第十七屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA17-367

作品名稱：等周不等式之延伸研究

姓名：葉芷彤

關鍵字：等周不等式、錐形區域、平滑凸形區域

等周不等式之延伸研究

葉芷彤

摘　要

本研究主要分為兩部分。第一部分是探討「n 根棒子如何在凸形區域內圍出最大面積」，發現最大面積會發生在棒子間的接點均落在同一圓弧上的時候。再透過第一部分的結果，推得第二部分「一條繩子如何在凸形區域內圍出最大面積」研究發現圍出最大面積的情況是當繩子恰為圓弧的一部分。最後更進一步得出所圍出的凸形區域面積與繩長的關係，也就是我們最終的結果「另類的等周不等式」。

壹、研究動機

在國中，一元二次函數的習題中常會遇到題目敘述要用一條繩子在一面牆的一側圍出一個矩形花圃，在什麼樣的情況下圍出的花圃會有最大面積。由此我們衍生出兩個問題：

一、 如何用三根棒子在牆邊圍出最大面積。

二、 如何用一樣長度的繩子圍出更大的面積。

所謂的等周不等式是指用一條繩子長度為 ℓ ，任意圍出的區域面積為 A ，則 ℓ 和 A 的不等式關係如下

$$4\pi A \leq \ell^2$$

利用等周不等式可以解決上述的第二個問題。因此我們把研究重心放在第一個問題上。然而，當第一個問題的研究結果大致完成時，我們又發現此成果可以回來探討等周不等式的延伸研究。因此，我們擬定出下列的研究問題：

研究問題 1. 給定 n 根棒子，如何圍出最大面積？

(1) 在半平面區域內圍出最大面積。

(2) 在錐形區域內圍出最大面積。

(3) 在邊界為平滑曲線的凸形區域內圍出最大面積。

研究問題 2. 給定一條繩子，如何圍出最大面積？

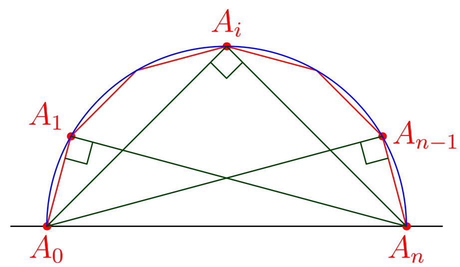
(1) 在錐形區域內圍出最大面積。

(2) 在邊界為平滑曲線的凸形區域內圍出最大面積。

貳、研究目的

根據上節的研究問題，我們證明了下列幾個主要定理：

主要定理 1. 給定 n 根棒子，其長度分別為 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$。設此 n 根棒子在半平面上圍出最大面積的多邊形的頂點為 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$，其中 $\overline{A_0A_1} = \ell_1, \overline{A_1A_2} = \ell_2, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n} = \ell_n$ ，則頂點 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ 均落在直徑 $\overline{A_0A_n}$ 的半圓上。



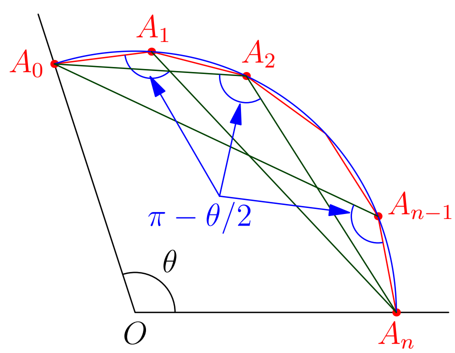
主要定理 2. 給定 n 根棒子，其長度分別為 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$。此 n 根棒子在夾角為 θ 頂點為 O 的錐形區域內，設圍出最大面積的多邊形的頂點為 $O, A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$，其中 $\overline{A_0A_1} = \ell_1, \overline{A_1A_2} = \ell_2, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n} = \ell_n$ 。則頂點 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ 均落在以 O 為圓心、以 $\overline{OA_0}$ 為半徑的圓弧上，

即

$$\overline{OA_0} = \overline{OA_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

或者以角度表示如下

$$\angle A_0A_iA_n = \pi - \frac{\theta}{2}, \quad 1 \leq i \leq n-1$$



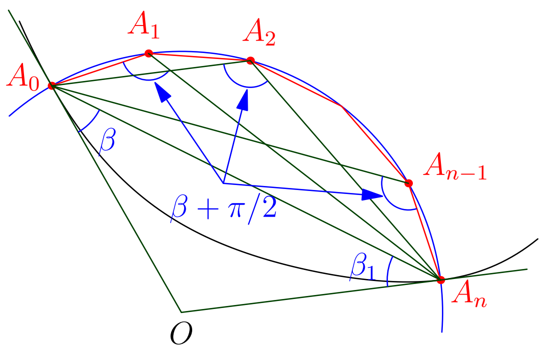
主要定理二說明了「n 根棒子在錐形區域上，圍出最大面積的條件是所有棒子的接點均落在錐形頂點為圓心的圓弧上」。現在，如果我們把平滑曲線看成無窮多個線段的組合，則「在邊界為平滑曲線的區域內，圍出最大面積的條件是所有棒子的接點（包含棒子與平滑曲線的兩個接點）必須落在同一圓弧上，且圓心位於以棒子與平滑曲線接點處為切點的兩條切線之交點」。因此，我們做了如下的推廣：

主要定理 3. 給定 n 根棒子，其長度分別為 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$。此 n 根棒子在邊界為平滑曲線的凸形區域內，設圍出最大面積的頂點為 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$，其中 A_0, A_n 為棒子與平滑曲線的接點，$\overline{A_0A_1} = \ell_1, \overline{A_1A_2} = \ell_2, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n} = \ell_n$ 。令平滑曲線上以 A_0, A_n 為切點的兩條切線的交點為 O，如下圖。則

$$\overline{OA_0} = \overline{OA_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

或者以角度表示：令 $\angle OA_0A_n = \beta$ 和 $\angle OA_nA_0 = \beta_1$ ，則

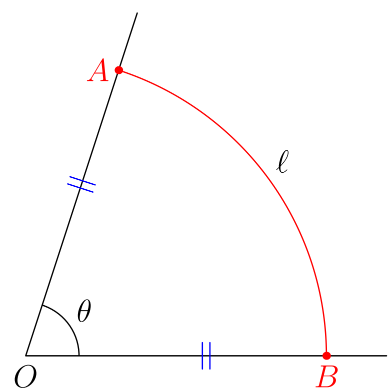
$$\beta = \beta_1 \quad 且 \quad \angle A_0A_iA_n = \beta + \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq i \leq n-1$$



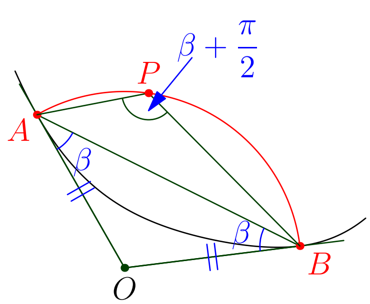
前面我們討論的都是如何用棒子圍出最大面積，並且將平滑曲線看成無窮多個線段的組合。同樣地，我們也可將繩子看成無窮多個根棒子的組合，因此我們也可以推廣繩子圍出最大面積的相關結果。

主要定理 4. 給定一條長度為 ℓ 的繩子，在頂點為 O 、夾角為 θ 的錐形區域內圍出一塊區域。則當繩子落在以 O 為圓心的圓弧上時，此時圍出區域的面積為最大。更進一步，設圍出區域的面積為 A，則有下列的等周不等式

$$A \leq \frac{\ell^2}{2\theta}$$



主要定理 5. 給定一條長度為 ℓ 的繩子，在邊界為平滑曲線的凸形區域內，圍出一塊區域。此圍出區域最大面積發生在「以繩子兩端與平滑曲線接點處為切點的兩條切線之交點為圓心，此交點到接點的長度為半徑，所畫出的圓弧上」，如下圖。



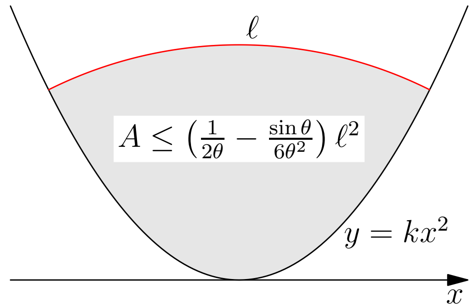
最後，我們再把問題回到推廣傳統的等周不等式。以下以邊界是拋物線為例說明我們所謂「等周不等式之延伸研究」。

主要定理 6. 以長度為 ℓ 的繩子在邊界為拋物線 $y = kx^2$ $(k > 0)$ 的凸形區域內任意圍出一塊區域。設圍出區域的面積為 A ，則有下列不等式

$$A \leq (\frac{1}{2\theta} - \frac{\sin\theta}{6\theta^2})\ell^2$$

其中 θ 為下列方程式的解：

$$2k\ell\sin^2\frac{\theta}{2} = \theta\cos\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < \pi$$



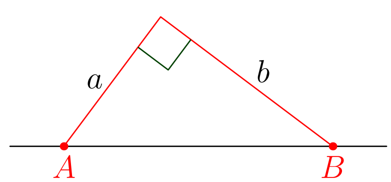
參、研究過程與方法

首先，我們將整個研究分成兩部分，第一部分是「n 根棒子如何在凸形區域內圍出最大面積」，第一部分又分成三段來證明，分別是半平面區域、錐形區域以及平滑凸形區域。第二部分是「一條繩子如何在給定邊界的區域內圍出最大面積」。第二部分也分成錐形區域、邊界為拋物線的凸形區域和邊界為平滑曲線的凸形區域三段，並且得出錐形區域和拋物線上的等周不等式。第一部分的半平面區域與錐形區域的證明，只需要高中二年級的數學知識即可。但是，第一部分的平滑凸形區域與第二部分因為牽涉到曲線所圍的面積，要用到微積分的「求極值」與「微積分基本定理」。以下，就是主要定理的研究過程與方法。

一、半平面區域

本小節將處理 n 根棒子在半平面上，圍出最大面積的條件。底下我們將依 $n = 2$、$n = 3$、$n > 3$ 的順序來證明主要定理。

引理 1. 給定 2 根棒子，長度分別為 a、b，則在半平面區域內圍出的最大面積是 $\frac{1}{2}ab$。

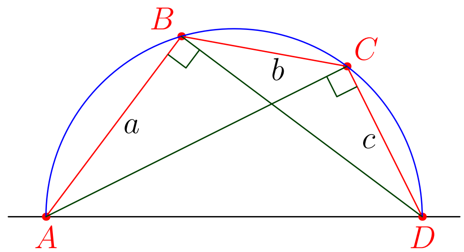


Proof. 設 2 根棒子的夾角為 θ，則圍出的三角形面積為

$$f(\theta) = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

其中 a、b 為定值。因此，$f(\theta)$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的時候有最大值，也就是當 2 根棒子成垂直時，可圍出最大面積 $\frac{1}{2}ab$。 □

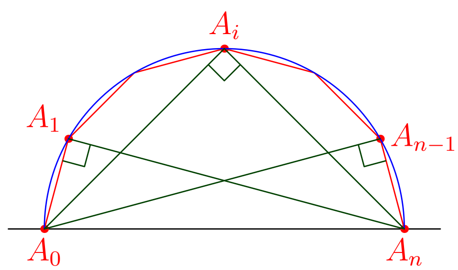
引理 2. 給定 3 根棒子，長度分別為 a、b、c，設在半平面區域內圍出四邊形的頂點為 A, B, C, D，其中 $\overline{AB} = a$、$\overline{BC} = b$、$\overline{CD} = c$，則最大面積發生在 $\angle ABD$ 和 $\angle ACD$ 均為直角。



Proof. 考慮新問題，給定一根棒子 $\overline{AB}$ 和一個三角形 $\triangle BCD$ ，如何在半平面區域內圍出最大面積。由定理 1 知，$\overline{AB}$ 必定垂直 $\overline{BD}$ 。同理可證，$\overline{AC}$ 也必定會垂直 $\overline{CD}$ 。 □

由國中所學知道，在三角形 $\triangle ABD$ 中，當底邊 $\overline{AD}$ 為定值且 $\angle ABD = \dfrac{\pi}{2}$ 時，則動點 B 點必定會落在半圓弧上，$\overline{AD}$ 即為此圓的直徑。底下將證明上述定理在 $n > 3$ 的情況，仍然成立。

主要定理 1. 給定 n 根棒子，長度分別為 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$，設在半平面區域內圍出多邊形的頂點為 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$，其中 $\overline{A_0A_1} = \ell_1, \overline{A_1A_2} = \ell_2, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n} = \ell_n$ 。則最大面積發生在頂點 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ 均落在直徑為 $\overline{A_0A_n}$ 的半圓上。



Proof. 考慮新問題，給定一根棒子 $\overline{A_0A_1}$ 和一個多邊形 $A_1A_2 \ldots A_n$ ，如何在半平面區域內圍出最大面積。由引理 1知，$\overline{A_0A_1}$ 必定垂直 $\overline{A_1A_n}$ 。同理，考慮兩個多邊形 $A_0A_1 \ldots A_i$ 和 $A_iA_{i+1} \ldots A_n$ 在半平面區域內圍出最大面積，其中自然數 $i = 2, 3, \ldots, n-1$ 。再由引理 1知，$\angle A_0A_iA_n$ 也必定是直角，故得證。 □

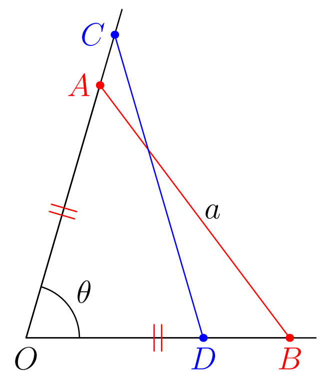
二、錐形區域

在第一小節中，我們已經處理 n 根棒子在半平面上，圍出最大面積的條件。我們知道「直線可以看成兩條半線的聯集」，而由兩條半線圍成的區域一般稱為『錐形區域』。因此，本小節將討論更一般的情況：n 根棒子在錐形區域上，圍出最大面積的條件。如同第一小節的證明方式，底下我們也將討論依 $n = 1$、$n = 2$、$n > 2$ 的順序來證明錐形區域下的主要定理。

引理 3. 設錐形區域的頂點為 O 、頂角為 θ $(0 < \theta < \pi)$。給定 1 根棒子，長度為 a，棒子與錐形區域兩邊的接點為 A, B，則圍出的 $\triangle OAB$ 最大面積發生在 $\overline{OA} = \overline{OB}$ ，且此時面積恰為

$$\frac{a^2}{4} \cot \frac{\theta}{2}.$$

Proof. 如右圖，設



$$\overline{OA} = x, \quad \overline{OB} = y$$

由餘弦定理得

$$x^2 + y^2 = a^2 + 2xy\cos\theta$$

根據算幾不等式

$$a^2 + 2xy\cos\theta = x^2 + y^2 \geq 2xy$$

所以

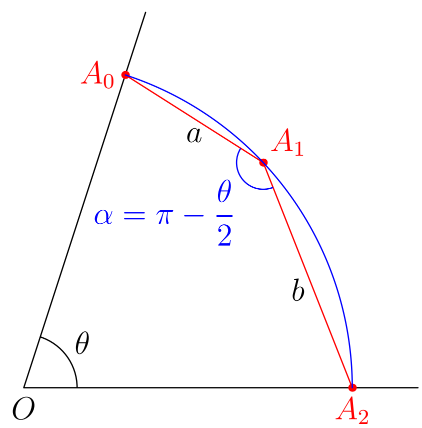
$$xy \leq \frac{a^2}{2(1-\cos\theta)}$$

當等號成立時，$\triangle OAB$ 發生最大面積。此時 $x = y$，即 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 。故圍出的最大面積為

$$\triangle OAB \text{ 的面積} = \frac{1}{2}xy\sin\theta = \frac{a^2\sin\theta}{4(1-\cos\theta)} = \frac{1}{4}a^2\cot\frac{\theta}{2}$$

□

引理 4. 給定 2 根棒子，長度分別為 a, b。在頂點為 O、夾角為 θ $(0 < \theta \leq \pi)$ 的錐形區域內，設圍出最大面積的四邊形為 $OA_0A_1A_2$，其中 A_0, A_2 為棒子與兩邊界的接點、A_1 為兩根棒子的接點，如下圖。則 $\overline{OA_0} = \overline{OA_1} = \overline{OA_2}$，因此 $\angle A_0A_1A_2 = \pi - \dfrac{\theta}{2}$。



Proof. 當 $\theta = \pi$ 時，利用引理 1得知 $\triangle A_0A_1A_2 = \dfrac{\pi}{2}$，即得證。以下證明 $0 < \theta < \pi$ 亦成立。設 $\overline{A_0A_2}$ 的長度為 ℓ 。考慮新問題「給定一個三角形 $\triangle A_0A_1A_2$ ，如何在錐形區域內圍出最大面積」，由引理 3分別可得

$$\overline{OA_0} = \overline{OA_2} \quad 且 \quad \Delta OA_0A_2 \text{ 的面積} = \frac{1}{4}\ell^2\cot\frac{\theta}{2}$$

設 $\angle A_0A_1A_2 = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$，再由餘弦定理與三角形的面積公式可得下列兩個等式

$$\ell^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \tag{1}$$

$$\text{四邊形 } OA_0A_1A_2 \text{ 的面積: } \Phi(\alpha) = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{4}\ell^2\cot\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

將 (1) 式代入 (2) 式，化簡得

$$\Phi(\alpha) = \frac{a^2+b^2}{4} \cdot \cot\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}ab\left(\sin\alpha - \cos\alpha\cot\frac{\theta}{2}\right) \tag{3}$$

因為 a, b, θ 為已知的定值，由 柯西不等式 得知最大面積發生在

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{-\cos\alpha}{\cot\frac{\theta}{2}}$$

故解得

$$\tan\alpha = -\tan\frac{\theta}{2} \quad \text{或者} \quad \alpha = \pi - \frac{\theta}{2}$$

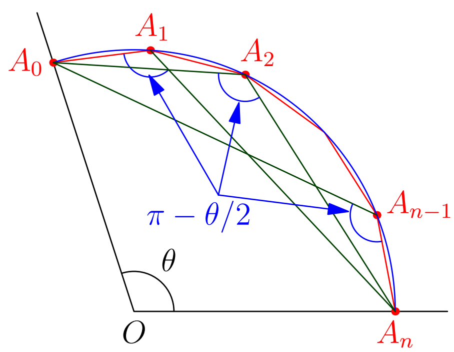
上式再結合 $\overline{OA_0} = \overline{OA_2}$，即得證 A_0, A_1, A_2 三點落在以 O 為圓心的圓弧上。 □

主要定理 2. 給定 n 根棒子，長度分別為 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$，設在頂點為 O、頂角為 θ $(0 < \theta \leq \pi)$ 的錐形區域內圍出多邊形的頂點為 $O, A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$，其中 A_0, A_n 為棒子與邊界的接點、A_i 為棒子間的接點 $(1 \leq i \leq n-1)$，即

$$\overline{A_{i-1}A_i} = \ell_i, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$$

如下圖。則多邊形 $OA_0A_1A_2\ldots A_n$ 最大面積發生在頂點 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ 均落在圓心為 O 的圓弧上，亦即

$$\overline{OA_0} = \overline{OA_n} \quad \text{且} \quad \angle A_0A_iA_n = \pi - \frac{\theta}{2}, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n-1$$



Proof. 考慮新問題「給定一個多邊形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ ，如何在錐形區域內圍出最大面積」，由引理 3 可得

$$\overline{OA_0} = \overline{OA_n}$$

再考慮問題「給定一根棒子 $\overline{A_0A_1}$ 和一個多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ ，如何在錐形區域內圍出最大面積」。由引理 4 知

$$\angle A_0A_1A_n = \pi - \frac{\theta}{2}$$

同理，考慮兩個多邊形 $A_0A_1\ldots A_i$ 和 $A_iA_{i+1}\ldots A_n$ 在錐形區域內圍出最大面積，其中自然數 $i = 2, 3, \ldots, n-1$ 。由引理 4 得知

$$\angle A_0A_iA_n = \pi - \frac{\theta}{2}, i = 2, \ldots, n-1$$

因此，$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ 必落在圓心為 O 的圓弧上。 □

三、平滑凸形區域

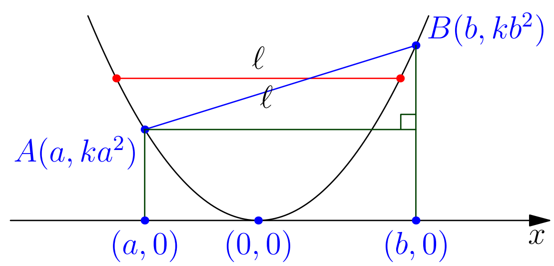
在上一小節，我們處理了 n 根棒子在錐形區域上，發現圍出最大面積的條件是所有棒子的接點均落在錐形頂點為圓心的圓弧上。在本小節，我們將處理「n 根棒子在邊界為平滑曲線的區域內，圍出最大面積的條件」。如果我們把平滑曲線看成無窮多個線段的組合，我們猜測「在邊界為平滑曲線的區域內，圍出最大面積的條件是所有棒子的接點（包含棒子與平滑曲線的兩個接點）必須落在同一圓弧上，且圓心位於以棒子與平滑曲線接點處為切點的兩條切線之交點」。為了便於說明，我們不妨將區域限制為邊界為平滑曲線圍的凸形區域，其中凸形區域是指「若一條線段的兩個端點落在該區域內，則此線段上的所有點也必定落在此區域內」。

首先，我們先驗證「邊界為拋物線的凸形區域是否符合我們的猜測」。而要圍出最大面積，由鏡射的原理可知圍出的區域必定為凸形區域。因此底下均考慮棒子圍出的區域為凸形區域的情況。

引理 5. 給定 1 根棒子長度為 ℓ ，在邊界為拋物線 $y = kx^2, k > 0,$ 的凸形區域內圍出一塊區域。當棒子呈水平時，此區域會達到最大面積 $\frac{1}{6}k\ell^3$。

Proof. 設棒子和拋物線交於 $A(a, ka^2)$ 、$B(b, kb^2)$，其中 $a \le 0$、$b \ge 0$，如下圖。則棒子所圍凸形區域的面積為

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(ka^2+kb^2)(b-a) - \int_a^b kx^2\,dx \\
=&\frac{k}{2}(b^3-ab^2+a^2b-a^3) - \frac{k}{3}(b^3-a^3) \\
=&\frac{k}{6}(b-a)^3
\end{aligned}$$



因為直角三角形斜邊最長，故

$$b - a \le \ell$$

即可得

$$\frac{k}{6}(b-a)^3 \le \frac{1}{6}k\ell^3$$

因此，當棒子呈水平時，會圍出最大面積。 □

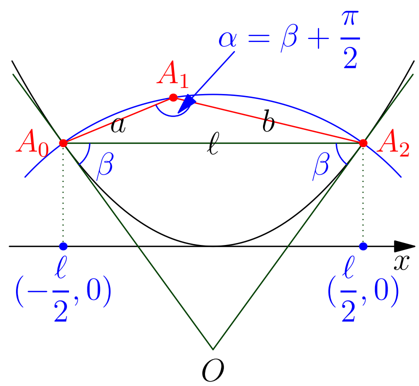
引理 6. 給定 2 根棒子長度分別為 a, b，在邊界為拋物線 $y = f(x) = kx^2, k > 0,$ 的凸形區域內，設圍出凸形區域的頂點為 A_0, A_1, A_2，其中 A_0, A_2 為棒子與兩邊界的接點、A_1 為兩根棒子的接點，即

$$\overline{A_0A_1} = a, \quad \overline{A_1A_2} = b$$

設 O 為拋物線上以 A_0, A_2 兩點為切點的兩條切線之交點，如下圖，則當

$$\overline{OA_0} = \overline{OA_1} = \overline{OA_2}$$

時，可圍出最大面積。



Proof. 令 $\angle A_0A_1A_2 = \alpha \ \ (0 < \alpha < \pi)$, $\angle OA_0A_2 = \beta \ \ (0 < \beta < \dfrac{\pi}{2})$。底下我們將只證明

$$\overline{OA_0} = \overline{OA_2} \quad 和 \quad \alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$$

理由如下：因為 $\overline{OA_0} = \overline{OA_2}$，所以 $\angle OA_2A_0 = \beta$。令 $\overline{A_0A_2} = \ell$, 上式結合「正弦定理」與「正弦的倍角公式」可得

$$\triangle A_0A_1A_2 \text{ 的外接圓半徑 } = \frac{\ell}{2\sin\alpha} = \frac{\ell}{2\cos\beta} = \frac{\ell\sin\beta}{\sin 2\beta} = \frac{\ell\sin\beta}{\sin(\pi-2\beta)} = \frac{\ell\sin\angle A_0A_2O}{\sin\angle A_0OA_2} = \overline{OA_0}$$

考慮新問題「給定三角形 $\triangle A_0A_1A_2$ ，如何在邊界為拋物線的區域內圍出最大面積」，由引理 5 得知 $\overline{A_0A_2}$ 必平行 x 軸，所以 $\overline{OA_0} = \overline{OA_2}$ 且 $\overline{A_0A_2}$ 與拋物線圍出的面積恰等於 $\dfrac{1}{6}k\ell^3$。更進一步，考慮此兩根棒子與拋物線圍出的面積，由餘弦定理與引理 5 可得下列兩個等式：

$$\ell^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \tag{4}$$

$$\text{棒子圍出的面積：} \ \Phi(\alpha) = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{6}k\ell^3 \tag{5}$$

將 (4) 式對 α 微分，得到

$$\ell\ell' = ab\sin\alpha \tag{6}$$

另一方面，將 (5) 式對 α 微分，因為最大面積發生在 $\dfrac{d\Phi}{d\alpha} = 0$ ，因此

$$0 = \frac{1}{2}ab\cos\alpha + \frac{1}{2}k\ell^2\ell'$$

將 (6) 式代入上式得

$$0 = \frac{1}{2}ab\cos\alpha + \frac{1}{2}k\ell\cdot ab\sin\alpha$$

經移項化簡得到

$$k\ell\tan\alpha = -1$$

因為 $\overline{A_0A_2}$ 平行於 x 軸且 $\overline{A_0A_2} = \ell$，所以 A_2 的 x 坐標為 $\dfrac{\ell}{2}$。由於 $k\ell = f'(\dfrac{\ell}{2}) = \tan\beta$ ，因此解得

$$\tan\alpha\tan\beta = -1$$

因為 $0 < \alpha < \pi$ 和 $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，所以 $\alpha = \beta + \dfrac{\pi}{2}$。 □

引理 7. 給定 n 根棒子，長度分別為 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$，在邊界為拋物線 $y = f(x) = kx^2, k > 0,$ 的凸形區域內，設圍出凸形區域的頂點為 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$，其中 A_0, A_n 為棒子與邊界的接點、A_i 為棒子間的接點 $(1 \le i \le n-1)$，即

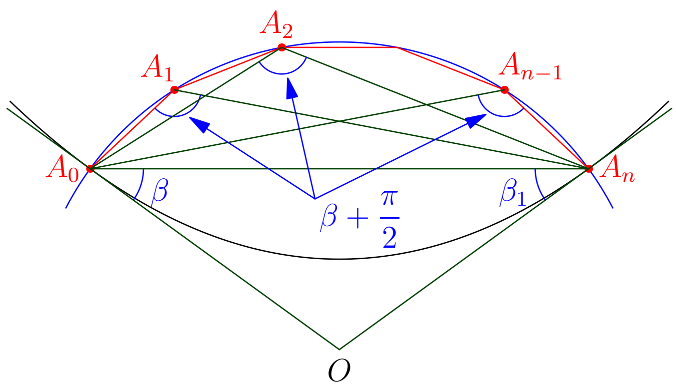
$$\overline{A_{i-1}A_i} = \ell_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

設 O 為拋物線上以 A_0, A_n 兩點為切點的兩條切線之交點，如下圖。則當

$$\overline{OA_0} = \overline{OA_i}, \quad 1 \le i \le n$$

時，可圍出最大面積。或者，以角度表示上述條件: 令 $\angle OA_0A_n = \beta$ 和 $\angle OA_nA_0 = \beta_1$ ，則

$$\beta = \beta_1 \quad 且 \quad \angle A_0A_iA_n = \beta + \frac{\pi}{2}, \quad 1 \le i \le n-1$$



Proof. 考慮新問題「給定一個多邊形 $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ ，如何在邊界為拋物線的區域內圍出最大面積」，由引理 5 可知

$$\angle OA_0A_n = \angle OA_nA_0 = \beta$$

再考慮問題「給定一根棒子 $\overline{A_0A_1}$ 和一個多邊形 $A_1A_2 \ldots A_n$ ，如何在邊界為拋物線的區域內圍出最大面積」。由引理 6 知

$$\angle A_0A_1A_n = \beta + \frac{\pi}{2}$$

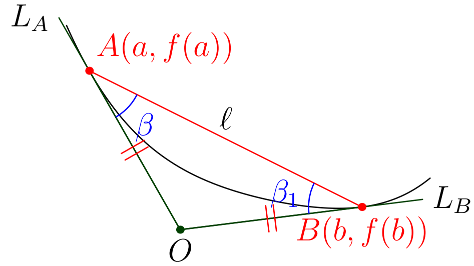
同理，考慮兩個多邊形 $A_0A_1 \ldots A_i$ 和 $A_iA_{i+1} \ldots A_n$ 在邊界為拋物線的區域內圍出最大面積，其中自然數 $i = 2, 3, \ldots, n-1$ 。一樣由引理 6 可得

$$\angle A_0A_iA_n = \beta + \frac{\pi}{2}, \quad i = 2, \ldots, n-1$$

因此，$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ 必落在圓心為 O 的圓弧上。 □

由上述引理可知，邊界為拋物線的凸形區域，符合我們的猜測。所以我們進一步想要證明邊界為平滑曲線的凸形區域，是否也會符合我們的猜測。

引理 8. 給定 1 根棒子長度為 ℓ，在邊界為平滑曲線 $y=f(x)$ 的凸形區域內圍出一塊區域。設 A, B 為棒子與兩邊界的接點、O 為 $y=f(x)$ 上以 A 和 B 兩點為切點的兩條切線的交點，如下圖。當 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 時，可圍出最大面積。



Proof. 設 A 的坐標為 $(a,f(a))$ 、B 的坐標為 $(b,f(b))$ 、$y=f(x)$ 上以 A 和 B 兩點為切點的切線分別為 L_A 和 L_B 、$\overline{AB}$ 與 L_A 的夾角為 β 、$\overline{AB}$ 與 L_B 的夾角為 β_1，如上圖。由微分及直線斜率的定義可得

$$L_A \text{ 的斜率} = f'(a)$$
$$L_B \text{ 的斜率} = f'(b)$$
$$\overline{AB} \text{ 的斜率：} \; m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{7}$$

再由正切的差角公式得到

$$\tan\beta = \frac{m-f'(a)}{1+mf'(a)} \tag{8}$$
$$\tan\beta_1 = \frac{f'(b)-m}{1+mf'(b)} \tag{9}$$

考慮棒子的長度，以及棒子在此凸形區域內圍出的面積。我們有下列兩個等式：

$$\ell^2 = [f(b)-f(a)]^2 + (b-a)^2 \tag{10}$$
$$\text{棒子圍出的面積：} \; \Phi = \frac{[f(a)+f(b)](b-a)}{2} - \int_a^b f(x)\,dx \tag{11}$$

因為 ℓ 為已知的定值，由 (10) 式可知，我們可將 b 看成是 a 的函數。因此將 (10) 式兩邊同時對 a 微分，得

$$0 = 2[f(b)-f(a)][b'f'(b)-f'(a)] + 2(b-a)(b'-1)$$

化簡可得

$$1-b' = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}[b'f'(b)-f'(a)]$$

把 (7) 式代入上式，解得

$$b' = \frac{1+mf'(a)}{1+mf'(b)} \tag{12}$$

在 (11) 式中，因為最大面積發生在 $\dfrac{d\Phi}{da}=0$，由微積分基本定理得

$$0=\frac{f'(a)+b'f'(b)}{2}(b-a)+\frac{f(a)+f(b)}{2}(b'-1)-b'f(b)+f(a)$$

經化簡可得

$$\frac{f(a)-f(b)}{b-a}(b'+1)+[b'f'(b)+f'(a)]=0$$

再把 (7) 式代入上式，解得

$$b'=\frac{m-f'(a)}{f'(b)-m} \tag{13}$$

綜合 (12) 和 (13) 兩式，即得

$$\frac{1+mf'(a)}{1+mf'(b)}=\frac{m-f'(a)}{f'(b)-m}$$

再由 (8) 和 (9) 兩式得

$$\tan\beta=\frac{m-f'(a)}{1+mf'(a)}=\frac{f'(b)-m}{1+mf'(b)}=\tan\beta_1$$

故得證。 □

引理 9. 給定 2 根棒子長度分別為 a,b，在邊界為平滑曲線 $y=f(x)$ 的凸形區域內，設圍出凸形區域的頂點為 A_0,A_1,A_2，其中 A_0,A_2 為棒子與兩邊界的接點、A_1 為兩根棒子的交點，即

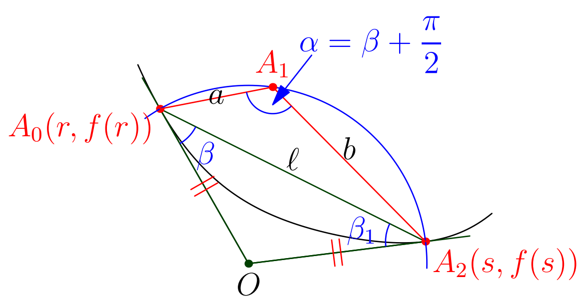
$$\overline{A_0A_1}=a,\quad \overline{A_1A_2}=b$$

設 O 為平滑曲線上以 A_0,A_2 兩點為切點的兩條切線之交點，如下圖。當

$$\overline{OA_0}=\overline{OA_1}=\overline{OA_2}$$

時，可圍出最大面積。或者，以角度表示上述條件：令 $\angle OA_0A_2=\beta$ 和 $\angle OA_2A_0=\beta_1$，則

$$\beta=\beta_1 \quad 且 \quad \angle A_0A_1A_2=\beta+\frac{\pi}{2}$$



Proof. 設 A_0 的坐標為 $(r, f(r))$ 、A_2 的坐標為 $(s, f(s))$ 、$\overline{A_0A_2} = \ell$ 、$\angle A_0A_1A_2 = \alpha, 0 < \alpha \leq \pi$, 如上圖。考慮新問題「給定 $\triangle A_0A_1A_2$ ，如何在邊界為平滑曲線的區域內圍出最大面積」，由引理 8 知 $\angle OA_0A_2 = \angle OA_2A_0$，即 $\beta = \beta_1$。因此，

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

另一方面，由斜率與微分定義可得下列等式

$$A_0 \text{ 的切線斜率} = f'(r)$$
$$A_2 \text{ 的切線斜率} = f'(s)$$
$$\overline{A_0A_2} \text{ 的斜率：} \; m = \frac{f(s) - f(r)}{s - r} \tag{14}$$

再由正切的差角公式得到

$$\tan\beta = \frac{m - f'(r)}{1 + mf'(r)} = \frac{f'(s) - m}{1 + mf'(s)} \tag{15}$$

考慮此兩根棒子在凸形區域內圍出的面積，由餘弦定理與積分定義可得下列兩個等式：

$$\ell^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = (s - r)^2 + [f(s) - f(r)]^2 \tag{16}$$
$$\text{棒子圍出的面積：} \; \Phi \;=\; \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{f(r) + f(s)}{2}(s - r) - \int_r^s f(x)dx \tag{17}$$

由 (14) 和 (15) 兩式，我們可將 s 看成是 r 的函數。再將 $s = s(r)$ 代入 (16) 式，因為 a, b 為已知的定值，因此 r 可以看成是 α 的函數。故 r, s 均可看成是 α 的函數。現在，將 (16) 式兩邊同時對 α 微分，得

$$2ab\sin\alpha = 2(s - r)(s' - r') + 2[f(s) - f(r)][s'f'(s) - r'f'(r)]$$

化簡可得

$$\frac{ab\sin\alpha}{s - r} = (s' - r') + \frac{f(s) - f(r)}{s - r}[s'f'(s) - r'f'(r)]$$

把 (14) 式代入上式，得

$$\begin{aligned}\frac{ab\sin\alpha}{s - r} &= (s' - r') + m[s'f'(s) - r'f'(r)] \\ &= s'[1 + mf'(s)] - r'[1 + mf'(r)]\end{aligned}$$

接著再將 (15) 式代入，得

$$\frac{ab\sin\alpha}{s - r} = s'[\frac{f'(s) - m}{\tan\beta}] - r'[\frac{m - f'(r)}{\tan\beta}]$$

移向可得

$$-m(s'+r') = \frac{ab\sin\alpha}{s-r}\tan\beta - [r'f'(r)+s'f'(s)] \tag{18}$$

在 (17) 式中，因為最大面積發生在 $\dfrac{d\Phi}{d\alpha} = 0$

$$0 = \frac{1}{2}ab\cos\alpha + \frac{r'f'(r)+s'f'(s)}{2}(s-r) + \frac{f(r)+f(s)}{2}(s'-r') - [s'f(s)-r'f(r)]$$

經化簡可得

$$0 = \frac{ab\cos\alpha}{s-r} + [r'f'(r)+s'f'(s)] + \frac{f(r)-f(s)}{s-r}(s'+r')$$

把 (14) 式代入上式，得

$$0 = \frac{ab\cos\alpha}{s-r} + [r'f'(r)+s'f'(s)] - m(s'+r')$$

接著再將 (18) 式代入，得

$$0 = \frac{ab\cos\alpha}{s-r} + [r'f'(r)+s'f'(s)] + \frac{ab\sin\alpha}{s-r}\tan\beta - [r'f'(r)+s'f'(s)]$$

移向化簡解得

$$\tan\alpha\tan\beta = -1$$

因為 $0 < \alpha \leq \pi$ 和 $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$$

也就是說，A_0, A_1, A_2 三點落在以 O 為圓心的圓弧上。 □

主要定理 3. 給定 n 根棒子，長度分別為 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$，在邊界為平滑曲線 $y = f(x)$ 的凸形區域內，設圍出凸形區域的頂點為 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$，其中 A_0, A_n 為棒子與邊界的接點、A_i 為棒子間的接點 $(1 \leq i \leq n-1)$，即

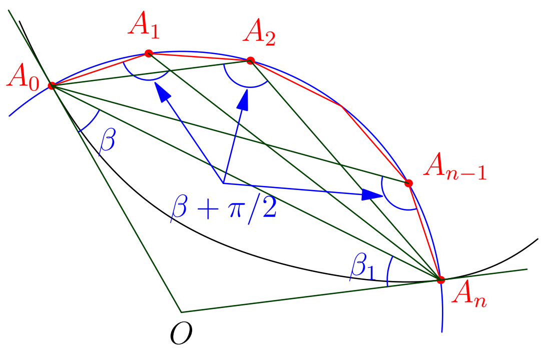
$$\overline{A_{i-1}A_i} = \ell_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

設 O 為平滑曲線上以 A_0, A_n 兩點為切點的兩條切線之交點，如下圖。當

$$\overline{OA_0} = \overline{OA_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

時，可圍出最大面積。或者，以角度表示上述條件：令 $\angle OA_0A_n = \beta$ 和 $\angle OA_nA_0 = \beta_1$，則

$$\beta = \beta_1 \quad 且 \quad \angle A_0A_iA_n = \beta + \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq i \leq n-1$$



Proof. 考慮新問題「給定一個多邊形 $A_0A_1A_2\ldots A_n$ ，如何在邊界為平滑曲線的區域內圍出最大面積」，由引理 8 可知

$$\beta=\beta_1$$

再考慮問題「給定一根棒子 $\overline{A_0A_1}$ 和一個多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ ，如何在邊界為平滑曲線的區域內圍出最大面積」。由引理 9 知

$$\angle A_0A_1A_n=\beta+\frac{\pi}{2}$$

同理，考慮兩個多邊形 $A_0A_1\ldots A_i$ 和 $A_iA_{i+1}\ldots A_n$ 在邊界為平滑曲線的區域內圍出最大面積，其中自然數 $i=2,3,\ldots,n-1$ 。再由引理 9 可得

$$\angle A_0A_iA_n=\beta+\frac{\pi}{2},\quad i=2,\ldots,n-1$$

因此，$A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n$ 必落在圓心為 O 的圓弧上。 □

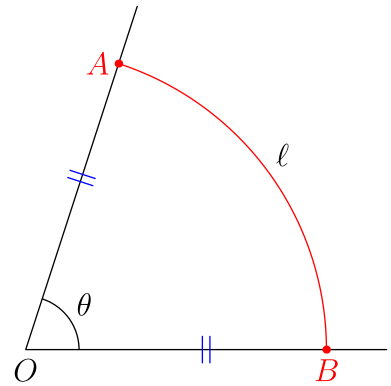
四、另類的等周不等式

在本小節之前我們討論的都是如何用棒子圍出最大面積，以下我們將延伸到如何用繩子圍出最大面積。一般而言，弓形是指圓內部被直線割下來的部分。為了便於溝通，我們將凸形區域被直線割下來的部分，也稱之為「弓形」。

一般的等周不等式是指用一條繩子在開放的區域內，由自己本身圍出一個封閉區域。而我們做的另類的等周不等式是給定邊界，由繩子和邊界一起圍出一個封閉區域。因此我們可以圍出的最大面積一定大於在原來的開放區域內圍出的面積。

主要定理 4. 給定一條長度為 ℓ 的繩子，在頂點為 O 、夾角為 θ 的錐形區域內圍出一塊區域。則當繩子落在以 O 為圓心的圓弧上時，此時圍出區域的面積為最大。更進一步，設圍出區域的面積為 A，則有下列的等周不等式

$$A\le\frac{\ell^2}{2\theta}$$



Proof. 設繩子與邊界的接點為 A, B 兩點。我們可將問題看成「由弓形 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 在錐形區域內圍出最大面積」，由引理 3知 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 。現在，再取此曲線上的任一動點 P，並將問題看成「由兩個弓形 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ 和 $\overset{\frown}{\mathrm{PB}}$ ，在錐形區域內圍出最大面積」。由引理 4知

$$\angle APB = \pi - \frac{\theta}{2}$$

因此動點 P 必在以 O 為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑的圓弧上，即 $\overline{OP} = \overline{OA}$ 。由此可知，最大面積發生在此曲線落在以 O 為圓心、$\overline{OA}$ 為半徑的圓弧上。此時，圓弧的半徑為

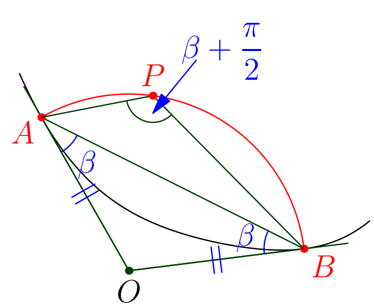
$$\overline{OA} = \frac{\ell}{\theta}$$

最大面積為

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{\theta}\right)^2 \theta = \frac{\ell^2}{2\theta}$$

故得證。 □

主要定理 5. 給定一條長度為 ℓ 的繩子，在邊界為平滑曲線的凸形區域內，圍出一塊區域。此圍出區域最大面積發生在「以繩子兩端與平滑曲線接點處為切點的兩條切線之交點為圓心，此交點到接點的長度為半徑，所畫出的圓弧上」，如下圖。



Proof. 設繩子兩端與曲線的接點分別為 A, B 、$\overline{AB}$ 與以 A 為切點的切線的夾角為 β、$\overline{AB}$ 與以 B 為切點的切線的夾角為 β_1 、此兩條切線交於 O，如上圖。我們可將問題看成「由弓形 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，在邊界為平滑曲線的凸形區域內圍出最大面積」，由引理 8 知最大面積發生在 $\beta = \beta_1$ ，即

$\overline{OA} = \overline{OB}$。現在，再取此曲線上的任一動點 P，並將問題看成「由兩個弓形 $\overset{\frown}{AP}$ 和 $\overset{\frown}{PB}$ 在邊界為平滑曲線的凸形區域內圍出最大面積」。由引理 9 知

$$\angle APB = \beta + \frac{\pi}{2}$$

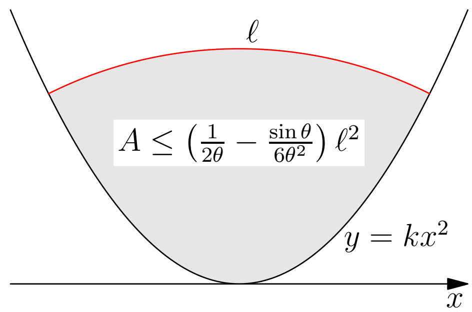
即 P 點落在以 O 為圓心、以 $\overline{OA}$ 為半徑的圓弧上。同理可得，繩子上的每一點也必落在此圓弧上。由此可知，最大面積發生在此繩子落在以 O 為圓心、$\overline{OA}$ 為半徑的圓弧上。 □

主要定理 6. 以長度為 ℓ 的繩子，在邊界為拋物線 $y = kx^2$ $(k > 0)$ 的凸形區域內任意圍出一塊區域。設圍出區域的面積為 A ，則有下列不等式

$$A \leq (\frac{1}{2\theta} - \frac{\sin\theta}{6\theta^2})\ell^2$$

其中 θ 為下列方程式的解：

$$2k\ell\sin^2\frac{\theta}{2} = \theta\cos\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < \pi$$

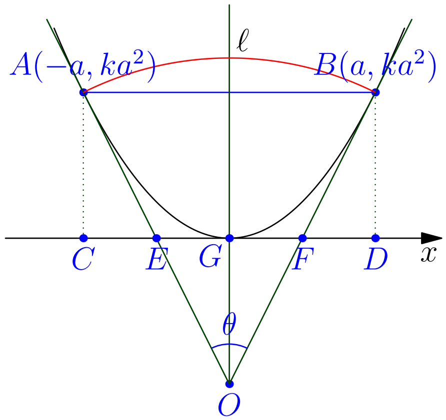


Proof. 設繩子與拋物線 $y = kx^2$ 交於 A, B 兩點，由引理 5 知圍出最大面積時，$\overline{AB}$ 會平行 x 軸。因此，設 A, B 兩點的座標可設為 $A(-a, ka^2)$ 和 $B(a, ka^2)$ 。再令以 A, B 為切點的兩條切線的交點為 O、夾角為 θ，如下圖。由主要定理 5 知，繩子必定落在以 O 為圓心、以 OA 為半徑的圓弧上。因此有下列等式

$$\overline{OA} = \frac{\ell}{\theta}$$

$$a = \frac{\ell}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}$$

$\overline{OB}$ 的斜率: $f'(a) = 2ka = 2k\frac{\ell}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}$



由三角幾何知道 $f'(a) = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})$，因此

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) = 2k\frac{\ell}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}$$

化簡可得

$$2k\ell\sin^2\frac{\theta}{2} = \theta\cos\frac{\theta}{2} \tag{19}$$

當 $0 < \theta < \pi$ 時，上述方程式會有唯一解，請參見附錄。接下來只要算出繩子圍出的最大面積，即可。設 E, F 分別為 $\overline{OA}, \overline{OB}$ 與 x 軸的交點。因為 $\overline{FD} \cdot f'(a) = \overline{BD}$，所以

$$\overline{FD} = ka^2 \div f'(a) = \frac{a}{2}$$

即 F 為 $\overline{OB}$ 的中點，故得 $\triangle OFG = \triangle BFD$。同理可得 $\triangle OEG = \triangle AEC$。由積分定義可得

$$\text{圍出的面積: } A \le \frac{1}{2}(\frac{\ell}{\theta})^2\theta - \int_{-a}^{a} kx^2\, dx = \frac{\ell^2}{2\theta} - \frac{2}{3}ka^3 = \frac{\ell^2}{2\theta} - \frac{2}{3}k(\frac{\ell}{\theta}\sin\frac{\theta}{2})^3$$

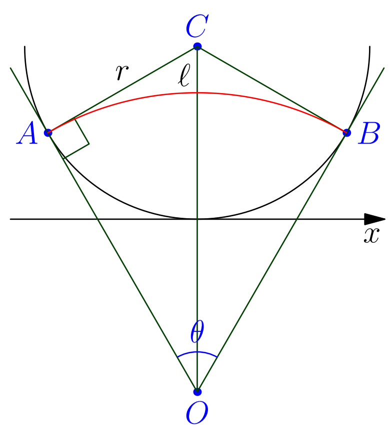
代入 (19) 式並化簡可得

$$A \le (\frac{1}{2\theta} - \frac{\sin\theta}{6\theta^2})\ell^2$$

即得證。 □

事實上，只要給定邊界為平滑曲線的凸型區域，我們都可以求出其相應的等周不等式。但須注意的是，有時必須要限制繩長。否則所圍的最大面積區域會變成不是凸型區域，此情況已脫離本研究的主題。以下我們再以半圓形區域為例，求出其相應的等周不等式。當繩長 ℓ 等於直徑時，圍出最大面積的情況恰為半圓形區域；當繩長 ℓ 大於直徑時，圍出最大面積的區域已非凸型區域，因此我們限制繩長 ℓ 小於直徑。

主要定理 7. 以長度為 ℓ 的繩子，在半徑為 r 的半圓形區域內任意圍出一塊區域，其中 $\ell < 2r$。設圍出區域的面積為 A ，則有下列不等式



$$A \le \frac{\ell^2}{2\theta} + \frac{1}{2}r^2(\pi - \theta) - \frac{r\ell}{\theta}$$

其中 θ 為下列方程式的解：

$$\ell\tan\frac{\theta}{2} = r\theta, \quad 0 < \theta < \pi$$

Proof. 設繩子與邊界交於 A, B 兩點、以 A, B 為切點的兩條切線的交點為 O、夾角為 θ，如上圖。由主要定理 5 知，繩子必定落在以 O 為圓心、以 OA 為半徑的圓弧上。因此有下列等式

$$r = \overline{OA}\cdot\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\ell}{\theta}\tan\frac{\theta}{2}$$

即

$$\ell\tan\frac{\theta}{2} = r\theta$$

當 $0 < \ell < 2r$ 時，上述方程式在 $0 < \theta < \pi$ 會有唯一解，請參見附錄。接下來算出繩子圍出的最大面積，如下所示:

$$\begin{aligned}\text{圍出的面積：} A &\le \text{圍出的最大面積}\\ &= \text{扇形}CAB + \text{扇形}OAB - \text{四邊形}OACB\\ &= \frac{1}{2}r^2(\pi-\theta) + \frac{1}{2}\overline{OA}^2\theta - \overline{OA}\cdot r\end{aligned}$$

將 $\overline{OA} = \dfrac{\ell}{\theta}$ 代入上式，即得證。 □

肆、結論與展望

本研究起始於一個一元二次函數的問題，而引發等周不等式的延伸研究。主題分為兩部分：第一部分是探討 n 根棒子如何圍出最大面積、第二部分是探討一條繩子如何圍出最大面積。第一部分得到的研究結果如下：

(一) n 根棒子在半平面區域內圍出多邊形的最大面積發生在「所有棒子的接點均落在同一半圓上」。

(二) n 根棒子在錐形區域內圍出多邊形的最大面積發生在「所有棒子的接點均落在以錐形頂點為圓心的同一圓弧上」。

(三) n 根棒子在凸形區域內圍出的最大面積發生在「以棒子與邊界接點為切點的兩切線交點為圓心，所有棒子的接點均落在此圓心的同一圓弧上」。

第二部分得到的研究結果如下：

(一) 一條繩子在錐形區域內圍出的最大面積發生在「繩子的軌跡落在以錐形頂點為圓心的圓弧上」。

(二) 一條繩子在凸形區域內圍出的最大面積發生在「繩子與邊界接點為切點的兩切線交點為圓心，繩子的軌跡落在此圓心的圓弧上」。

根據第二部分得到的定理，我們得到了拋物線的等周不等式，敘述如下：

(三) 在邊界為拋物線 $y = kx^2$ $(k > 0)$ 的凸形區域內，以長度為 ℓ 的繩子圍出的面積為 A，則有

$$A \leq (\frac{1}{2\theta} - \frac{\sin\theta}{6\theta^2})\ell^2$$

其中 θ 滿足下列方程式

$$2k\ell\sin^2\frac{\theta}{2} = \theta\cos\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

(四) 以長度為 ℓ 的繩子，在半徑為 r 的半圓形區域內任意圍出一塊區域，其中 $\ell < 2r$。設圍出區域的面積為 A ，則有下列不等式

$$A \leq \frac{\ell^2}{2\theta} + \frac{1}{2}r^2(\pi - \theta) - \frac{r\ell}{\theta}$$

其中 θ 為下列方程式的解：

$$\ell\tan\frac{\theta}{2} = r\theta, \quad 0 < \theta < \pi.$$

一般而言，給定固定長度的繩子，它所能圍出區域的面積必定會有上界。原來的等周不等式是在開放的區域內，以不等式 $4\pi A \leq \ell^2$ 來呈現面積與繩長的關係。而我們做的另類的等周不等式是在邊界為平滑曲線的凸形區域，本研究以拋物線邊界為例，可得面積與繩長的關係不等式。在往後的延伸研究裡，我們建議可從下列兩個方向做起：

(一) n 根棒子在邊界為平滑曲線的凹型區域內圍出最小 (或最大) 面積的條件為何？

(二) 一條固定長度的繩子在邊界為平滑曲線的凹型區域內圍出最小 (或最大) 面積的條件為何？此時圍出的面積與繩長會有什麼關係式？

伍、附錄

定理 1. 給定 $k > 0$ 和 $\ell > 0$，則方程式

$$2k\ell \sin^2 \frac{\theta}{2} = \theta \cos \frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < \pi,$$

有唯一解。

Proof. 考慮函數

$$\phi(x) = \frac{x \cos x}{\sin^2 x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

因此

$$\phi'(x) = \cos x \cdot (\sin x)^{-2} - x(\sin x)^{-1} - 2x \cos^2 x (\sin x)^{-3}$$

經計算可得

$$\phi'(x) = x(\sin x)^{-3}[\cos x \cdot \frac{\sin x}{x} - 1 - \cos^2 x]$$

因為當 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時，$\frac{\sin x}{x} < 1, \sin x > 0, 1 > \cos x > 0,$ 所以

$$\phi'(x) < x(\sin x)^{-3}[\cos x - 1 - \cos^2 x] < 0$$

即 $\phi = \phi(x)$ 為遞減函數。又

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x \cos x}{\sin^2 x} = 0 \quad 以及 \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{x \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = +\infty$$

故 $\phi(x) = k\ell$ 在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 有唯一解。 □

定理 2. 設 $0 < \ell < 2r$，則方程式

$$\ell \tan \frac{\theta}{2} = r\theta, \quad 0 < \theta < \pi,$$

有唯一解。

Proof. 考慮函數

$$\phi(x) = \frac{\tan x}{x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

因此

$$\phi'(x) = \frac{\sec^2 x \cdot x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$$

因為當 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時，我們有 $x > \sin x, \sin x > 0, 1 > \cos x > 0,$ 所以

$$\phi'(x) > \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} > 0$$

即 $\phi = \phi(x)$ 為遞增函數。又

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{以及} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{x} = +\infty$$

故 $\phi(x) = \frac{2r}{\ell}$ 在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 有唯一解。 □

陸、參考文獻

[1] Isoperimetric inequality, http://en.wikipedia.org/wiki/Isoperimetric_inequality