

第十七屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA17-008

作品名稱：彈簧圈在受迫轉動下的共振

姓名：歐陽瑩芸

關鍵字：彈簧、動能、共振頻率

摘要

本次研究主要想針對各式的彈簧圈進行波動的相關研究，因為彈簧圈本身的彈力常數小，因此以懸空方式施以擾動來探討波的特性實在不易，若置於桌面上拉長則因摩擦力的緣故也不易實驗。我們把塑膠彈簧捲成圓圈，平放在平台上以旋轉式振盪器振動，發現彈簧會在特定的外加頻率下，不論何種材質的平台，可以讓轉動及旋轉的運動能量大幅降低。

除了在自然頻率時彈簧的旋轉與轉動明顯下降外，還有發現彈簧圈的順轉、逆轉與內旋、外旋，在接近自然頻率前後，運動會有明顯的方向改變。為了針對各式材質以增加轉動的可行性與便利性的探討，本次研究更新增手動、其他機器振動的部份，發現無論各種材質的底板或是不同的振幅，彈簧圈皆有相同的旋轉機制與共振頻率。

壹、研究動機

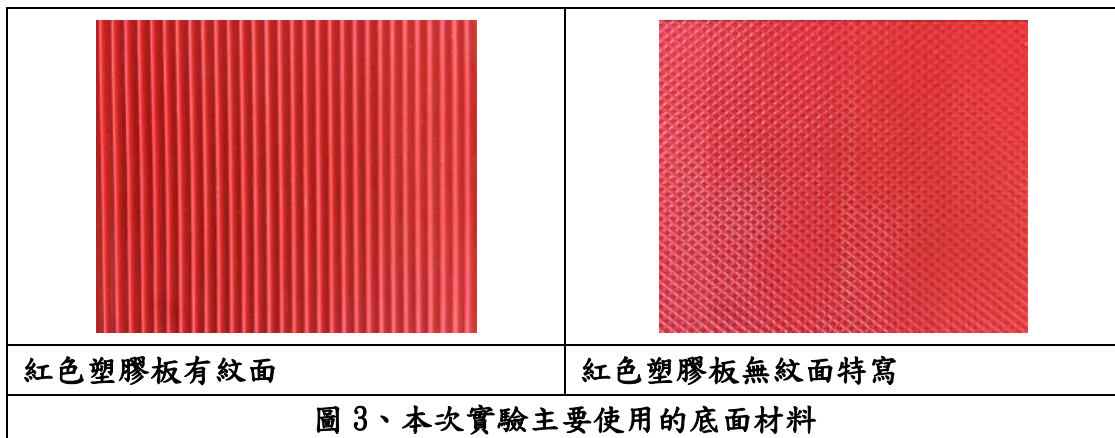
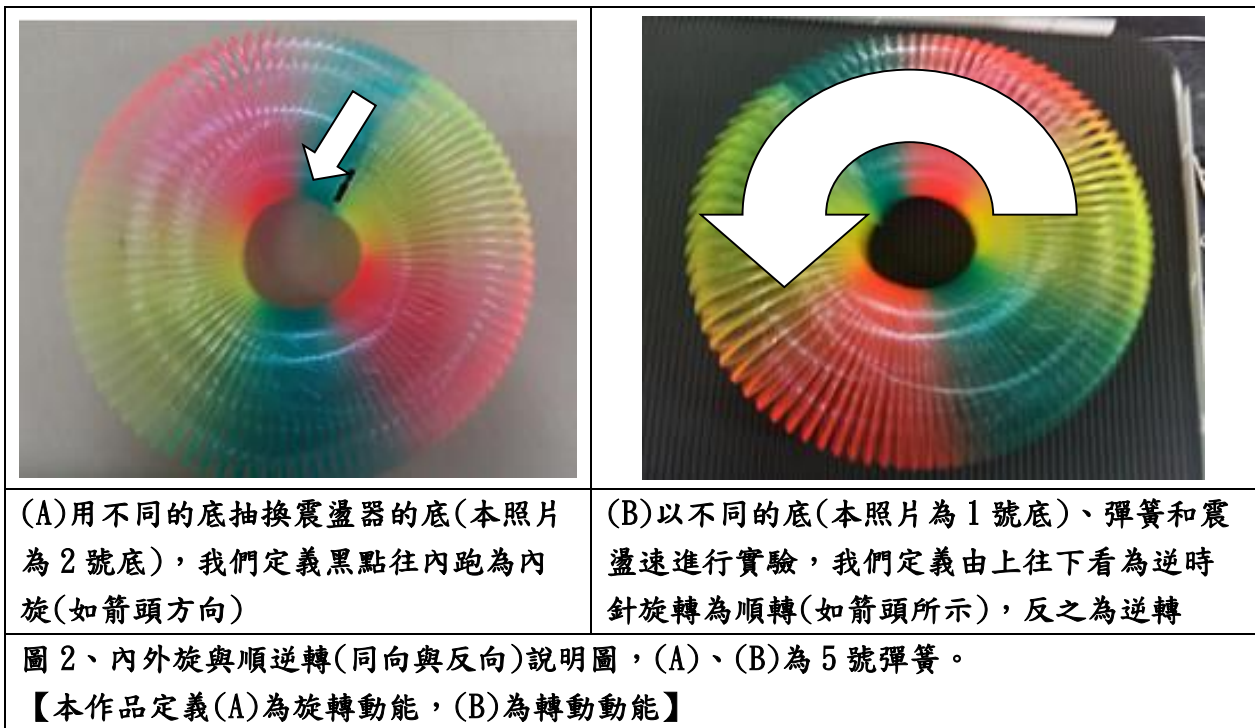
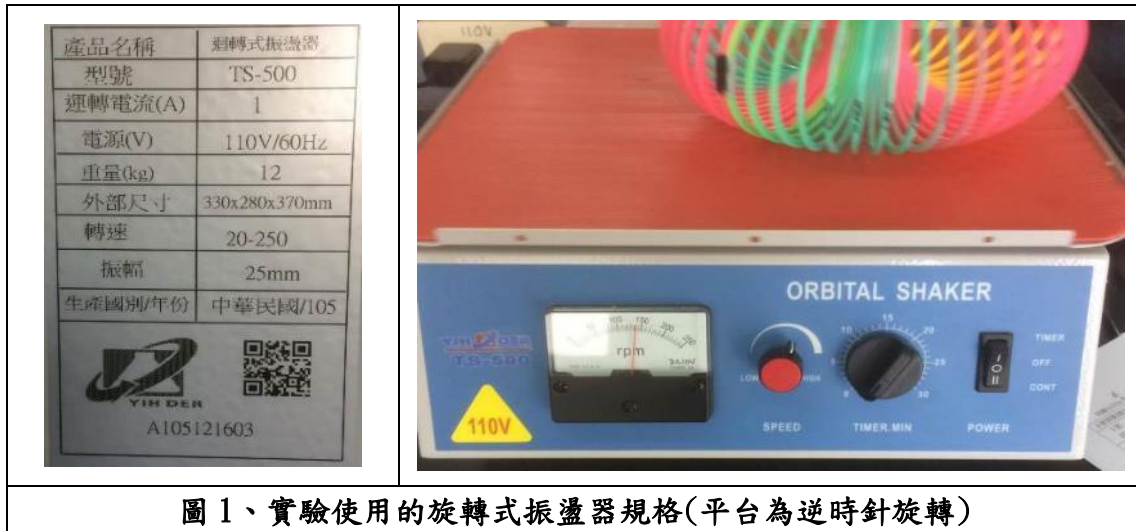
從小到大的物理課，老師往往會拿出彈簧作為上課的教材，這使我對於此彈性物體的運動模式感到特別有興趣，然而，歷屆的科展作品幾乎沒有對塑膠彈簧圈有特別的研究。因此，我請老師協助上網買了彈簧，之後，我們在實驗室中不斷的摸索，在很多次的嘗試與探索後，一度想要放棄做塑膠彈簧的研究。但在最後，意外的發現用成圓圈狀的彈簧在震盪器上有旋轉的特殊現象，因此開始蒐集各式彈簧針對此現象進行研究，並找到一些規律。除此之外，我們又嘗試各式的材料與振動方法，找到了除了振盪器的模式外，其他穩定的振動器，還有手搖彈簧的模式也都有不錯的效果，本作品因而得以深入再探討。

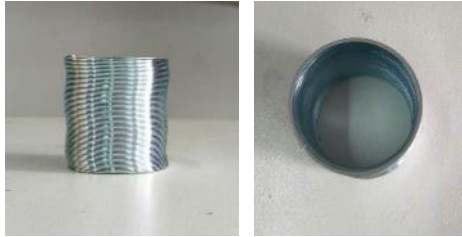
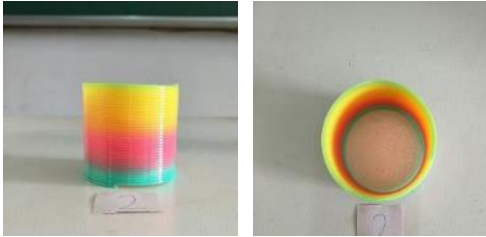








貳、研究目的

開創一個方法來克服彈簧圈研究的困難，讓彈簧圈有不同的使用方式運用在實際生活中，並做為新的物理實驗探究工具。只可惜若用高頻的振盪器強度不夠讓彈簧旋轉，而旋轉檯在低頻時也因強度不夠無法實驗，因此要做到完整的頻段下彈簧的振動似乎還有研究的空間，我們這幾年嘗試手搖、機械轉動的方式增加振幅，並發現共振的頻率並無差異，擴大了本實驗操作的方法及便利性，讓本實驗不只是實驗室操作，也可以做為推廣一般科普實驗。

參、研究過程

彈簧是很好演示張力與線密度關係的一個物理素材，但要從事研究卻難以著手，在多次努力下，找到把彈簧旋轉的方法，從自然頻率的觀念去研究，於是我從生物實驗室找來了振盪器，並盡可能的買足各款式的彈簧做為實驗材料。



	
<p>編號 1 的鐵製彈簧圈</p>	<p>編號 2 的塑膠彈簧圈</p>
	
<p>編號 3 的塑膠彈簧圈</p>	<p>編號 4 的塑膠彈簧圈</p>
	
<p>編號 5 的塑膠彈簧圈</p>	<p>編號 6 的塑膠彈簧圈</p>
	
<p>編號 7 的塑膠彈簧圈</p>	<p>編號 8 的鐵製彈簧圈</p>
	
<p>編號 9 的鐵製彈簧圈</p>	<p>各式彈簧圈依序排列(由左至右)</p>
<p>圖 4、我們用各式各樣不同大小、種類的彈簧實驗。</p>	

一、效果最佳的 5 號塑膠彈簧

表一、5 號彈簧在各頻率下旋轉一圈所需的時間(順時針螺紋)

5 號彈簧(螺紋:正)		rpm	100	120	140	160	180	200	220	240	250
3 號 有紋紅	內外旋一圈(s)	x	x	56	94	-21	-3.8	-3.5	-3.3	-3.1	
	順逆轉一圈(s)	32	29	24	64	-9	-8	-9	-12	-14	
4 號 無紋紅	內外旋一圈(s)	x	x	50	x	-33	-4.4	-4.2	-3.1	-2.7	
	順逆轉一圈(s)	28	27	25	x	-17	-7.3	-9.5	-12	-13	

註：本報告表格說明如下：

時間單位：s。頻率單位：rpm。向外旋轉(+)、向內旋轉(-)、x 表示不旋
與轉台同向，逆時針轉(+)、與轉台反向，順時針轉(-)、x 表示不轉

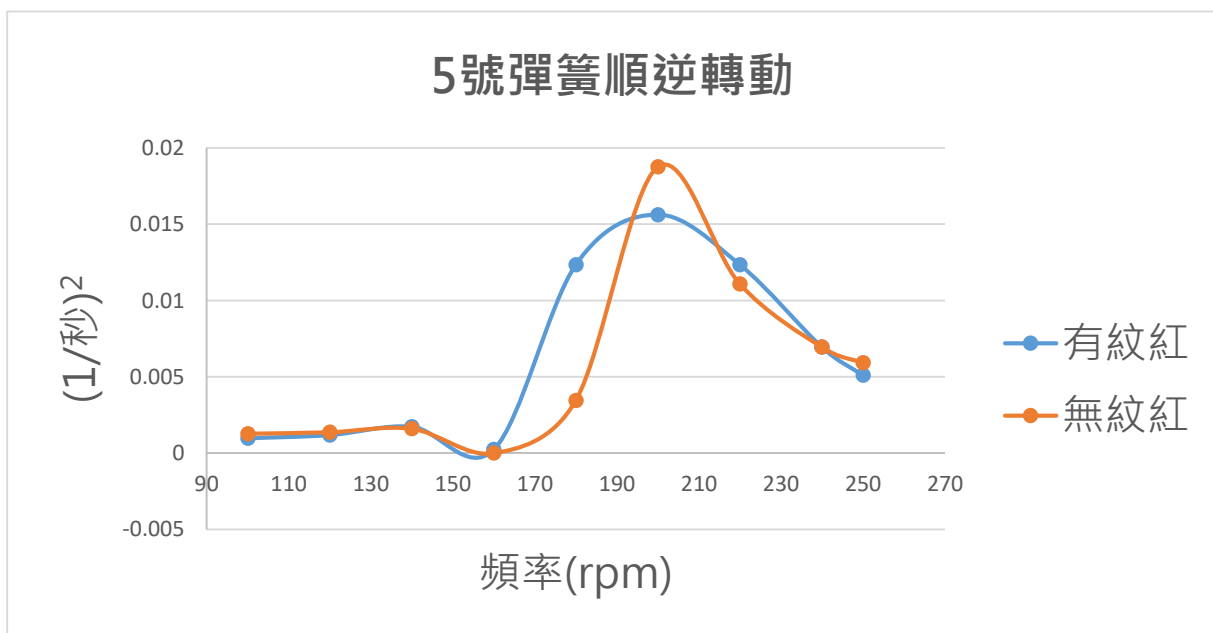
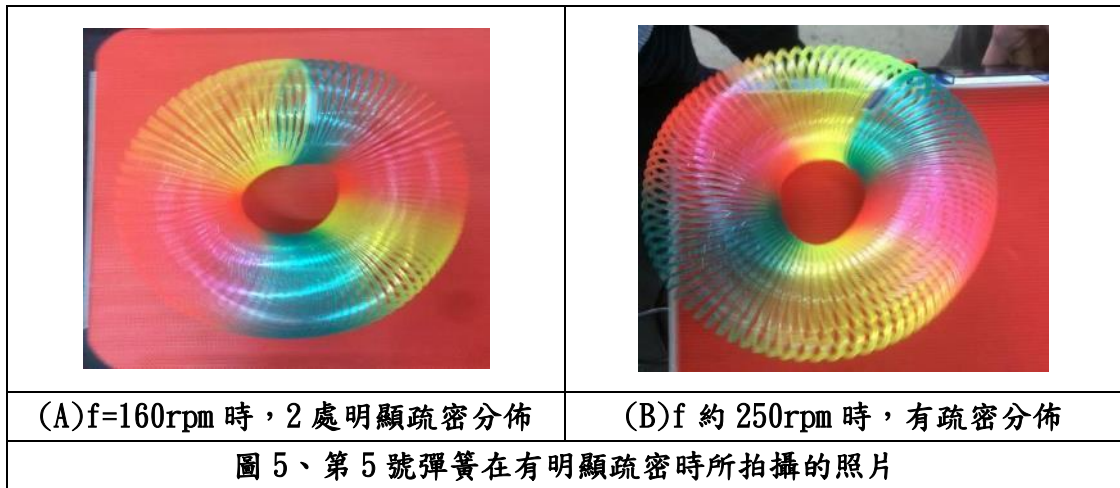
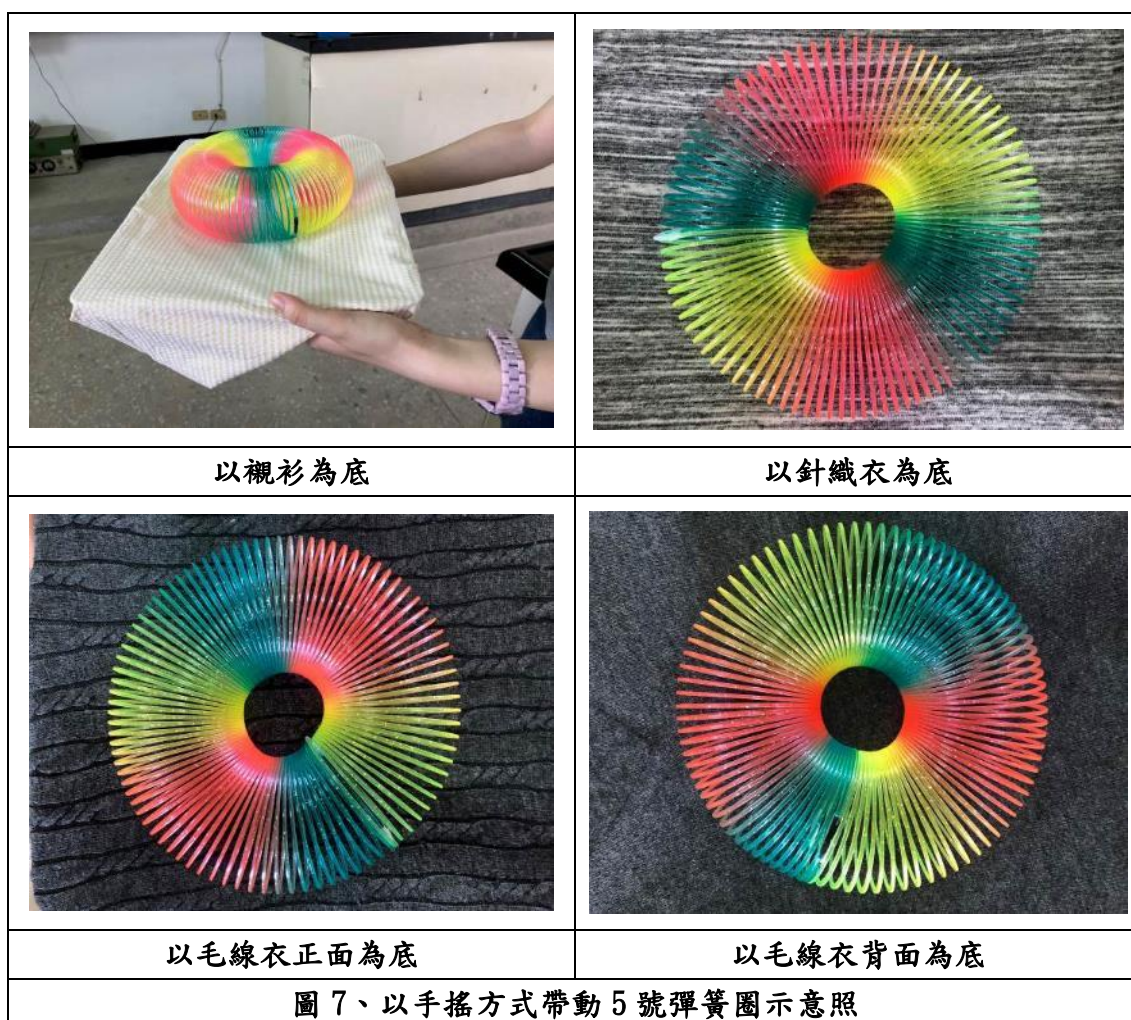


圖 6、第 5 號彈簧頻率與動能關係圖

本實驗的彈簧 5 在 $f=160\text{rpm}$ 時有明顯疏密，且約在 $f=250\text{rpm}$ 時彈簧也有疏密的變化，由實驗結果可以合理的推測，彈簧的內外旋及順逆轉的運動能量減少時，明顯的能量轉為振動的形式，因此拍到有疏密的情況。而在 $f=100\text{rpm}$ 以下，彈簧不會有明顯的振動，所以在振動強度不足的情況下無法觀察到類似駐波情況，這情況可以用手搖的方式來克服。

二、以手搖旋轉方式增加底板振幅

因為振盪器的機器振幅有一定的限制，加上市售的振盪機器皆是類似的機型。我們試著很多機器都無法突破，因此使用手搖的方式來做實驗，以 5 號彈簧做為素材可以找到穩定的實驗結果，主要是因為 5 號彈簧的自然頻率是上述實驗中最低的，手旋轉帶動的振幅剛好可以符合這個時率的範圍。



我們以手搖 60 圈並計時，針對不同材質的衣服為基底做出的實驗結果，並換算成 rpm 以利我們與振動台對照如下表：

表二、5 號彈簧在不同材料手搖各頻率下順逆轉情形

5 號彈簧(螺紋:正)	rpm	120	140	180
襯衫		順	X	逆
針織衣		順	X	逆
毛線衣正面		順	X	逆
毛線衣背面		順	X	逆

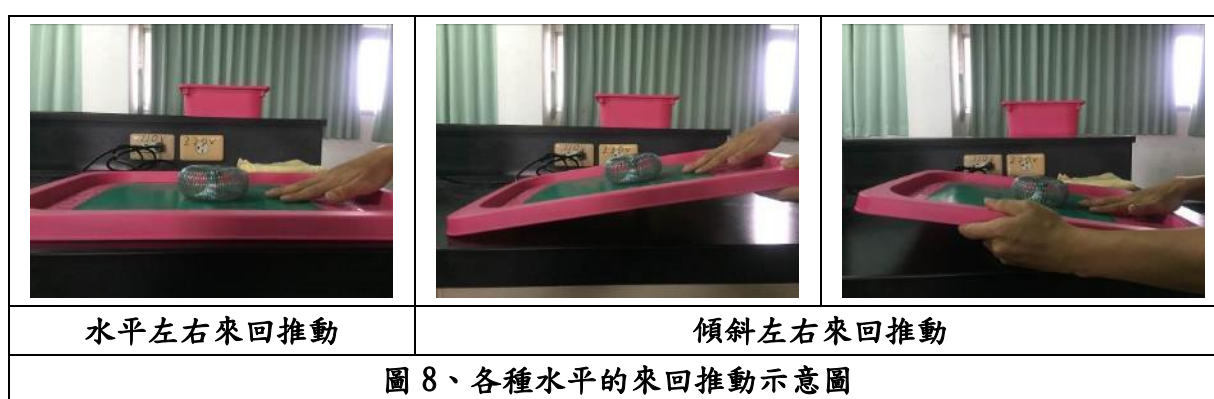
初步觀察結果：

對照振動檯 5 號彈簧的自然頻率為 160rpm，手搖的頻率接近 140rpm，這 20 的落差主要是因為振動臺是以安培大小來控制轉速，實際上 160rpm 經我們實測，真實的值約略為 140~150rpm，因而有此誤差，所以共振頻率的值是相符的。

針對上述的實驗結果可以發現，手搖彈簧因振動的振幅較強，可以讓彈簧在極粗糙的衣物做為底板情況下亦可以旋轉(以 5 號彈簧為例，頻率<150rpm 轉動效果不佳)，對於很多學校無法購買振動檯的情況下，是個很好的演示方法。

手搖因為有頻率上的極限，本次的幾顆彈簧中，5 號彈簧可以用手搖的方式做出順逆轉、內外旋的實驗結果，其他彈簧則要依共振頻率而定。所有系列的實驗過後，可以確定振幅對自然頻率沒有影響，只要能振動，頻率對了就會讓彈簧不轉動。因為手搖的方式可以增加振幅(強度)，可以讓原本不會旋轉的彈簧，也可以進行分析與探討。

三、水平與否的差異



我們若只針對彈簧進行左右的推動，彈簧圈只會有內外旋的維度動能，不會有順逆轉的現象，而且相同的頻率下，不同斜面的轉動情況也是相同的，因此水平並不會影響本實驗的結果。

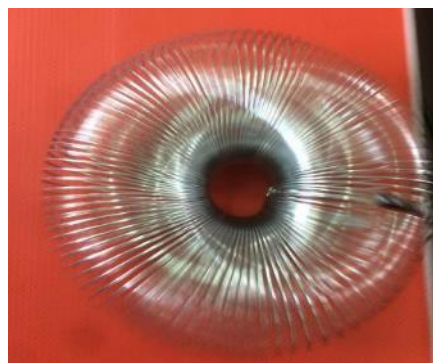
四、以機器增加底板振幅

為了增加振幅，我們到大學的土木工程系的實驗室，借用大型的旋轉裝置，只可惜每台機器都是固定的旋轉頻率，我們只能用兩個不同款式的機檯做多次實驗來參考。



以這兩台機器對各彈簧實驗出來的結果，皆符合振盪器的實驗結果，故以此對照手搖的方式也完全吻合(可參考表二或其實他實結果)。因此只要能算準手動頻率，並穩定搖動且多次實驗平均，是可以用來做為低頻、高振幅的實驗結果依據。

五、1 號金屬彈簧的特性



1 號金屬彈簧

因金屬彈簧無法改變螺旋方向，故只做螺紋為正的實驗，彈簧 1 由實驗結果得知，在 $f=190\text{rpm}$ 時，彈簧開始由反向轉變成向內旋，在 $f=230\text{rpm}$ 後又變成正旋反向轉，我們把順逆轉與內外旋 $(\frac{1}{t})^2$ 的值依頻率整理如下圖，得到非常明確而且有趣的現象。

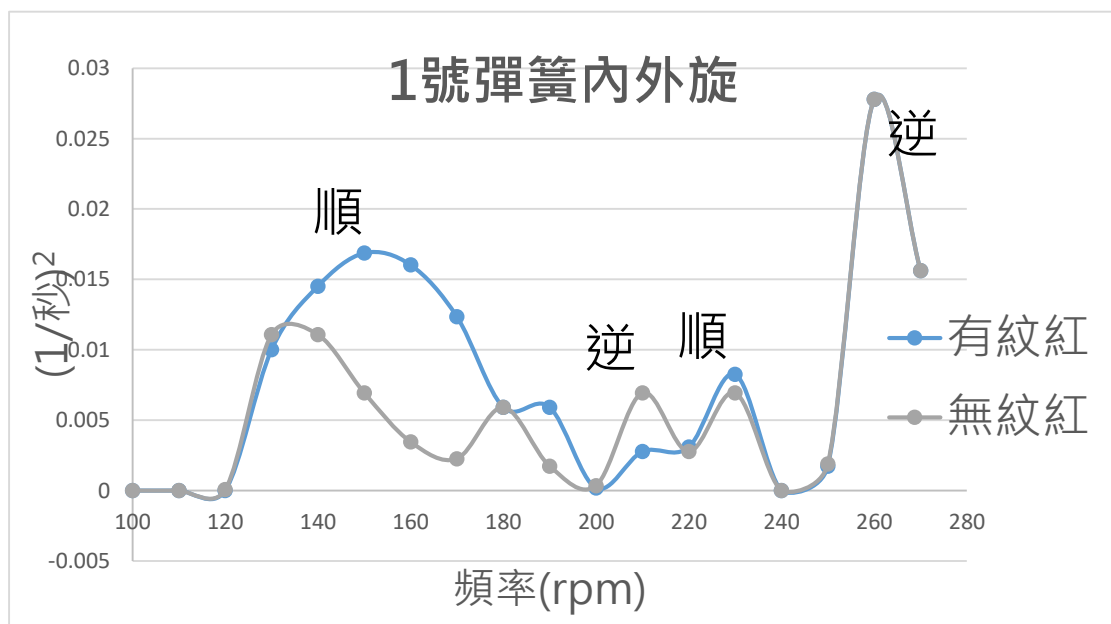
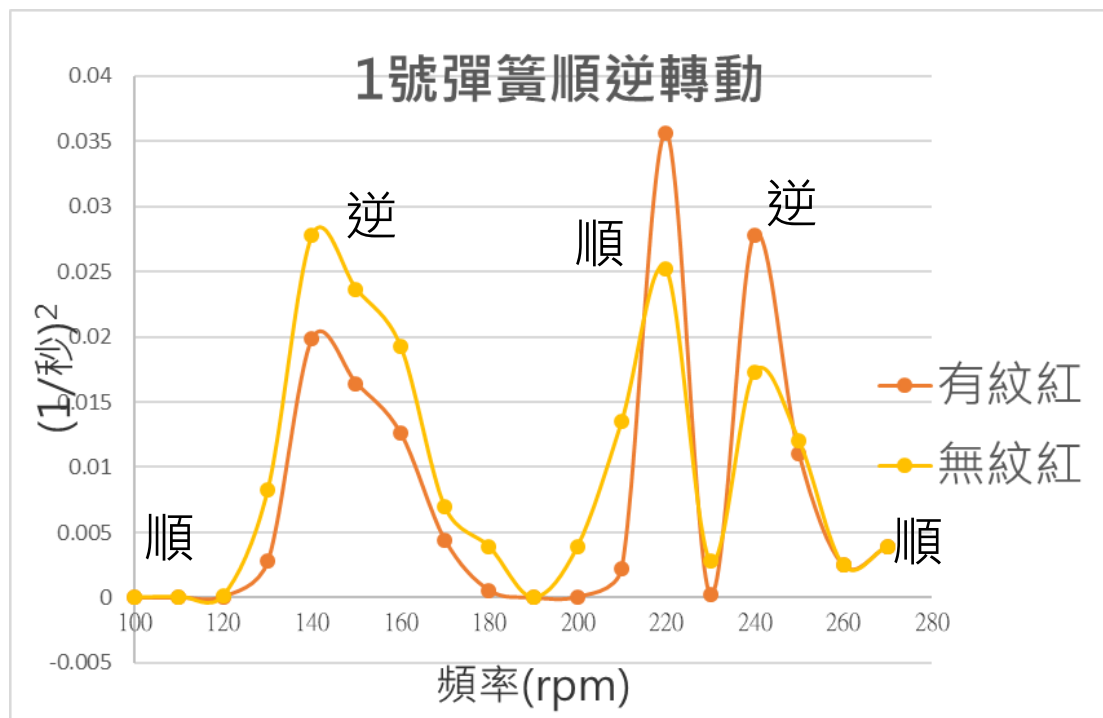


圖 10、頻率與動能(順逆轉、內外旋一圈時間倒數平方)的關係

由圖我們可以發現，轉動的能量在 $f=190\text{rpm}$ 、 $f=225\text{rpm}$ 與 $f=265$ 時，移動的動能達到極低，彈簧開始反向轉，旋轉動能在 $f=195\text{rpm}$ 、 $f=225$ 與 $f=245\text{rpm}$ 時有最小極，並改變內外旋方向，可以由實驗的結果清楚得知，在達自然頻率的時候，彈簧就會開始進行反向的運動。

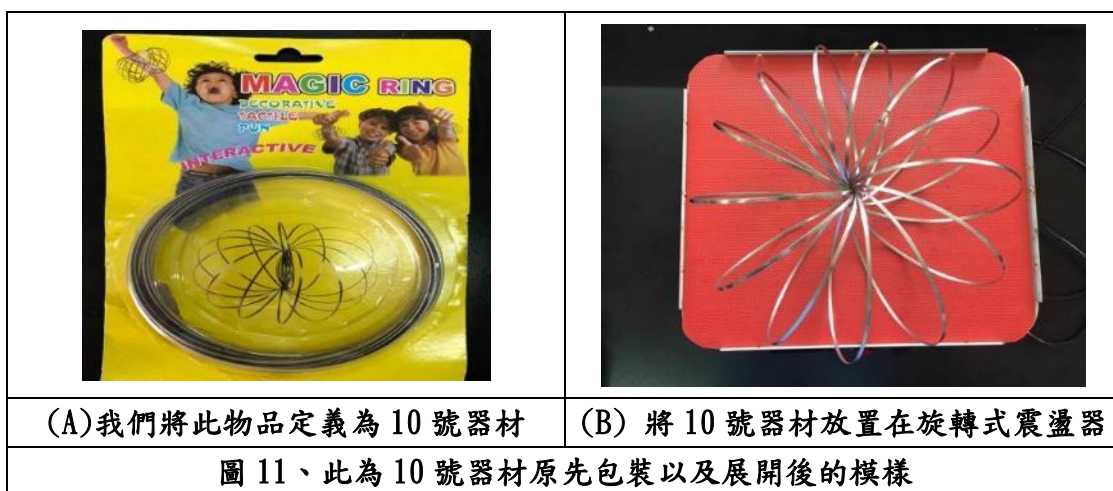
六、9 號金屬彈簧與 10 號金屬材料



9 號小顆金屬彈簧

表三、9 號小彈簧各頻率下旋轉一圈所需的時間

9 號小金屬		rpm	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
4 號	內外旋一圈(s)	5	3	2	1.7	1.4	1	1	1	1	1	1	1	1.2
無紋	順逆轉一圈(s)	6	7.5	9	11	20	-6	-3	-2.5	-2.7	-2.3	-2.5	-0.6	



(A)我們將此物品定義為 10 號器材

(B) 將 10 號器材放置在旋轉式震盪器

圖 11、此為 10 號器材原先包裝以及展開後的模樣

表四、10 號器材各頻率下旋轉一圈所需的時間

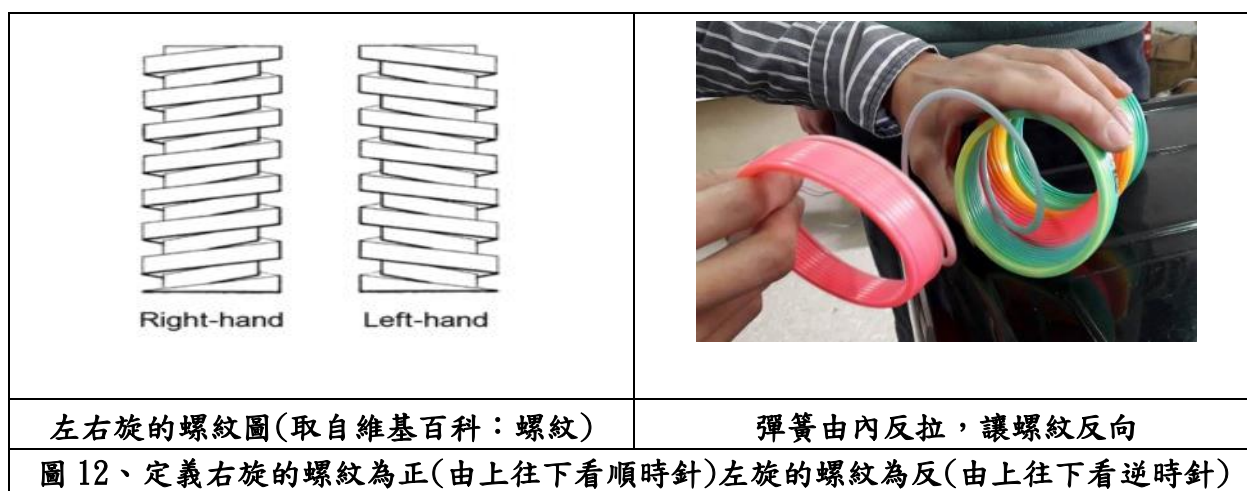
10 號器材		rpm	100	120	140	160	180	200	220	240	250	260	270
4 號	內外旋一圈(s)	21	10	7.5	6	5	5	5.5	6.5	6.5	6	6	
無紋紅板	順逆轉一圈(s)	X	20	25	-45	-6	-5	-3	-4	-5	-5.5	-5	

由 9 號與 10 號彈簧的實驗，發現內外旋的變化不一定要與順逆轉同一個時間點。而 9 號與 10 號的材料旋轉與轉動的維度速率有明顯的不同，以 9 號彈簧為例，主要是用來做為波動實驗的小道具，而 10 號材料主要是做為旋轉的小玩具，在彈力設定上，與 1 號與 8 號的金屬彈簧有明顯的差異性。以此論點，可以解釋 1 號彈簧旋與轉為何沒有完全的同步變化，而塑膠彈簧比較能有同步的變化。

肆、討論及應用

一、螺紋方向的差異

我想到一個可能性：內外旋動方向是否由轉動過程中螺紋與底面間的作用所引起？



A 螺紋與 B 螺紋的取向相反，當兩螺紋都往左前進時，由於螺紋與底面的作用而造成的旋轉趨勢，在 A 與 B 上也正好相反。我們將此推論配合之前所得之實驗數據(5 號彈簧，無紋紅板)，順時針、逆時針螺紋比對檢驗。

表五、5 號彈簧在各頻率下旋轉一圈所需的時間(順時針螺紋)

5 號彈簧(螺紋:正)		rpm	100	120	140	160	180	200	220	240	250
4 號 無紋紅	內外旋一圈(s)	x	x	50	x	-33	-4.4	-4.2	-3.1	-2.7	
	順逆轉一圈(s)	28	27	25	x	-17	-7.3	-9.5	-12	-13	

表六、5 號彈簧在各頻率下旋轉一圈所需的時間(逆時針螺紋)

5 號彈簧(螺紋:反)		rpm	100	120	140	160	180	200	220	240	250
4 號 無紋紅	內外旋一圈(s)	120	74	31	20	12	-5	-3.3	-2.5	-2.1	
	順逆轉一圈(s)	28	24	85	x	21	-8.6	-7.6	-8	-10.4	

由表中可見，當順逆螺紋的彈簧圈都以順向轉動時，此時旋動的狀態都為外旋，並不因為螺紋的正反而產生相反的旋動，因此排除掉了螺紋引起旋動的可能性。我們可以確定，彈簧的轉動及旋動，都是因摩擦力造成的，我們先簡單的把彈簧分成 4 個點來分析，在底板於某方向的移動時，受到的摩擦力情況，就有機會用此力造成的力矩，帶彈簧形成各式運動，並再深入切成 8 個點以波速的方式探討。

二、旋轉機制的討論

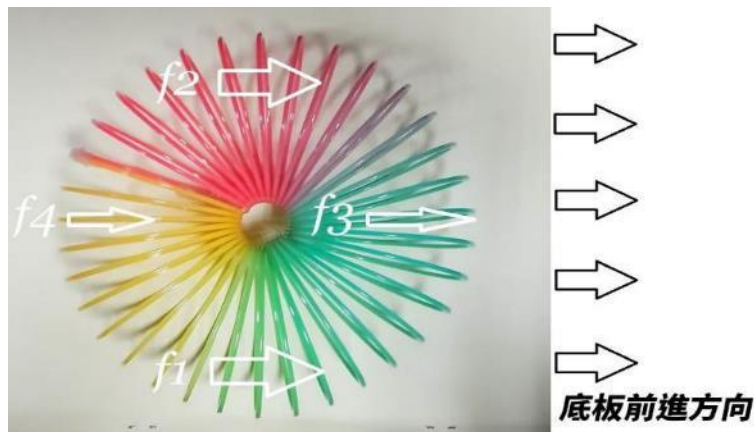
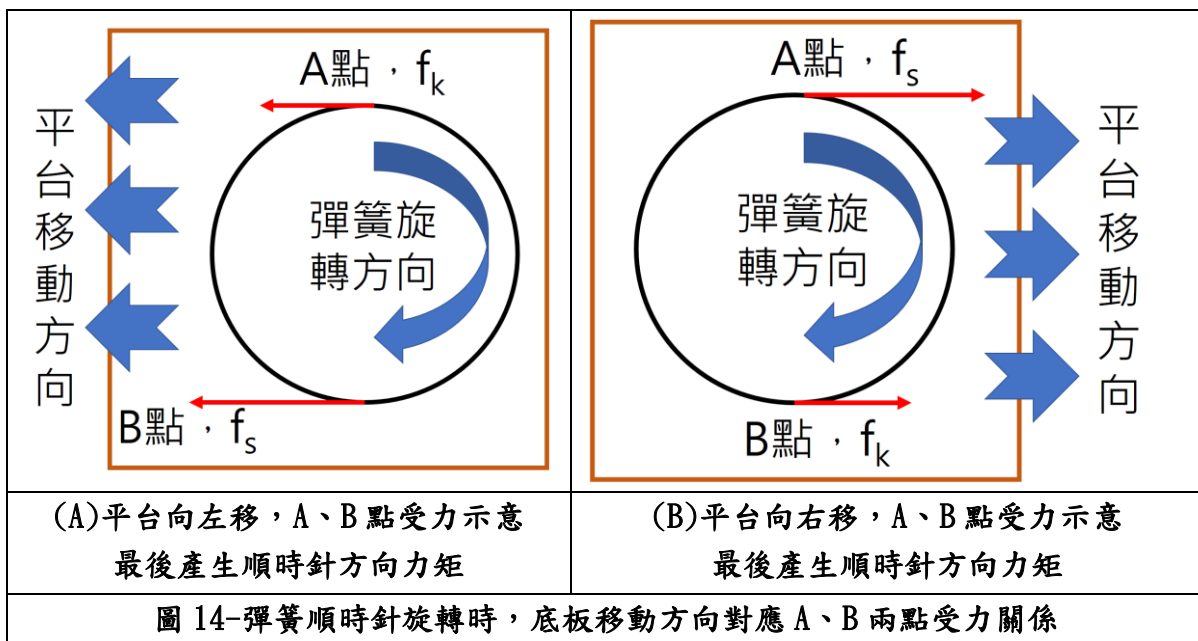


圖 13、彈簧轉動與旋轉機制的推測

底板移動時，彈簧與底板接觸部分會被施予摩擦力，各接觸點所受的摩擦力之向量和，垂直於彈簧圈框的分量，會提供力矩驅使彈簧轉動。如圖示下半部所受之摩擦力以 f_1 表示，其產生的力矩若大於上半部 f_2 產生之力矩，則驅使彈簧逆時針轉動。同樣地，彈簧的內外旋動，來自摩擦力平行於彈簧圈框的分量，如圖示 f_3 驅使彈簧內旋， f_4 會驅使外旋，將各點所受之驅動力加總，決定了彈簧的內外旋動。這個部份我們初步推測，摩擦力不全為動摩擦力，有的點是靜摩擦力，因此產生了力矩差，帶動了彈簧旋轉。



以 A 點及 B 點為例，當平台向左移動時，A 必受到動摩擦力的作用，而 B 點可能受到靜摩擦力的作用，彈簧圈為順時針方向的旋轉，而平台右移時，B 點就是受到動摩擦力的作用，而 A 點可能受靜摩擦力的作用下，左移或右移的底板，摩擦力產生的合力矩皆是造成順時針方向的旋轉，彈簧可以穩定旋轉就是在這巧妙的配合下所產生。

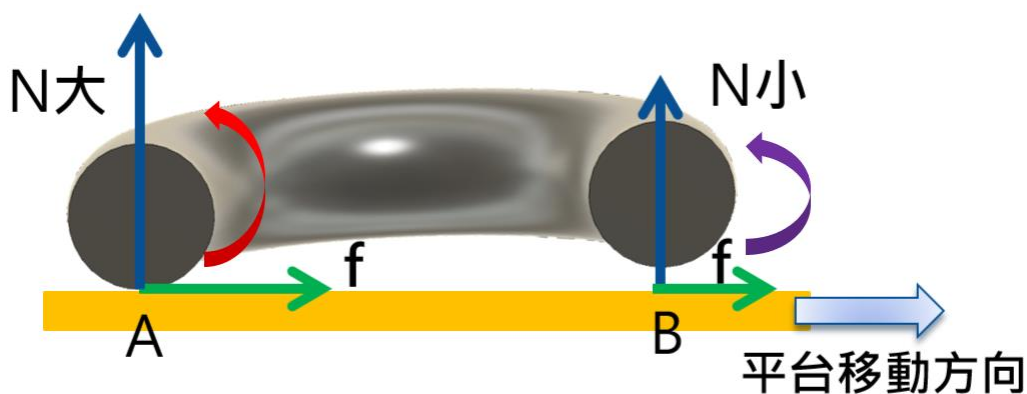


圖 15-(1)、平板向右移動方向與內外旋產生機制的示意圖

我們對平台移動某方向時產生的摩擦力來進行分析，發現當底板向右移動時(如最上方的圖所示)，彈簧受到一個向右的力而移動，但由於慣性的關係，使某部分質量仍停留於 A 點，因此 A 點的正向力比 B 點大，進而造成 A 點的靜摩擦力大於 B 點的靜摩擦力，彼此之間產生的力矩差，造成彈簧向外旋動，而這也可以合理的解釋為什麼一開始彈簧的運動皆以外旋的形式。

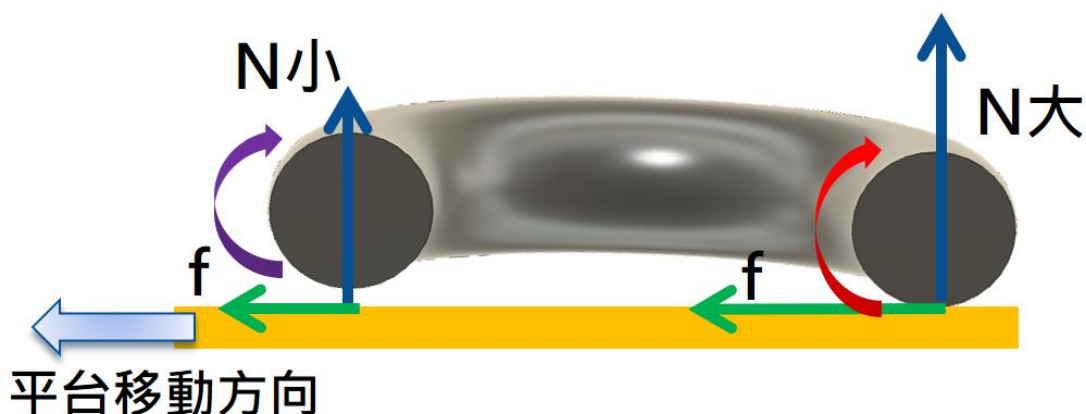


圖 15-(2)、平板向左移動方向與內外旋產生機制的示意圖

當平台向另一個方向時的作用機制也是如此，雖然摩擦力的方向換邊，彈簧圈的質量也因慣性的因素而向另一邊集中，造成摩擦力的差異，並產生力矩的差異。此變化後，圖 15-(1)與圖 15-(2)帶動彈簧圈的旋轉方向皆是向外旋動，這也就是為什麼我們實驗室彈簧圈可以穩定旋動的原因。(參考資料六)

三、反向機制的討論

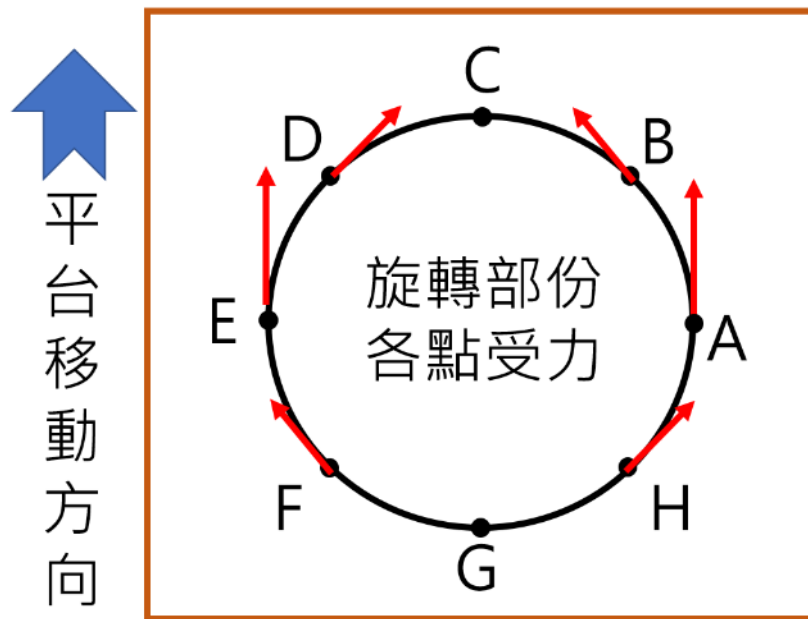


圖 16、平板移動方向與各點受力大小示意圖

我們對平台移動某方向時各點受力的的大小來做分析，並把此圓拉成直線運動來對各點進行探討。由高三物理可以得知，彈簧只要受到擾動，就會產生穩定的移動速率，而板子各點的受力我們拉成直線來分析，也可以得到類疏密波產生的機制。因此，可以確認若此疏密波變動的頻率與原彈簧波動頻率相同時，就是旋轉檯共振頻率產生時。

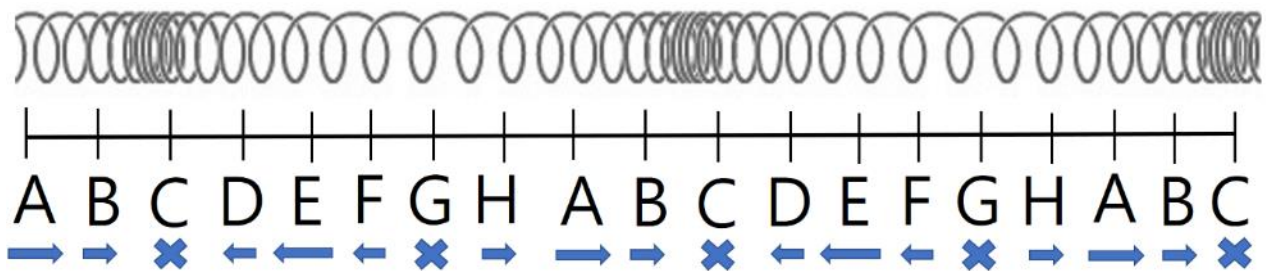


圖 17、各點受力後類波動示意圖

我們以內外旋、順逆轉翻轉次數最多的 1 號彈簧為例，轉動的能量在 $f=190\text{rpm}$ 、 $f=225\text{rpm}$ 與 $f=265$ 時，移動的動能達到極低，彈簧開始反向轉，旋轉動能在 $f=195\text{rpm}$ 、 $f=225$ 與 $f=245\text{rpm}$ 時有最小極，並改變內外旋方向，可以由實驗的結果清楚得知，在達自然頻率的時候，彈簧就會開始進行反向的運動，由表也可以發現，在高頻處($f>240$)後，轉動的動能數值就較不受底板材料的影響。

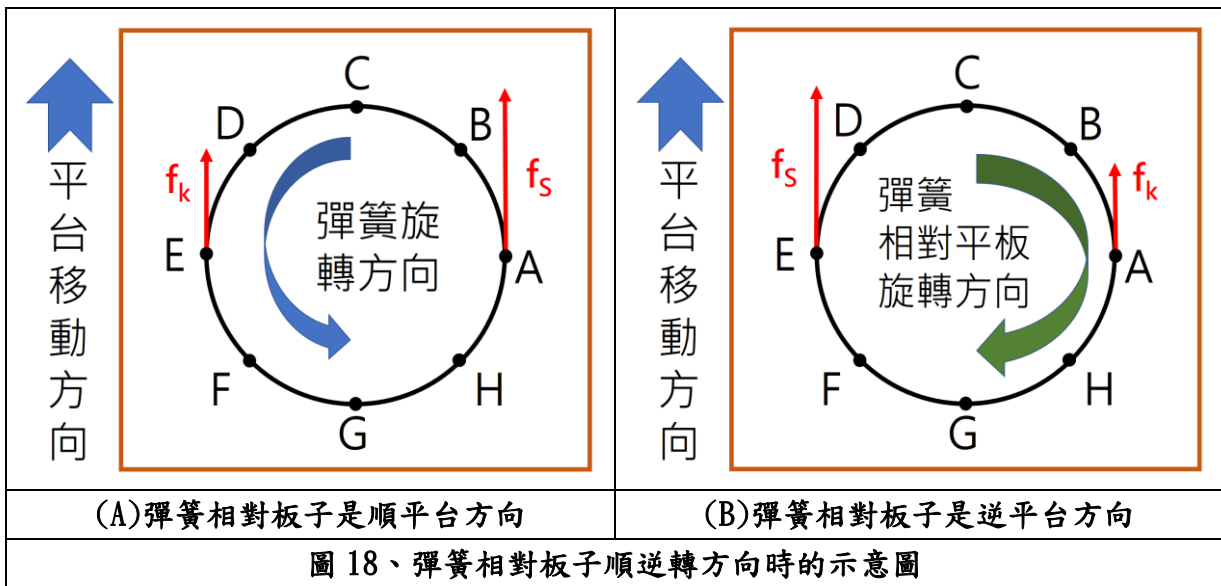
所有的材料都可以觀察出，在低頻的時候都是順著平板旋轉方向做轉動，這更加可以確定彈簧就是靠平板的摩擦力來進行運動的。

表七、1 號彈簧在各頻率下旋轉一圈所需的時間(逆時針螺紋)

1 號彈簧(螺紋: 正)		rpm	100	110	120	130	140	150	160	170	180
3 號 有紋紅	內外旋一圈(s)	x	x	120	10	8.3	7.7	7.9	9	13	
	順逆轉一圈(s)	x	x	108	-19	-7.1	-7.8	-8.9	-15	-42	
4 號 無紋紅	內外旋一圈(s)	x	x	126	9.5	9.5	12	17	21	13	
	順逆轉一圈(s)	x	124	78	-11	-6	-6.5	-7.2	-12	-16	

1 號彈簧(螺紋: 正)		rpm	190	200	210	220	230	240	250	260	270
3 號 有紋紅	內外旋一圈(s)	13	-73	-19	-18	11	x	-24	-6	-8	
	順逆轉一圈(s)	x	110	21	5.3	-59	-6	-9.5	-20	16	
4 號 無紋紅	內外旋一圈(s)	24	-53	-12	-19	12	x	-23	-6	-8	
	順逆轉一圈(s)	180	16	8.6	6.3	-19	-7.6	-9.1	-20	16	

我們也想出理論可以合理解釋為何過了共振頻率後，彈簧就會開始反旋或是反轉，若過了第一次的共振頻率後，彈簧的波速就會低於轉檯的擾動速度，此時我們可以當做彈簧相對板子的旋轉速率是反向的狀態，因此以下圖(B)來對照圖(A)可以解釋，為什麼彈簧過了共振點之後，就會反向移動，以此類推，再過一次共振點時，轉檯的頻率就會是簧彈的下一個頻率，此時又回到彈簧相對板子的速度為同方向的狀態。



整體而言，我們看到的彈簧旋轉變化是相對地球的座標系而言，而產生的原因，要從板子與彈簧的相對速度來探討。內外旋轉的機制也可以由此類比，開始轉動時都是外旋，在頻率高過旋轉維度的共振點，旋轉的方向就會改變。

四、波速隨著頻率上升的改變

表八、各駐波、頻率對照表

波數 n	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
頻率(Hz)	4.8	8.8	12.6	16.4	20.1	23.7
頻率差值	4	3.8	3.8	3.7	3.6	

以物理的公式，兩端固定端的彈簧之頻率 f ，與波速 v 、波長 λ 與波數 n 的關係為：

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}$$

由公式可以觀察，波數 n 與頻率應該要呈現正相關，但是隨著頻率的上升， n 之間的頻率差值會逐漸減少，可以得知頻率的上升對於彈簧的波速會有影響，理論上波速應該會固定不變，但實際的實驗後發現，波速會隨著頻率上升而變慢。

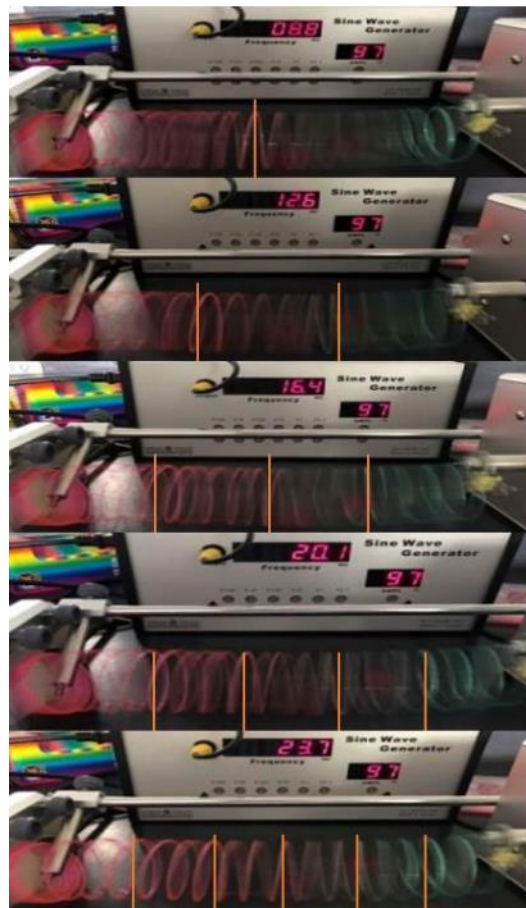


圖 19-各頻率下駐波的節點(照片不易拍攝落差，故以橘線標示)

本實驗的目的可以簡單驗證為什麼彈簧圈的共振頻率不是整數倍的關係，主要原因和彈簧圈在有摩擦力的情況下振動時，頻率的改變多少也會造成速率的改變。(參考資料五)

五、各彈簧自然頻率對照表

由於質量分散在整條彈簧圈上，且環形連結的限制條件，使其振動模式與直線彈簧不同，可能有多個自然頻率，我從實驗中觀察類似共振的現象，去推測系統的自然頻率的數值。在自然頻率的前後，可以看出順逆轉、內外旋的變化。

表九、各彈簧自然頻率

編號	彈力常數 (kgw/m)	順逆轉	內外旋
1 號彈簧	0.0744	順→190→逆→225→順→265→逆	外→195→內→225→外→240→內
2 號彈簧	0.0429	順→(155)→逆	外→240→內
3 號彈簧	0.0587	順→(165)→逆	外→255→內
4 號彈簧	0.0267	順→180→逆→220→順→260	外→260→內
5 號彈簧	0.0184	順→160→逆	外→160→內
6 號彈簧	0.0790	順→200→逆	外→200→內
7 號彈簧	0.0627	順→125→逆→(240)→順	外→130→內→(260)→外
8 號彈簧	0.0279	順→140→逆	不動→150→內
9 號彈簧	0.1014	順→205→逆	外(不反旋)
10 號器材	無	順→145→逆	外(不反旋)

註 1：由表九可以得知，可以推測彈力常數接近的彈簧會有相似的自然頻率。

註 2：黃底()的數值為機器振不出來，用手搖的方式找到共振頻率點。

註 3：輕彈簧低頻、重彈簧高頻要用手搖的方式找到共振點。

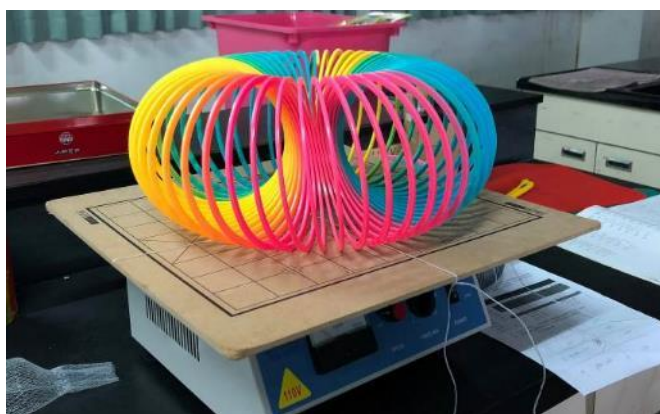


圖 20、底板加大對 7 號彈簧實驗裝置圖

伍、結論

一、若彈簧圈在自然頻率時，動能會在相同的頻率達到極小值的狀態，不論底板的材質、振幅的大小及水平的差異而改變此頻率的數值。

二、所有彈簧達到第一次共振頻率之前，彈簧順逆轉的旋轉方向皆是與底板的旋轉方向同向。內外旋的旋轉維度的部份，在第一次共振頻率之前，都是先外旋。

三、彈簧在共振頻率前後，旋轉(順逆轉、內外旋)的方向不會相同。

四、底板的旋轉振幅大小與方向(順逆時針)不會影響共振點的頻率。

陸、感想與展望

本研究從一開始的彈簧圈波動，到現在發現彈簧圈的新規律，並且找到簡單又漂亮的結果，這過程非常感謝老師、專家們的協助指導。因為本作品發現的是新的現象，我與老師花了非常多的時間討論出理論並歸納，經過幾年的時間才理出這些結果，我想這就是從事科學研究的成就感來源吧。

或許有人會問，發現這個現象可以做什麼應用？到目前為止我能感受到的是物理其中的樂趣，而無法想像為未來可以有什麼用處，只能引用法拉第當初發現電磁感應時，回答聽眾疑問的說法：「一個剛出生的小孩子，有什麼用呢？」。就予許我暫時以這個回答，來回應這個問題吧。

柒、參考資料

一、螺紋，維基百科：<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%9E%BA%E7%B4%8B>

二、科技大觀園-振動知多少？<https://scitechvista.nat.gov.tw/c/uxqT.htm>

三、教育百科：<http://pedia.cloud.edu.tw/Entry/Detail/?title=自然頻率>

四、高中基礎物理二(B)上下冊、選修物理上冊

五、色散-維基百科：<https://zh.wikipedia.org/wiki/色散关系>

六、煞車 VS 摩擦力。跟著鄭大師學科學。<https://www.masters.tw/200114/brake>






捌、附錄

一、研究器材初探

我們使用各式的彈簧秤，皆無法得知各彈簧的彈力常數，因此，請教老師後得知，可以用垂吊方法，量到各式彈簧的伸長量，用理論推算彩虹彈簧圈的彈力常數值。我們把此彈簧切成 n 段，例用高中物理上的知識 $F = k \cdot x$ 。

$$\text{段數趨近無窮時 } \Delta l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{mg(n+1)}{2nk} = \frac{mg}{2k}$$

由此得知總伸長量為總重量除以 2 倍的彈力常數，因此我們依序量其重量及內外徑、圈數與自然長度，先了解彈簧的特性。

		
(A) 我們把彈簧畫線以計算圈數		(B) 畫線的過程
		
(C) 較小彈簧的垂吊	(D) 中彈簧的垂吊	(E) 大彈簧的垂吊
附圖 1、彈簧並不是完整的圈數我們再彈簧上畫 2 條黑線，以便計算及吊掛彈簧		



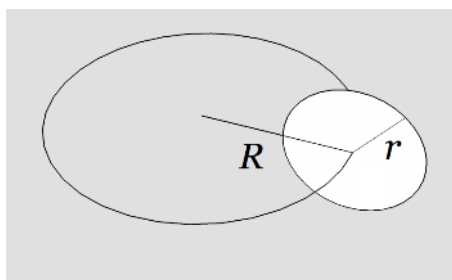
科展使用彈簧的基本特性整理如下，供實驗時可以找到其中物理的相關性使用

附表一、各彈簧的物理特性

彈簧 cm	1	2	3	4	5	6	7	8	9
圈數	97	34	47	73	91	53	49	189	88
重量(gw)	194.63	52.97	153.38	133.11	122.97	390	830	490	89
高度 X(cm)	7.2	6.3	10.4	15.2	15.4	14.1	16.9	12	5
內圈直徑(mm)	61.0	70.5	70.6	68.9	68.5	117.5	161.0	72.7	44.2
外圈直徑(mm)	65.0	75.2	85.0	71.2	73.1	129.6	162	77.6	47.5
自然長度 Y(cm)	138	68	141	264	350	261	679	889	49
伸長量 Y-X(cm)	130.8	61.7	130.6	248.8	334.6	246.9	662.1	877	44
彈力常數(kgw/m)	0.0744	0.0429	0.0587	0.0267	0.0184	0.0790	0.0627	0.0279	0.1014

二、總動能的探討(本科展討論動能以此為依據)

(一)轉動的動能計算



附圖 3、每圈彈簧的對應大小半徑長度示意圖

我們假設彈簧有 n 圈，每圈的質量 $m' = \frac{m}{n}$ ，轉動慣量就是 $m'r^2$

此時把每一個圈的轉動慣量由垂直軸定理得 $I' = \frac{1}{2} m'r^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{n} r^2$

由平行軸定理將軸移出 R ，得到相對圓心運動的 $I' = \frac{1}{2} m' r^2 + \frac{m}{n} R^2$

n 圈的轉動慣量總和 $I = \frac{1}{2} m r^2 + m R^2$ ，若每圈的圓圈旋轉角速度 ω_R

轉動動能 $E_k = \frac{1}{2} I \omega_R^2 = \frac{1}{4} m r^2 \omega_R^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega_R^2 = m \omega_R^2 (\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{2} R^2)$

(二)內外旋動能

我們假設彈簧有 n 圈，每圈的質量 $m' = \frac{m}{n}$

每一個圈的轉動慣量 $I' = m' r^2 = \frac{m}{n} r^2$

旋轉角速度 ω_r ，每一個圈的轉動動能為 $E_k' = \frac{1}{2} I' \omega_r^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{n} r^2 \omega_r^2$

n 圈的轉動動能 $E_k = n E_k' = \frac{1}{2} m r^2 \omega_r^2$

(三)總動能

本次研究可以觀察出，彈簧圈的運動主要分為順逆轉動及內外旋轉，故總動能包含轉動動能及內外旋動能，由(一)及(二)的結果可以得知總共的動能為

$$E_{total} = m \omega_R^2 (\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{2} R^2) + \frac{1}{2} m r^2 \omega_r^2$$

由式中可看出轉動動能與角頻率 ω_R 的平方成正比

由式中可看出旋轉動能與角頻率 ω_r 的平方成正比

報告中，我們先初步以動能公式推論， $E = \frac{1}{2} m v^2$ ， $E = \frac{1}{2} m v^2 \propto v^2 \propto (\frac{1}{t})^2$ ，在質量固定的情況下，於是我們把旋轉一圈的時間倒數平方後，單位時間各圈移動的位移是相同的，所以用 $(\frac{1}{t})^2$ 來觀察不同頻率下的動能是非常方便。

至於旋轉動能部份，能量值則隨著頻率升高而提升，並無觀察到特別的能量最低的值。我們也觀察轉動動能，以轉動動能公式推論， $E = \frac{1}{2} I \omega^2$ ，在轉動慣量固定的情況

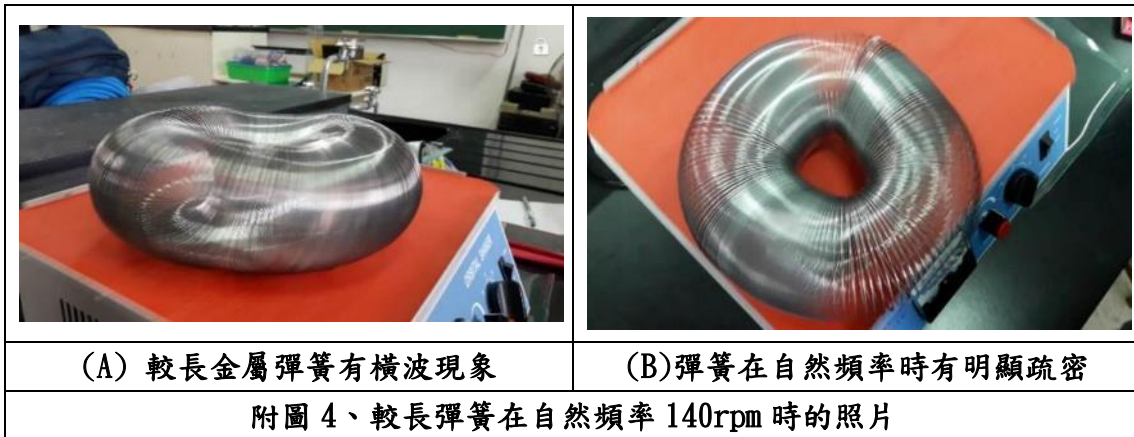
下， $E = \frac{1}{2} I \omega^2 \propto \omega^2 \propto (\frac{1}{t})^2$ ，於是我們把內旋或外旋一圈的時間倒數平方後，來觀察不同頻率下 $(\frac{1}{t})^2$ 的值。

三、8 號彈簧實驗

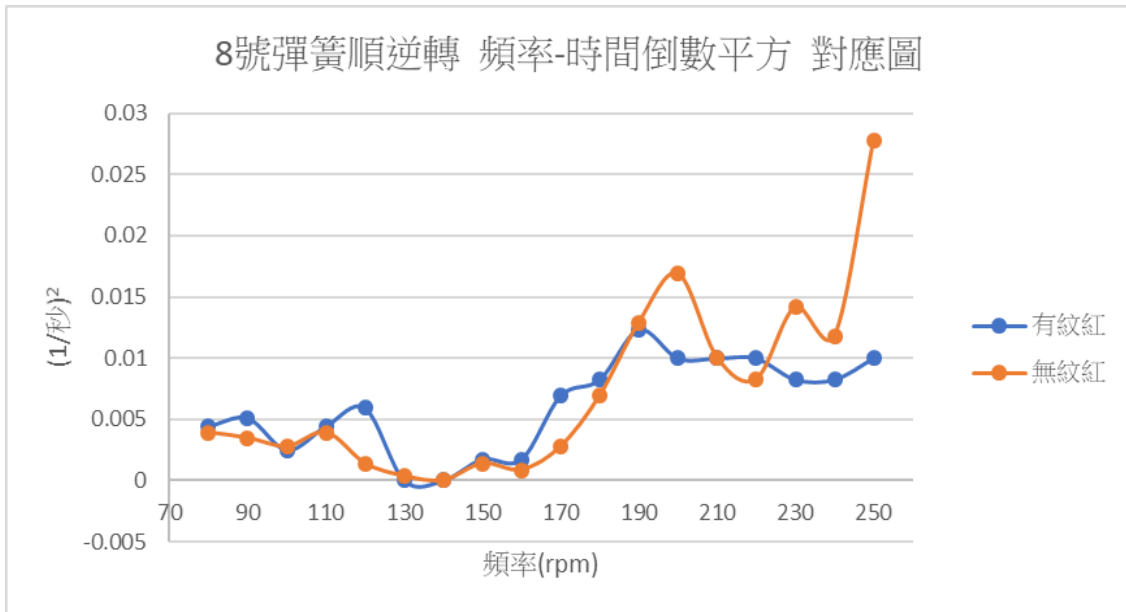
我也用了較長的金屬彈簧進行實驗，頻率為 140rpm 時，有最低旋轉能量，也觀察到和其他彈簧一樣在頻率高於 140rpm 後有反轉現象。

附表二、8 號彈簧在各頻率下旋轉一圈所需的時間

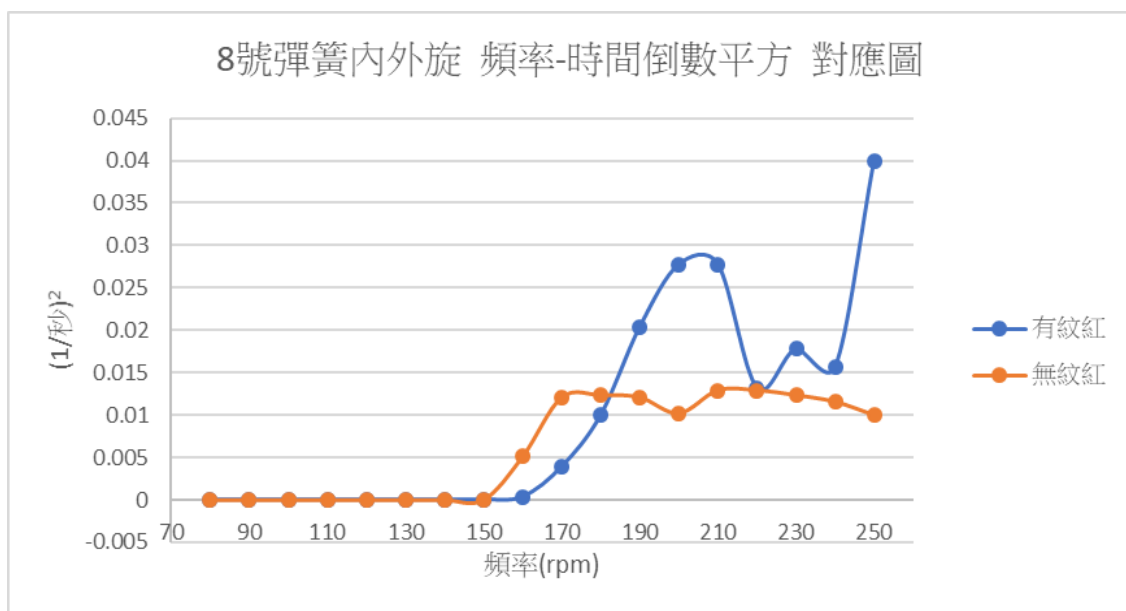
8 號彈簧	rpm	80	90	100	110	120	130	140	150	160
3 號 有紋紅 彈簧螺紋: 順	內外旋一圈(s)	x	x	x	x	x	x	x	x	-53
	順逆轉一圈(s)	15	14	20	15	13	x	x	-24	-24
	rpm	170	180	190	200	210	220	230	240	250
	內外旋一圈(s)	-16	-10	-7	-6	-6	-8.7	-7.5	-8	-5
	順逆轉一圈(s)	-12	-11	-9	-10	-10	-10	-11	-11	-10
8 號彈簧	rpm	80	90	100	110	120	130	140	150	160
4 號 無紋紅 彈簧螺紋: 順	內外旋一圈(s)	x	x	x	x	x	x	x	x	-14
	順逆轉一圈(s)	16	17	19	16	27	54	x	-27	-34
	rpm	170	180	190	200	210	220	230	240	250
	內外旋一圈(s)	-9.1	-9	-9.1	-9.9	-8.8	-8.8	-9	-9.3	-10
	順逆轉一圈(s)	-19	-12	-8.8	-7.7	-10	-11	-8.4	-9.2	-6



彈簧在自然頻率時，不只是單純的轉動旋轉，也有共振的效應產生，每片金屬圓彈簧片都是在原地振動，這振動頻率與機檯旋轉頻率相同時才有的現象，此時的動能幾乎是儲存在位能的形式，因此觀察不出彈簧的順逆轉或內外旋的情況。



附圖 5、第 8 號彈簧移動動能與頻率的關係



附圖 6、第 8 號彈簧轉動動能與轉動的關係

由上圖可以對照 8 號彈簧的轉動動能與移動動能隨頻率的關係可以得知，在頻率為 140rpm 前，幾乎沒有內外旋的效應，而在高過自然頻率後，內外旋的效應才產生出來，可以由上圖觀察出在有紋紅板的情況下，頻率高過 190rpm 時移動動能幾乎沒有增加，而是增加轉動動能，而在無紋紅板的情況下，高過 190rpm 的頻率時，旋轉動能幾乎不變，而是移動動能會隨頻率而有所增加，因此可以初步推測，就第 8 號的彈簧而言，底板條紋對於旋轉及轉動的動能分配，會有一定的影響。