=N$ 之下，令黑球數量 m 的機率分布為參數 $(N,\frac{1}{2})$ 的二項分布，定義符號 B_N 表示在原題情境下，使用最佳策略的總猜對次數期望值 $E_{m,n}$ 的平均，即：

$$B_N=\sum_{m=0}^{N}E_{m,n}\times Pr（m\text{ 黑 }n\text{ 白}）。$$

依總球數 N 為奇數或偶數的情況計算如下：

1. 總球數 N 為奇數：

$$
\begin{aligned}
B_N&=\sum_{m=0}^{N}E_{m,n}\times Pr（m\text{ 黑 }n\text{ 白}）\\
&=2\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}E_{m,n}\times\binom{N}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^N\\
&=2\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\left[N-n+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}}{\binom{N}{n}}\right]\times\binom{N}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^N
\end{aligned}
$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}(N-n)\binom{N}{n}+\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}\right]$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}(N-n)\binom{N}{n}+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\binom{N}{n}\right]$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\times\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\left(\frac{3N-1}{2}-2n\right)\binom{N}{n}$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\times\left[\left(\frac{3N-1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\binom{N}{n}-2\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}n\times\binom{N}{n}\right]$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\times\left[\left(\frac{3N-1}{2}\right)\times\frac{2^{N}}{2}-2\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}N\times\binom{N-1}{n-1}\right]$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\times\left[\left(\frac{3N-1}{2}\right)\times\frac{2^{N}}{2}-2\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}N\times\binom{N-1}{n}\right]$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\times\left[\left(\frac{3N-1}{2}\right)\times\frac{2^{N}}{2}-2N\left(\frac{2^{N-1}-\binom{N-1}{\frac{N-1}{2}}}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{3N-1}{2}-N+N\times\binom{N-1}{\frac{N-1}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

$$=\frac{N-1}{2}+\frac{2N}{2^{N}}\binom{N-1}{\frac{N-1}{2}}\text{。}$$

2. 總球數 N 為偶數：

類似於上述的計算方法，經過更為複雜的過程後，其參見附錄五，同樣得到了

$$B_{N}=\frac{N-1}{2}+\frac{2N+1}{2^{N+1}}\binom{N}{\frac{N}{2}}\text{。}$$

與奇數時有少許的差異，應來自於奇偶數的特性。

接著，我將原題情境的 B_N 與隱藏情境期望值的平均 $B_N\left(X_\Omega\right)=\dfrac{N}{2}$ 做比較。首先我定義 D_N 為兩者的差距，即 $D_N=B_N-B_N\left(X_\Omega\right)$。

我分別得到了在總球數 N 為奇數與偶數時的 D_N，而這所代表的就是在只知道總球數且分布為二項分布的情況下，玩家是否得知準確的 m 、 n 值資訊，對猜對次數期望值的差值。我用程式得到數據後，將之繪成圖。

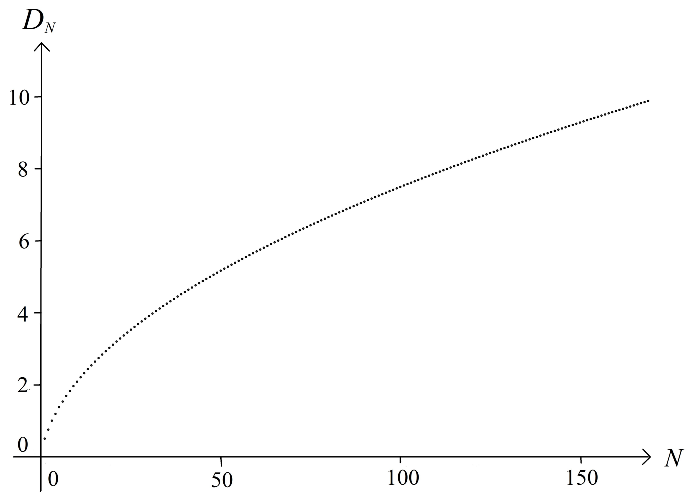

圖 5

如圖 5 我可以發現，在只知道總球數情況下，當總球數越大的時候，猜對次數期望值的差值 D_N 就越大，也就是說，球數越大時，知道準確的 m 、 n 值，可以猜對越多次，而這結果也符合直觀的猜測。而我運用前文同樣的近似手法，對總球數 N 夠大時的 D_N 公式進行 Stirling 近似。

1. 當 N 為奇數時，有

$$D_N=\frac{N-1}{2}+\frac{2N}{2^N}\binom{N-1}{\frac{N-1}{2}}-\frac{N}{2}\approx-\frac{1}{2}+\frac{2N}{2^N}\times\frac{2^{N-1}}{\sqrt{\pi\times\frac{N-1}{2}}}\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{N}\ ;$$

2. 當 N 為偶數時，有

$$D_N=\frac{N-1}{2}+\frac{2N+1}{2^{N+1}}\binom{N}{\frac{N}{2}}-\frac{N}{2}\approx-\frac{1}{2}+\frac{2N+1}{2^{N+1}}\times\frac{2^N}{\sqrt{\pi\times\frac{N}{2}}}\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{N}\ 。$$

從以上的結果，我得到 D_N 與 $\sqrt{N}$ 成正比的有趣關係，這顯示出「初始黑白球數」這項資訊隨著總球數 N 的增加而更有價值，且價值的增加是以平方根的形式上升。

柒、結論

本文最初探討了一個由猜球遊戲延伸的期望值問題。研究過程中，屏除一般計算期望值的手法，我把各次猜對期望值對應至方格路徑中，歸納出各種取球情形的規律，大幅簡化計算而得到期望值的精確公式，這也是我作品中計算的核心手法。計算過程中，為解決最初公式的計算難度，我使用遞迴與數學歸納法將其化為簡潔的形式。而後，將公式近似後得到簡易的估計式，使我可以避開複雜的組合數計算，得以快速求得期望估計值。

在完整解決原始問題後，我改變條件，討論在只知道總球數下，玩家如何選擇策略及計算其期望值。一般容易想到的策略是視已抽出球的顏色，以較多者作為下一球的猜測。這裡，我分別得到以檯面多的顏色進行猜測，與它的互補策略—以檯面少的顏色進行猜測，兩策略的總猜對次數期望值公式，並比較其優劣。此外更發現，當假設黑球、白球個數服從二項分布模型時，任意策略的總猜對次數期望值公式皆相同。也就是說，在此模型中我有：玩家觀察已抽出球的顏色在期望值上並無法獲得額外的優勢，這個驚喜的結論。

最後，我以探究黑白球數量訊息對總猜對次數期望值的影響，也就是這項資訊所帶來的價值作結。在二項分布模型的假設下，若可得知黑球、白球各自的初始數量，其總猜對次數期望值的增加量將與總球數的正平方根成正比！

捌、參考文獻

[1]台大電機系 2015 年申請入學數學筆試題目•

取自： https://www.ptt.cc/bbs/SENIORHIGH/M.1428884758.A.27E.html

[2]林延輯（2014）•組合恆等式 $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n$ 的兩個證明•*數學傳播季刊，第 38 卷第 1 期*，第 30–35 頁

[3] Marta Sved（1983）. Counting and recounting. *Math. Intelligencer 5*, No. 4, pg.21-26

附錄一

引理 4

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=2^{2n}\text{。}$$

證明

我給予 $2^{2n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$ 一個組合上的解釋。

在坐標平面上，今由 $(0,0)$ 出發沿格線行走，每次走 1 單位，可選擇向右或是向上走，走 $2n$ 步後將到達 $x+y=2n$ 的直線上，則共有 2^{2n} 種走法。

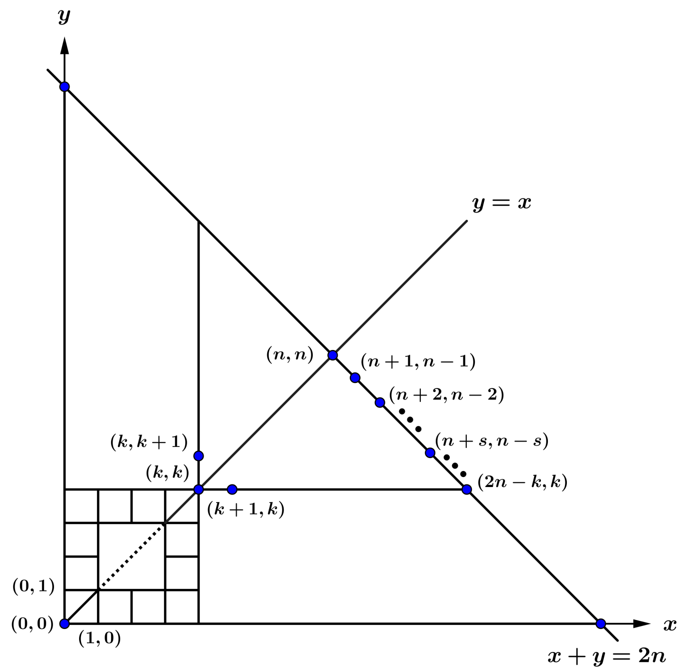

圖 6

如圖 6 所示，我發現每一條走法路徑都可以被分成兩部分。前半部為 $(0,0)\to(k,k)$ ，後半部則是 (k,k) 到直線 $x+y=2n$ ，其中 (k,k) 為路徑中最後一次碰到直線 $y=x$ 的點。因此，我將 2^{2n} 種路徑分成了 $n+1$ 類（ $k=0,1,2,\ldots,n$ ）。

路徑前半部 $(0,0)\to(k,k)$ 共有 $\binom{2k}{k}$ 種走法，而路徑的後半部的走法數並沒有那麼直觀，我將繼續在下文中進行解釋。

首先，由(k,k)出發的路徑因對稱性可分為兩類，選擇下一步往右或是往上，而兩類方法數一樣多，故不失一般性，假設由(k,k)出發，下一步往右到達$(k+1,k)$。而此路徑的終點將落在$x+y=2n$的直線上，且之後都不能再碰到直線$y=x$，故終點只可能是下列的$n-k$類：

$$(n+1,n-1)、(n+2,n-2)、(n+3,n-3)、\cdots、(n+(n-k),n-(n-k))。$$

由$(k+1,k)\to(n+s,n-s)$符合規定的走法數（不碰到直線$y=x$），等於$(k+1,k)\to(n+s,n-s)$的任意走法數扣除碰到直線$y=x$的走法數，而不合規定的走法數可一一對應於從$(k,k+1)$出發到$(n+s,n-s)$的任意走法，因此合格走法數為：

$$\binom{2n-2k-1}{(n-s)-k}-\binom{2n-2k-1}{(n-s)-(k+1)}$$

$$=\binom{2n-2k-1}{n-k-s}-\binom{2n-2k-1}{n-k-(s+1)}。$$

故由$(k+1,k)\to(n+s,n-s)$，$s=1,2,3,\cdots,n-k$，這$n-k$類合格走法數的總和為

$$\sum_{s=1}^{n-k-1}\left(\binom{2n-2k-1}{n-k-s}-\binom{2n-2k-1}{n-k-(s+1)}\right)+\binom{2n-2k-1}{0}$$
$$=\binom{2n-2k-1}{n-k-1}。$$

故後半部的總走法數為

$$2\times\binom{2n-2k-1}{n-k-1}=\binom{2n-2k}{n-k}。$$

將前半部（由$(0,0)$到(k,k)走法數）及後半部（由(k,k)到直線$x+y=2n$）走法數統整，得到總走法數為$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$。因總走法數必等同於$2^{2n}$，故得證本引理。 □

附錄二

我思考 $E_{n,n}$ 是否可以用遞迴關係式呈現，並尋找之間的關聯性。首先，以 $E_{1,1}$ 開始進行探討。設在抽出第一顆球前已先猜測會取得黑球，而接下來將出現兩種情況：

1. 猜對，此時箱中只剩1白球（接下來可用 $E_{0,1}$ 表示），

2. 猜錯，此時箱中只剩1黑球（接下來可用 $E_{1,0}$ 表示）。

依照此想法，我得到：

$$E_{1,1}=\frac{1}{2}\left(1+E_{0,1}\right)+\frac{1}{2}\left(0+E_{1,0}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}E_{0,1}+\frac{1}{2}E_{1,0}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times1=\frac{3}{2}\ ,$$

接著，依序遞推至其它情況：

$$E_{2,1}=\frac{2}{3}\left(1+E_{1,1}\right)+\frac{1}{3}\left(0+E_{2,0}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}E_{1,1}+\frac{1}{3}E_{2,0}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}+1+\frac{2}{3}=\frac{7}{3}\ ,$$

$$E_{2,2}=\frac{2}{4}\left(1+E_{1,2}\right)+\frac{2}{4}\left(0+E_{2,1}\right)=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}E_{1,2}+\frac{2}{4}E_{2,1}=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{7}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{7}{3}=\frac{2}{4}+\frac{7}{3}=\frac{17}{6}\ 。$$

亦即，對於一般情況（m 黑 n 白），我有以下的遞迴式：

1. 當 $m=n$ 時，$E_{n,n}=\frac{1}{2}\left(1+E_{n-1,n}\right)+\frac{1}{2}\left(0+E_{n,n-1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}E_{n-1,n}+\frac{1}{2}E_{n,n-1}=\frac{1}{2}+E_{n,n-1}$；

2. 當 $m>n$ 時，
$$E_{m,n}=\frac{m}{m+n}\left(1+E_{m-1,n}\right)+\frac{n}{m+n}\left(0+E_{m,n-1}\right)$$
$$=\frac{m}{m+n}+\frac{m}{m+n}E_{m-1,n}+\frac{n}{m+n}E_{m,n-1}\ 。$$

藉由上述兩式的幫助，我得以計算更多情況的期望值 $E_{m,n}$，如下表。

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{31}{6}$
2			$\frac{17}{6}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{67}{15}$	$\frac{113}{21}$
3				$\frac{41}{10}$	$\frac{169}{35}$	$\frac{317}{56}$
4					$\frac{373}{70}$	$\frac{380}{63}$

表格8

進一步，我想要尋求$E_{m,n}$的通式。首先我將$E_{m,n}$遞迴式表示為

$$E_{m,n}-m=\frac{m}{m+n}\left[E_{m-1,n}-(m-1)\right]+\frac{n}{m+n}\left(E_{m,n-1}-m\right),$$

接著我將$E_{m,n}-m$定義為$V_{m,n}$，則上式可寫作：

$$V_{m,n}=\frac{m}{m+n}V_{m-1,n}+\frac{n}{m+n}V_{m,n-1}。$$

由此式，我可以發現到$V_{m,n}$和$V_{m-1,n}$、$V_{m,n-1}$有分點公式的關係。而藉著這個關係式，我列出了$V_{m,n}$在$m\geq n$時的表格。

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	0	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$
1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
2			$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{21}$
3				$\frac{22}{20}$	$\frac{29}{35}$	$\frac{37}{56}$
4					$\frac{93}{70}$	$\frac{65}{63}$
5						$\frac{193}{126}$

表格9

由表格9，我發現了一個特別的現象，表格中的數據除了符合分點公式外，任一數值皆可寫作其上格及左格的分母數值相加除以分子數值相加，我利用這個性質，又分別列出了分子及分母的表格，並將表格數據向外延伸，使表格的任一格皆由其上格及左格相加，如下頁的表格10與表格11：

m \ n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-2						0	0	0	0
-1					0	0	0	0	0
0				0	0	0	0	0	0
1			1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	2	4	7	11	16	22	29	37

表格10（分子）

分子的部分，在我將表格擴展時，可以發現當在$m+n=0$的斜排，以$(0,0)$為界，左下的數值皆為1；而包含$(0,0)$，及$(0,0)$往右上，數值皆為0。利用這一點及任一數值皆可由其上格及左格相加的性質，在作$V_{m,n}$的分子計算時，我將數值不斷往左上方推展，發現最後推至$m+n=0$的斜排時，各格相加次數恰為二項式$(x+1)^{m+n}$的係數，而$V_{m,n}$的分子即可寫作$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}\times 1+\sum_{k=n}^{m+n}\binom{m+n}{k}\times 0=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}$。

m \ n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-2						0	0	0	0
-1					0	0	0	0	0
0				1	1	1	1	1	1
1			0	1	2	3	4	5	6
2		0	0	1	3	6	10	15	21
3	0	0	0	1	4	10	20	35	56

表格11（分母）

至於分母部分，利用相同手法，同樣的將數值推至$m+n=0$的斜排後，可以發現只有$(0,0)$的數值為1，其餘皆為0。也就是當各格相加次數為二項式$(x+1)^{m+n}$的係數時，只有第n項為1，而分母部分的值即為$\binom{m+n}{n}$。

綜合以上分子與分母兩部分後，我可以得到$V_{m,n}$的值為$\dfrac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}$，最後再加回最初被減去的$m$，即可得到$E_{m,n}=m+\dfrac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m+n}{k}}{\binom{m+n}{n}}$，而這個結果與我使用方格路徑的算法所得到的通式是相同的。

附錄三

計算在隱藏情境中，球數服從二項分布的情形下，使用策略$\overline{A}$的總猜對次數期望值的平均。

當N為偶數：

$$B_N\left(X_{\overline{A}}\right)=\sum_{m=0}^{N}E_{m,n}\left(X_{\overline{A}}\right)\times Pr\text{（}m\text{ 黑 }n\text{ 白）}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2\left[n+\frac{1}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}}{\binom{N}{n}}\right]\times\binom{N}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^N+\left[\frac{N}{2}+\frac{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\binom{N}{k}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}}\right]\times\binom{N}{\frac{N}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\left[2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)\binom{N}{n}+2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}+\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\binom{N}{k}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(2n+2)\binom{N}{n}+2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-2}\left(\frac{N}{2}-1-n\right)\binom{N}{n}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-2}N\binom{N}{n}+N\binom{N}{\frac{N}{2}-1}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N \times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} N\binom{N}{n}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N \times\left\{\frac{N}{2}\left[2^N-\binom{N}{\frac{N}{2}}\right]+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}\right\}$$

$$=\frac{N}{2}$$

附錄四

計算在隱藏情境中，球數服從二項分布的情形下，使用策略 A 的總猜對次數期望值的平均。

1. 當 N 為奇數：

$$B_N\left(X_A\right)=\sum_{m=0}^{N} E_{m,n}\left(X_A\right)\times Pr(m\text{ 黑 } n\text{ 白})$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2\left[N-n-\frac{1}{2}-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}}{\binom{N}{n}}\right]\times\binom{N}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^N \times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\left(N-n-\frac{1}{2}\right)\binom{N}{n}-\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}\right]$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^N \times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}\left(N-n-\frac{1}{2}\right)\binom{N}{n}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N-1}{2}}-\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\binom{N}{n}\right]$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^N \times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}\frac{N}{2}\binom{N}{n}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N-1}{2}}\right]$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^N \times\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\frac{N}{2}\binom{N}{n}$$

$$=\frac{N}{2}$$

2. 當 N 為偶數：

$$B_N(X_A)=\sum_{m=0}^{N}E_{m,n}(X_A)\times Pr（m 黑 n 白）$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2\left[N-n-\frac{1}{2}-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}}{\binom{N}{n}}\right]\times\binom{N}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^N+\left[\frac{N}{2}-\frac{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\binom{N}{k}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}}\right]\times\binom{N}{\frac{N}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\left[2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(N-n-\frac{1}{2}\right)\binom{N}{n}-2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}-\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\binom{N}{k}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(2N-2n-1)\binom{N}{n}-2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-2}\left(\frac{N}{2}-1-n\right)\binom{N}{n}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-2}N\binom{N}{n}+N\binom{N}{\frac{N}{2}-1}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}N\binom{N}{n}+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\times\left\{\frac{N}{2}\left[2^N-\binom{N}{\frac{N}{2}}\right]+\frac{N}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}\right\}$$

$$=\frac{N}{2}$$

附錄五

計算在二項分布模型中，原題情境下，使用最佳策略的總猜對次數期望值的平均。總球數 N 為偶數：

$$B_N=\sum_{m=0}^{N}E_{m,n}\times Pr\text{（}m\text{ 黑 }n\text{ 白）}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[N-n+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}}{\binom{N}{n}}\right]\times\binom{N}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^N+\left[\left(\frac{N-1}{2}\right)+\frac{2^{N-1}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}}\right]\binom{N}{\frac{N}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\left[2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(N-n)\binom{N}{n}+2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}+\frac{N-1}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}+2^{N-1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\left[2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(N-n)\binom{N}{n}+2\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-2}\left(\frac{N-2}{2}-n\right)\binom{N}{n}+\frac{N-1}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}+2^{N-1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-2}(3N-2-4n)\binom{N}{n}+(N+2)\binom{N}{\frac{N}{2}-1}+\frac{N-1}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}+2^{N-1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(3N-2-4n)\binom{N}{n}+\frac{N-1}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}+2^{N-1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\left[\frac{(3N-2)}{2}\left(2^N-\binom{N}{\frac{N}{2}}\right)-4\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}n\binom{N}{n}+\frac{N-1}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}+2^{N-1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\left[\frac{(3N-2)}{2}\left(2^N-\binom{N}{\frac{N}{2}}\right)-4\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-2}N\binom{N-1}{n}+\frac{N-1}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}+2^{N-1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^N\left[\frac{(3N-2)}{2}\left(2^N-\binom{N}{\frac{N}{2}}\right)-4N\left(\frac{2^{N-1}}{2}-\binom{N-1}{\frac{N}{2}-1}\right)+\frac{N-1}{2}\binom{N}{\frac{N}{2}}+2^{N-1}\right]$$

$$=\frac{N-1}{2}+\frac{1-2N}{2^{N+1}}\binom{N}{\frac{N}{2}}+\frac{4N}{2^N}\binom{N-1}{\frac{N}{2}-1}$$

$$=\frac{N-1}{2}+\frac{2N+1}{2^{N+1}}\binom{N}{\frac{N}{2}}$$