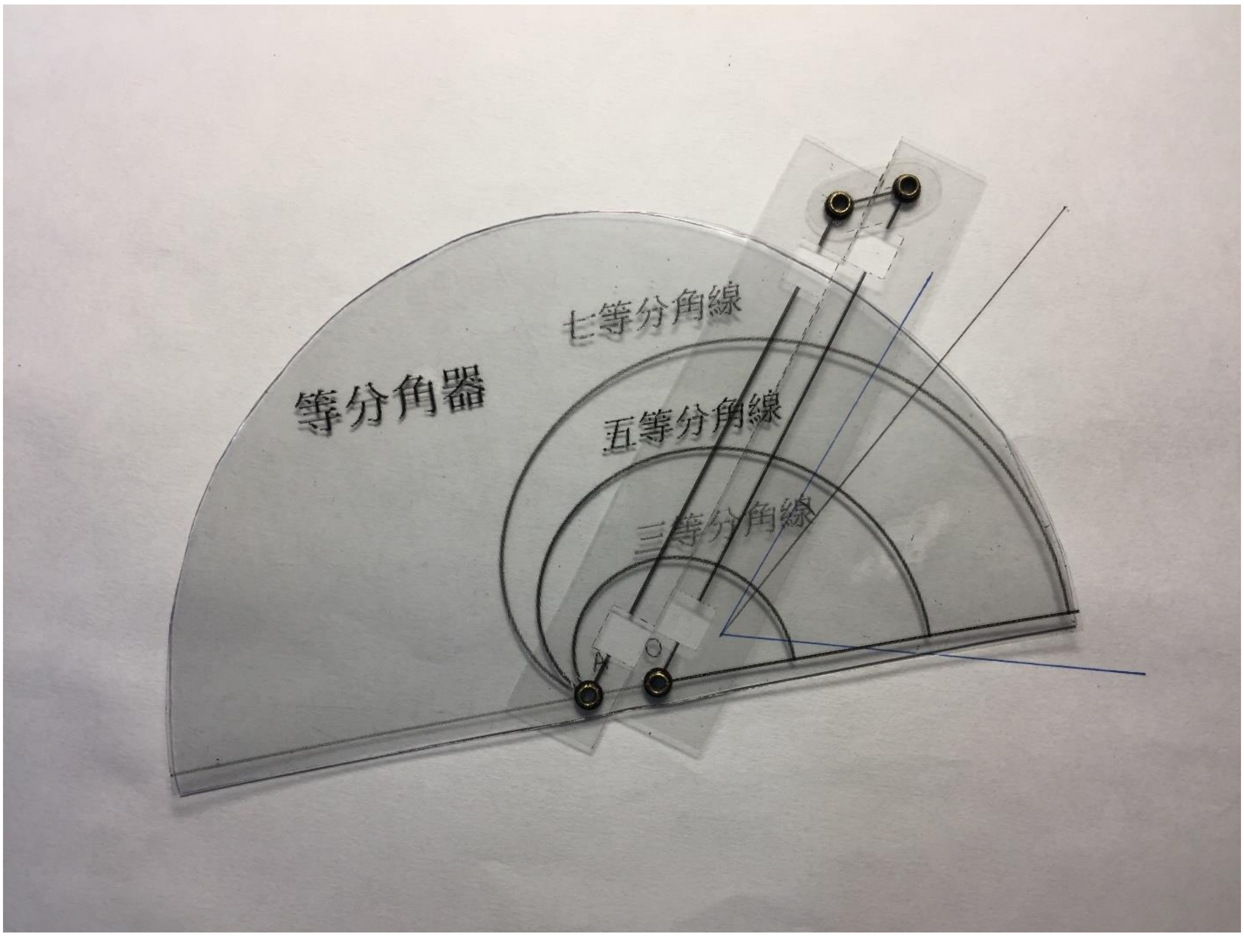
第十六屆旺宏科學獎

成果報告書



參賽編號：SA16-632

作品名稱：「曲」之不盡，「分」之不竭

—等分角曲線探討與應用

姓　　名：羅嵩皓

關 鍵 字：三等分角問題、等分角曲線、等分角器

目錄

摘要 —— 02

壹、研究動機 —— 02

貳、研究目的 —— 02

參、研究設備及器材 —— 03

肆、研究過程與方法 —— 04

研究架構 —— 04

一、文獻探討 —— 05

二、2^n+1等分角曲線 —— 06

三、實數等分角曲線 —— 09

四、等分角曲線的應用 —— 11

(一) 等分角器 —— 11

(二) 作三次方程式的三相異實根 —— 17

伍、結論 —— 18

陸、參考文獻 —— 19

柒、附錄 —— 20

一、 $2n+1$等分角曲線 —— 20

二、 整數等分角曲線 —— 23

三、 餘弦函數倍角公式推導 —— 27

四、 化圓為方問題 —— 29

摘要

本研究中，主要在探討並應用等分角曲線。先從著名的**帕斯卡蝸線(Limaçon de Pascal)**看起，觀察它的作圖原理以及性質加以改良並推廣，成功利用組合等腰三角形作出2^n+1**等分角曲線**，並以等腰三角形不同的排列方式作出了$2n+1$**等分角曲線**；然而在研究中我發現將正弦定理證明極座標方程之方法加以應用，即可得到任意實數(大於 1 之實數)等分任意角的**實數等分角曲線**。此一突破省去了原研究中多個等腰三角形排列與堆疊的討論，使此等分角曲線族更加完善，也是歷史上將等分角曲線研究推上實數界的里程碑。最後，我將曲線應用在**等分角器、作出三次方程式的三相異實根**、餘弦函數的倍角公式以及**化圓為方問題**。

壹、研究動機

在十九世紀法國數學家汪策爾(Pierre Wantzel, 1814~1848 A. D.)以伽羅瓦定理證明「以尺規作圖三等分任意角」的不可能性之後，此問題即成為各個「數學人」的一種禁忌研究：凡是提到三等分角問題(The Problem of Angle Trisection)便產生質疑與排斥。儘管如此，經過兩千多年的考驗，數學家嘗試以各種方式解決，依然產生了許多有趣的結果。其中最令我驚嘆的便是「**曲線法**」。在翻閱徐道寧先生所著的《三等分角問題》一書時，發現不少科學家以自己發明的曲線解決了這亙古難解的問題。對此結果我相當的驚訝，尺規作圖雖然不可行，但透過曲線的輔助便迎刃而解。因此，我從作圖原理較為簡單的帕斯卡蝸線(Limaçon de Pascal)著手研究，並試著**發明自己的等分角曲線，實際運用**在其他問題上。

貳、研究目的

一、由帕斯卡蝸線推廣至2^n+1等分角曲線

二、由正弦定理證明法，導出實數等分角曲線

三、等分角曲線的應用

(一) 等分角器

(二) 作出三次方程式的三相異實根

(三) 餘弦函數的倍角公式

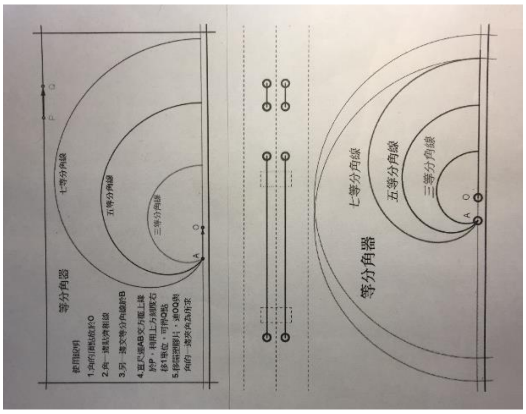
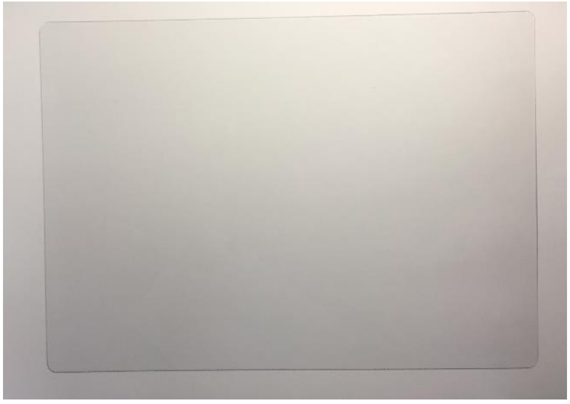
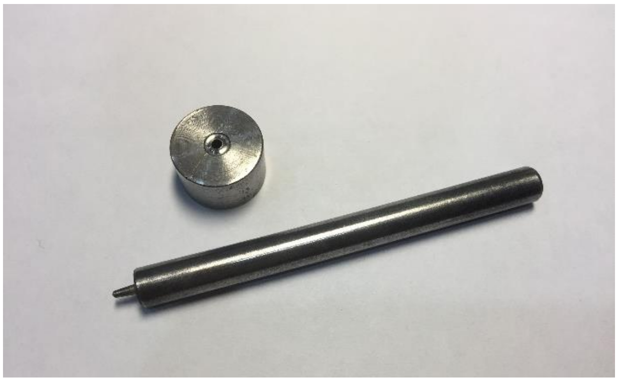
(四) 化圓為方問題

參、研究設備及器材

一、軟體工具

數學軟體 GeoGebra

二、硬體器材

	
印有等分角曲線的透明塑膠片	透明塑膠軟墊
	
雞眼釦	打孔工具
	
捲尾工具	槌子

肆、研究過程與方法

研究架構

帕斯卡蝸線

↓ 堆疊更多等腰三角形

2^n+1等分角曲線

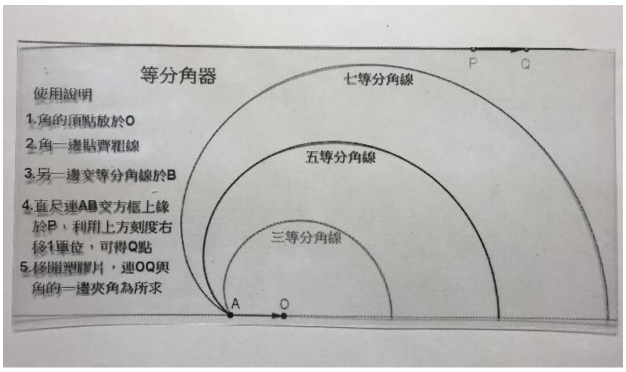
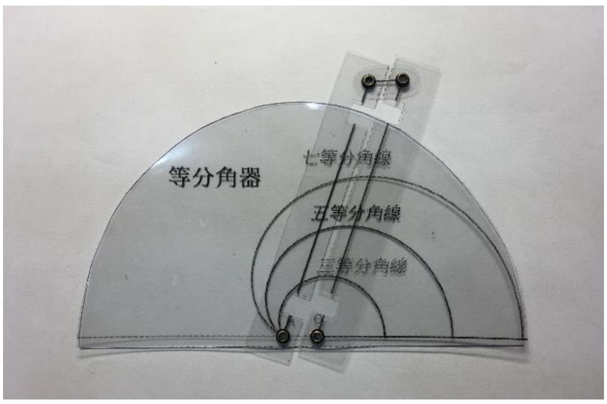
↓ 由正弦定理證明法推導

實數等分角曲線

↓ 應用

等分角器 →(應用) 作三次方程式之根

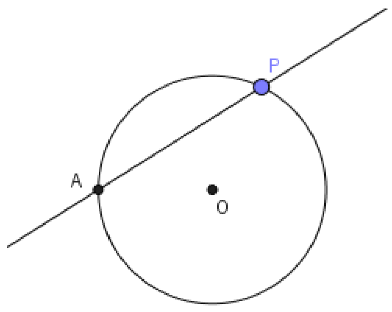
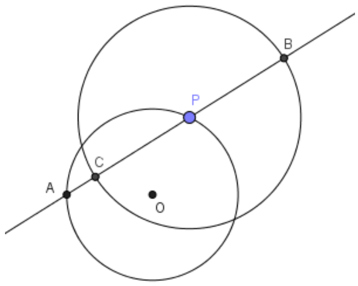
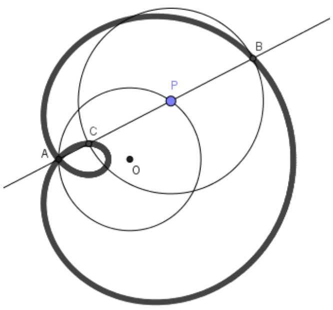
其他

簡易版等分角器	精裝版等分角器
	

一、文獻探討

帕斯卡蝸線(Limaçon de Pascal)

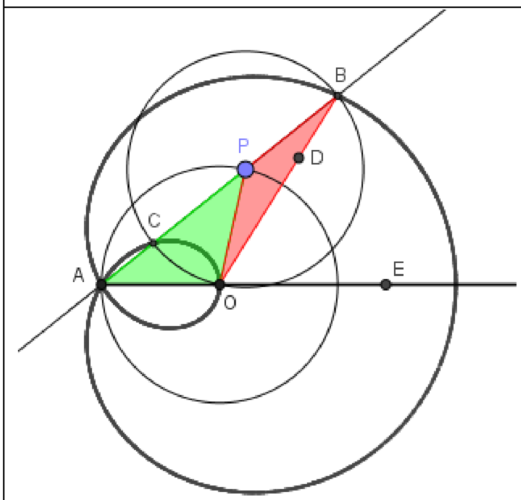
(一) 定義及作圖：

<table>
<tr><td>(a)
</td><td>(b)
</td><td>(c)
</td></tr>
<tr><td colspan="3">(a) 已知平面上以定點 O 為圓心之圓 O，其半徑為 a。取圓上一定點 A。
在圓上另取一動點 P 並作 $\overleftrightarrow{AP}$ 。
(b) 以 P 為圓心 b 為半徑畫圓，令此圓與 $\overleftrightarrow{OP}$ 交於 B、C。
(c) 隨著 P 的移動，B、C 所形成之軌跡即為帕斯卡蝸線。</td></tr>
</table>

(二) 三等分任意角性質與證明：

考慮 $a = b$ 時(此時 a, b 作為等腰三角形之兩腰，方有三等分任意角性質)

欲三等分 $\angle DOE$ ，作帕斯卡蝸線使 $\overrightarrow{OD}$ 交其於 B，連接 $\overline{OB}, \overline{OA}$ ，$\angle OBA$ 即為所求。

<table>
<tr><td>圖形</td><td>證明</td></tr>
<tr><td></td><td>作$\overrightarrow{AO}$, 並連接$\overline{OP}, \overline{OB}$用以作出
等腰$\triangle OPA, \triangle POB$
令$\angle OBA=\alpha$
則$\angle POB=\angle OBA=\alpha$
$\angle PAO=\angle OPA=2\alpha$
得$\angle DOE=\angle OBA+\angle PAO=3\alpha$
故$\angle OBA=\frac{1}{3}\angle DOE$</td></tr>
</table>

觀察上述的證明，可以發現三等分角性質是基於兩個等腰三角形排列而得。因此，在研究中我先將重心放到**等腰三角形的堆疊與排列法**上，打造出各式不同的等分角曲線。

二、2^n+1等分角曲線

(一) 概念流程圖：

帕斯卡蝸線

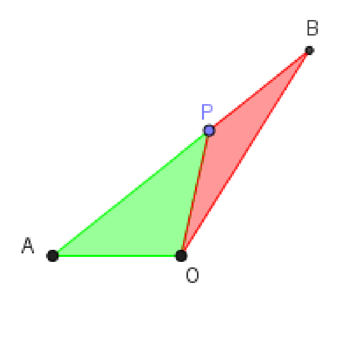
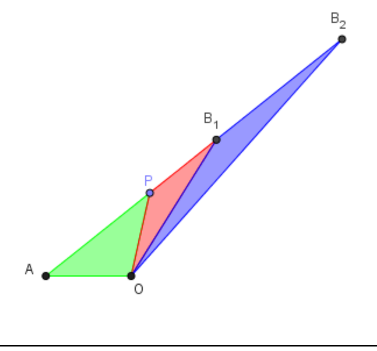
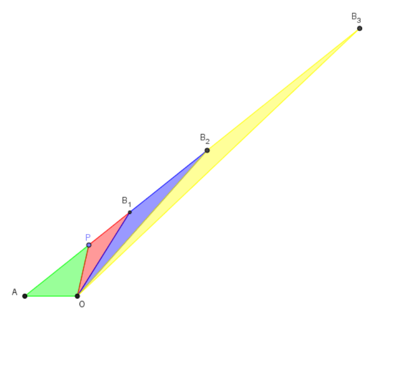
↓ 堆疊更多等腰三角形

2^n+1等分角曲線

↓ 由幾何定義的三角形排列觀察，表示$\overline{OB_n}$作為幅角

寫出2^n+1等分角曲線之極座標方程

(二) 作圖想法：

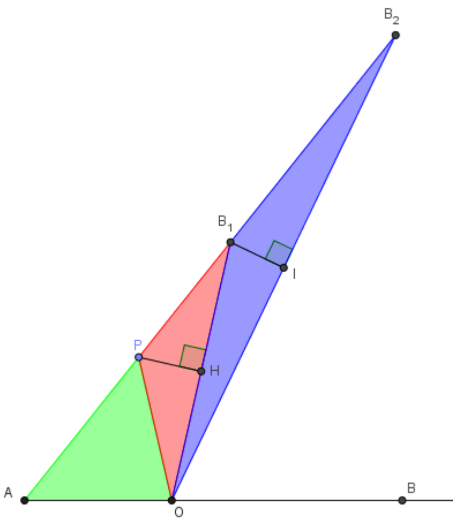
(a)	(b)	(c)
		

(a) 帕斯卡蝸線三等分角證明之等腰三角形排列

(b) 以紅色三角形的底作為藍色三角形的腰，堆疊出五等分角曲線之等腰三角形排列情形

(c) 以藍色三角形的底作為黃色三角形的腰，堆疊出九等分角曲線之等腰三角形排列情形

(三) 極座標幅角推導

<table>
<tr><td>圖形</td><td>證明</td></tr>
<tr><td>
</td><td>以五等分角曲線為例：
分別過P,B_1作$\overline{PH}\perp\overline{OB_1},\overline{B_1I}\perp\overline{OB_2}$
令$\angle B_2OB=\theta$
則$\angle OB_2B_1=\frac{1}{5}\theta,\angle OB_1P=\frac{2}{5}\theta$
已知$\overline{OP}=\overline{PB_1}=1$
則$\overline{OB_1}=2\overline{B_1H}=2\overline{PB_1}\cos\angle OB_1P=2\cos(\frac{2}{5}\theta)$
又$\overline{OB_1}=\overline{B_1B_2}=2\cos(\frac{2}{5}\theta)$
故$\overline{OB_2}=2\overline{B_2I}=2\overline{B_1B_2}\cos\angle OB_2B_1$
$=4\cos(\frac{1}{5}\theta)\cos(\frac{2}{5}\theta)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">進一步化簡
$$4\cos(\frac{1}{5}\theta)\cos(\frac{2}{5}\theta)$$ $$=\frac{4\sin(\frac{1}{5}\theta)\cos(\frac{1}{5}\theta)\cos(\frac{2}{5}\theta)}{\sin(\frac{1}{5}\theta)}$$ $$=\frac{\sin(\frac{4}{5}\theta)}{\sin(\frac{1}{5}\theta)}=\frac{\sin(\theta-\frac{1}{5}\theta)}{\sin(\frac{1}{5}\theta)}=\sin\theta\cot(\frac{1}{5}\theta)-\cos\theta$$
由此可知，若以 O 為極點，$\overline{OB_2}$ 為幅角，極座標方程式可表為
$$r(\theta)=4\cos(\frac{1}{5}\theta)\cos(\frac{2}{5}\theta)=\sin\theta\cot(\frac{1}{5}\theta)-\cos\theta$$</td></tr>
</table>

同理可證：

以 O 為極點，$\overline{OB_n}$ 為幅角，極座標方程式可表為

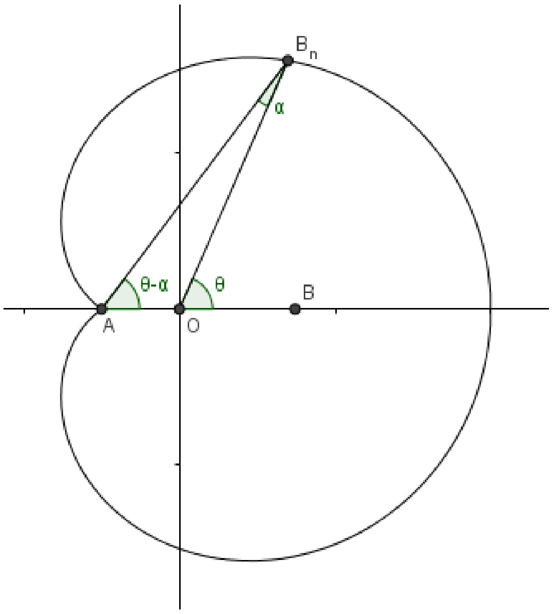
$$r(\theta)=2^n\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{2^{k-1}}{2^n+1}\theta)=\frac{2^n\sin(\frac{1}{2^n+1}\theta)\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{2^{k-1}}{2^n+1}\theta)}{\sin(\frac{1}{2^n+1}\theta)}$$

$$=\frac{\sin(\frac{2^n}{2^n+1}\theta)}{\sin(\frac{1}{2^n+1}\theta)}=\frac{\sin(\theta-\frac{1}{2^n+1}\theta)}{\sin(\frac{1}{2^n+1}\theta)}=\sin\theta\cot(\frac{1}{2^n+1}\theta)-\cos\theta$$

此時，$B_n[r,\theta]\in r(\theta)=2^n\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{2^{k-1}}{2^n+1}\theta)=\sin\theta\cot(\frac{1}{2^n+1}\theta)-\cos\theta$

(四) 極座標定義：

考慮 $r(\theta)=\sin\theta\cot(\frac{1}{2^n+1}\theta)-\cos\theta$， $\theta\in[-\pi,\pi]$

<table>
<tr><td>圖形</td><td>證明</td></tr>
<tr><td>
</td><td>令$O[0,0],A[1,\pi],B_n\in r(\theta)$
且B為x軸正向上一點
連接$\overline{AB_n},\overline{OB_n}$
令$\angle B_nOB=\theta,\angle OB_nA=\alpha,\angle B_nAO=\theta-\alpha$
已知$\overline{OA}=1,\overline{OB_n}=\sin\theta\cot(\frac{1}{2^n+1}\theta)-\cos\theta$
由正弦定理：
$\frac{\sin\angle B_nAO}{\overline{OB_n}}=\frac{\sin\angle OB_nA}{\overline{OA}}$
$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta\cot(\frac{1}{2^n+1}\theta)-\cos\theta}=\frac{\sin\alpha}{1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">經化簡：
$\sin\theta\cot\alpha-\cos\theta=\sin\theta\cot(\frac{1}{2^n+1}\theta)-\cos\theta$
$\cot\alpha=\cot(\frac{1}{2^n+1}\theta)$
由於餘切函數在 $0<\theta<\pi$ 時嚴格遞減，故 $\alpha=\frac{1}{2^n+1}\theta$
$\forall B_n\in r(\theta),\angle OB_nA=\frac{1}{2^n+1}\angle B_nOB$
故定義 $r(\theta)=\sin\theta\cot(\frac{1}{2^n+1}\theta)-\cos\theta$， $\theta\in[-\pi,\pi]$為 2^n+1等分角曲線</td></tr>
</table>

三、實數等分角曲線

(一) 概念流程圖：

2^n+1等分角曲線

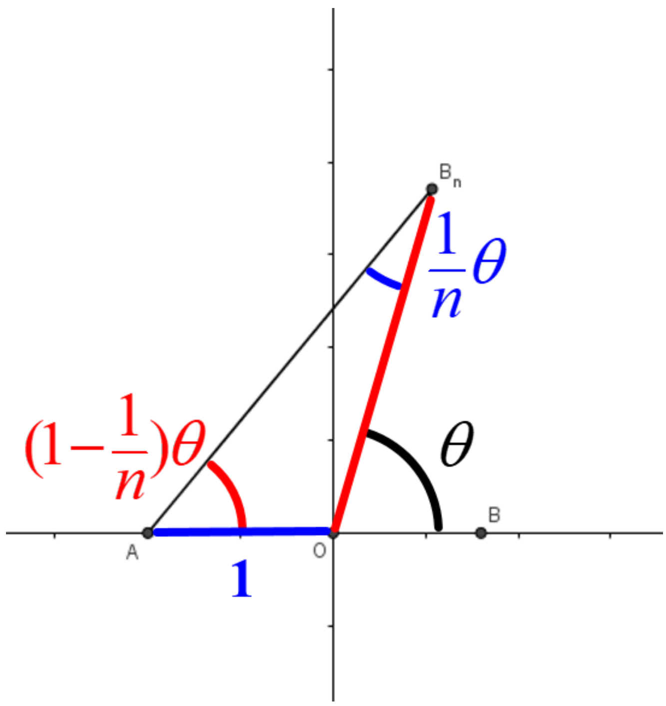
↓ 由正弦定理證明法推導

實數等分角曲線

↓

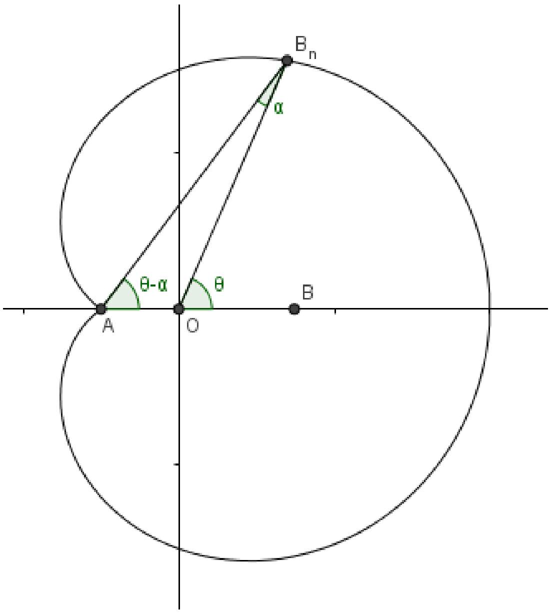
寫出實數等分角曲線之極座標方程

(二) 極座標幅角推導

圖形	證明
	考慮$\triangle OAB_n$ 其中$\overline{OA}=1$ $\angle O$之外角 $=\angle BOB_n=\theta$ $\angle OB_nA=\frac{1}{n}\theta$ 則$\angle B_nAO=(1-\frac{1}{n})\theta$ 由正弦定理： $\frac{\sin\angle B_nAO}{\overline{OB_n}}=\frac{\sin\angle OB_nA}{\overline{OA}}$ $\frac{\sin(1-\frac{1}{n})\theta}{\overline{OB_n}}=\frac{\sin\frac{1}{n}\theta}{1}$ $\overline{OB_n}=\sin\theta\cot(\frac{1}{n}\theta)-\cos\theta$

(三) 極座標定義：

考慮 $r(\theta)=\sin\theta\cot(\frac{1}{n}\theta)-\cos\theta$， $n>1$， $\theta\in[-\pi,\pi]$

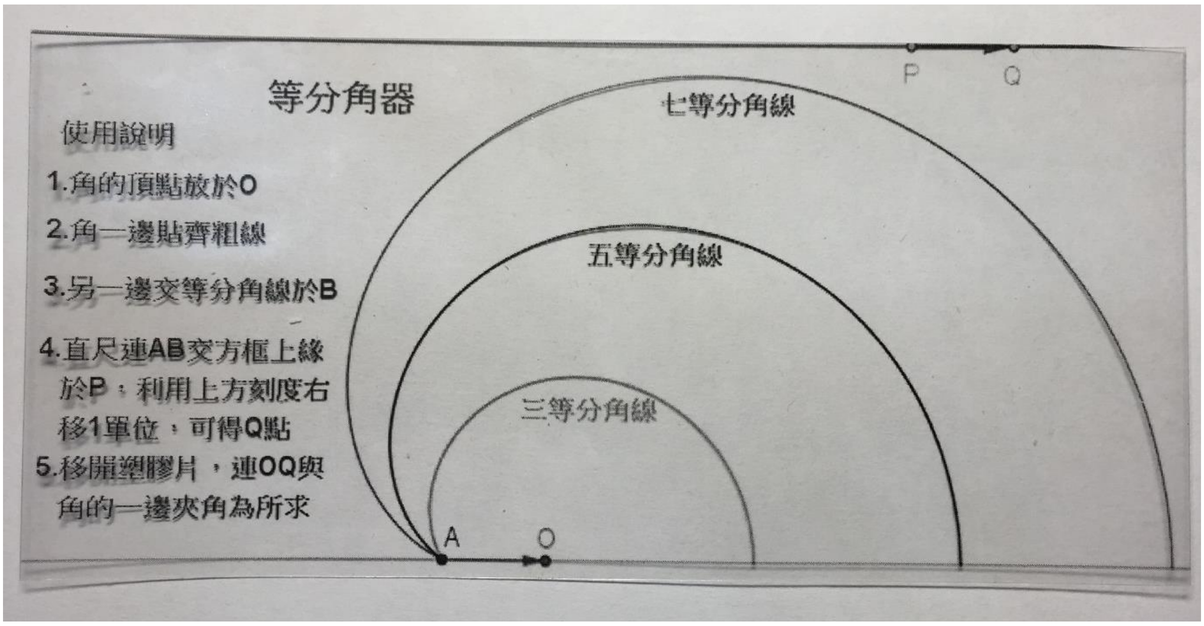
<table>
<tr><td>圖形</td><td>證明</td></tr>
<tr><td>


</td><td>
令$O[0,0], A[1,\pi], B_n\in r(\theta)$
且B為x軸正向上一點
連接$\overline{AB_n},\overline{OB_n}$
令$\angle B_nOB=\theta,\angle OB_nA=\alpha,\angle B_nAO=\theta-\alpha$
已知$\overline{OA}=1,\overline{OB_n}=\sin\theta\cot(\frac{1}{n}\theta)-\cos\theta$
由正弦定理：
$\frac{\sin\angle B_nAO}{\overline{OB_n}}=\frac{\sin\angle OB_nA}{\overline{OA}}$
$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta\cot(\frac{1}{n}\theta)-\cos\theta}=\frac{\sin\alpha}{1}$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
經化簡：
$\sin\theta\cot\alpha-\cos\theta=\sin\theta\cot(\frac{1}{n}\theta)-\cos\theta$
$\cot\alpha=\cot(\frac{1}{n}\theta)$
由於餘切函數在 $0<\theta<\pi$ 時嚴格遞減，故 $\alpha=\frac{1}{n}\theta$
$\forall B_n\in r(\theta),\angle OB_nA=\frac{1}{n}\angle B_nOB$
故定義 $r(\theta)=\sin\theta\cot(\frac{1}{n}\theta)-\cos\theta$， $\theta\in[-\pi,\pi]$為實數等分角曲線
</td></tr>
</table>

四、等分角曲線的應用

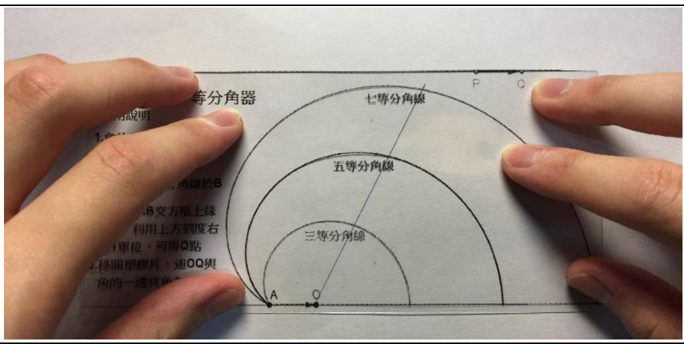
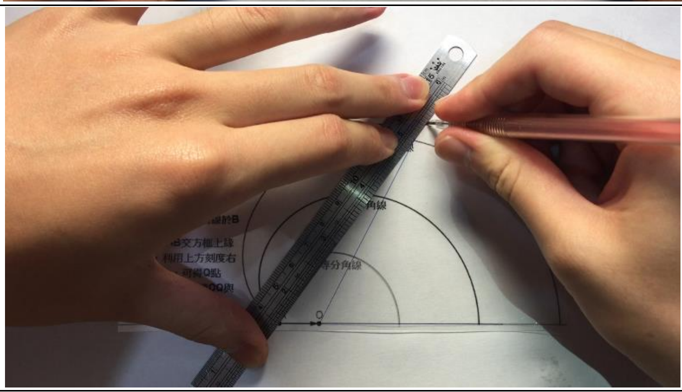
(一) 等分角器

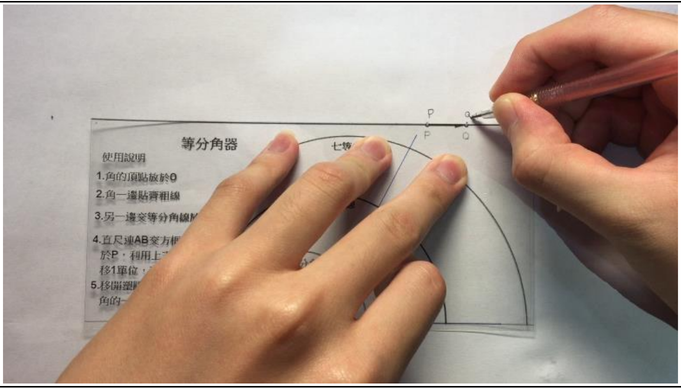
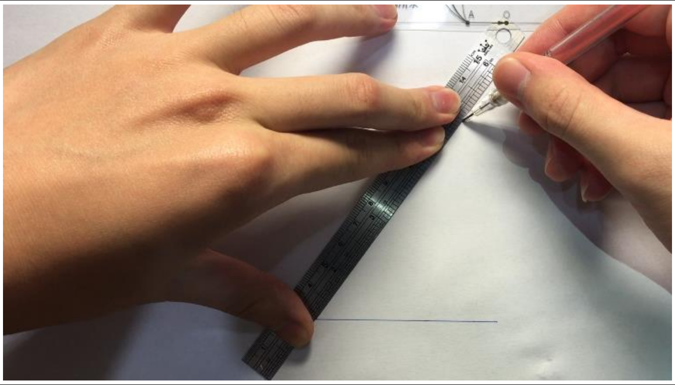
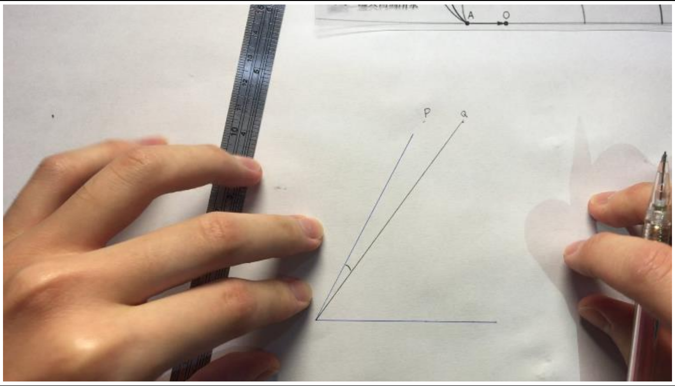
控制曲線極座標的角度使$\theta\in[0,\pi]$，在將其印製於塑膠片上做出如量角器一般的「等分角器」，如下圖：



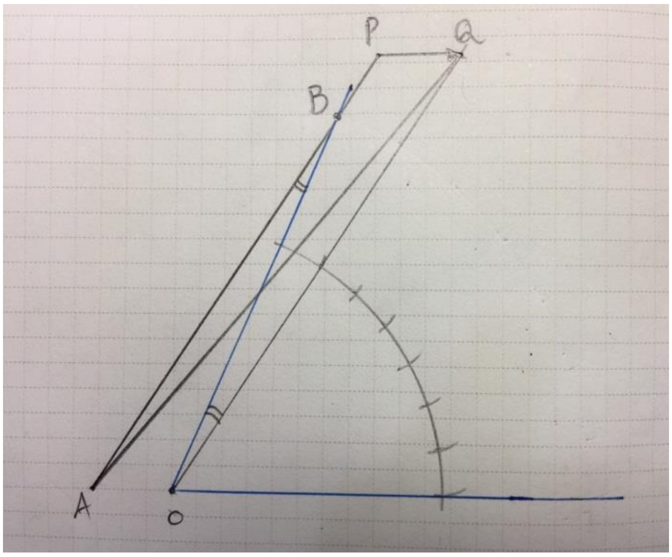
1. 簡易版等分角器

(1)操作流程(以七等分角為例)：

Step	圖片	說明
1		將等分角器上的 O 點對齊欲等分角之頂點，並使粗線與其一邊貼齊。
2		另一邊與等分角曲線交於一點，令為 B。以直尺連接 $\overline{AB}$ 交等分角器上緣黑線於一點 P。

3		平移塑膠片，使 P 重合，依箭頭可得 Q。
4		移開塑膠片，連接$\overline{OQ}$。
5		所得之小角即為所求。

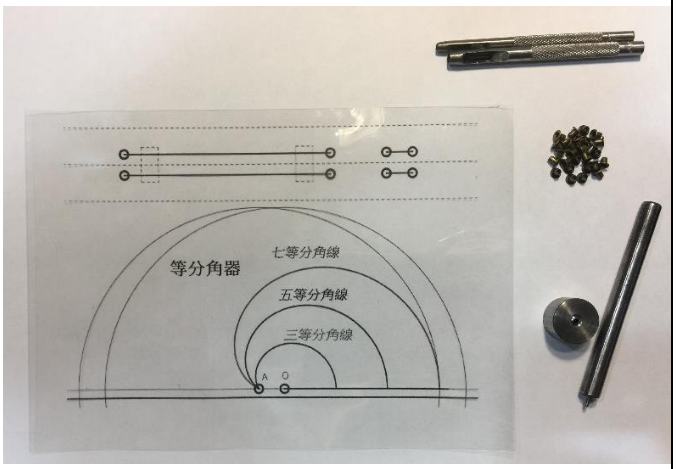
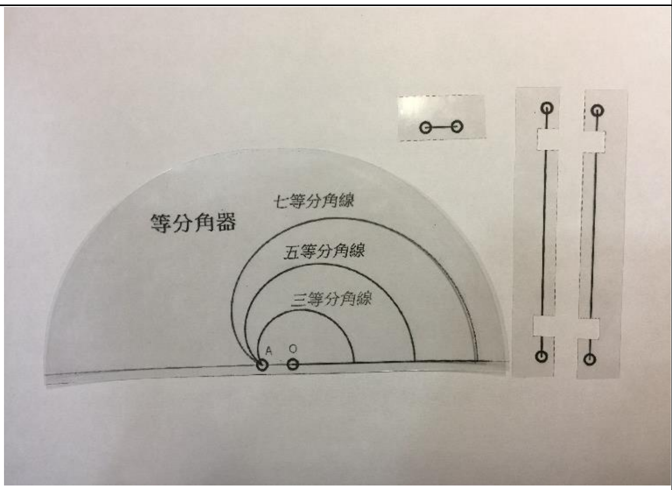
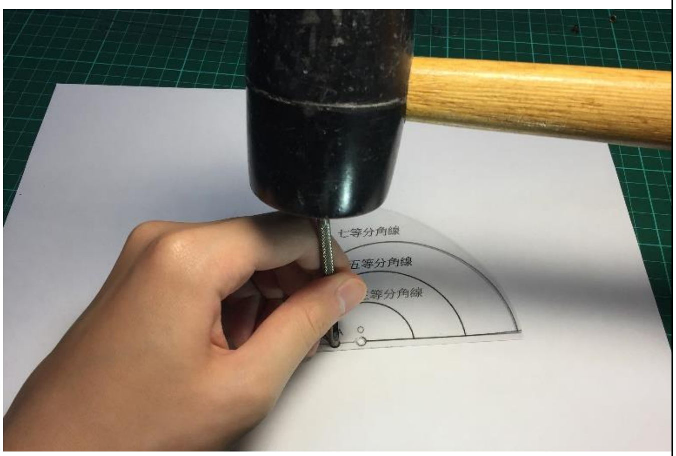
(2)原理：

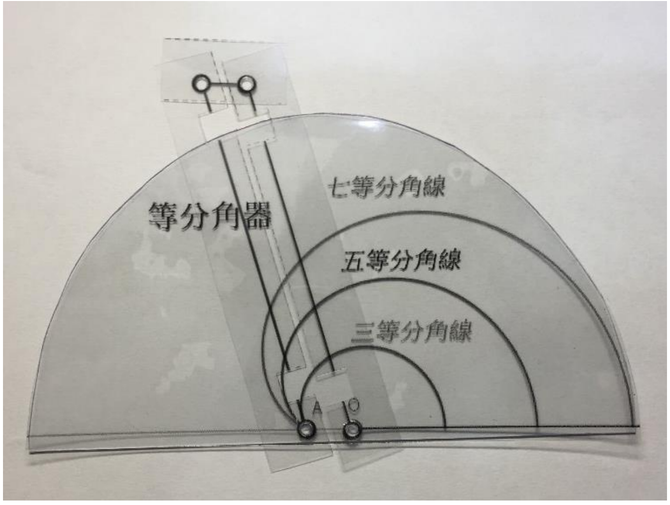
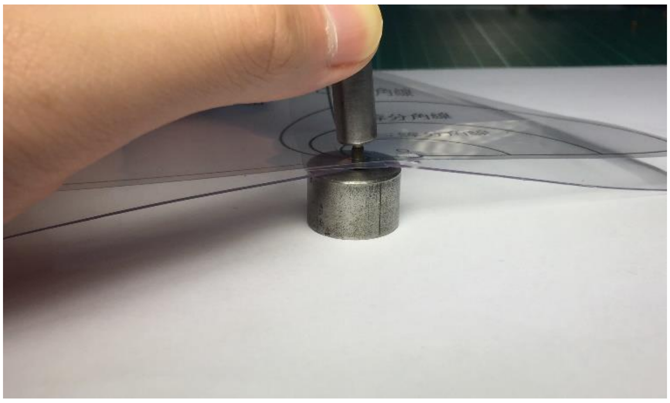
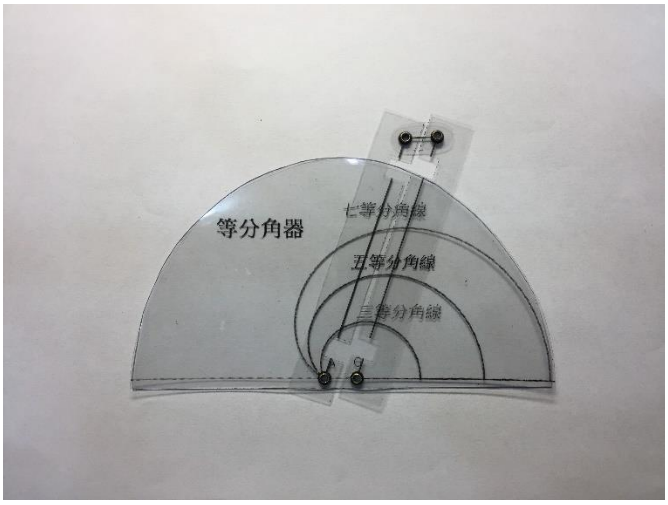
圖片	說明
	透過 Step2 中作出之 B 點，即可得∠OBA 為所求。為作圖之方便與整齊性，利用$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AO}$，實則作出$\overleftrightarrow{AB}$平行$\overleftrightarrow{OQ}$。操作後便可得∠BOQ=∠OBA (內錯角相等)，故∠BOQ 即為所求。

2. 精裝版等分角器

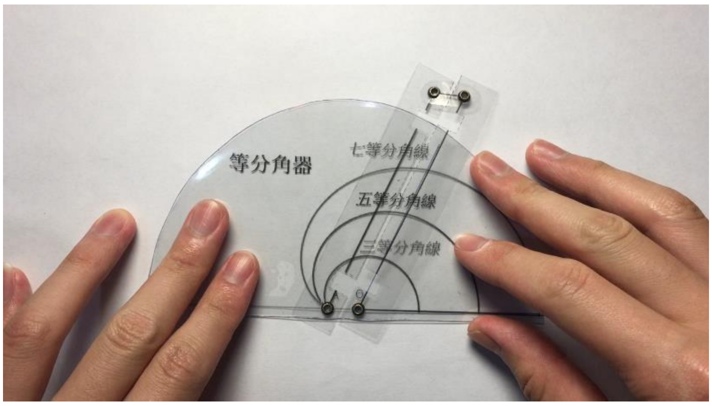
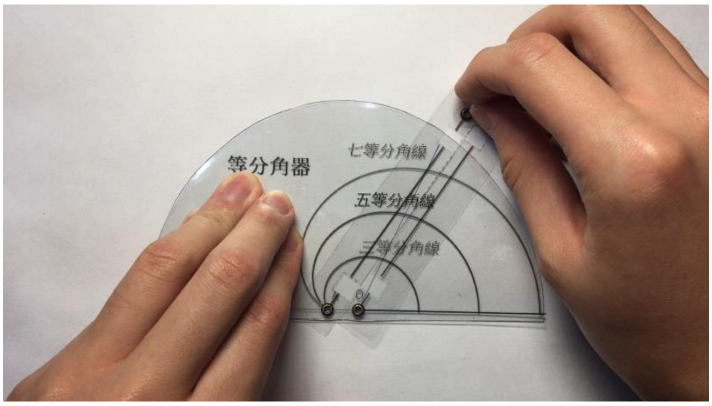
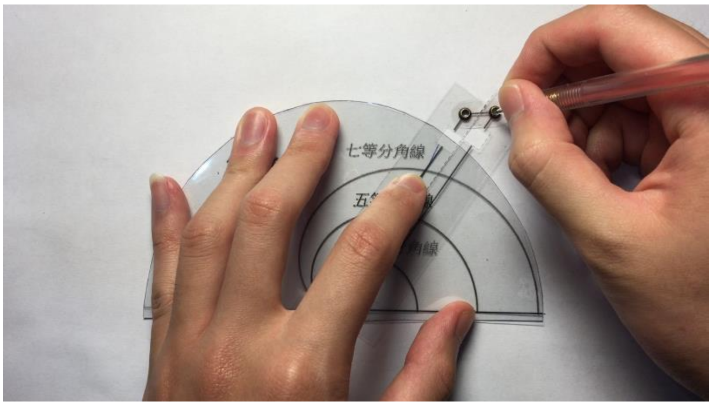
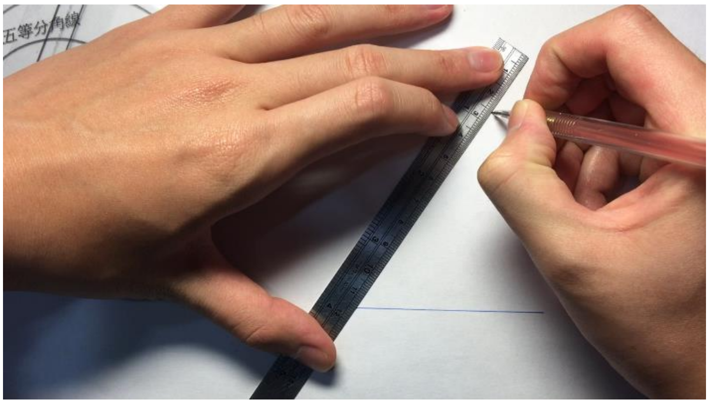
為了改善平移等分角器所造成的人為誤差，我利用工具與材料直接製成▱APQO，用以取代平移的步驟，增加等分角器操作的實用性與方便性。

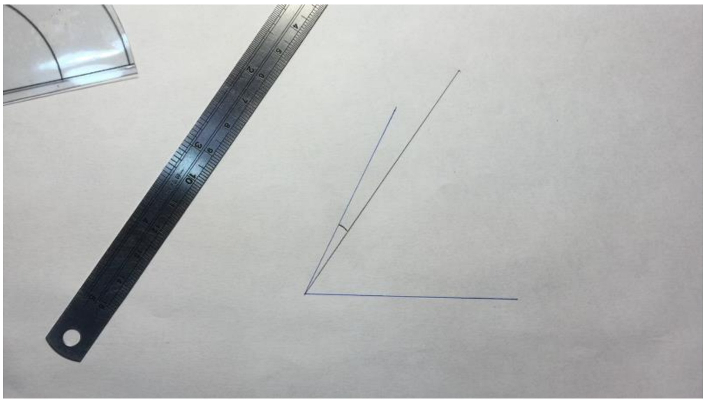
(1) 製作方法：

Step	圖片	說明
1		準備材料： 透明塑膠片及軟墊、雞眼鈕、打孔工具、捲尾工具
2		依虛線將塑膠片上之圖形剪下。
3		以打孔工具在圓圈處打孔(孔徑2.5mm)。

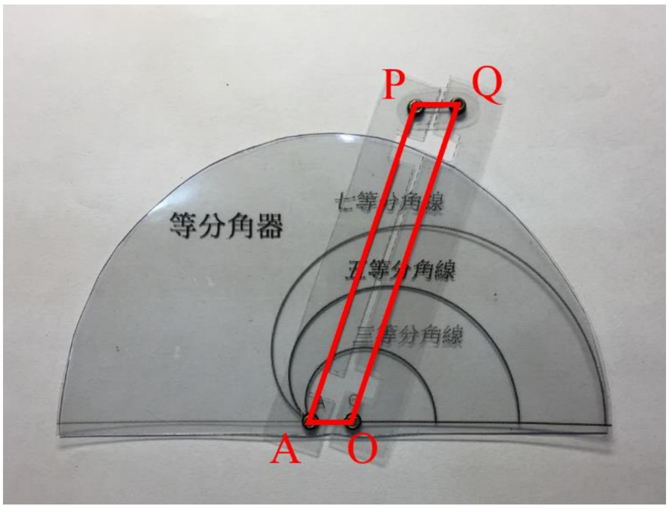
4		將材料依上下順序擺放正確。 由上至下： O臂 $\rightarrow$ 主體 *and* $\overline{\mathrm{PQ}} \rightarrow A$臂 $\rightarrow$ 軟墊
5		將雞眼鈕穿過孔洞，並置於捲尾台上捲尾。
6		等分角器完成。

(2) 操作流程(以七等分角為例)：

Step	圖片	說明
1		將等分角器上的 O 點對齊欲等分角之頂點，並使粗線與其一邊貼齊。
2		另一邊與等分角曲線交於一點，令為 B。滑動 $\overline{PQ}$ 使 $\overline{AP}$ 交於 B。
3		以筆在 Q 上作一點。
4		移開等分角器，連接 $\overline{OQ}$。

5		所得之小角即為所求。

(3)原理：

圖片	說明
	在簡易版等分角器中以平移 $\overline{AP}$ 作出 $\overline{OQ}$，為減少人為操作的誤差，直接作出▱APQO 取代。其等分角原理同簡易版。

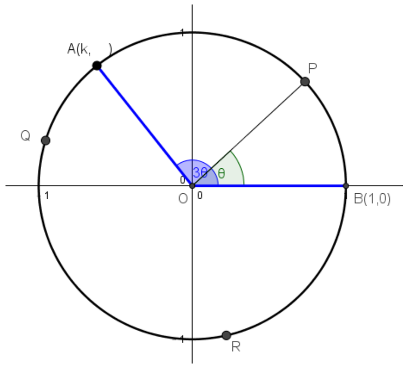
（二）用等分角器作三次方程式的三實根

型 1、求作 $x^3-ax=b$ 的三實根

(註: $x^3-ax=b$有三相異實根 $\Leftrightarrow a>0$且$4a^3\ge 27b^2$)

步驟 1： 令 $x=\sqrt{\dfrac{4a}{3}}y$ 帶入 $x^3-ax=b$ 可得 $4y^3-3y=\dfrac{3b}{a}\sqrt{\dfrac{3}{4a}}$

步驟 2： 利用尺規作圖作出 $\left|\dfrac{3b}{a}\sqrt{\dfrac{3}{4a}}\right|$，令 $k=\dfrac{3b}{a}\sqrt{\dfrac{3}{4a}}$



步驟 3： 如右圖，取單位圓上 $A(k,y)$ 、B(1, 0)，

此時 $\angle AOB=3\theta$ (b 的正負決定為銳角或鈍角)

步驟 4： 由三等分角器可做出 θ

可得 $4y^3-3y=\dfrac{3b}{a}\sqrt{\dfrac{3}{4a}}$ 的三實根為

單位圓上點 P、Q、R 的 x 座標，

其中 $\angle POB=\theta$ 、 $\angle QOB=\theta+120^0$ 、

$\angle ROB=\theta+240^0$

步驟 5： 由 $x=\sqrt{\dfrac{4a}{3}}y$ 可得 $x^3-ax=b$ 的三實根

說明： 1. 當 $4a^3\ge 27b^2$ 時，可知 $\left|\dfrac{3b}{a}\sqrt{\dfrac{3}{4a}}\right|\le 1\therefore \cos\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{3b}{a}\sqrt{\dfrac{3}{4a}}$

(二)$\because 4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos 3\theta$

$\therefore y_1=\cos\theta, y_2=\cos(\theta+120^0), y_3=\cos(\theta+240^0)$

為方程式 $4y^3-3y=\dfrac{3b}{a}\sqrt{\dfrac{3}{4a}}$ 的三實根

型 2、 $x^3+cx^2+dx=e$

利用平移 $x+\dfrac{c}{3}$

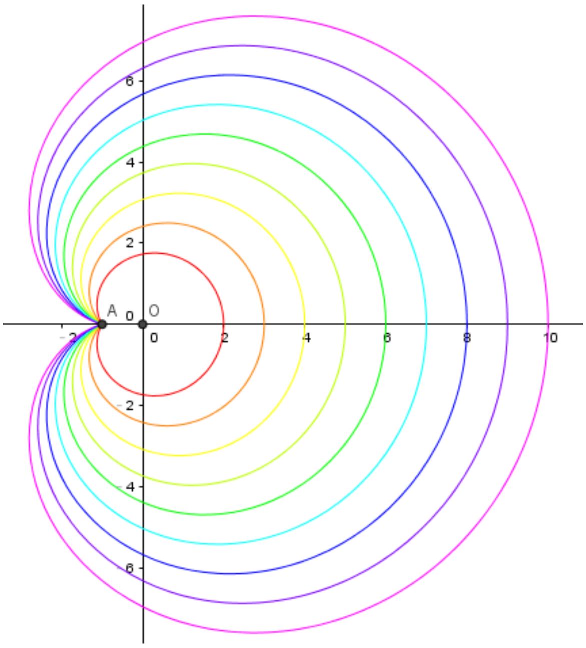
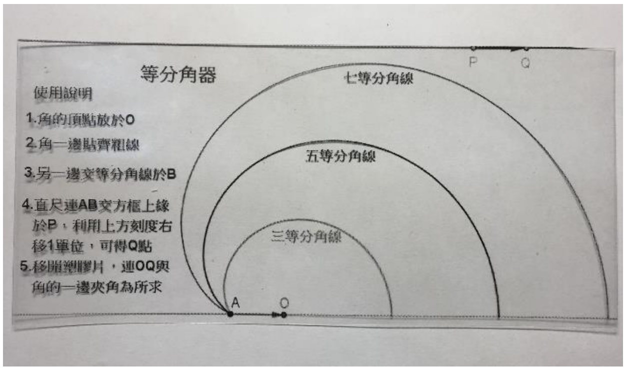
可得 $\left(x+\dfrac{c}{3}\right)^3+\left(\dfrac{c^2}{3}+d\right)\left(x+\dfrac{c}{3}\right)=e-\dfrac{c^3}{9}+\dfrac{cd}{3}$

作出 $x'^3-a'x'=b'$ 的形式

再利用型 1 的方法亦可作出 x

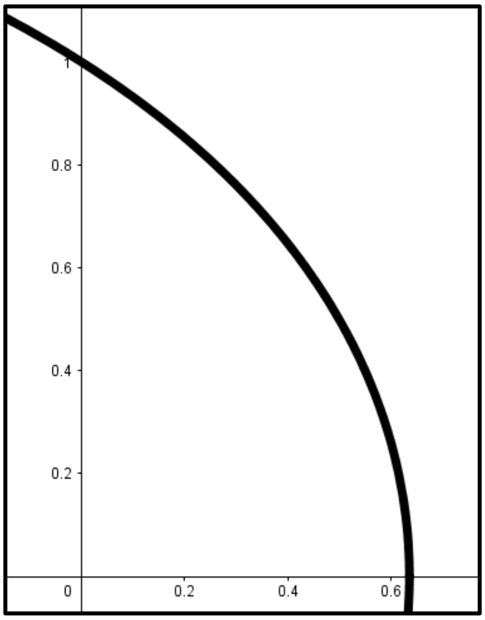
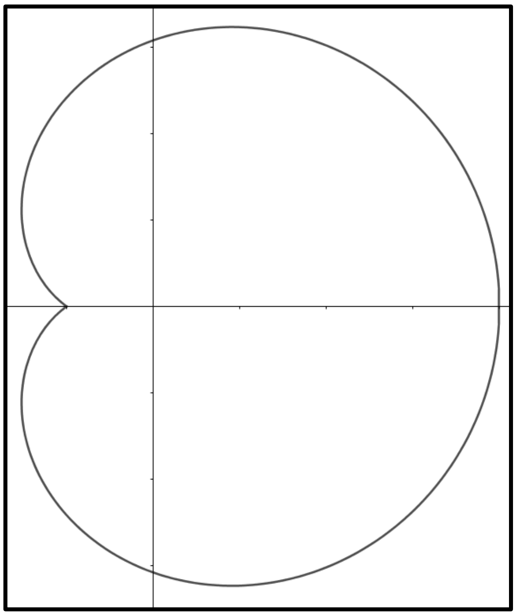
伍、結論

一、研究結果

<table>
<tr><th></th><th>內容</th><th>備註</th></tr>
<tr><td>等分角曲線</td><td>n 等分角曲線</td><td>$n \in \mathbb{R}, n > 1$</td></tr>
<tr><td>圖形</td><td>
</td><td>由內而外分別為
3~ 11 等分角曲線</td></tr>
<tr><td>極座標方程</td><td>$r(\theta) = \sin\theta \cot(\frac{1}{n}\theta) - \cos\theta$</td><td>$\theta \in [-\pi, \pi]$, $n > 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">應用</td><td>(一)等分角器：

</td><td></td></tr>
<tr><td>(二)作三次方程式之根</td><td></td></tr>
<tr><td>(三)餘弦函數倍角公式：
$$\cos(n\theta) = \frac{(\cos\theta + \sqrt{\cos\theta - 1})^n + (\cos\theta - \sqrt{\cos\theta - 1})^n}{2}$$</td><td>$n \in \mathbb{N}$
作法參見附錄 三、</td></tr>
<tr><td>(四)化圓為方問題</td><td>參見附錄 四、</td></tr>
</table>

二、討論

(一) 等分角曲線比較

<table>
<tr><th></th><th>割圓曲線</th><th>自製等分角曲線</th></tr>
<tr><td>圖形</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>解決問題</td><td>三等分角、化圓為方問題</td><td>三等分角、化圓為方問題</td></tr>
<tr><td>可等分角數</td><td>任意規矩數(可尺規作圖之數)</td><td>任意實數</td></tr>
<tr><td>角度限制</td><td>$0 < \theta \leq 90^{\circ}$</td><td>$0 < \theta \leq 180^{\circ}$</td></tr>
<tr><td>曲線個數</td><td>單一個曲線</td><td>無數個曲線形成的曲線族</td></tr>
<tr><td>操作難易</td><td>繁瑣，須配合長度比例作圖</td><td>簡單、一致</td></tr>
</table>

陸、參考文獻

一、蔣聲（1985）•形形色色的曲線•上海市：上海教育。

二、徐道寧（1994）•三等分角問題•新竹市：凡異。

柒、附錄

一、$2n+1$ 等分角曲線

(一) 概念流程圖：

2^n+1 等分角曲線

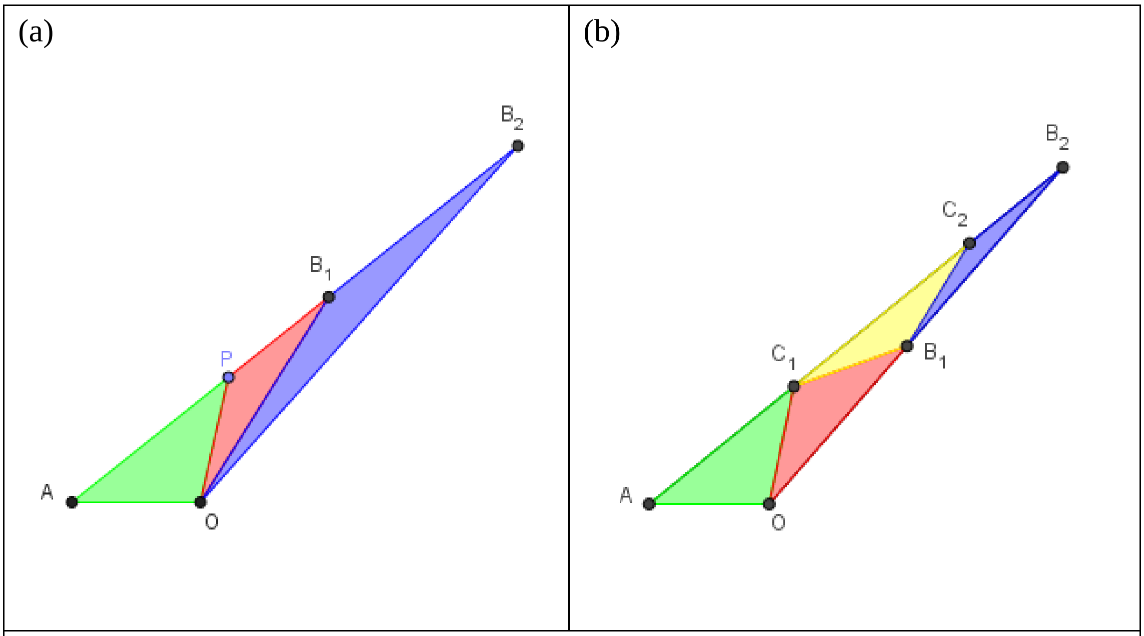
↓ 改變等腰三角形的排列方法

$2n+1$ 等分角曲線

↓ 由幾何定義的三角形排列觀察，表示 $\overline{OB_n}$ 作為幅角

寫出 $2n+1$ 等分角曲線之極座標方程

(二) 作圖想法：

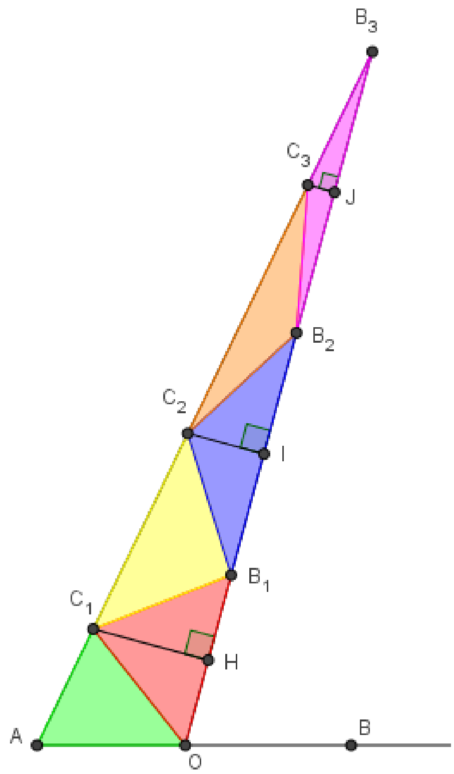


同為五等分角曲線時 (探討排列法時首兩個三角形皆為腰接腰)

(a) 2^n+1 等分角曲線排列法 (底接腰) 之等腰三角形排列

(b) $2n+1$ 等分角曲線排列法 (腰接腰) 之等腰三角形排列

(三) 極座標幅角推導

圖形	證明
	以七等分角曲線為例： 分別過C_1,C_2,C_3作$\overline{C_1H}\perp\overline{OB_1},\overline{C_2I}\perp\overline{B_1B_2},\overline{C_3J}\perp\overline{B_2B_3}$ 令$\angle B_3OB=\theta$ 則$\angle B_2B_3C_3=\frac{1}{7}\theta,\angle B_1B_2C_2=\frac{3}{7}\theta,\angle OB_1C_1=\frac{5}{7}\theta$ 已知$\overline{B_3C_3}=\overline{B_2C_2}=\overline{B_1C_1}=1$ 則$\overline{B_2B_3}=2\overline{B_3J}=2\overline{B_3C_3}\cos\angle B_2B_3C_3=2\cos(\frac{1}{7}\theta)$ $\overline{B_1B_2}=2\overline{B_2I}=2\overline{B_2C_2}\cos\angle B_1B_2C_2=2\cos(\frac{3}{7}\theta)$ $\overline{OB_1}=2\overline{B_1H}=2\overline{B_1C_1}\cos\angle OB_1C_1=2\cos(\frac{5}{7}\theta)$ 故$\overline{OB_3}=\overline{B_2B_3}+\overline{B_1B_2}+\overline{OB_1}$ $=2(\cos(\frac{1}{7}\theta)+\cos(\frac{3}{7}\theta)+\cos(\frac{5}{7}\theta))$ 若以 O 為極點，$\overline{OB_3}$ 為幅角，極座標方程式可表為 $r(\theta)=2(\cos(\frac{1}{7}\theta)+\cos(\frac{3}{7}\theta)+\cos(\frac{5}{7}\theta))$

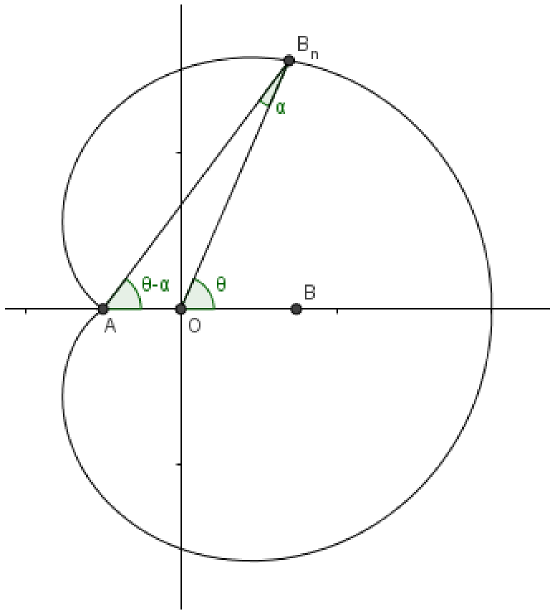
同理可證：

以 O 為極點，$\overline{OB_n}$ 為幅角，極座標方程式可表為

$$r(\theta)=\sum_{k=1}^{n}2\cos(\frac{2k-1}{2n+1}\theta)=2\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{2k-1}{2n+1}\theta)$$

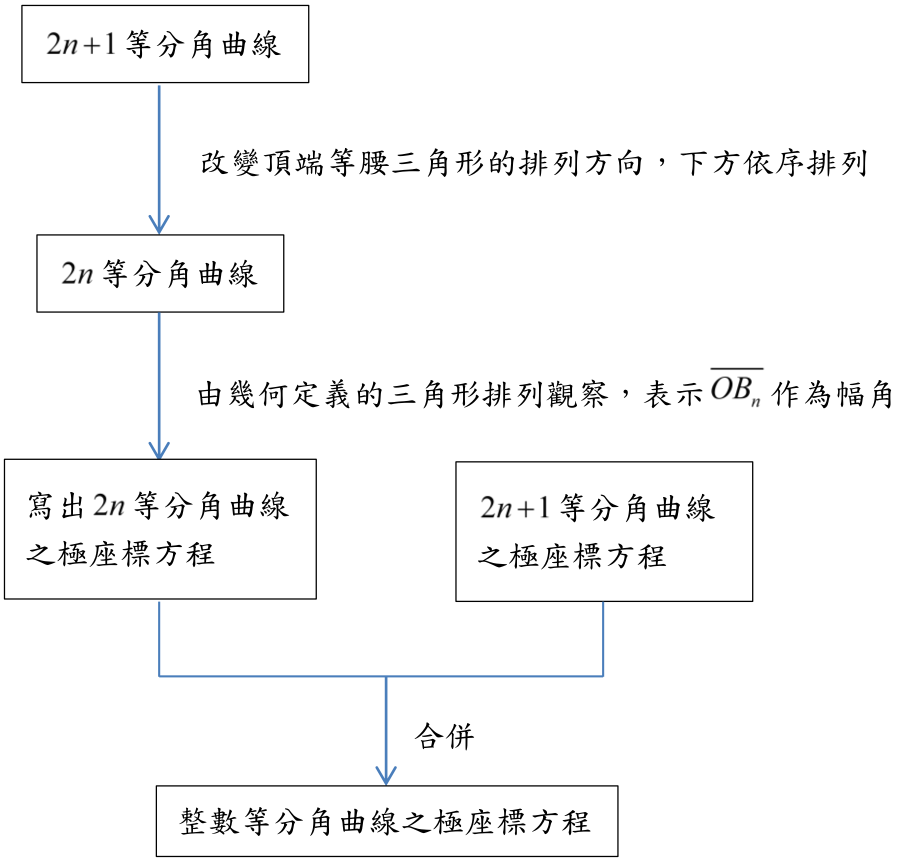
(四) 極座標定義：

考慮 $r(\theta)=2\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{2k-1}{2n+1}\theta)$， $\theta\in[-\pi,\pi]$

<table>
<tr><td>圖形</td><td>證明</td></tr>
<tr><td>
</td><td>令$O[0,0], A[1,\pi], B_n\in r(\theta)$
且B為x軸正向上一點
連接$\overline{AB_n},\overline{OB_n}$
令$\angle B_nOB=\theta,\angle OB_nA=\alpha,\angle B_nAO=\theta-\alpha$
已知$\overline{OA}=1,\overline{OB_n}=2\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{2k-1}{2n+1}\theta)$
由正弦定理：
$\frac{\sin\angle B_nAO}{\overline{OB_n}}=\frac{\sin\angle OB_nA}{\overline{OA}}$
$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{2\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{2k-1}{2n+1}\theta)}=\frac{\sin\alpha}{1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">經化簡：
$\sin\theta\cot\alpha-\cos\theta=2\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{2k-1}{2n+1}\theta)$
$\cot\alpha=\cot(\frac{1}{2n+1}\theta)$
由於餘切函數為一嚴格遞減函數，故 $\alpha=\frac{1}{2n+1}\theta$
$\forall B_n\in r(\theta),\angle OB_nA=\frac{1}{2n+1}\angle B_nOB$
故定義 $r(\theta)=2\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{2k-1}{2n+1}\theta)$， $\theta\in[-\pi,\pi]$ 為 $2n+1$ 等分角曲線</td></tr>
</table>

二、整數等分角曲線

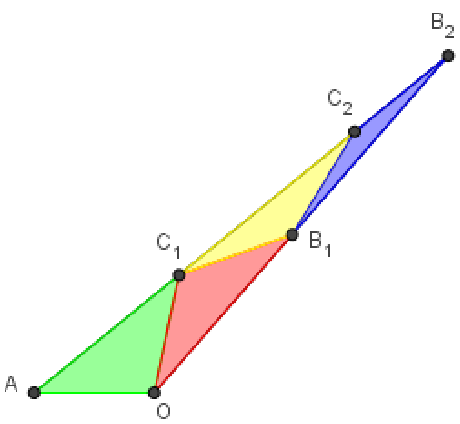
(一) 概念流程圖：



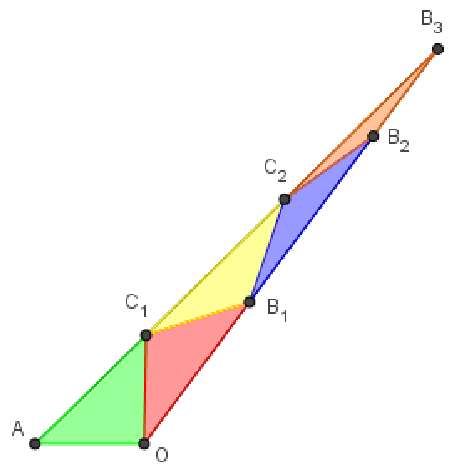
(二) $2n$ 等分角曲線

1. 作圖想法：

(a) 以五等分角曲線為例



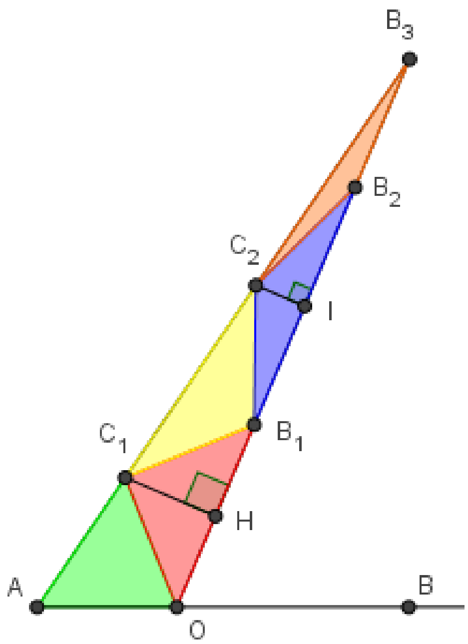
(b) 以六等分角曲線為例



(a) $2n+1$ 等分角曲線之等腰三角形排列 (頂端等腰三角形之底貼齊 $\overline{OB_n}$)

(b) $2n$ 等分角曲線之等腰三角形排列 (頂端等腰三角形之底貼齊 $\overline{AB_n}$)

2. 極座標幅角推導

圖形	證明
	以六等分角曲線為例： 分別過C_1,C_2作$\overline{C_1H}\perp\overline{OB_1},\overline{C_2I}\perp\overline{B_1B_2}$ 令$\angle B_3OB=\theta$ 則$\angle B_2B_3C_2=\frac{1}{6}\theta,\angle B_1B_2C_2=\frac{2}{6}\theta,\angle OB_1C_1=\frac{4}{6}\theta$ 已知$\overline{B_2C_2}=\overline{B_1C_1}=1$ 則$\overline{B_1B_2}=2\overline{B_2I}=2\overline{B_2C_2}\cos\angle B_1B_2C_2=2\cos(\frac{2}{6}\theta)$ $\overline{OB_1}=2\overline{B_1H}=2\overline{B_1C_1}\cos\angle OB_1C_1=2\cos(\frac{4}{6}\theta)$ 故$\overline{OB_3}=\overline{B_2B_3}+\overline{B_1B_2}+\overline{OB_1}$ $=1+(2\cos(\frac{2}{6}\theta)+2\cos(\frac{4}{6}\theta))$ $=1+2(\cos(\frac{1}{3}\theta)+\cos(\frac{2}{3}\theta))$ 若以O為極點，$\overline{OB_3}$為幅角，極座標方程式可表為 $r(\theta)=1+2(\cos(\frac{1}{3}\theta)+\cos(\frac{2}{3}\theta))$

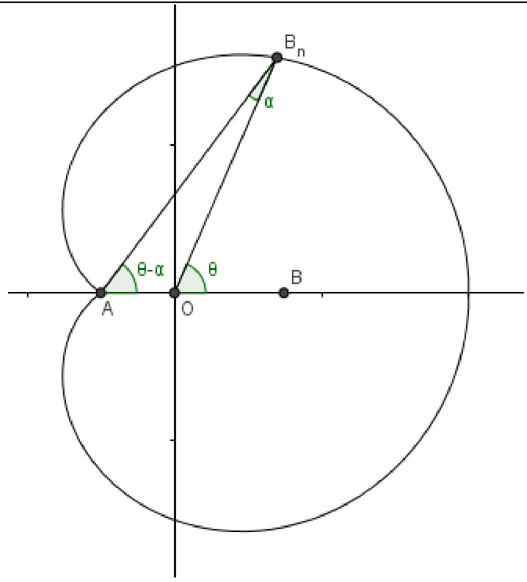
同理可證：

以 O 為極點，$\overline{OB_n}$ 為幅角，極座標方程式可表為

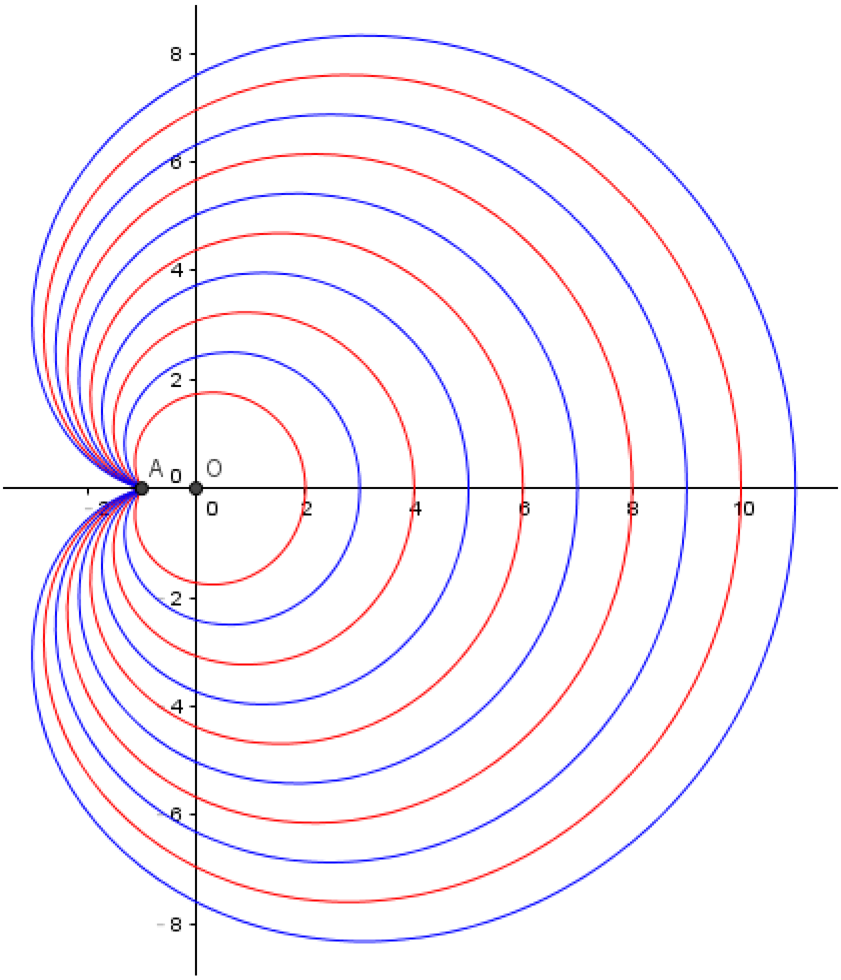
$$r(\theta)=1+\sum_{k=1}^{n-1}2\cos(\frac{2k}{2n}\theta)=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(\frac{k}{n}\theta)$$

3. 極座標定義：

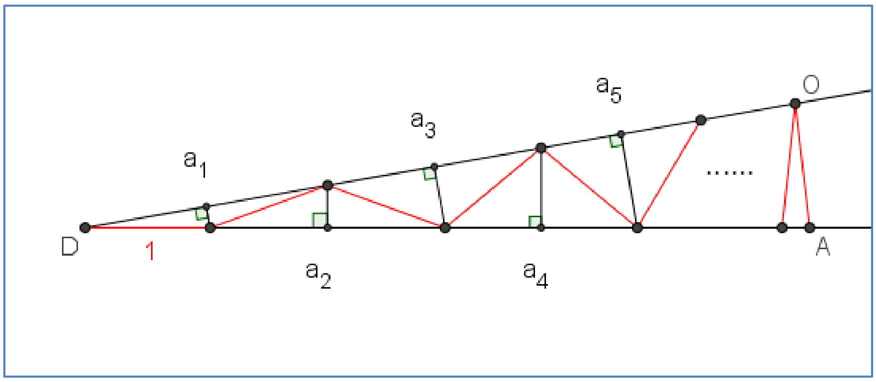
考慮 $r(\theta)=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(\frac{k}{n}\theta)$， $\theta\in[-\pi,\pi]$

<table>
<tr><td>圖形</td><td>證明</td></tr>
<tr><td>
</td><td>令$O[0,0],A[1,\pi],B_n\in r(\theta)$
且B為x軸正向上一點
連接$\overline{AB_n},\overline{OB_n}$
令$\angle B_nOB=\theta,\angle OB_nA=\alpha,\angle B_nAO=\theta-\alpha$
已知$\overline{OA}=1,\overline{OB_n}=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(\frac{k}{n}\theta)$
由正弦定理：
$\frac{\sin\angle B_nAO}{\overline{OB_n}}=\frac{\sin\angle OB_nA}{\overline{OA}}$
$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(\frac{k}{n}\theta)}=\frac{\sin\alpha}{1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">經化簡：
$\sin\theta\cot\alpha-\cos\theta=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(\frac{k}{n}\theta)$
$\cot\alpha=\cot(\frac{1}{2n}\theta)$
由於餘切函數為一嚴格遞減函數，故$\alpha=\frac{1}{2n}\theta$
$\forall B_n\in r(\theta),\angle OB_nA=\frac{1}{2n}\angle B_nOB$
故定義 $r(\theta)=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(\frac{k}{n}\theta)$， $\theta\in[-\pi,\pi]$ 為 $2n$ 等分角曲線</td></tr>
</table>

(三) n 等分角曲線之極座標方程與圖形

$2n+1$ 等分角曲線	$r(\theta)=2\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{2k-1}{2n+1}\theta)=2\sum_{k=0}^{[\frac{2n+1}{2}]-1}\cos(\frac{1+2k}{2n+1}\theta)-0$
$2n$ 等分角曲線	$r(\theta)=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(\frac{k}{n}\theta)=2\sum_{k=0}^{[\frac{2n}{2}]-1}\cos(\frac{0+2k}{2n}\theta)-1$
n 等分角曲線	$r(\theta)=2\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]-1}\cos(\frac{\frac{1-(-1)^n}{2}+2k}{n}\theta)-\frac{1+(-1)^n}{2}$
紅：$2n+1$ 等分角曲線 藍：$2n$ 等分角曲線	

三、餘弦函數倍角公式推導



已知所有紅色線段距離皆為 1

可得 $\cos\angle ODA = \dfrac{\frac{a_1}{2}}{1} = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{1+\frac{a_2}{2}}{a_1} = \dfrac{a_1+\frac{a_3}{2}}{1+a_2} = \dfrac{1+a_2+\frac{a_4}{2}}{a_1+a_3} = \ldots$

$$\frac{a_1}{2} = \frac{1+\frac{a_2}{2}}{a_1} \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1^{\ 2} - 2$$

$$\frac{a_1}{2} = \frac{a_1+\frac{a_3}{2}}{1+a_2} \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_1a_2 - a_1$$

$$\frac{a_1}{2} = \frac{1+a_2+\frac{a_4}{2}}{a_1+a_3} \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_1^{\ 2} + a_1a_3 - 2a_2 - 2 = a_1a_3 - a_2$$

$$\frac{a_1}{2} = \frac{a_1+a_3+\frac{a_5}{2}}{1+a_2+a_4} \quad \Rightarrow \quad a_5 = a_1 + a_1a_2 + a_1a_4 - 2a_1 - 2a_3 = a_1a_4 - a_3$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{a_1}{2} = \frac{1+\sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} + \frac{a_{2n}}{2}}{\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}} \quad \Rightarrow \quad a_{2n} = a_1a_{2n-1} - a_{2n-2}$$

$$\frac{a_1}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} + \frac{a_{2n+1}}{2}}{1+\sum_{k=1}^{n} a_{2k}} \quad \Rightarrow \quad a_{2n+1} = a_1a_{2n} - a_{2n-1}$$

故得方程式$a_n = a_1 a_{n-1} - a_{n-2}$

令$\angle ODA = \theta$

$a_1 = 2\cos\theta$

$a_2 = 2\cos 2\theta \to \cos 2\theta = \dfrac{a_2}{2} = 2\cos^2\theta - 1$

$a_3 = 2\cos 3\theta \to \cos 3\theta = \dfrac{a_3}{2} = \dfrac{a_1 a_2 - a_1}{2} = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$a_4 = 2\cos 4\theta \to \cos 4\theta = \dfrac{a_4}{2} = \dfrac{a_3 a_1 - a_2}{2} = 8\cos^4\theta - 8\cos^2 + 1$

以此類推

可得$\cos(n\theta) = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$, $n \in \mathbb{N}$

令$b_n = \cos(n\theta)$

$b_n = 2\cos\theta b_{n-1} - b_{n-2}$

其特徵根方程為$x^2 - 2\cos\theta x + 1 = 0$

得兩根$\alpha = \cos\theta + \sqrt{\cos\theta - 1}, \beta = \cos\theta - \sqrt{\cos\theta - 1}$

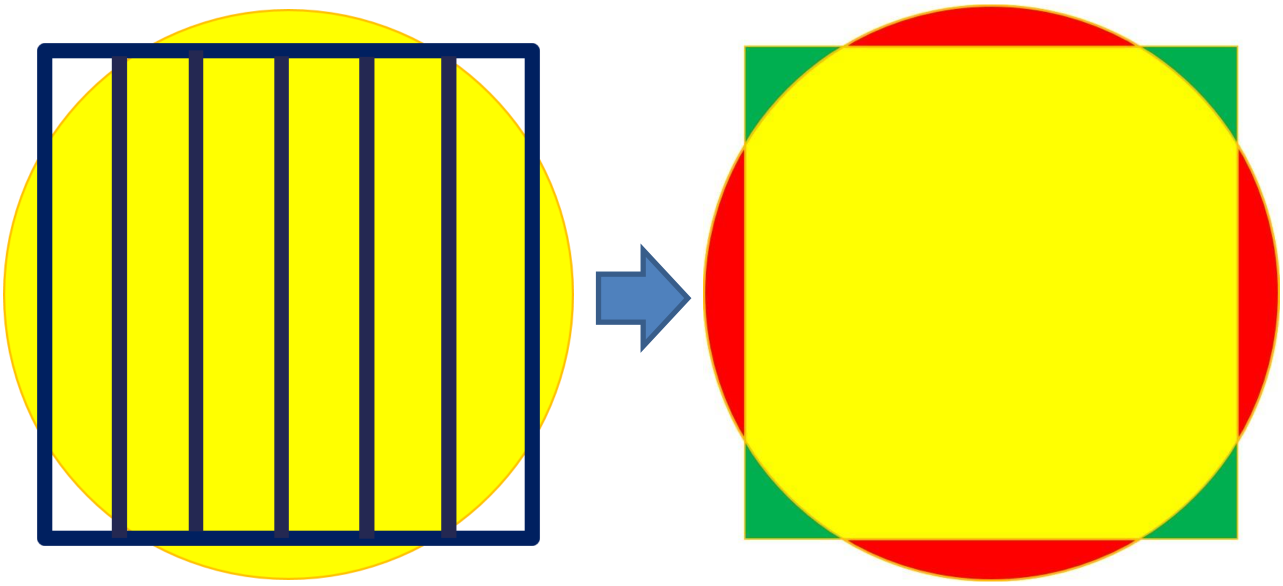
$b_n = \dfrac{\alpha^n (b_1 - \beta b_0) + \beta^n (b_1 - \alpha b_0)}{\alpha - \beta}$

故$\cos(n\theta) = \dfrac{(\cos\theta + \sqrt{\cos\theta - 1})^n + (\cos\theta - \sqrt{\cos\theta - 1})^n}{2}$

四、化圓為方問題(The Problem of the Quadrature of the Circle)

此命題與三等分角問題、立方倍積問題(The Problem of Cube Duplication) 並列古希臘三大幾何難題。

古希臘哲學家安納薩哥拉斯(Anaxagoras, c. 510 ~ c. 428 B. C.) 因褻瀆宗教罪名入獄。在牢中的那段日子，他日夜思索著幾何問題打發時間。有天晚上他望向窗外，覺得窗外的月亮格外的圓，那道千古難解的幾何問題便浮現在他腦海中—究竟是窗外的月亮大，還是牢房的窗子大？他便用身邊的木炭在石板上畫圓，試圖做出等面積的正方形，百般思索卻終不得解……



圓形半徑已知為r

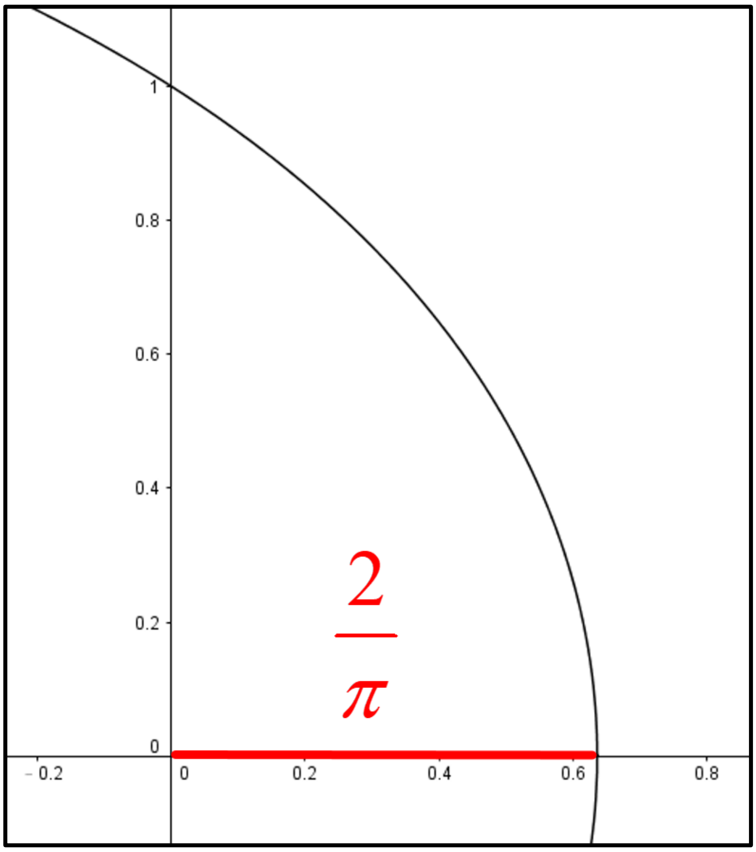
令正方形邊長為x

正方形面積 = 圓形面積

$$x^2 = \pi r^2$$

$$x = r\sqrt{\pi}$$

因此，欲想得解必須以尺規作圖做出π，經過兩千多年的驗證，已經被證明出π為超越數，是無法用尺規作圖得到的。但是，同樣的有許多科學家以「曲線法」破解這道難題。其中相當著名的便是希皮亞斯(Hippias, c. 500 B. C.) 的割圓曲線(Quadratrix) (此曲線同時也可以解決三等分角問題)，其解法便是其 x 軸截距為$\frac{2}{\pi}$，故可得π。



同樣地，若是以我所創造的等分角曲線也可解決此問題。先做出π等分角曲線，其對稱軸長即為所求。