第十八屆旺宏科學獎

創意說明書

參賽編號：SA18-449

作品名稱：從 Sicherman Dice 出發—

機率問題上等效概念之探討

姓名：郭叡

關鍵字：Sicherman Dice、等效概念、

蒙提霍爾問題

摘要

此篇研究的目標為探討眾多機率問題上的等效操作及解法。我們給出並執行了生成函數因式之係數為負時以及生成函數不可約時的特殊玩法，並且對於前者給出估計解的各數的方法。此外，也利用$x^n-1=0$之根的性質，求得點數和與面上的點數皆對不同整數取同餘時等效解的個數。接著，我們想將等效的想法推廣至一般的機率問題上，於是對經典的三門問題展開探討，並且分成單條件等效及雙條件等效做討論，最後求得符合條件的解的演算方法，並發現一條恆等式。此外，我們也在研究賽制的問題時，發現一些組合恆等式，並寫出其推廣形式。

壹、　研究動機

高一下時學習了許多關於機率的題目，而許多機率問題也不免和骰子產生關連，上網搜尋資料後，發現了 Sicherman Dice[3][4]的點數和的機率分布與兩顆公正六面骰子完全相同，但兩種骰子在各面上的點數卻不一樣，這引發了「**等效**」的概念(在本文中，若兩個隨機變數(或兩個隨機的操作方式的機率分布相同，我們就稱此兩者「**等效**」。例如:「丟一個公正硬幣，觀察出現正面或反面」與「丟一個公正骰子，觀察出現奇數或偶數」)。在我們的參考資料「白羊骰子的奧妙」[1]中，作者利用了特殊的方式，改變兩顆骰子上的點數(1.2.7.8.13.14)*(1.3.5.19.21.23)，使其擲出後點數和(2~37)之機率皆為$\frac{1}{36}$，因此我們好奇，是否我們能藉由改變骰子的點數及面數，得到我們指定的隨機變數的機率分布呢?又我們在每次指定的隨機機率分布下，是否能找到不只一組滿足此機率分布的等效骰子呢?是否我們也能利用等效的概念，對於其他機率問題有進一步深刻的了解、看法呢?

貳、　研究目的

利用生成函數、因式分解，修正使用生成函數因式分解後可能遇到非全正係數因式或不可約多項式而捨棄此骰子的缺陷。並引進「等效」之概念，以骰子問題為出發點，推廣至蒙提霍爾問題，改變等效條件，找尋等效概念之關聯。希望對其有更完整、更深刻的理解。

參、 研究設備及器材

數學軟體 : GeoGebra、Mathmatica

肆、 研究過程或方法

一、 生成函數之因式分解中出現負號的處理

在以往的文獻[7].中，通常將此種情況視為不合，但我們認為此情況應該也具有某些意義，故我們調整了玩法，且選擇文獻[7].中其因式分解會出現負號以及最少面數的情況作為例子，因此我們選擇兩個正 12 面骰所值出的點數和所代表的生成函數來作為例子。考慮以下的機率分布: $x^{24}+2x^{23}+3x^{22}+4x^{21}+5x^{20}+6x^{19}+7x^{18}+8x^{17}+9x^{16}+10x^{15}+11x^{14}+12x^{13}+11x^{12}+10x^{11}+9x^{10}+8x^9+7x^8+6x^7+5x^6+4x^5+3x^4+2x^3+x^2$，其可分解為$(x^8+3x^7+3x^6-2x^4+3x^2+3x+1)(x^{14}-x^{13}+3x^{12}-2x^{11}+4x^{10}-2x^9+4x^8-2x^7+4x^6-2x^5+4x^4-2x^3+3x^2-x+1)(x^2)$。此時注意到兩邊的因式皆有負號，原式可整理成$(x^8+3x^7+3x^6+3x^2+3x+1)(x^{14}+3x^{12}+4x^{10}+4x^8+4x^6+4x^4+3x^2+1)x^2+(-2x^4)(x^{14}+3x^{12}+4x^{10}+4x^8+4x^6+4x^4+3x^2+1)x^2+(x^8+3x^7+3x^6+3x^2+3x+1)(-x^{13}-2x^{11}-2x^9-2x^7-2x^5-2x^3-x+1)x^2+(-2x^4)(-x^{13}-2x^{11}-2x^9-2x^7-2x^5-2x^3-x+1)x^2$，由$(x^8+3x^7+3x^6+3x^2+3x+1)(x^{14}+3x^{12}+4x^{10}+4x^8+4x^6+4x^4+3x^2+1)x^2$項，可製得下方表(一)的主體，

接著，將$(-2x^4)(x^{14}+3x^{12}+4x^{10}+4x^8+4x^6+4x^4+3x^2+1)x^2+(x^8+3x^7+3x^6+3x^2+3x+1)(-x^{13}-2x^{11}-2x^9-2x^7-2x^5-2x^3-x)x^2$

展開後得到:$-x^{23}-3x^{22}-5x^{21}-8x^{20}-8x^{19}-12x^{18}-11x^{17}-17x^{16}-15x^{15}-20x^{14}-16x^{13}-20x^{12}-15x^{11}-17x^{10}-11x^9-12x^8-8x^7-8x^6-5x^5-3x^4-x^3$，由$x^3$項、$x^4$項…等係數得知我們必須把表(一)中多餘的一個 3，三個 4…等移除。最後再由$(-2x^4)(-x^{13}-2x^{11}-2x^9-2x^7-2x^5-2x^3-x)x^2$展開得:$2x^{19}+4x^{17}+4x^{15}+4x^{13}+4x^{11}+4x^9+2x^7$，並由$x^7$項、$x^9$項等係數得知最後必須要把二個 7，四個 9…等再添加回去，如下表(一)的黑框部分:

	1	3	3	3	5	5	5	5	7	7	7	7	9	9	9	9	11	11	11	11	13	13	13	15
1	2	x4	x4	x4	x6	x6	6	6	8	8	8	8	x10	x10	x10	x10	x12	x12	x12	x12	14	14	14	x16
2	3	5	5	x5	x7	x7	7	7	9	9	9	9	11	x11	x11	x11	x13	x13	x13	x13	15	15	15	x17
2	3	5	5	x5	x7	x7	7	7	ox9	ox9	ox9	ox9	x11	x11	x11	x11	x13	x13	x13	x13	15	15	15	x17
2	x3	x5	x5	x5	x7	x7	ox7	ox7	x9	x9	x9	x9	x11	x11	x11	x11	x13	x13	x13	x13	15	15	15	x17
3	4	6	x6	x6	x8	x8	x8	x8	x10	x10	x10	x10	x12	x12	x12	x12	14	14	14	14	16	16	16	18
3	4	6	x6	x6	x8	x8	x8	x8	x10	x10	x10	x10	x12	x12	x12	x12	14	14	14	14	16	16	16	18
3	4	6	x6	x6	x8	x8	x8	x8	x10	x10	x10	x10	x12	x12	x12	x12	x14	x14	x14	x14	16	16	16	18
7	8	10	10	10	12	12	12	12	x14	x14	x14	x14	x16	x16	x16	x16	x18	x18	18	18	x20	x20	x20	22
7	8	10	10	10	12	12	12	12	x14	x14	x14	x14	x16	x16	x16	x16	x18	x18	18	18	x20	x20	x20	22
7	8	10	10	10	x12	x12	x12	x12	x14	x14	x14	x14	x16	x16	x16	x16	x18	x18	x18	x18	x20	20	20	22
8	x9	11	11	11	13	13	13	13	x15	x15	x15	x15	17	17	17	17	x19	x19	19	19	x21	x21	x21	x23
8	x9	11	11	11	13	13	13	13	x15	x15	x15	x15	17	17	17	17	x19	x19	19	19	x21	21	21	23
8	x9	11	11	11	13	13	13	13	x15	x15	x15	15	x17	x17	x17	x17	x19	x19	19	19	x21	21	21	23
9	x10	12	12	12	x14	x14	x14	x14	x16	x16	x16	x16	x18	x18	x18	x18	x20	20	20	20	x22	x22	x22	24

表(一):消去點數表

表(一)中黑框所框起來的部分為最後留下的部分，左側的 x 代表刪掉的項，而左側的 ox 則代表原先被刪掉，然後最後再加回來的項，而實際上的操作方法為在骰子的面上做標記，假使兩面朝上者有同個標記的話，則當次結果不算數，必須重骰。例如在(1,2,2,2,3,3,3,7,7,7,8,8,8,9)這顆骰代表數值 1 的面上有 1 號標記(紅框處)，而在(1,3,3,3,5,5,5,5,7,7,7,7,9,9,9,9,11,11,11,11,13,13,13,15)這顆骰的其中一面 3 上有 1、5 號標記(紅框處)，則當擲出此兩面朝上時，因其兩者均有 1 號標記，故不採計須重骰。

因柏拉圖立體中並無正十四及正二十四面體，故我們使用正十四角柱的 14 個側面及正二十四角柱的 24 個側面的來操作，並藉由滾動此柱體，觀察何面朝上來代表十四面骰及二十四面骰，(如圖(一)，圖(二))而其側面之展開圖如下表(二)，同一直行代表同一面，總共有兩橫列，上方數來第一列代表面上的點數，上方數來第二列代表面上的標記:

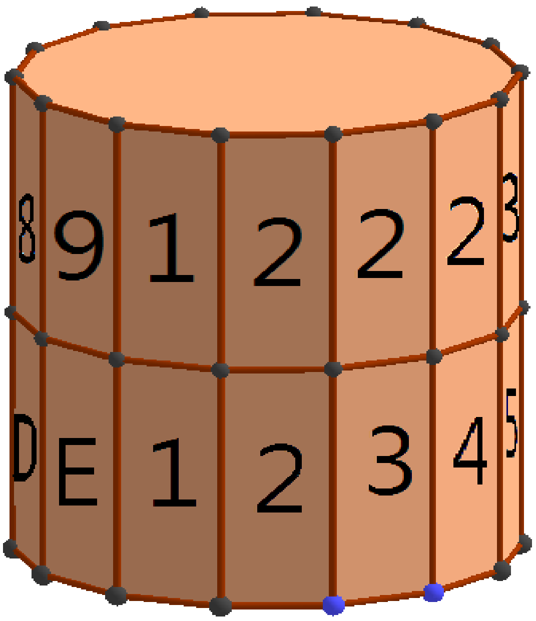
(1,2,2,2,3,3,3,7,7,7,8,8,8,9)

1	2	2	2	3	3	3	7	7	7	8	8	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E

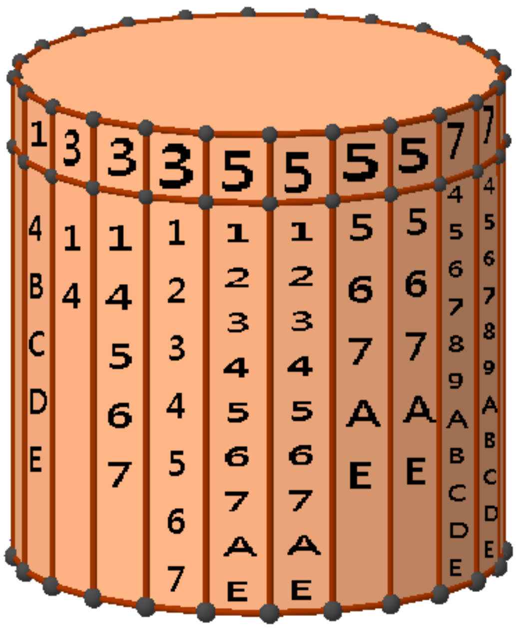
(1,3,3,3,5,5,5,5,7,7,7,7,9,9,9,9,11,11,11,11,13,13,13,15)

1	3	3	3	5	5	5	5	7	7	7	7	9	9	9	9	11	11	11	11	13	13	13	15
4 B C D E	1 4	1 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7 A E	1 2 3 4 5 6 7 A E	5 6 7 A E	5 6 7 A E	4 5 6 7 8 9 A B C D E	4 5 6 7 8 9 A B C D E	4 5 6 7 8 9 A B C D E	4 5 6 7 8 9 A B C E	1 3 4 5 6 7 8 9 A D E	1 2 3 4 5 6 7 8 9 A D E	1 2 3 4 5 6 7 8 9 A D E	1 2 3 4 5 6 7 8 9 A D E	1 2 3 4 7 8 9 A B C D E	1 2 3 4 7 8 9 A B C D	1 2 3 4 7 A	1 2 3 4 7 A	8 9 A B C D E	8 9 B E	8 9 B E	1 2 3 4 B

表(二):骰子面上點數及標示示意表



(圖一)



(圖二)

由上述討論可知黑框內結果數與原多項式相等，通過計算可知其與原先要求之機率相符。

而有關例子的實際操作，將以 Mathematica 作為輔助工具，詳細請參見**附錄一**。

更一般的，設我們先給定一機率分布 $P(x=k)$，其中 k 為非負整數，所代表的是某兩顆骰

子擲出的點數和的適當範圍，而 $P(\mathrm{x}=k)$ 表示點數和等於 k 的機率(若 $P(\mathrm{x}=k)=0$ ，代表點數和不可能等於 k)，則其生成函數 $\mathrm{f}(x)$ 可表示成:

$$\mathrm{f}(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k=\left(\sum_{i=0}^{h} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right)\cdots\cdots ①$$

其中，c_k 等於 $P(\mathrm{x}=k)$ 再乘以下表(三)的總格數，n 為所有 k 的最大值，h 為其中一顆骰子各面點數的最大值(若 $a_i=0$ 則表示任何一面的點數都不等於 i)，m 為另一顆骰子各面點數的最大值(若 $b_j=0$ 則表示任何一面的點數都不等於 j)。令 $<\mathrm{a_n}>$ 之子數列 $<\mathrm{a}_{p_k}>$ 的每一項皆大於0，項數為 $\mathrm{n_{ap}}$， $<\mathrm{a}_{o_k}>$ 的每一項皆小於零，項數為 $\mathrm{n_{ao}}$， $<\mathrm{b_n}>$ 之子數列 $<\mathrm{b}_{p_k}>$ 的每一項皆大於 0，項數為 $\mathrm{n_{bp}}$， $<b_{o_k}>$ 的每一項皆小於 0，項數為 $\mathrm{n_{op}}$，

則: $\mathrm{f}(x)=\sum a_i x^i\times\sum b_j x^j=\sum a_{p_k}x^{p_k}\times\sum b_{p_k}x^{p_k}+\sum a_{p_k}x^{p_k}\times\sum b_{o_k}x^{o_k}+$
$\sum a_{o_k}x^{o_k}\times\sum b_{p_k}x^{p_k}+\sum a_{o_k}x^{o_k}\times\sum b_{o_k}x^{o_k}$

其中， $\sum a_{p_k}x^{p_k}\sum b_{p_k}x^{p_k}$ 項相當於一組 $\mathrm{n_{ap}}$ 面及 $\mathrm{n_{bp}}$ 面骰，其面上的數字分別由數列 $<a_{p_k}>$ 及 $<\mathrm{b}_{p_k}>$ 所組成。此時可得下表(三):

	a_{p_1}	a_{p_2}	……	$a_{p_{\mathrm{n_{ap}}}}$
b_{p_1}	$a_{p_1}+b_{p_1}$	$a_{p_2}+b_{p_1}$		$a_{p_{\mathrm{n_{ap}}}}+b_{p_1}$
b_{p_2}	$a_{p_1}+b_{p_2}$	$a_{p_2}+b_{p_2}$		$a_{p_{\mathrm{n_{ap}}}}+b_{p_2}$
⋮			⋱	⋮
$b_{p_{\mathrm{n_{ap}}}}$	$a_{p_1}+b_{p_{\mathrm{n_{ap}}}}$	$a_{p_2}+b_{p_{\mathrm{n_{ap}}}}$	$b_{p_{\mathrm{n_{ap}}}}$	$a_{p_{\mathrm{n_{ap}}}}+b_{p_{\mathrm{n_{ap}}}}$

表(三):消去點數方法示意圖

接著，由 $\sum a_{p_k}x^{p_k}\sum b_{o_k}x^{o_k}+\sum a_{o_k}x^{o_k}\sum b_{p_k}x^{p_k}$ 之係數可知我們須利用上述方法從表(三)中移除是哪些項，接著再由 $\sum a_{o_k}x^{o_k}\sum b_{o_k}x^{o_k}$ 可知最後必須加回的又是哪些項。

由①式可知 $\sum_{\forall i,j,i+j=k} a_i b_j=c_k$ ，且上方表格每一格的發生機

率為: $\dfrac{1}{n_{ap}\times n_{bp}}$，指定特定的點數 h，此時的中獎機率為:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c_h}{n_{ap}n_{bp}}\left(\frac{n_{ap}n_{bp}-\sum c_k}{n_{ap}n_{bp}}\right)^l$$

$$=\frac{c_h}{n_{ap}n_{bp}}+\frac{c_h}{n_{ap}n_{bp}}\times\frac{n_{ap}n_{bp}-\sum c_k}{n_{ap}n_{bp}}+\frac{c_h}{n_{ap}n_{bp}}\times\left(\frac{n_{ap}n_{bp}-\sum c_k}{n_{ap}n_{bp}}\right)^2\ldots$$

其中第一項代表投一次就中的機率，第二項代表的是第一次擲中必須重骰的點數，第二次投中該點的機率，以此類推。

上述的級數為等比級數，由於 $n_{ap},n_{bp}\in\mathbb{N},c_k\in\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N}$

，且可知 $n_{ap}\times n_{bp}$ 為表(四)的總格子數， $\sum c_k$ 只為表(四)的一部分，

故 $0<\dfrac{n_{ap}n_{bp}-\sum c_k}{n_{ap}n_{bp}}<1$，此級數收斂，其和為

$$\frac{c_h}{n_{ap}n_{bp}}\times\frac{1}{1-\left(\frac{n_{ap}n_{bp}-\sum c_k}{n_{ap}n_{bp}}\right)}=\frac{c_h}{\sum c_k}$$

與原先所希望之機率相符合。

而除了給出玩的方法外，我們也給出了一個方法來估計此種情況下解的個數的上界。在此之前，先給出一個函數 $f(x,y,n)$，其中 x為此表格的列數，y 為此表格的行數，而n為黑框內的格子數，而$f(x,y,n)$ 則代表所有符合「在 $x\times y$ 的表格中，選擇n個格子作為最終留下的格子」的解的個數，其中，可以輕易的看出來 xy 必須大於n。比方說下表(四)，(其中著色部分為骰子的點數位置，0 的地方表示是留下的部分，而 X 則否。):

	0	0	0	x	x
	0	0	0	x	0
	0	0	0	0	0

表(四)

即為考慮$x=3,y=5,n=12$時的一個解，然而，特別的，注意到表(五):

	0	0	0	0	X
	0	0	0	0	X
	0	0	0	0	X

表(五)

由先前的討論可知，其機率只跟留下的格子數有關，而表(五)中有一個骰子的其中一面對應到的全是要被刪去的格子，這時，就算沒有這面也是一樣的，故我們將所有在其所對應的表格中存在至少一行或一列要被全部刪掉的解刪去，也就是當考慮$x = 3, y = 5, n = 12$時，表(五)的情況不會被考慮其中。扣掉無效解後，所有符合這種形式的解的總數即為$f(3,5,12)$。此外，$f(x,y,n) = f(y,x,n)$，故不失一般性，可令 $x \leq y$。因此可知，此時 $f(3,5,12)$ 為全部的情況減去 X 都在其中一列的情況，為 $C_{12}^{15} - C_1^3 = 452$。

再考慮另一個例子$f(3,4,1)$，此時的值顯然等於零，而計算方式如下:

$f(3,4,1) = C_{11}^{12}$(全部的情況)$-(C_1^4 C_8^9 - C_2^4 C_5^6 + C_3^4 C_2^3)$ (至少有一行全是 X 的個數)$-(C_1^3 C_7^8 - C_2^3 C_3^4)$(至少有一列全是 X 的個數)

$+C_1^3(C_1^4 C_5^6 - C_2^4 C_3^4 + C_3^4 C_1^2)$ (同時有一列和一行以上是 X 的個數)

$-C_2^3(C_1^4 C_2^3 - C_2^4 C_1^2 + C_3^4 C_0^1)$ (同時有二列和一行以上是 X 的個數)

$= 12 - (12) - (12) + 24 - 12 = 0$

我們可以將這種算法推廣至$f(x,y,n)$，其中[]為高斯符號，$\left[\frac{xy-n}{y}\right]$代表 X 所能占滿的列數的最大值，$\left[\frac{xy-n}{x}\right]$代表 X 所能占滿的行數的最大值。

$$f(x,y,n) = C_{xy-n}^{xy}$$

$$-\sum_{i=1}^{\left[\frac{xy-n}{y}\right]} C_i^x C_{xy-n-yi}^{xy-yi} - \sum_{i=1}^{\left[\frac{xy-n}{x}\right]} C_i^y C_{xy-n-xi}^{xy-xi}$$

$$+\sum_{j=1}^{\left[\frac{xy-n}{y}\right]} \left((-1)^{j-1} C_j^x \left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{xy-n}{x}\right]} \left(C_{xy-n-(yj+xi-ij)}^{xy-(yj+xi-ij)} C_i^y \right) \right) \right)$$

其中第一項為全部的情況，第二項是至少有一列全是 X 的個數，第三項是至少有一行全是 X 的個數，第四項是有j列，i行的所有符合的i,j的總和。

而要計算在第四頁所提到的一般化情形下的解的個數的最大可能值，我們必須將n代入 $\sum c_k$, 計算所有可能的x,y的函數值之和，其中，因x,y一定要小於等於 $\sum c_k$ ，否則明顯的此時函數值會等於零，故取$1 < x \le y \le \Sigma c_k$ ，:

$$\sum_{\substack{i,j,1<i\le j\le \Sigma c_k \\ \Sigma c_k \le ij}} f(i,j,\Sigma c_k)$$

計算上式，便可以得到一般化情形下的解的個數的最大可能值。

二、 不可約之多項式探討

先令一不可約之一元二次多項式: ax^2+bx+c ，假設其可分拆為兩個可因式分解多項式相加，即:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= (a_1x+a_2)(b_1x+b_2)+(c_1x+c_2)(d_1x+d_2) \\ &= (a_1b_1+c_1d_1)x^2+(a_1b_2+a_2b_1+c_1d_2+c_2d_1)x+(a_2b_2+c_2d_2) \end{aligned}$$

得到以下關係:
$$\begin{cases} a_1b_1+c_1d_1=a \\ a_1b_2+a_2b_1+c_1d_2+c_2d_1=b \\ a_2b_2+c_2d_2=c \end{cases}$$

即為二組骰子，$(a_1x+a_2)(b_1x+b_2)$ 和 $(c_1x+c_2)(d_1x+d_2)$

在視為兩個可因式分解多項式中，為達到操作過程機率和結果機率相等，故:

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)=(c_1+c_2)(d_1+d_2)$$

在上述假設中，我們便可寫出點數 0-2 之分別出現機率，舉例來說，

出現點數 2 之機率為$\frac{a}{a+b+c}=\frac{a_{1b_1}+c_1d_1}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)+(c_1+c_2)(d_1+d_2)}$

出現點數 1 之機率為$\frac{b}{a+b+c}=\frac{a_{1b_2}+a_{2b_1}+c_1d_2+c_2d_1}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)+(c_1+c_2)(d_1+d_2)}$

出現點數 0 之機率為$\frac{c}{a+b+c}=\frac{a_{2b_2}+c_2d_2}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)+(c_1+c_2)(d_1+d_2)}$

利用以上關係式，我們舉一實例說明:

$32x^2+50x+8=(2x+3)(8x+1)+(4x+1)(4x+5)$

$32x^2+50x+8$為不可因式分解多項式，依上述方法，我們將其視為

$(2x+3)(8x+1)+(4x+1)(4x+5)$之結果，

即分為兩組骰子，點數表示為(1,1,0,0,0)*(1,1,1,1,1,1,1,1,0)+(1,1,1,1,0)*(1,1,1,1,0,0,0,0,0)

(如下表(六)，表(七)):

	1	1	0	0	0
1	2	2	1	1	1
1	2	2	1	1	1
1	2	2	1	1	1
1	2	2	1	1	1
1	2	2	1	1	1
1	2	2	1	1	1
1	2	2	1	1	1
1	2	2	1	1	1
0	1	1	0	0	0

表(六)

	1	1	1	1	0
1	2	2	2	2	1
1	2	2	2	2	1
1	2	2	2	2	1
1	2	2	2	2	1
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0

表(七)

以點數 2 出現機率為例，以原多項式得知其機率為$\frac{32}{90}$

而在我們分析後的操作過程機率為:

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{8}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{32}{90}$$

其中乘上$\frac{1}{2}$即為在每次擲骰子時，在兩組骰子中選擇使用何組之機率，而我們利用擲公平硬幣之方式，擲到正面和反面分別代表使用不同組。

於是我們便可將最後結果看成兩表格(表(六)、表(七))合併，而過程

操作機率和結果機率也相同。此外，也可將此方法推廣至更高次的多項式。

實際的操作一樣會使用 Mathmatica,詳情請參見**附錄二**。

三、 等效骰子取同餘後之性質探討

在一般的情況中，擲兩個六面骰點數相加後得到的機率分布僅有兩組不同解(一般的六面骰2顆和 Sicherman 骰)，我們好奇點數和與面上的點數皆對某些正整數取同餘時會發生什麼事，為了解出所有的解，我們模仿生成函數的方法，將原本的生成函數法所使用的x的多項式替換成以ξ(其中ξ為$x^n=1$的某一根)所表示的多項式，因

為$\xi^{n+1}=\xi$，因此只要將兩式相乘，便可以得到同餘的效果。在點數與面上的點數皆取$mod2$時，此時的標準骰子可表示為$\left(3(-1)+3(1)\right)(3(-1)+3(1))$，如下表(八):

	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

表(八):標準骰子取同餘後結果

令兩顆骰子上的1，0分別有a_1、a_0，b_1、b_0個，可知a_1、a_0、b_0、b_1須符合下列條件:

$$\begin{cases}\left(a_1(-1)+a_0(1)\right)(b_1(-1)+b_0(1))=\left(3(-1)+3(1)\right)(3(-1)+3(1))=0\text{ ---①}\\ a_1+a_0=6\text{ ---②}\\ b_1+b_0=6\text{ ---③}\\ a_1、a_0、b_1、b_0\in\mathbb{N}\cup\ \{0\}\text{---④}\end{cases}$$

由①可知其必有一式等於零。不失一般性，假設$\left(a_1(-1)+a_0(1)\right)=0$，與 ②，④解得$a_1=a_0=3$，而此時的$b_1$ ，b_0由③，④得

$(b_1,b_0)=$ (0,6), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (6,0)，共有 7 組解。

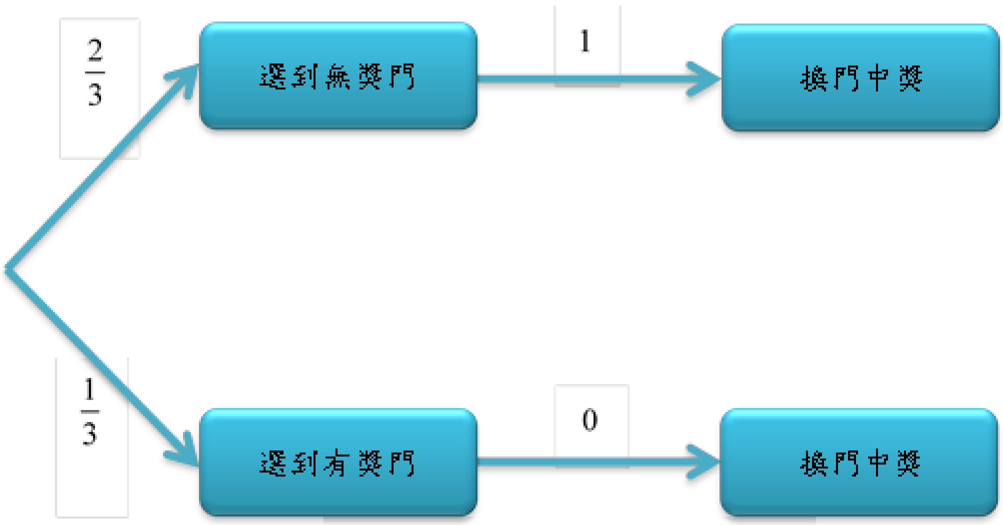
透過類似的方法(參見**附錄三**)，並適當的選擇ξ，可解出以下結果:

同取 Mod n ，n=	2	3	4	6
選用的ξ	-1	$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$	i	$e^{i(\frac{2}{6}\pi)}$
解的數目	7	28	27	851

四、 蒙提霍爾問題(三門問題)之推廣

在以上的討論中，我們發現了等效操作在骰子問題上的有趣性質，然而機率問題並非只有限定在骰子上，故我們決定以經典的蒙提霍爾問題作為主軸進行討論。這個問題來自於一個美國的電視遊戲節目，其遊戲玩法如下:有三扇門，兩扇門後沒

有獎品，而剩下一扇門內有獎品，這時來賓可以選擇一扇門，主持人再將一扇確認沒有獎品的門打開，並且詢問來賓是否要換門。若是來賓選擇換門，則其中獎機率將會提高至$\frac{2}{3}$，詳細樹狀圖如下圖(三)。



圖(三):三門問題中獎樹狀圖

根據上圖(三)，我們可看到換門得獎之機率為$\frac{2}{3}$，不換門得獎之機率為$\frac{1}{3}$，即

P(中獎) = P(無獎門)P(換門中獎|無獎門) + P(有獎門)P(換門中獎|有獎門)

$=\frac{2}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0=\frac{2}{3}$，符合樹狀圖圖(三)。這便是最起始的三門問題，之後，我們將其推廣，改變主持人可開啟門數(但開啟的門仍是確認無獎門)，以及有獎品門數量。

以下是我們的推廣過程:

設共有n扇門，其中q扇門後有獎品，在來賓任選一扇門後，主持人能開啟k扇無獎品之門，其中n、q、$k\in\mathbb{N}$，且$n-q\geq k+1$，根據以下圖(四)樹狀圖，我們有以下機率公式:

$P(\text{換門中獎})=\frac{1}{n}\times(n-q)\times\frac{q}{n-k-1}=\frac{q(n-1)}{n(n-k-1)}$，由於$\frac{(n-1)}{(n-k-1)}>1$，故可以知道 P(換門中獎) > P(不換門中獎)=$\frac{q}{n}$。為求其與原先三門問題換門中獎機率$\frac{2}{3}$等效，因此我們令$\frac{q(n-1)}{n(n-k-1)}=\frac{2}{3}$，進行以下計算:

$\dfrac{q(n-1)}{n(n-k-1)}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow 3qn-3q=2n^2-2nk-2n\Rightarrow 2n^2-(2k+3q+2)n+3q=0$，將其視為$n$的一元二次方程式，因$n\in\mathbb{N}$，故其判別式$D\geq 0$，$D^2$為0或一完全平方數，我們令其: $D=\sqrt{(2k+3q+2)^2-24q}=\alpha(\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\})\Rightarrow(2k+3q+2)^2-24q=\alpha^2$，

移項後得:

$(2k+3q+2)^2-\alpha^2=24q\Rightarrow(2k+3q+2-\alpha)(2k+3q+2+\alpha)=24q$，

欲求(n,q,k)，先固定變數q。

在$q=1$時，$(2k+5-\alpha)(2k+5+\alpha)=24$，

$(2k+5+\alpha)-(2k+5-\alpha)=2\alpha$(偶數)，又$2k+5+\alpha\geq 2k+5-\alpha$，

$24=2\times 12=4\times 6$，$2\alpha=10\vee 2\Rightarrow\alpha=5\vee 1$ 當$\alpha=1$代回求k、q，

得$k=0$，不合(主持人不開門)；當$\alpha=5$代回求k、q得，$k=1$，$n=1$，

序對$(n,q,k)=(3,1,1)$，回到原先三門問題之解。之後我們改變變數q，

繼續一以上所述方法找出序對(n,q,k)，發現有無限組解滿足與原先三

門問題之換門得獎機率($\dfrac{2}{3}$)等效，$(n,q,k)=(3,1,1)$、$(9,3,4)$、$(15,5,7)$......，

我們發現$\dfrac{q}{n}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3q=n$，即代表了一開始來賓直接選到有獎門，且不

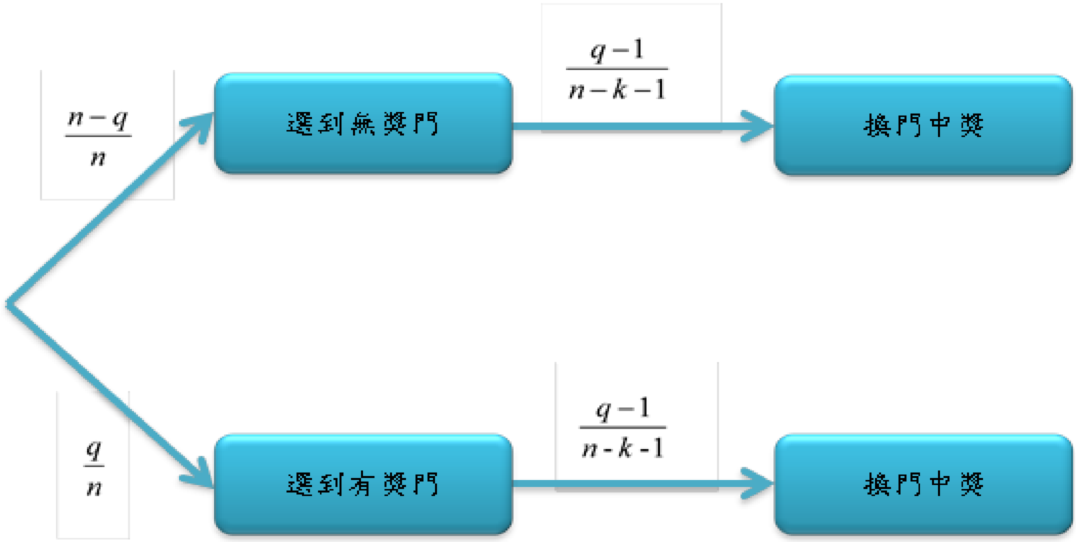
換門即得獎的機率，與三門問題不換門得獎機率相同，為不換門得獎機

率等效；接著由$\dfrac{q}{n}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow q=\dfrac{n}{3}$關係式代回$\dfrac{q(n-1)}{n(n-k-1)}=\dfrac{2}{3}$，我們得:

$\dfrac{\frac{n}{3}(n-1)}{n(n-k-1)}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow n(n-1)=2n(n-k-1)\Rightarrow n=2k+1$，又$3q=n$，得$n$、$q$

皆為奇數。以上之序對(n,q,k)皆為三門問題換門中獎、不換門中獎之

雙等效之概念，以下圖(四)為詳細樹狀圖。



圖(四): n 門問題換門中獎樹狀圖

接著，我們進一步討論各種等效問題:

(一). 不換門等效，換門不等效(單條件等效)。

由我們的序對 (n,q,k) 得知，若要不換門等效，其意義即為來賓在一開始便選有獎門，其機率便為 $\frac{\text{有獎品門數量}}{\text{所有門數量}}=\frac{q}{n}$，故若我們要造成不換門中獎率等效之效果，不同組序對 (n,q,k) 之 $\frac{q}{n}$ 比值要相同，且符合 $n-q\geq k+1$，即可找出所有單等效組(在排除雙等效解果後)。

(二). 換門等效，不換門不等效(單條件等效)。

給定兩組不同的序對 $(n,q,k):(a,b,c)$、(d,e,f)，其中因為不換門中獎率不等效，故 $\frac{q}{n}$ 比值不能相同，即 $\frac{b}{a}\neq\frac{e}{d}$，而 $\frac{b(a-1)}{a(a-c-1)}=\frac{e(d-1)}{d(d-f-1)}$，以下我們舉例說明找尋等效組方法:

首先，我們任給一序對 $(n,q,k)=(4,1,1)$，其換門中獎機率為: $\frac{1(4-1)}{4(4-1-1)}=\frac{3}{8}$，之後令等效組為 (a,b,c)，代回公式得: $\frac{b(a-1)}{a(a-c-1)}=\frac{3}{8}$，$3a^2-(3c+8b+3)a+8b=0$，將其視為 a 的一元二次方程式，因 $n\in\mathbb{N}$，故其判別式 $D\geq 0$，D^2 為 0 或一完全平方數，我們令其:

$$D=\sqrt{(3c+8b+3)^2-96b}=\alpha(\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\})\Rightarrow(3c+8b+3)^2-96b=\alpha^2$$，

移項後得:

$(3c+8b+3)^2-\alpha^2=96b \Rightarrow (3c+8b+3-\alpha)(3c+8b+3+\alpha)=96b$ ⋯繼續

進行上述推導過程，求得等效組 $(a,b,c)=(16,2,10)$。又 $\frac{1}{4}\neq\frac{2}{16}$，由此我們確認 $(4,1,1)$和$(16,2,10)$ 為單條件等效組(換門中獎率等效，不換門中獎率不等效)，此為一範例，若要給定一序對 (n,q,k)，並求其單條件等效組，即可利用上述方法。

(三). 不換門、換門皆等效(雙條件等效)。

在此討論中，我們再細分為兩部分討論:

1. P(不換門中獎)+P(換門中獎)=1

再次回到蒙提霍爾問題(三門問題)，我們一般有以下機率式符合:

P(不換門中獎)+P(不換門無獎)=1及P(換門中獎)+P(換門無獎)=1，但在三門問題中，其不換門中獎率、換門中獎率和恰巧為 1，即

P(不換門中獎率)+P(換門中獎率)=1。因此，我們先在此討論中，先找出所有不換門中獎率、換門中獎率和為 1 之雙條件等效組(包含上述三門問題之推廣等效組，例如:序對 $(n,q,k)=(3,1,1)$、$(9,3,4)$、$(15,5,7)$......)，以下是我們的演算過程:

令 $(n,q,k)=(a,b,c)$，我們得知，P(不換門中獎)=$\frac{b}{a}$，由我們一開始所設之條件，得 P(換門中獎)=1-$\frac{b}{a}=\frac{a-b}{a}$，之後代回機率公式

$$p(\text{換門中獎})=\frac{q(n-1)}{n(n-k-1)} \Rightarrow \frac{b(a-1)}{a(a-c-1)}=\frac{a-b}{a} \Rightarrow c=\frac{a(a-2b-1)+2b}{a-b}$$

，即可求得 (a,b,c)。

2. P(不換門中獎)+P(換門中獎)≠1

首先，我們給定兩組不同的序對 (n,q,k) 和 (n',q',k')，由不換門中獎機率等效，我們得: $\frac{q}{n}=\frac{q'}{n'}$，因此，我們不妨設 $n'=nt$ 、$q'=qt$，其中 $t\in\mathbb{N}$，將此代回機率公式得:

$$\frac{q(n-1)}{n(n-k-1)}=\frac{q'(n'-1)}{n'(n'-k'-1)} \Rightarrow \frac{q(n-1)}{n(n-k-1)}=\frac{qt(nt-1)}{nt(nt-k-1)} \Rightarrow k'(1-n)=k(1-nt)$$ 又

k,n,t 為已知(給定)，故以此等式，我們即可求得 k' 之值。

但因 P(不換門中獎)+P(換門中獎)$\neq 1$，

故滿足以下式子: $\begin{cases} \dfrac{q}{n}+\dfrac{q(n-1)}{n(n-k-1)} \neq 1 \\ \dfrac{q'}{n'}+\dfrac{q'(n'-1)}{n'(n'-k'-1)} \neq 1 \end{cases}$

在此我們舉一例子說明:

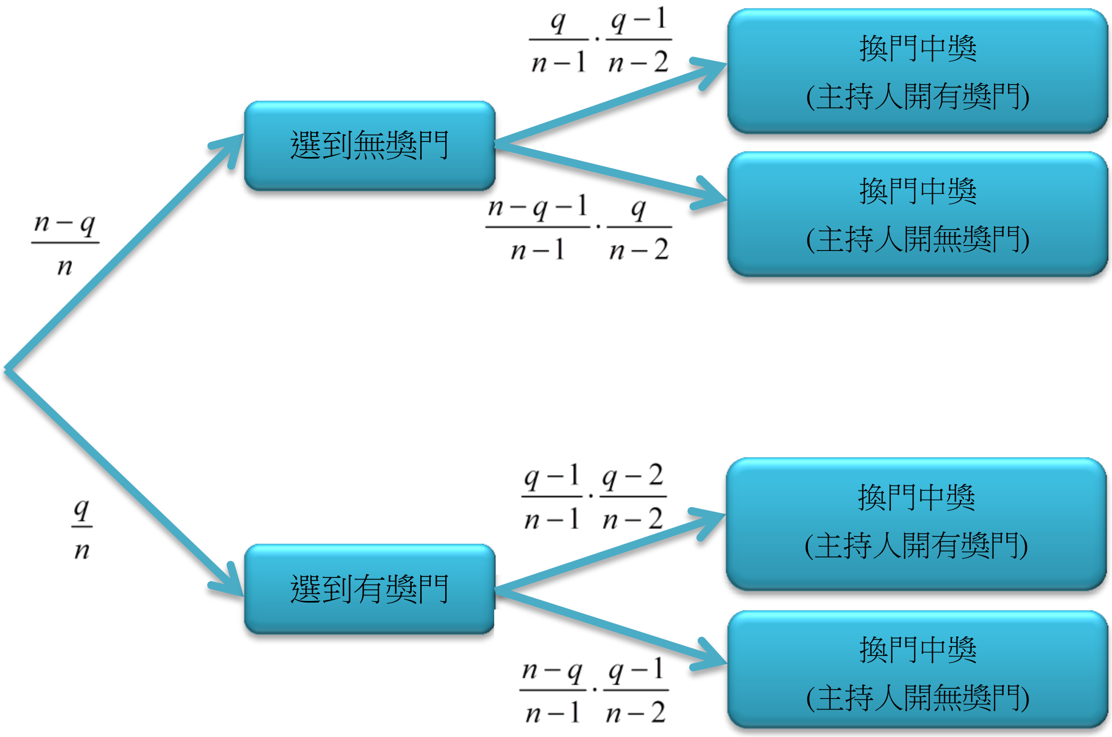
給一序對 $(n,q,k)=(5,2,1)$，其不換門中獎機率 $\dfrac{q}{n}=\dfrac{2}{5}$，換門中獎機率 $\dfrac{q(n-1)}{n(n-k-1)}=\dfrac{8}{15}$，又 $\dfrac{2}{5}+\dfrac{8}{15}=\dfrac{14}{15}\neq 1$。現令 $t=5$，得令一組序對 $(n',q',k')=(25,10,k')$，將其代回上述關係式求 k':

$k'(1-5)=1(1-25)\Rightarrow k'=6$，故得 $(5,2,1)$ 和 $(25,10,6)$ 符合雙等效條件，以及其 P(不換門中獎)+P(換門中獎)$\neq 1$ 成立。

在上述做法中，由於 $k'(1-n)=k(1-nt)$，且 $n>k$，$(1-n)\,|\,(1-nt)$，以及 $(1-n)\,|\,(t-nt)$，可得知在 $(1-n)\,|\,(1-t)$ 成立時，便必有整數解。

特別的，我們可以根據不同的 (n,q,k)，將所有的 (n',q',k') 繪製成在一條三維直線上的格子點，詳細請見**附錄四**。

在了解了等效組之尋找方法後，我們不禁想到，若是我們將主持人可開 k 扇確認後面無獎品之門，改成主持人仍可開 k 扇門，但主持人不知道哪些門為無獎門，而全憑隨機開門所得之結果呢?以下圖(五)為我們給定 $k=1$(主持人開門數)，為隨機開門之機率樹狀圖:



圖(五):主持人隨機開門，換門得獎樹狀圖

由樹狀圖圖(五)，我們可知道:

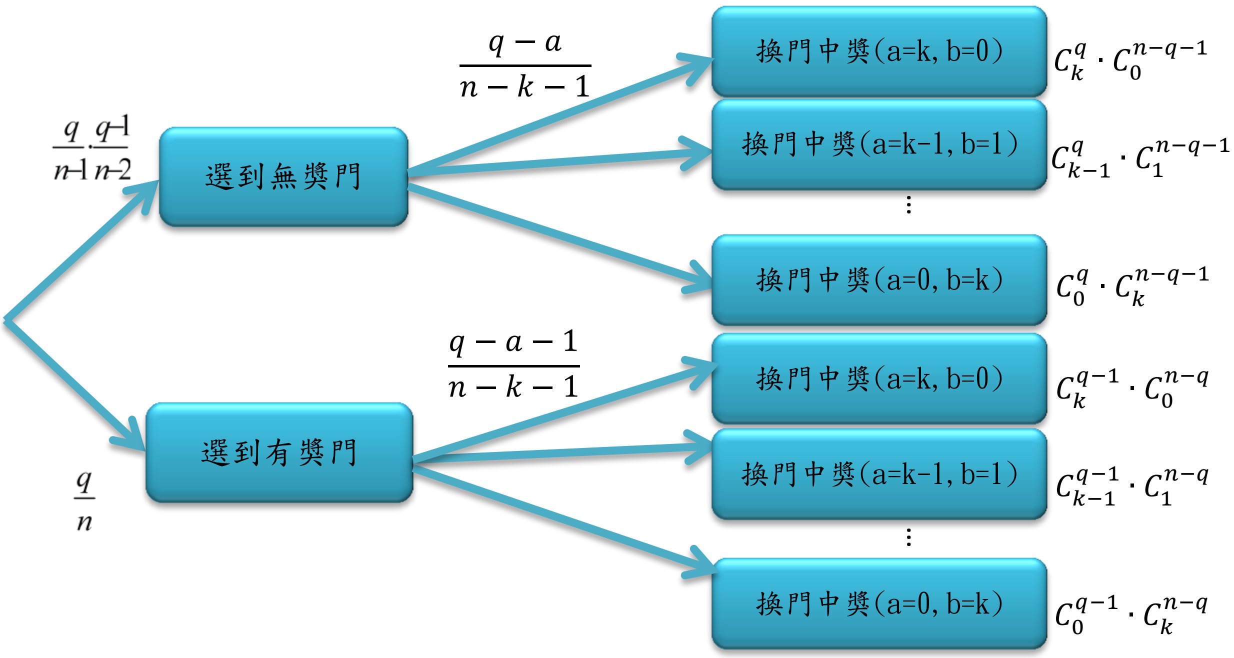
$P(\text{換門中獎}) = \frac{n-q}{n}\left(\frac{q}{n-1}\cdot\frac{q-1}{n-2}+\frac{n-q-1}{n-1}\cdot\frac{q}{n-2}\right)+\frac{q}{n}\left(\frac{q-1}{n-1}\cdot\frac{q-2}{n-2}+\frac{n-q}{n-1}\cdot\frac{q-1}{n-2}\right) = \frac{q}{n}$此為 $k=1$之換門中獎機率，我們發現其換門中獎機率即恰巧為一開始來賓即選中有獎門之機率，即:

$$P(\text{換門中獎}) = P(\text{選中有獎門}) = \frac{q}{n}。$$

而更進一步，我們不禁思考是否在主持人隨機開$k(k<q)$扇門後，是否來賓換門中獎之機率也為$\frac{q}{n}$？

圖(六)為主持人隨機開k扇門後來賓換門中獎機率示意圖，

以下為其證明(其中a為隨機開k門中的有獎門數目，b為隨機開k門中的無獎門數目，$a+b=k$。):



圖(六):主持人開 k 扇門後來賓換門中獎機率樹狀圖

為方便計算，令$C_a^{q-1}\cdot C_b^{n-q-1}=r$，我們有:

$$\sum_{a=0}^{k}\left(\frac{n-q}{n}\cdot\frac{C_a^q\cdot C_b^{n-q-1}}{C_k^{n-1}}\cdot\frac{q-a}{n-k-1}+\frac{q}{n}\cdot\frac{C_a^{q-1}\cdot C_b^{n-q}}{C_k^{n-1}}\cdot\frac{q-a-1}{n-k-1}\right)$$

$$=\sum_{a=0}^{k}\left(\frac{n-q}{n}\cdot\frac{r\cdot\frac{q}{q-a}}{C_k^{n-1}}\cdot\frac{q-a}{n-k-1}+\frac{q}{n}\cdot\frac{r\cdot\frac{n-q}{n-q-b}}{C_k^{n-1}}\cdot\frac{q-a-1}{n-k-1}\right)$$

$$=\frac{q(n-q)}{nC_k^{n-1}(n-k-1)}\sum_{a=0}^{k}\left[r\left(1+\frac{q-a-1}{n-q-b}\right)\right]$$

$$=\frac{q(n-q)}{nC_k^{n-1}(n-k-1)}\sum_{a=0}^{k}\left[r\left(\frac{n-k-1}{n-q-b}\right)\right]$$

$$=\frac{q(n-q)}{nC_k^{n-1}}\sum_{a=0}^{k}C_a^{q-1}\cdot C_b^{n-q-1}\cdot\frac{1}{n-q-b}$$

$$=\frac{q}{nC_k^{n-1}}\sum_{a=0}^{k}C_a^{q-1}\cdot C_b^{n-q}$$

$$=\frac{q}{n}\quad \text{Q.E.D}$$

直觀的來看，可以將「主持人**隨機**開k扇門」的換門問題看成抽籤問題，現有n支籤，其中有q支有獎籤，觀眾先抽取一支籤，主持人接著抽k支籤，接著觀眾再抽第

$k+2$支籤。不換門的策略相當於觀眾選擇僅打開第一支籤，而換門的策略相當於觀眾選擇僅打開第$k+2$支籤，而我們知道不論是第一支還是第$k+2$支籤，其中獎機率皆為$\frac{q}{n}$，故上述等式理應成立。

陸、　討論

一、五戰三勝制獲勝機率問題

除了骰子問題，三門問題之外，我們也對賽制問題展開研究。而在我們所熟悉的五戰三勝制中，我們利用兩種不同的操作手法去計算，其一是最多比五場，比至一人先三勝後停止，而另一是比完五場，其中一人勝三場以上。直觀上，由於只要一人先三勝後便可確定那個人一定會勝三場以上，故其等效，機率應該要相等。而經由我們驗證後，發現此兩種算出之機率的確相等，並發現了二條不明顯的恆等式。令現有甲，乙二人比賽比n場，若n為奇數，則採n戰$\frac{n+1}{2}$勝制；若n為偶數，則採n戰 $\frac{n}{2}+1$ 勝制。可分別直觀的得到:

$$\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{k-1+i} p^k (1-p)^i = \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k-1-i}^{2k-1} p^{2k-1-i} (1-p)^i \quad (n=2k+1,\ k \in \mathbb{N})$$

$$\sum_{i=0}^{k-2} C_{k-1}^{k-1+i} \cdot p^k \cdot (1-p)^i = \sum_{i=0}^{k-2} C_{2k-2-i}^{2k-2} \cdot p^{2k-2-i} \cdot (1-p)^i \quad (n=2k,\ k \in \mathbb{N})$$

上述兩式可證明如下:

$$\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{k-1+i} p^k (1-p)^i = \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k-1-i}^{2k-1} p^{2k-1-i} (1-p)^i$$

在$n=2k+1$時

，左式由二項式定理得: $\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} C_{k-1}^{k-1+i} C_j^i p^{k+j} (-1)^j$

，變換變數 $l=k+j$ 得: $\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} C_{k-1}^{k-1+i} C_{l-k}^i p^l (-1)^j$

，此時 i,l 的範圍為: $\begin{cases} 0\le i\le k-1 \\ k\le l\le k+i \end{cases}$，且

$$C_{k-1}^{k-1+i} C_{l-k}^i = \frac{(k-1+i)!}{(k-1)!(i)!} \frac{i!}{(l-k)!(i+k-l)!} \frac{(l-1)!}{(l-1)!} = C_{k-1}^{l-1} C_{l-1}^{k-1+i}$$

，故左式

$$=\sum_{l=k}^{2k-1}\sum_{i=l-k}^{k-1}C_{k-1}^{l-1}C_{l-1}^{k-1+i}p^l(-1)^{l-k}$$

，而右式由二項式定理得:

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}C_{2k-1-i}^{2k-1}C_j^i p^{2k-1-i-j}(-1)^j$$

，變換變數 $l=j+(2k-1-i)$

，此時i,l的範圍為 $\begin{cases}0\le i\le k-1\\ 2k-1-l\le i\le k-1\end{cases}$，又 $C_{2k-1-i}^{2k-1}C_{l-(2k-1-i)}^{i}$

$$\frac{(2k-1)!}{(2k-1-i)!i!}\frac{i!}{(l-2k+1+i)!(2k-l-1)!}\frac{l!}{l!}=C_{2k-1-i}^{l}C_l^{2k-1}$$

， 且 $l-(2k-1-i)\equiv l+i+1\ (mod\ 2)$，

故右式 $=\sum_{l=k}^{2k-1}\sum_{i=2k-1-l}^{k-1}C_{2k-1-i}^{l}C_l^{2k-1}p^l(-1)^{l+i+1}$

至此得到兩條式子，對於相同的 p^l ，我們有:

$$\sum_{i=l-k}^{k-1}C_{k-1}^{l-1}C_{l-1}^{k-1+i}(-1)^{l+k}=\sum_{i=2k-1-l}^{k-1}C_{2k-1-i}^{l}C_l^{2k-1}(-1)^{i+1}$$

左式經由變數變換 $(h=i-(l-k))$ 得

$$\sum_{h=0}^{2k-1-l}C_{k-1}^{l-1}C_{l-1}^{h+l-1}(-1)^{l+k}=C_{k-1}^{l-1}(-1)^{l+k}\sum_{h=0}^{2k-1-l}C_{l-1}^{h+l-1}\quad,$$

$\sum_{h=0}^{2k-1-l}C_{l-1}^{h+l-1}=C_{l-1}^{l-1}+C_{l-1}^{l}+\ldots+C_{l-1}^{2k-2}$ ，又 $C_{l-1}^{l-1}=C_l^l$ ，故可連續使用帕斯卡定理得

$\sum_{h=0}^{2k-1-l}C_{l-1}^{h+l-1}=C_l^{2k-1}$ ， $\sum_{h=0}^{2k-1-l}C_{k-1}^{l-1}C_{l-1}^{h+l-1}(-1)^{l+k}=C_{k-1}^{l-1}(-1)^{l+k}C_l^{2k-1}$

右式經由變數變換 $h=i-(2k-1-l)$ ，且

$h+2k-l\equiv l-h(mod\ 2)$

右式= $C_l^{2k-1}\sum_{h=0}^{l-k}C_{l-h}^{l}(-1)^{l-h}$

，當l為奇數時

$$\sum_{h=0}^{l-k} C_{l-h}^{l}(-1)^{l-h} = C_0^l - C_1^l + C_2^l ... - C_k^l = C_{k-1}^{l-1}(-1)^{l+k}$$

，當l為偶數時

$$\sum_{h=0}^{l-k} C_{l-h}^{l}(-1)^{l-h} = -C_0^l + C_1^l - C_2^l ... + C_k^l = C_{k-1}^{l-1}(-1)^{l+k}$$

故右式也$=C_{k-1}^{l-1}(-1)^{l+k}C_l^{2k-1}$ 得證。

在$n = 2k$時，

$$\sum_{i=0}^{k-2} C_{k-1}^{k-1+i} \cdot p^k \cdot (1-p)^i = \sum_{i=0}^{k-2} C_{2k-2-i}^{2k-2} \cdot p^{2k-2-i} \cdot (1-p)^i$$ ，左式由二項式定理得:

$$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{i} C_{k-1}^{k-1+i} \cdot C_j^i \cdot p^{k+j} \cdot (-1)^j$$ ，變換變數$l = k + j$，得:

$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{i} C_{k-1}^{k-1+i} \cdot C_{l-k}^i \cdot p^l \cdot (-1)^j$，此時$i, l$的範圍為:$\begin{cases} 0 \le i \le k-2 \\ k \le l \le k+i \end{cases}$，又:

$$C_{k-1}^{k-1+i} \cdot C_{l-k}^i = \frac{(k-1+i)!}{(k-1)! \cdot i!} \cdot \frac{i!}{(i-l+k)!\,(l-k)!}$$

$$= \frac{(k-1+i)!\,(l-1)!}{(k-1)!\,(i-l+k)!\,(l-k)!\,(l-1)!}$$

$$= \frac{(l-1)!}{(k-1)!\,(l-k)!} \cdot \frac{(k-1+i)!}{(l-1)!\,(i-l+k)!} = C_{k-1}^{l-1} \cdot C_{l-1}^{k-1+i}$$

$$\text{故左式} = \sum_{i=l-k}^{k-2} C_{k-1}^{l-1} \cdot C_{l-1}^{k-1+i} \cdot p^l \cdot (-1)^{l-k}$$

，而右式由二項式定理得: $$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{i} C_{2k-2-i}^{2k-2} \cdot C_j^i \cdot p^{2k-2} \cdot (-1)^j$$

，變換變數$l = j + (2k-2-i)$，得: $$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{i} C_{2k-2-i}^{2k-2} \cdot C_{l-2k+2+i}^i \cdot p^{2k-2} \cdot (-1)^j$$

此時i, l的範圍為: ，又: $C_{l-2k+2+i}^i \cdot C_{2k-2-i}^{2k-2}$

$$= \frac{i!}{(l-2k+2+i)!\,(2k-l-2)!} \cdot \frac{(2k-2)!}{(2k-2-i)! \cdot i!}$$

$$= \frac{(2k-2)! \cdot l!}{(l-2k+2+i)!\,(2k-l-2)!\,(2k-2-i)! \cdot l!} = C_l^{2k-2} \cdot C_{2k-2-i}^l$$

$$故右式=\sum_{i=0}^{k-2} C_l^{2k-2}\cdot C_{2k-2-i}^{l}\cdot p^{2k-2}\cdot(-1)^{l-2k+2+i}$$

之後將p提出，得到下列證明:

$$\sum_{i=l-k}^{k-2} C_{k-1}^{k-1+i}\cdot C_{l-k}^{i}=\sum_{i=2k-2-l}^{k-2} C_{l-2k+2+i}^{i}\cdot(-1)^{i}\cdot C_{2k-2-i}^{2k-2}$$

$$\Rightarrow C_{k-1}^{l-1}\sum_{i=l-k}^{k-2} C_{l-1}^{k-1+i}=C_l^{2k-2}\sum_{i=2k-2-l}^{k-2}(-1)^{i}\cdot C_{2k-2-l}^{l}$$

$$\Rightarrow C_{k-1}^{l-1}\left(C_{l-1}^{l-1}+C_{l-1}^{l}+C_{l-1}^{l+1}+\cdots+C_{l-1}^{2k-3}\right)=C_l^{2k-2}\left(-C_l^{l}+C_{l-1}^{l}-C_{l-2}^{l}+\cdots+C_k^{l}\right)$$

$$\Rightarrow C_{k-1}^{l-1}\left(C_l^{l+1}+C_{l-1}^{l+1}+\cdots+C_{l-1}^{2k-3}\right)=C_l^{2k-2}\left(C_{l-2}^{l-1}-C_{l-2}^{l}+\cdots+C_k^{l}\right)$$

$$\Rightarrow C_{k-1}^{l-1}C_l^{2k-2}=C_l^{2k-2}C_{k-1}^{l-1}\ 得證。$$

在原本的五戰三勝問題中，只要$0\le p\le 1$時原恆等式就會成立。注意到此兩式為p的多項式，其中最高次項的次數為$2k-1$或$2k-2$，又在$0\le p\le 1$之間一定存在超過$2k$個數使此成立，故根據多項式恆等定理，我們有:在$p\in\mathbb{C}$時，上述恆等式恆成立。

而上述的問題情境可以推廣成:令現有甲，乙二人比賽比n場，其中，甲在這n場比賽勝h場以上的機率與甲在這 n 場比賽中一勝 h 場就停止比賽的機率，由上述的直觀看法可知其應該要相等。我們可以將此推廣後的兩種算法寫成下列形式:

$$\sum_{i=0}^{n-h} C_h^{i+h}p^h(1-p)^i=\sum_{i=0}^{n-h} C_{h+i}^{n}p^{h+i}(1-p)^{n-h-i}$$，其中$n,h\in\mathbb{N},h\le n$

將$n=2k+1,h=k+1$ 代入會得到前述的n為奇數的情形，

而將$n=2k,h=k+2$代入則會得到前述的n為偶數的情形。

柒、 結論

一、骰子問題之推廣

我們成功的提出了生成函數因式之係數為負時以及生成函數不可約時的特殊

玩法，並發現其點數和與面上的點數皆取$Mod\ n$時，其解數與n有下列關係:

同取$Mod\ n$ ，$n=$	2	3	4	6
解的數目	7	28	27	851

二、蒙提霍爾問題之推廣

給定有序數對(n,q,k)，我們給出了滿足上述條件之限制時得出等效組的方法，

並且證明了當主持人隨機開k扇門且來賓選擇換門時，中獎機率仍為$\frac{q}{n}$，且有一

條恆等式:

$$\sum_{a=0}^{k}\left(\frac{n-q}{n}\cdot\frac{C_a^q\cdot C_b^{n-q-1}}{C_k^{n-1}}\cdot\frac{q-a}{n-k-1}+\frac{q}{n}\cdot\frac{C_a^{q-1}\cdot C_b^{n-q}}{C_k^{n-1}}\cdot\frac{q-a-1}{n-k-1}\right)=\frac{q}{n}$$

三、五戰三勝制獲勝機率問題

我們成功利用兩種不同但是直觀上等效的算法，發現了二條不明顯的恆等式，

分別是:

$$\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-1}^{k-1+i}p^k(1-p)^i=\sum_{i=0}^{k-1}C_{2k-1-i}^{2k-1}p^{2k-1-i}(1-p)^i \quad (n=2k+1,k\in\mathbb{N})$$

$$\sum_{i=0}^{k-2}C_{k-1}^{k-1+i}\cdot p^k\cdot(1-p)^i=\sum_{i=0}^{k-2}C_{2k-2-i}^{2k-2}\cdot p^{2k-2-i}\cdot(1-p)^i \quad (n=2k,k\in\mathbb{N})$$

經由我們驗證後，發現此兩種算出之機率的確相等。

其可被推廣成下列形式:

$$\sum_{i=0}^{n-h}C_h^{i+h}p^h(1-p)^i=\sum_{i=0}^{n-h}C_{h+i}^{n}p^{h+i}(1-p)^{n-h-i}$$

，其中$n,h\in\mathbb{N},h\leq n$

捌、 參考資料

[1]. 楊世明(2016) ・白羊骰子的奧妙和 2-分折數陣 ・*中國初等數學研究*，2016 卷(第 7 辑) ，81-85 頁

[2]. 孫文先・骰子漫談・取自 http://www.chiuchang.org.tw/download/docu/club/dice.pdf

[3]. Julia Jenkins. (April 28, 2010). Sicherman Dice. from http://buzzard.ups.edu/courses/2010spring/projects/jenkins-sicherman-dice-ups-434-2010.p

df.

[4]. Scott Johnsen. (July 2009). Sicherman Dice. University of Nebraska-Lincoln. from https://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1018&context=mathmidexppap

[5]. 陳皓嫣(2005) ・中華民國第四十五屆中小學科學展覽會—耍「薛骰 」—Sicherman Dice 的探討・取自 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/high/0304/030413.pdf

[6]. Martin Gardner・*孔明鎖、矩陣博士及陷阱門密碼* (143-148 頁) ・上海市:上海科技教育。

[7]. 劉曉樺、林芳伃(2004)・臺灣二 OO 四年國際科學展覽會--由 6 面 Sicherman 骰子來分析 n 面的 Sicherman 骰子・取自 https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=938&sid=2762

附錄一

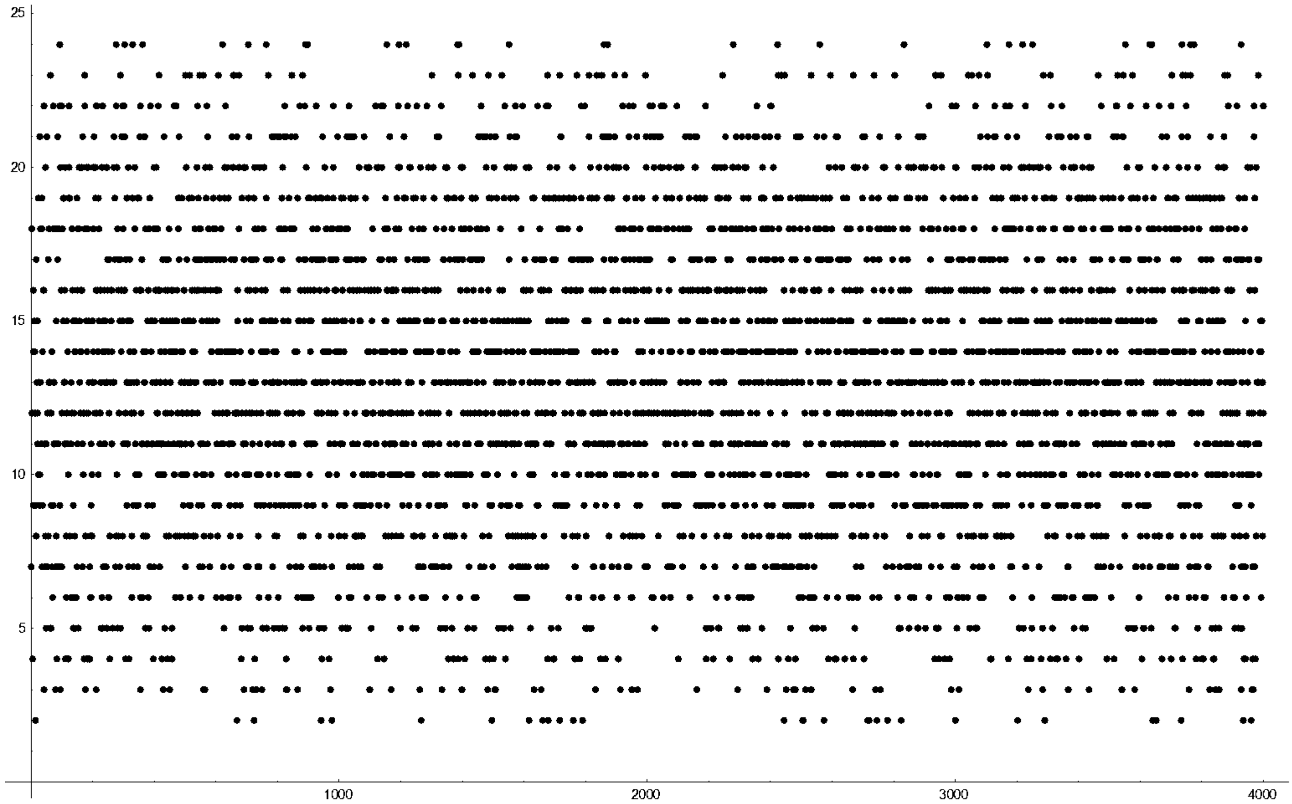
這裡是用報告裡面所提到的 14 面骰以及 24 面骰作為例子，並在 Mathmatica 上執行。以下是用調整過後的骰子骰出一個結果的情況，而灰底的部分則是用調整過後的骰子骰 1 次(包含重骰)的部分。

```
r14dice = RandomChoice[Range[14], 1];   (*從 1~14 中隨便選一數*)
r24dice = RandomChoice[Range[24], 1];   (*從 1~24 中隨便選一數*)
p14dice := {1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9};  (*14 面骰上的點數*)
f14dice := {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"};
(*14 面骰上"面上的標記"*)
p24dice := {1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 11, 11,
  11, 11, 13, 13, 13, 15}; (*24 面骰上的點數*)
f24dice := {
  {4, "b", "c", "d", "e"},
  {1, 4},
  {1, 4, 5, 6, 7},
  {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},
  {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, "a", "e"},
  {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, "a", "e"},
  {5, 6, 7, "a", "e"},
  {5, 6, 7, "a", "e"},
  {4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"},
  {4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"},
  {4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"},
  {4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "b", "d", "e"},
  {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "d", "e"},
  {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "d", "e"},
  {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "d", "e"},
  {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "d", "e"},
  {1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"},
  {1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d"},
  {1, 2, 3, 4, 7, "a"},
  {1, 2, 3, 4, 7, "a"},
  {8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"},
  {8, 9, "b", "e"},
  {8, 9, "b", "e"},
  {1, 2, 3, 4, "b"}
  };        (*24 面骰上"面上的標記"*)
ff14 := Part[f14dice, r14dice];  (*14 面骰骰到的那一面的面上的標記*)
```

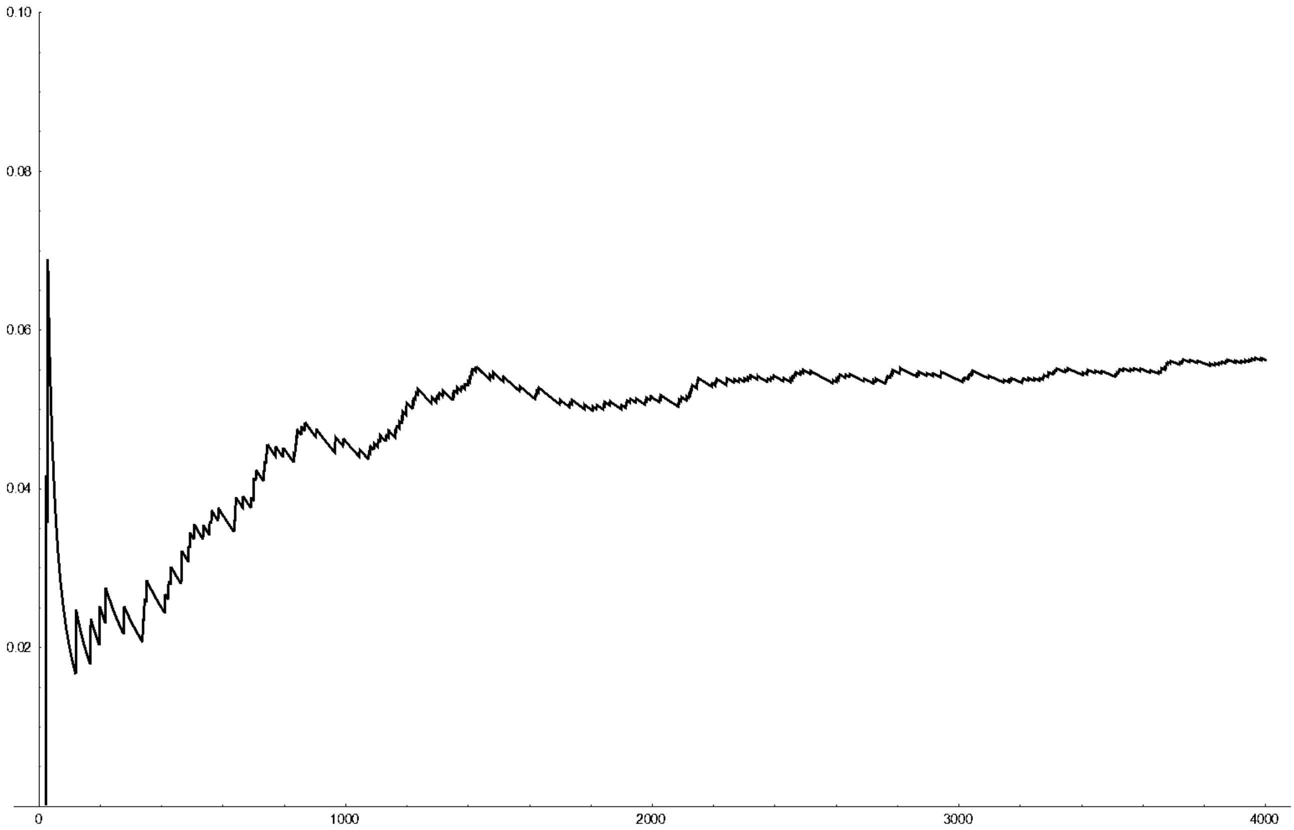
```
fp14 := Part[p14dice, r14dice]; (*14 面骰骰到的那一面的點數*)
ff24 := Part[f24dice, r24dice]; (*24 面骰骰到的那一面的面上的標記*)
fp24 := Part[p24dice, r24dice];  (*24 面骰骰到的那一面的點數*)
combine := Join[First[Join[{ff14}, ff24]], Last[Join[{ff14}, ff24]]];
 (*把面上的標記所組成的 list 組合起來，比方說骰到{1,2}{{2,3,”a”}}就會變成
{1,2,2,3,”a”}*)
c = Max[Counts[combine]]; (*算所有的元素個別出現次數的最大值*)

While[c > 1,    (*c>1 表示有重複，進入迴圈再骰，骰到 c≤1(c 是正整數)*)
  r14dice = RandomChoice[Range[14], 1];
  r24dice = RandomChoice[Range[24], 1];
  p14dice := {1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9};
  f14dice := {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"};
  p24dice := {1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 11, 11,
    11, 11, 13, 13, 13, 15};
  f24dice := {
    {4, "b", "c", "d", "e"},
    {1, 4},
    {1, 4, 5, 6, 7},
    {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},
    {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, "a", "e"},
    {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, "a", "e"},
    {5, 6, 7, "a", "e"},
    {5, 6, 7, "a", "e"},
    {4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"},
    {4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"},
    {4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"},
    {4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "b", "d", "e"},
    {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "d", "e"},
    {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "d", "e"},
    {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "d", "e"},
    {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, "a", "d", "e"},
    {1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"},
    {1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, "a", "b", "c", "d"},
    {1, 2, 3, 4, 7, "a"},
    {1, 2, 3, 4, 7, "a"},
    {8, 9, "a", "b", "c", "d", "e"},
    {8, 9, "b", "e"},
    {8, 9, "b", "e"},
```

```
    {1, 2, 3, 4, "b"}
    };
  ff14 := Part[f14dice, r14dice];
  fp14 := Part[p14dice, r14dice];
  ff24 := Part[f24dice, r24dice];
  fp24 := Part[p24dice, r24dice];
  combine := Join[First[Join[{ff14}, ff24]], Last[Join[{ff14}, ff24]]];
  c = Max[Counts[combine]];
  ];
fp14 + fp24 (*輸出最後骰到的點數和*)
```

重複執行 4000 次後，可繪製出以下的點數分布圖，其中縱軸是點數和，橫軸則是骰的次數。

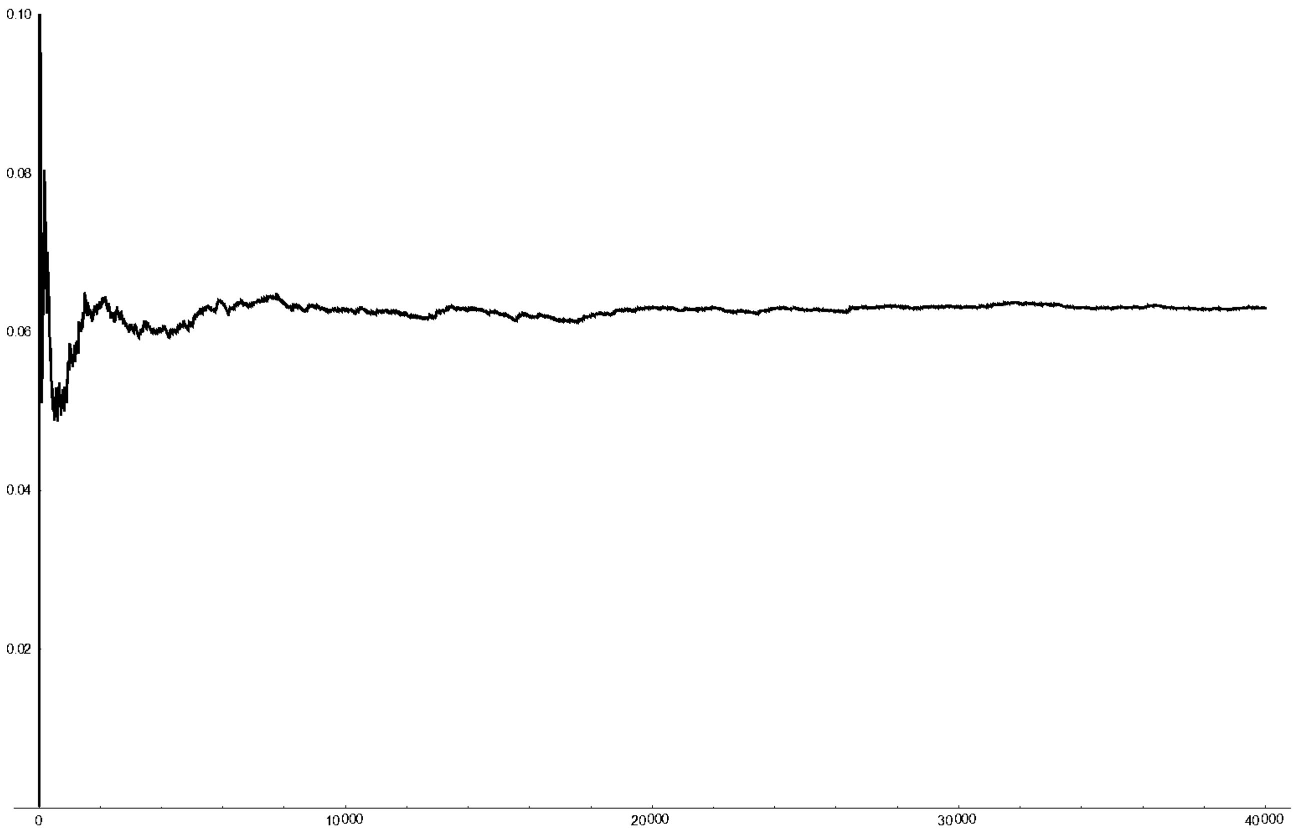


下圖則是點數 10 的出現機率圖(骰 4000 次)，可看見其值越來越接近$\frac{9}{144}$=0.625。

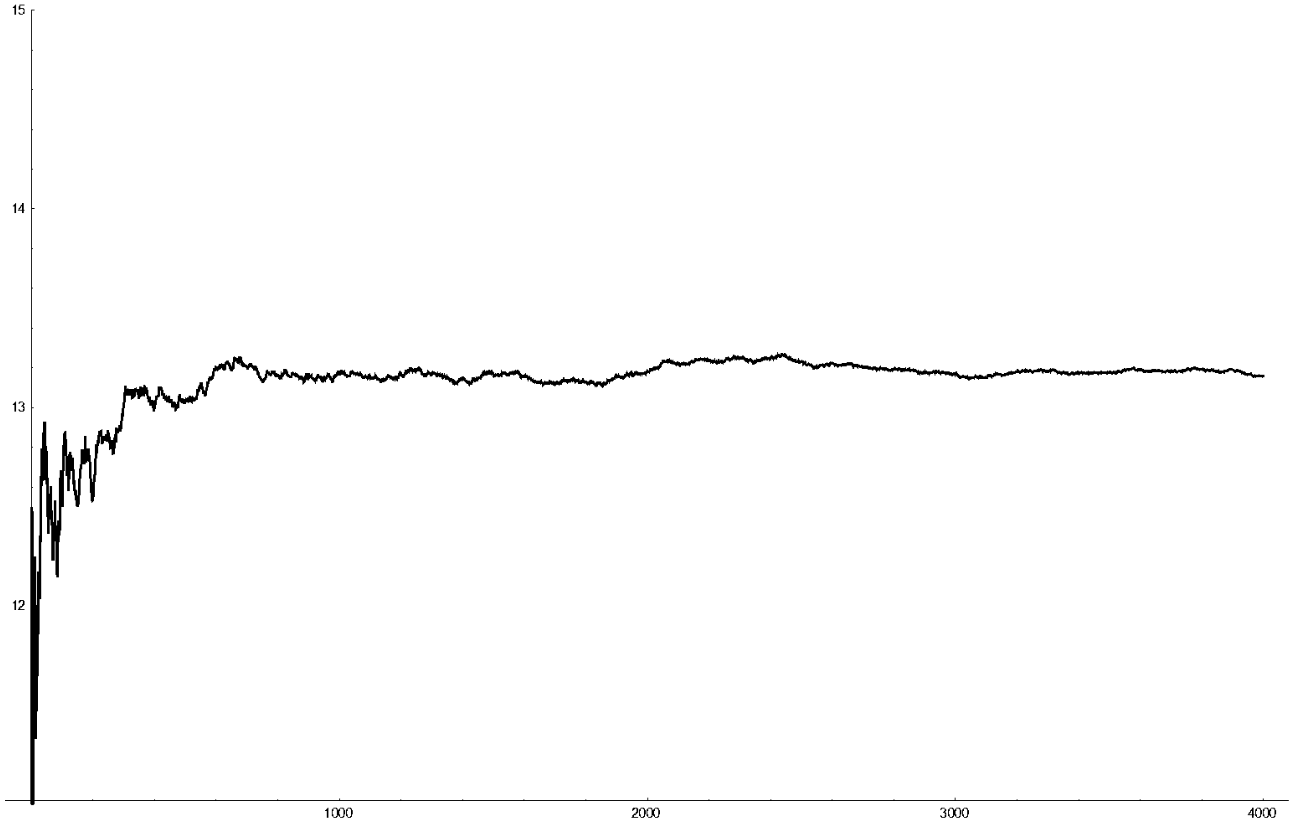


骰 40000 次，前n次點數 10 出現次數比例圖如下，可以更加明確的看見其值越來越接近

$\frac{9}{144}$=0.625:



而也可以有以下的前n次的點數平均圖(骰 4000 次)，其中縱軸為前n次的點數平均，橫軸為骰的次數。



可以看出來隨著骰的次數增多，值越接近期望值，也就是

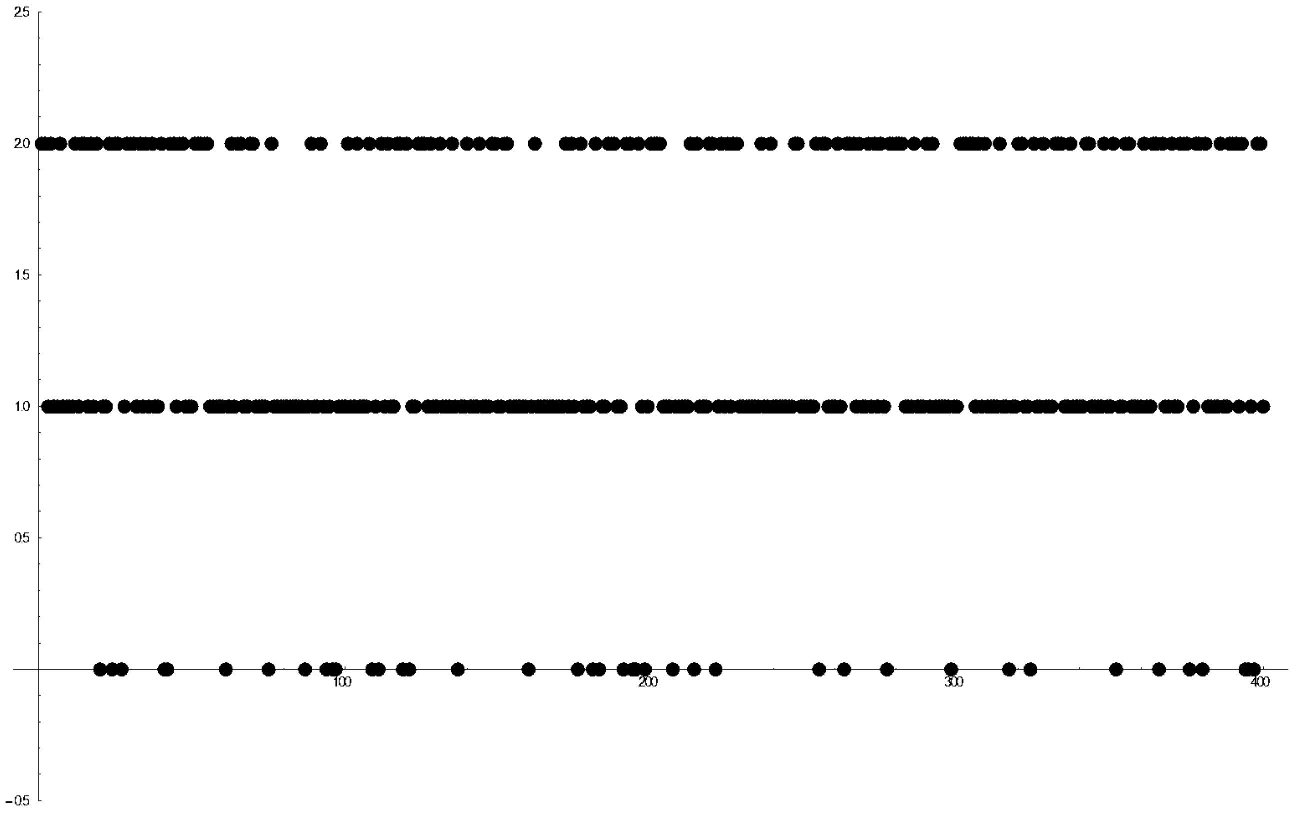
$(1\times 24+2\times 23+\ 3\times 22+\ 4\times 21+\ 5\times 20+\ 6\times 19+7\times 18+\ 8\times 17+\ 9\times 16+10\times 15+11\times 14+\ 12\times 13+\ 11\times 12+10\times 11+9\times 10+\ 8\times 9+\ 7\times 8+\ 6\times 7+5\times 6+4\times 5+3\times 4+2\times 3+2\times 1)\times\frac{1}{144}=13$ 。

附錄二

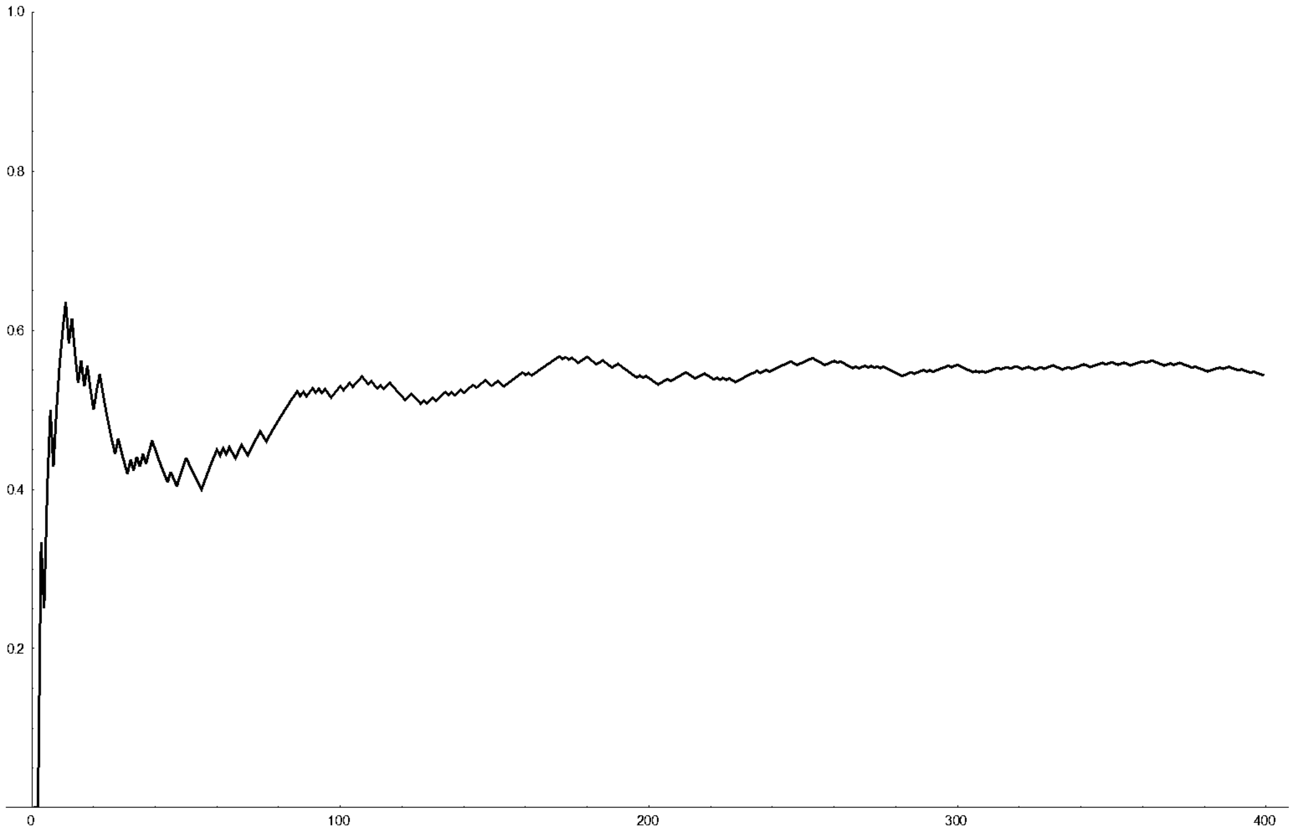
這裡是用報告裡面所提到的兩組骰子作為例子，並在 Mathmatica 上執行。
以下是用調整過後的骰子骰出一個結果的情況:

```
r=RandomChoice[Range[2],1];  (*在 1 跟 2 之間選一個數*)
fdice11:={1,1,0,0,0};   fdice12:={1,1,1,1,1,1,1,1,0}; (*其中一組骰子*)
fdice21:={1,1,1,1,0};   fdice22:={1,1,1,1,0,0,0,0,0}; (*另外一組骰子*)
rf=Total[r];

If[rf>1, (*如果rf小於一的話，就用下面這一組*)
  s=RandomChoice[Range[5],1];
  t=RandomChoice[Range[9],1];
  final=Total[Part[fdice11,s]+Part[fdice12,t]];
  ,
  s=RandomChoice[Range[5],1]; (*否則，就用下面這一組*)
  t=RandomChoice[Range[9],1];
  final=Total[Part[fdice21,s]+Part[fdice22,t]];
  ];
final (*輸出最終結果*)
```

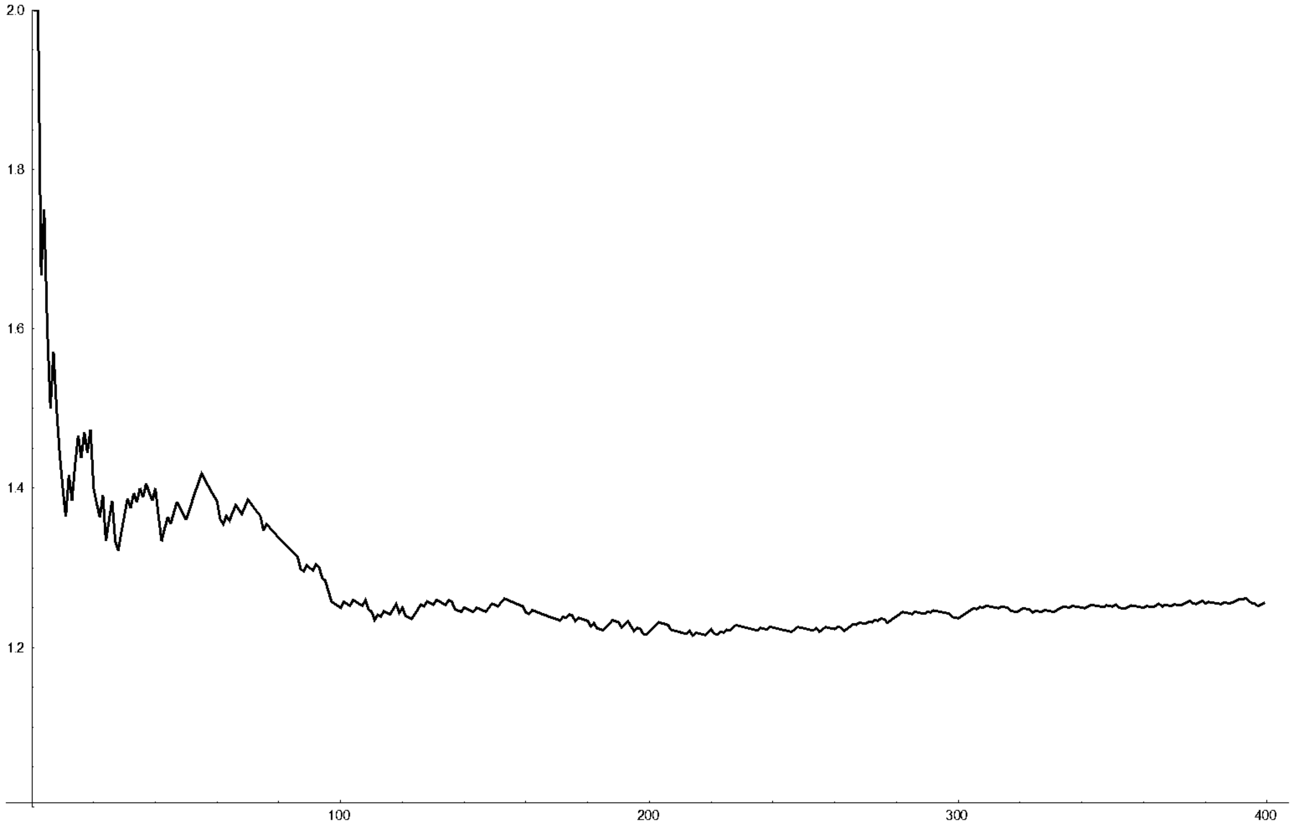
重複執行 400 次後，可繪製出以下的點數分布圖，其中縱軸是點數和，橫軸則是骰的次數:



下圖則是點數 1 的出現機率圖(骰 400 次)，可看見其值越來越接近$\frac{50}{90}$。



而也可以有以下的前 n 次的點數平均圖(骰 400 次)，其中縱軸為前 n 次的點數平均，橫軸為骰的次數。可看見其愈來愈接近期望值，也就是$\frac{0}{90}+\frac{50}{90}+2\frac{32}{90}=1.267$。



2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
100
200
300
400

附錄三

在點數和，面上的點數皆取 Mod3 時，可代表標準骰子的式子為

$(2\omega^2+2\omega+2)^2$，$\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ，令兩顆骰子上值為 2，1，0 的面數分別為a_2、a_1、a_0，b_2、b_1、b_0，此時a_2、a_1、a_0，b_2、b_1、b_0需符合下列條件:

$$\begin{cases}(a_2\omega^2+a_1\omega+a_0)(b_2\omega^2+b_1\omega+b_0)=(2\omega^2+2\omega+2)^2=0\text{---①}\\ a_2+a_1+a_0=6\text{ ---②}\\ b_2+b_1+b_0=6\text{ ---③}\\ a_2,\ a_1,\ a_0,\ b_2,\ b_1,\ b_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}\text{---④}\end{cases}$$

不失一般性，假設$(a_2\omega^2+a_1\omega+a_0)$等於零，可知$a_2$=$a_1$=$a_0$，再由②得

a_2=a_1=a_0=2，此時的$b_2,\ b_1,\ b_0$只須符合③就可，解的總數為$C_6^8=28$ (組)。

在點數和，面上的點數皆取 Mod4 時，可代表標準骰子的式子為

$(i^3+2i^2+2i+1$，

令兩顆骰子上值為 3，2，1，0 的面數分別為a_3、a_2、a_1、a_0，、b_3、b_2、b_1、b_0，此時a_3、a_2、a_1、a_0，b_3、b_2、b_1、b_0需符合下列條件:

$$\begin{cases}(a_3i^3+a_2i^2+a_1i+a_0)(b_3i^3+b_2i^2+b_1i+b_0)=(i^3+2i^2+2i+1)^2=-2i\text{ ---①}\\ a_3+a_2+a_1+a_0=6\text{ ---②}\\ b_3+b_2+b_1+b_0=6\text{ ---③}\\ a_3、a_2、a_1、a_0、b_3、b_2、b_1、b_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}\text{ ---④}\end{cases}$$

由於複數相乘為絕對值相乘，假設$|a_3i^3+a_2i^2+a_1i+a_0|$、$|b_3i^3+b_2i^2+b_1i+b_0|$之絕對值為$\sqrt{a}$ 、$\sqrt{b}$，由④ 可知 a,b 皆為非負整數，且由①可設$\sqrt{ab}$=2，解得 (a,b)=(4,1),(2,2),(1,4)，接著分情況討論。

(一). (a,b)=(4,1)

此時的$(a_3i^3+a_2i^2+a_1i+a_0\ ,\ b_3i^3+b_2i^2+b_1i+b_0)$有下列可能性:(-2,$i$)、(-2$i^2$,$i^3$)、(2,-$i$)、(2$i^2$,-$i^3$)，$b_3$、$b_2$、$b_1$、$b_0$分別須符合下列條件:

$$\begin{cases}b_2=b_0\\ b_3+1=b_1\\ b_3+b_2+b_1+b_0=6\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}b_2=b_0\\ b_3=b_1+1\\ b_3+b_2+b_1+b_0=6\end{cases}$$

，此時之b_3、b_2、b_1、b_0並無整數解，

故不合。

(二). (a,b)=(1,4)

同理，a_3、a_2、a_1、a_0 並無整數解，不合。

(三). (a,b)=(2,2)

此時 $a_3i^3+a_2i^2+a_1i+a_0$ 絕對值為 $\sqrt{2}$ 的可能性為: $a_3i^3+a_2i^2+a_1i+a_0=$

$i+1$ 或 $-i+1$ 或 $-i-1$ 或 $i-1$，而兩兩相乘為 $-2i$ 的可能性為:

$(-i+1)(i-1)$ 或 $(i-1)^2$ 或 $(-i+1)^2$。

1. **$a_3i^3+a_2i^2+a_1i+a_0=(-i+1)$ 時，須符合下述條件:**

$$\begin{cases} a_3+a_2+a_1+a_0=6 \\ a_3=a_1+1 \\ a_2+1=a_0 \end{cases}，解得 \begin{cases} a_0=2 \\ a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_3=2 \end{cases}、\begin{cases} a_0=1 \\ a_1=2 \\ a_2=0 \\ a_3=3 \end{cases}、\begin{cases} a_0=3 \\ a_1=0 \\ a_2=2 \\ a_3=1 \end{cases} 共三組解。$$

2. **$a_3i^3+a_2i^2+a_1i+a_0=(i-1)$ 時，須符合下述條件:**

$$\begin{cases} a_3+a_2+a_1+a_0=6 \\ a_3+1=a_1 \\ a_2=a_0+1 \end{cases}，解得 \begin{cases} a_0=0 \\ a_1=3 \\ a_2=1 \\ a_3=2 \end{cases}、\begin{cases} a_0=1 \\ a_1=2 \\ a_2=2 \\ a_3=1 \end{cases}、\begin{cases} a_0=2 \\ a_1=1 \\ a_2=3 \\ a_3=0 \end{cases} 共三組解。$$

故解的總數為 $3\times3+3\times3+3\times3=27$。

在點數和，面上的點數皆取 Mod6 時，可代表標準骰子的式子為

$(\varphi^5+\varphi^4+\varphi^3+\varphi^2+\varphi+1)^2, \varphi=e^{i(\frac{2}{6}\pi)}$，令兩顆骰子上值為 5，4，3，2，1，0 的面數分別為 a_5、a_4、a_3、a_2、a_1、a_0，b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0，此時 a_5、a_4、a_3、a_2、a_1、a_0，b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0 須符合下列條件:

$$\begin{cases} (a_5\varphi^5+a_4\varphi^4+a_3\varphi^3+a_2\varphi^2+a_1\varphi+a_0)(b_5\varphi^5+b_4\varphi^4+b_3\varphi^3+b_2\varphi^2+b_1\varphi+b_0) \\ =(\varphi^5+\varphi^4+\varphi^3+\varphi^2+\varphi+1)^2=0 \text{ ---①} \\ a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=6 \text{ ---②} \\ b_5+b_4+b_3+b_2+b_1+b_0=6 \text{ ---③} \\ a_5、a_4、a_3、a_2、a_1、a_0、b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ ---④} \end{cases}$$

不失一般性，假設 $(a_5\varphi^5+a_4\varphi^4+a_3\varphi^3+a_2\varphi^2+a_1\varphi+a_0)$ 等於 0，此時

$a_5\varphi^5 + a_4\varphi^4 + a_3\varphi^3 + a_2\varphi^2 + a_1\varphi + a_0 =$

$a_5(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) + a_4(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) + a_3(-1) + a_2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + a_1(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + a_0$，實部，虛部必須同時為零，故 a_5 、 a_4 、 a_3 、 a_2 、 a_1 、 a_0 須符合下列條件:

$\begin{cases} a_0 - a_3 = a_4 - a_1 \\ a_2 + a_1 = a_5 + a_4 \\ 2a_5 + 2a_4 + a_3 + a_0 = 6 \end{cases}$，以下分情況討論。

(一). $(a_4, a_5) =$ (0,0)

代回可得 $(a_0, a_1, a_2, a_3) =$ (3,0,0,3)，接著代回① 得

$(3\varphi^3 + 3)(b_5\varphi^5 + b_4\varphi^4 + b_3\varphi^3 + b_2\varphi^2 + b_1\varphi + b_0) = 6\varphi^5 + 6\varphi^4 + 6\varphi^3 + 6\varphi^2 + 6\varphi + 6$，藉由比較係數可知 b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0 須符合下列條件:

$\begin{cases} b_1 + b_4 = 2 \\ b_2 + b_5 = 2 \\ b_3 + b_0 = 2 \end{cases}$， (b_1, b_4) 、 (b_2, b_5) 、 (b_3, b_0) 各分別有三種選擇:(0,2)、(1,1)、(2,0)，故

$(b_5, b_4, b_3, b_2, b_1, b_0)$ 解的個數為 $3 \times 3 \times 3 = 27$ (組)。

(二). $(a_4, a_5) =$ (0,1)

代回可得 $(a_0, a_1, a_2, a_3) =$ (2,0,1,2) ，接著代回① 得 b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0 須符合下列條件:

$\begin{cases} 2b_0 + b_4 + 2b_3 + b_1 = 6 \\ 2b_1 + b_5 + 2b_4 + b_2 = 6 \\ 2b_2 + b_0 + 2b_5 + b_3 = 6 \\ b_5 + b_4 + b_3 + b_2 + b_1 + b_0 = 6 \end{cases}$，化簡得 $\begin{cases} b_1 + b_4 = 2 \\ b_2 + b_5 = 2 \\ b_3 + b_0 = 2 \end{cases}$，共有 27 組解。

(三). $(a_4, a_5) =$ (1,0)

代回可得 $(a_0, a_1, a_2, a_3) =$ (2,1,0,2)，接著代回① 得 b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0 須符合下列條件:

$$\begin{cases}2b_0+b_5+2b_3+b_2=6\\2b_1+b_0+2b_4+b_3=6\\2b_2+b_1+2b_5+b_4=6\\b_5+b_4+b_3+b_2+b_1+b_0=6\end{cases}$$，化簡得 $\begin{cases}b_1+b_4=2\\b_2+b_5=2\\b_3+b_0=2\end{cases}$，共有 27 組解。

(四). $(a_4,a_5)=$ (0,2)

代回可得 $(a_0,a_1,a_2,a_3)=$ (2,1,0,2)或(0,2,0,2)

1. $(a_0,a_1,a_2,a_3)=$ (2,1,0,2)，代回① 得 b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0 須符合下列條件:

$$\begin{cases}b_0+2b_4+b_3+2b_1=6\\b_1+2b_5+b_4+2b_2=6\\b_2+2b_0+b_5+2b_3=6\\b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=6\end{cases}$$，化簡得 $\begin{cases}b_1+b_4=2\\b_2+b_5=2\\b_3+b_0=2\end{cases}$，共有 27 組解。

2. $(a_0,a_1,a_2,a_3)=$ (0,2,0,2)代回① 得 b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0 須符合下列條件:

$\begin{cases}b_1+b_3+b_5=3\\b_2+b_4+b_6=3\end{cases}$，$(b_1,b_3,b_5)$ 與 (b_2,b_4,b_6) 各分別有 C_3^5 種選擇，故 $(b_5,b_4,b_3,b_2,b_1,b_0)$ 解的個數為 $C_3^5\times C_3^5=100$ (組)。

(五). $(a_4,a_5)=$ (2,0)

代回可得 $(a_0,a_1,a_2,a_3)=$ (2,0,2,0)或(1,2,0,1)

1. $(a_0,a_1,a_2,a_3)=$ (2,0,2,0) ，代回① 得 b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0 須符合下列條件:

$\begin{cases}b_1+b_3+b_5=3\\b_2+b_4+b_6=3\end{cases}$，$(b_1,b_3,b_5)$ 與 (b_2,b_4,b_6) 各分別有 C_3^5 種選擇，故 $(b_5,b_4,b_3,b_2,b_1,b_0)$ 解的個數為 $C_3^5\times C_3^5=100$ (組)。

2. $(a_0,a_1,a_2,a_3)=$ (1,2,0,1) ，代回① 得 b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0 須符合下列條件:

$$\begin{cases}b_0+2b_5+b_3+2b_2=6\\b_1+2b_0+b_4+2b_3=6\\b_2+2b_1+b_5+2b_4=6\\b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=6\end{cases}$$，化簡得 $\begin{cases}b_1+b_4=2\\b_2+b_5=2\\b_3+b_0=2\end{cases}$，共有 27 組解。

(六). $(a_4, a_5) =$ (1,1)

代回可得$(a_0, a_1, a_2, a_3) =$ (1,1,1,1)，此時的b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0只須符合③就可，

解的個數是C_6^{11}=462 (組)。

(七). $(a_4, a_5) =$ (3,0)

代回可得$(a_0, a_1, a_2, a_3) =$ (0,3,0,0) ，代回①得b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0須符合下列條件:

$\begin{cases} b_1 + b_4 = 2 \\ b_2 + b_5 = 2 \\ b_3 + b_0 = 2 \end{cases}$ ，故解的個數為$3 \times 3 \times 3 = 27$ (組)。

(八). $(a_4, a_5) =$ (0,3)

代回可得$(a_0, a_1, a_2, a_3) =$ (0,0,3,0) ，代回①得b_5、b_4、b_3、b_2、b_1、b_0須符合下列條件:

$\begin{cases} b_1 + b_4 = 2 \\ b_2 + b_5 = 2 \\ b_3 + b_0 = 2 \end{cases}$ ，故解的個數為$3 \times 3 \times 3 = 27$ (組)。

綜合以上討論，得總解組數=$27 \times 7 + 100 \times 2 + 462 = 851$(組)。

附錄四

給定$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$，其中$\frac{b}{a}$為不換門中獎機率，$\frac{d}{c}$為換門中獎機率，且$\gcd(a,b)=\gcd(c,d)=1$則我們有:

$$\begin{cases} n=\frac{b}{a}q \text{ ---①} \\ \left(\frac{q}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n-k-1}\right)=\frac{d}{c} \text{ ---②} \end{cases}$$

由①，可令$n=bt, t\in\mathbb{N}$，得$q=at$，展開②式並代入後可得

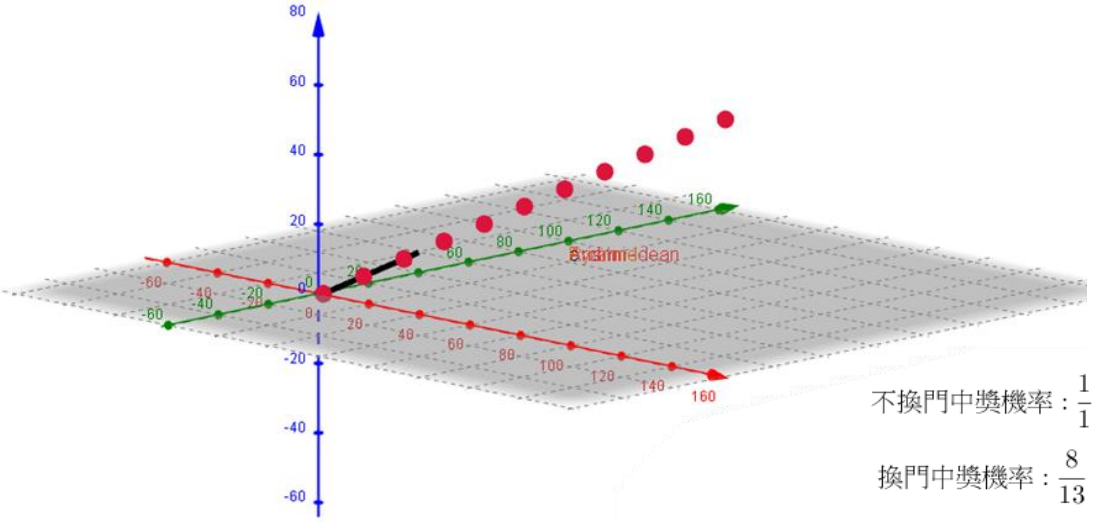
$k=\frac{(ac-bd)(bt-1)}{bd}$，若$b\neq 1$，則$bd$不整除$bt-1$，因為$k\in\mathbb{N}$，$bd\mid ac-bd$一定要成立。在$b=1$時，$d\mid ac \vee d\mid t-1$ 必須要成立，而符合$d\mid t-1$時t的形式為$dm+1, m\in\mathbb{N}$。至此可以得到所有情況時(n,q,k)的形式:

條件＼條件	$bd\mid ac-bd$ (當$d=1, d\mid ac$)	bd 不整除 $ac-bd$ 及 $bt-1$	$bd \mid bt-1$
$b\neq 1$	$\left(bt, at, \frac{(ac-bd)(bt-1)}{bd}\right), \forall t\in\mathbb{N}$	沒有格子點	條件不成立
$b=1$	$\left(t, at, \frac{(ac-d)(t-1)}{d}\right), \forall t\in\mathbb{N}$	沒有格子點	$\left((dt+1), a(dt+1), (ac-d)t\right), \forall t\in\mathbb{N}$

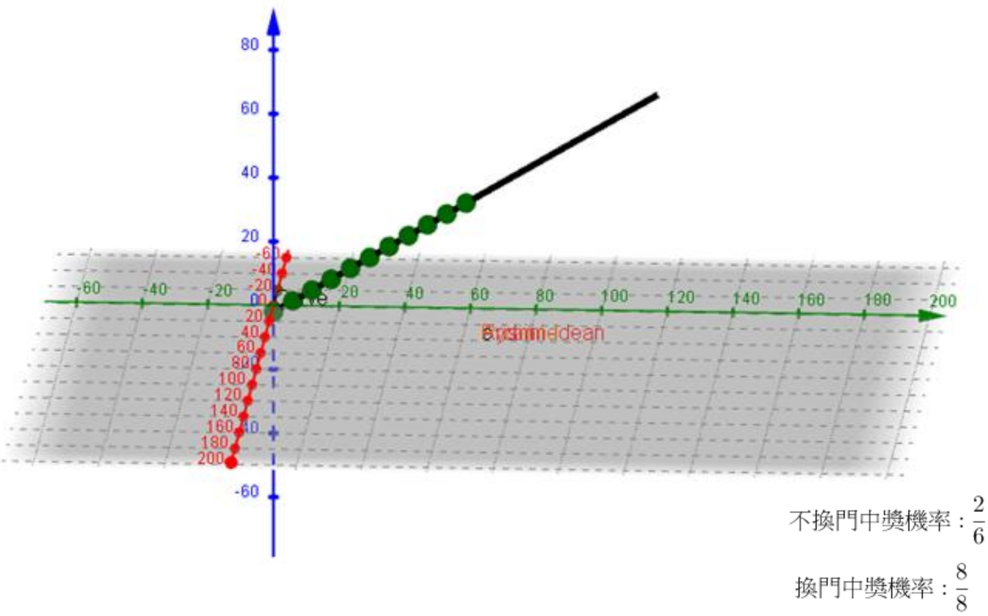
透過 Geogebra 將其繪出:

- **a = 3**
- **b = 1**
- **c = 6**
- **d = 4**
- **l1 = Sequence((b t, a t, ((a c - b d) (b t - 1)) / (b d)), t, 0, 10, 1)**
- **n = IsInteger((a d - b c) / (b d))**
- **q = b $\stackrel{?}{=}$ 1**
- **l2 = Sequence((d t + 1, a (d t + 1), (a c - d) t), t, 0, 10, 1)**
- **text1 = "不換門中獎機率: \frac{" + (FormulaText(b)) + "}{" + (FormulaText(a)) + "}"**
- **text2 = "換門中獎機率: \frac{" + (FormulaText(d)) + "}{" + (FormulaText(c)) + "}"**
- **e = Curve(b t, a t, ((a c - b d) (b t - 1)) / (b d), t, 0, 20)**

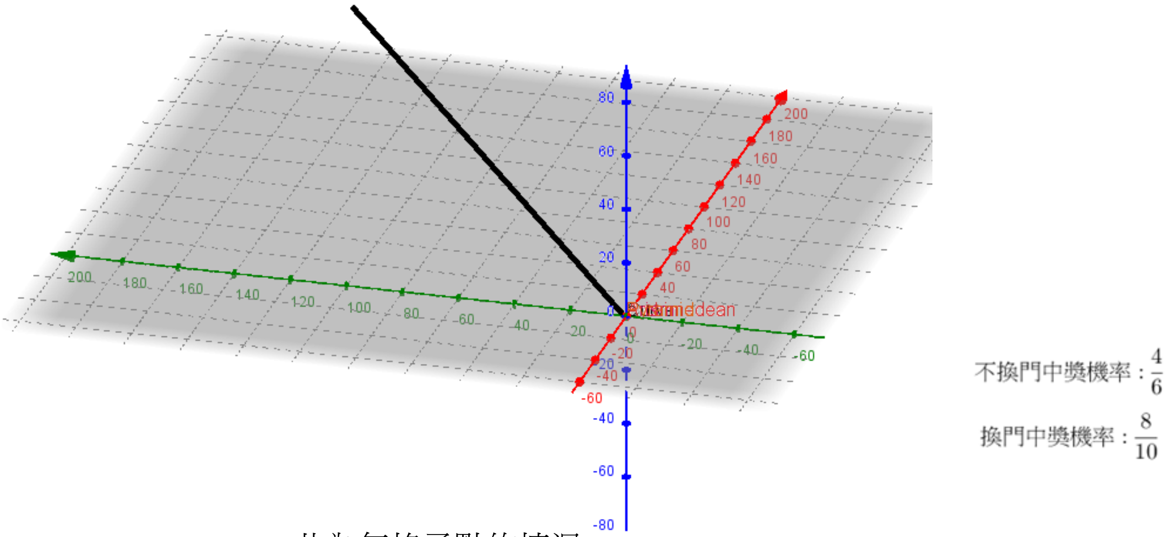
其中，$l1$顯示的條件為: $n \stackrel{?}{=} true$，$l2$顯示的條件為: $n \stackrel{?}{=} false \wedge q \stackrel{?}{=} true$，可得:



此為$b = 1$且$bd \mid bt-1$的情況 。



此為$bd \mid ac-bd$的情況 。



此為無格子點的情況 。