第十八屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA18-565

作品名稱：莫利三角形的奇蹟

姓名：康柏賢

關鍵字：Morley Triangle、Morley Center、共線

摘要

任意一個三角形，三個內角的三等分線兩兩交於三點，此三點形成一個等邊三角形，稱為莫利三角形(*First Morley Triangle*)。本作品從莫利三角形所牽涉到的三個特殊點開始：

First Morley Center (*FMC*)：即莫利三角形的重心。

Second Morley Center：即原三角形與莫利三角形對應頂點間的連線的交點。

Third Morley Center：即原三角形與 *First Morley Adjunct Triangle* (圖 4)對應頂點間的連線的交點。

我們巧妙證明了這三個特殊點共線($Morley\ Line$)，並進一步推廣到所有與原三角形的三等分線相關的 18 個廣義莫利三角形($\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$)。我們發現這些正三角形都存在對原三角形的$(pqr-)Morley\ Centers$及$(pqr-)Morley\ Line$。除此之外，本作品最重要的成果是證明了：

當 $p+q+r\equiv 0\ (\bmod 3)$ ， $pqr-Morley\ Line$ **通過** $p-1\,q-1\,r-1-FMC$

當 $p+q+r\equiv 2\ (\bmod 3)$ ， $pqr-Morley\ Line$ **通過** $p+1\,q+1\,r+1-FMC$

並由此建構出在這 18 個正三角形中三個三個所形成的三元組(*triad*)關係。

壹、 研究動機

某天翻閱《幾何明珠》時，對於莫利三角形(*Morley Triangle*)的奇特性與優美性起了極大的興趣，便想對其進行進一步的深入研究。某日在翻閱資料時，我們發現莫利三角形中存在許多奇特的點，希望能找出它們的性質與彼此之間的關聯。

貳、 研究目的

1. 尋找莫利三角形中的特殊點(*First Morley Center*, *Second Morley Center*, *Third Morley Center* 等等)的性質並予以證明。
2. 將這些特殊點的性質推廣至所有與原三角形的三等分線相關的 18 個正三角形($\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$)。
3. 探討這 18 個正三角形所形成的 $Morley\ Line$ 之間的關聯性。
4. 探討 *First Morley Center*, *Second Morley Center*, *Third Morley Center* 在平面的分布問題。

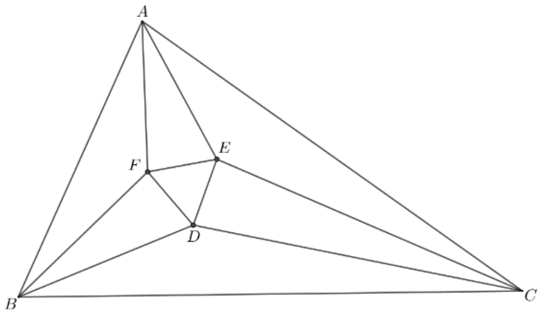
參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、Geogebra

肆、 文獻探討

***First Morley Triangle* (1899)** [1]

任意三角形 ABC 中，角與角之間相鄰的兩條三等分線彼此相交，共交於三點（圖 1），以此三點為頂點的三角形稱為莫利三角形（ ΔDEF ）。



（圖 1）

等角共軛點 [2]

設點 P 為 ΔABC 所在平面上一點，I 為 ΔABC 的內心。作直線 $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ ，設直線 L_1 與 $\overleftrightarrow{PA}$ 對稱於 $\overleftrightarrow{AI}$ ，設直線 L_2 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 對稱於 $\overleftrightarrow{BI}$ ，設直線 L_3 與 $\overleftrightarrow{PC}$ 對稱於 $\overleftrightarrow{CI}$ ，則 L_1，L_2，L_3 三線交於一點 Q ，我們稱 Q 點為 P 點關於 ΔABC 的等角共軛點。

Trigonometric Ceva's Theorem [3]

在 ΔABC 中，D 為 $\overleftrightarrow{BC}$ 上一點，E 為 $\overleftrightarrow{CA}$ 上一點，F 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點 $(D, E, F \neq A, B, C)$ ，則 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ 三線共點的充要條件為 $\dfrac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}\cdot\dfrac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE}\cdot\dfrac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF}=1$

Desargue's Theorem [4]

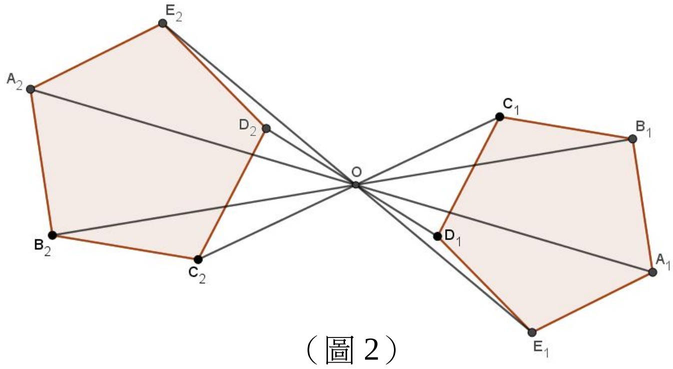
兩個三角形 $(\Delta ABC, \Delta XYZ)$ 對應頂點的連線 $(\overleftrightarrow{AX}, \overleftrightarrow{BY}, \overleftrightarrow{CZ})$ 共點，若且唯若其對應邊的交點 $(\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{XY}, \overleftrightarrow{BC}\cap\overleftrightarrow{YZ}, \overleftrightarrow{CA}\cap\overleftrightarrow{ZX})$ 共線。滿足此條件的兩個三角形，我們稱他們為"透視的"(perspective)。

Brianchon's Theorem [5]

令 l_1，l_2，l_3，l_4，l_5，l_6 為任三線不共點的六線，則 l_1，l_2，l_3，l_4，l_5，l_6 共切一圓錐曲線若且唯若三線 $(l_1\cap l_2)(l_4\cap l_5)$, $(l_2\cap l_3)(l_5\cap l_6)$, $(l_3\cap l_4)(l_6\cap l_1)$ 共點。而滿足 *Brianchon's Theorem* 的六邊形我們稱其為 *Brianchon hexagon* 。

位似中心 [6]

若有兩個相似圖形，其對應邊互相平行，對應頂點間的連線交於一點，則稱此點為這兩個圖形的位似中心。（圖 2）



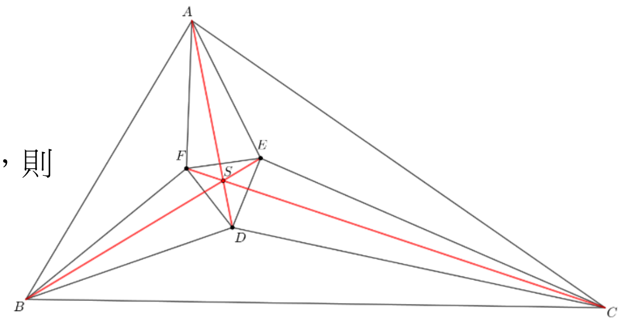
（圖 2）

First Morley Center [7]

莫利三角形的中心我們稱之為 *First Morley Center* 。

Second Morley Center [8]

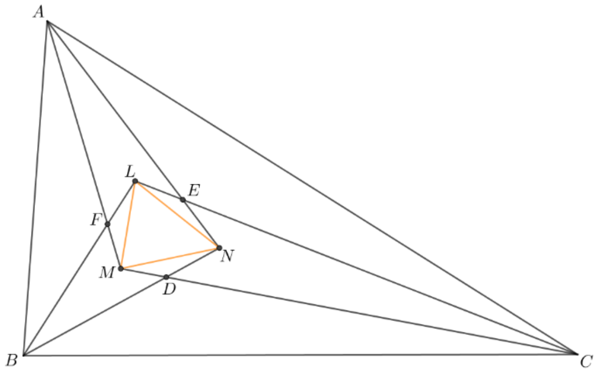
如（圖 3），ΔDEF 為 ΔABC 的 *First Morley Triangle* ，則 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ 三線交於一點 S ，我們稱此點 S 為 ΔABC 的 *Second Morley Center* 。



（圖 3）

First Morley Adjunct Triangle [9]

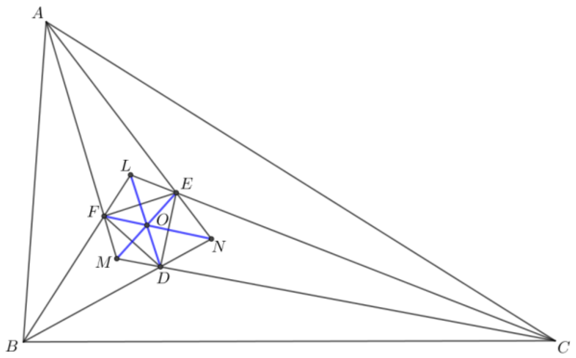
（圖 4）中，我們稱 ΔLMN 為 ΔABC 的 ***First Morley Adjunct Triangle*** 。



（圖 4）

伍、 研究過程

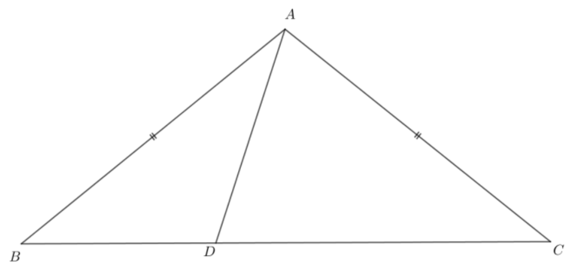
Lemma 1 如（圖 5），$\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$ 三線交於一點，且此點為 *First Morley Center*



（圖 5）

證明：易知 D 即為 ΔLBC 的內心，所以 $\angle DLF = \angle DLB = \angle DLC = \angle DLE$

$\overline{LD} = \overline{LD}$，$\because \Delta DEF$ 為正三角形，$\therefore \overline{DF} = \overline{DE}$，此時 ΔLDF 與 ΔLDE 便為"SSA"之關係。如（圖 6），ΔABD 與 ΔACD 便是"SSA"之關係。此時，$\angle ADB + \angle ADC = 180°$。



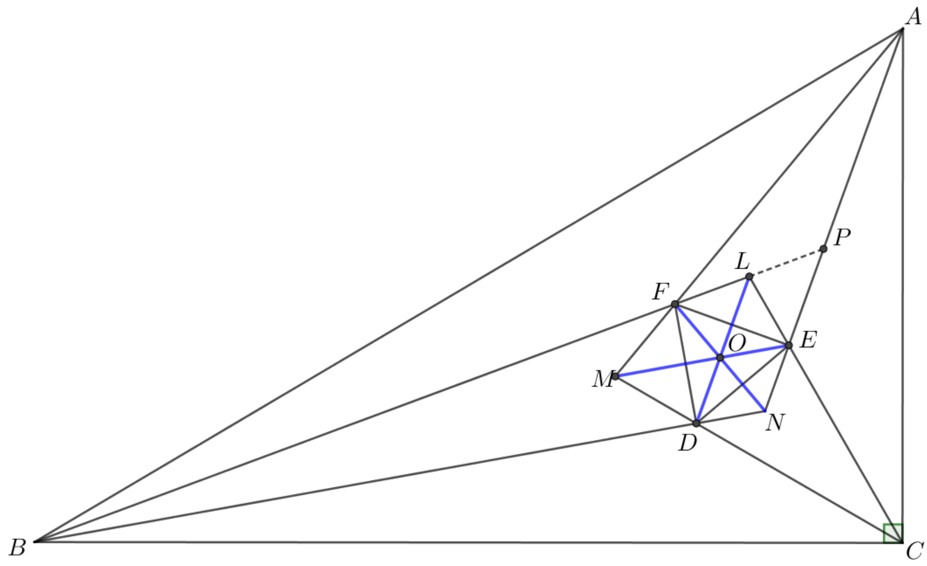
（圖 6）

也就是說，在(圖三)中，若 $\angle LFD + \angle LED \neq 180°$，則 $\Delta LDE \cong \Delta LDF \Leftrightarrow \overline{LD} \perp \overline{EF}$，$\overline{LD}$ 為 $\overline{EF}$ 之中垂線；若 $\angle LFD + \angle LED = 180° \Leftrightarrow \angle ELF + \angle EDF = 180°$

$\Leftrightarrow \angle BLC + 60° = 180° \Leftrightarrow 180° - (\frac{2}{3}\angle B + \frac{2}{3}\angle C) = 120° \Leftrightarrow \frac{2}{3}\angle B + \frac{2}{3}\angle C = 60°$

$\Leftrightarrow \angle B + \angle C = 90° \Leftrightarrow \angle A = 90°$。

在 ΔABC 中，不可能有兩個角同時為 $90°$，所以 $\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$ 三條線段中至少有兩條線段為 ΔDEF 之中垂線。不失一般性，設 $\overline{EM}$ 為 $\overline{FD}$ 之中垂線，$\overline{LD}$ 為 $\overline{EF}$ 之中垂線，此時，$\angle C = 90°$。如（圖 7），設 $\overline{DL}$ 與 $\overline{EM}$ 交於 O 點，易知，O 點正是正三角形 DEF 的重心，延長 $\overline{BL}$ 交 $\overline{AN}$ 於 P。



（圖 7）

$$\text{在}\Delta ABN\text{ 中，}\frac{\overline{AB}}{\sin\angle ANB}=\frac{\overline{BN}}{\sin\angle BAN}\Leftrightarrow\overline{BN}=\frac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BAN}{\sin\angle ANB}$$

$$\text{在}\Delta ABP\text{ 中，}\frac{\overline{AB}}{\sin\angle APB}=\frac{\overline{BP}}{\sin\angle BAP}\Leftrightarrow\overline{BP}=\frac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BAP}{\sin\angle APB}$$

$$\text{在}\Delta BDC\text{ 中，}\frac{\overline{BC}}{\sin\angle BDC}=\frac{\overline{BD}}{\sin\angle BCD}\Leftrightarrow\overline{BD}=\frac{\overline{BC}\cdot\sin\angle BCD}{\sin\angle BDC}$$

$$\text{在}\Delta BLC\text{ 中，}\frac{\overline{BC}}{\sin\angle BLC}=\frac{\overline{BL}}{\sin\angle BCL}\Leftrightarrow\overline{BL}=\frac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BCL}{\sin\angle BLC}$$

$$\sin\angle BAN=\sin\frac{2}{3}\angle A,\ \sin\angle ANB=\sin(180^\circ-\frac{2}{3}\angle B-\frac{2}{3}\angle A)=\sin 60^\circ$$

$$\sin\angle BAP=\sin\frac{2}{3}\angle A,\ \sin\angle APB=\sin(180^\circ-\frac{1}{3}\angle B-\frac{2}{3}\angle A)=\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)$$

$$\sin\angle BCD=\sin\frac{1}{3}\angle C=\sin 30^\circ,\ \sin\angle BDC=\sin(180^\circ-\frac{1}{3}\angle B-\frac{1}{3}\angle C)=\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)$$

$$\sin\angle BCL=\sin\frac{2}{3}\angle C=\sin 60^\circ,\ \sin\angle BLC=\sin(180^\circ-\frac{2}{3}\angle B-\frac{2}{3}\angle C)=\sin(60^\circ+\frac{2}{3}\angle B)$$

$$\overline{LD}//\overline{AN} \quad \Leftrightarrow \frac{\overline{BN}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BL}} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BAN}{\sin\angle ANB}}{\dfrac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BAP}{\sin\angle APB}}=\frac{\dfrac{\overline{BC}\cdot\sin\angle BCD}{\sin\angle BDC}}{\dfrac{\overline{BC}\cdot\sin\angle BCL}{\sin\angle BLC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{\sin\frac{2}{3}\angle A}{\sin 60^\circ}}{\dfrac{\sin\frac{2}{3}\angle A}{\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)}}=\frac{\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)}}{\dfrac{\sin\angle 60^\circ}{\sin(60^\circ+\frac{2}{3}\angle B)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\frac{2}{3}\angle B)}=\frac{1}{\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(60^\circ+\frac{2}{3}\angle B)=\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)\cdot\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)$$

$$\Leftrightarrow \sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)\cdot\cos(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)=\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)\cdot\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B) \quad (*)$$

$(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)+(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)=90^\circ$, $\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)=\cos(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)$, $\therefore (*)$成立，

即$\overline{LD}//\overline{AN}\Rightarrow\angle DEN=\angle LDE=30^\circ$ 。

同理，$\overline{ME}//\overline{BN} \Rightarrow \angle NDE=\angle MED=30^\circ\Rightarrow\Delta NDE$ 為等腰三角形，$\overline{ND}=\overline{NE}$ 。

又$\overline{EF}=\overline{DF}$, $\overline{NF}=\overline{NF}$, $\Delta NEF\cong\Delta NDF(SSS)$ ，故$\overline{FN}$ 為$\overline{ED}$之中垂線 $\Rightarrow$ $\overline{FN}$ 通過O點

$\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$ 三線共點。

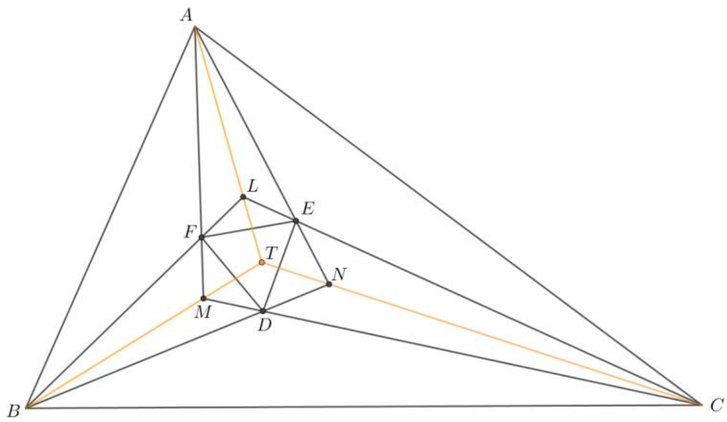
若$\angle A$, $\angle B$, $\angle C\neq 90^\circ$, 則$\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$ 分別為$\overline{EF}$, $\overline{FD}$, $\overline{DE}$之中垂線，三線同樣交於ΔDEF 之重心O 。

綜上所述，$\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$ 三線交於一點，此點即為ΔABC的 *First Morley Center* 。 ■

$\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$ 共點這個性質將在後面的證明中起到至關重要的作用。

Lemma 2 *Third Morley Center*

如（圖 8），除D, E, F外，ΔABC的三等分線另外交於L, M, N三點，則$\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$, $\overleftrightarrow{CN}$三線交於一點T，我們稱此點為ΔABC的 *Third Morley Center*。



（圖 8）

證明： 在（圖 8）中，$\angle ABL=\angle CBD=\frac{1}{3}\angle B$, $\angle ACL=\angle BCD=\frac{1}{3}\angle C \Rightarrow D$, L互為等角共軛點，$\angle BAL=\angle CAD$。

同理，E, M、F, N分別互為等角共軛點 $\Rightarrow \angle CBM=\angle ABE$, $\angle ACN=\angle BCF$。

我們知道$\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$三線共點(*Second Morley Center*)，由 *Trigonometric Ceva's Theorem*，

$$\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}\cdot\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF}=1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

又$\angle BAD=\angle A-\angle CAD=\angle A-\angle BAL=\angle CAL$,

$\angle CBE=\angle C-\angle ABE=\angle C-\angle CBM=\angle ABM$,

$\angle ACF=\angle B-\angle BCF=\angle B-\angle ACN=\angle BCN$,

$$\therefore \text{①} \Leftrightarrow \frac{\sin\angle CAL}{\sin\angle BAL}\cdot\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM}\cdot\frac{\sin\angle BCN}{\sin\angle ACN}=1$$

由 *Trigonometric Ceva's Theorem*，$\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$, $\overleftrightarrow{CN}$三線交於一點T。

T點即為ΔABC的 *Third Morley Center*。 ■

Lemma 3 若有三個三角形(ΔABC, $\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$)兩兩互為"透視的"，則此三個三角形的三個透視軸共點若且唯若它們的三個透視中心共線。[10]

證明：設 ΔABC 與 $\Delta A'B'C'$ 的透視中心為 U ，透視軸為 l_1 。

設 $\Delta A'B'C'$ 與 $\Delta A''B''C''$ 的透視中心為 V ，透視軸為 l_2 。

設 $\Delta A''B''C''$ 與 ΔABC 的透視中心為 W ，透視軸為 l_3 。

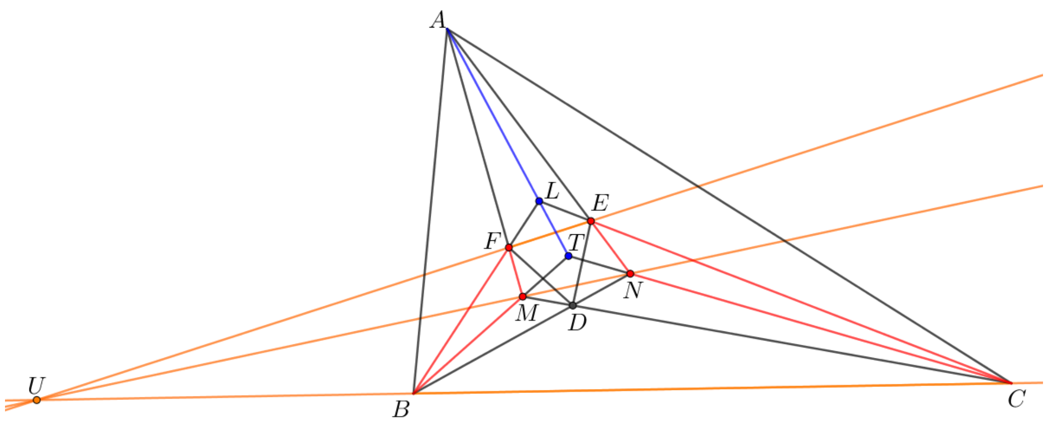
對 $\Delta AA'A''$ 與 $\Delta BB'B''$ 運用 *Desargue's Theorem*，則由 $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} = U$, $\overleftrightarrow{A'A''} \cap \overleftrightarrow{B'B''} = V$, $\overleftrightarrow{A''A} \cap \overleftrightarrow{B''B} = W$ $\Rightarrow U, V, W$ 共線 $\Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{A''B''}$ 三線共點。

且若 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{A''B''}$ 交於一點，則此點在 l_1, l_2, l_3 上

($\because$ $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$ 在 ΔABC 與 $\Delta A'B'C'$ 的透視軸 l_1 上，$\overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{A''B''}$ 在 $\Delta A'B'C'$ 與 $\Delta A''B''C''$ 的透視軸 l_2 上，$\overleftrightarrow{A''B''} \cap \overleftrightarrow{AB}$ 在 $\Delta A''B''C''$ 與 ΔABC 的透視軸 l_3 上，$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{A''B''} \in l_1 \cap l_2 \cap l_3$)，即為 l_1, l_2, l_3 的交點。

由於另一個三線共點的情況是對偶的，證明相似，在此便不贅述。 ■

Lemma 4 如（圖 9），ΔDEF 為 ΔABC 的 *First Morley Triangle*，ΔLMN 為 ΔABC 的 *First Morley Adjunct Triangle*，則 $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{BC}$ 三線共點。



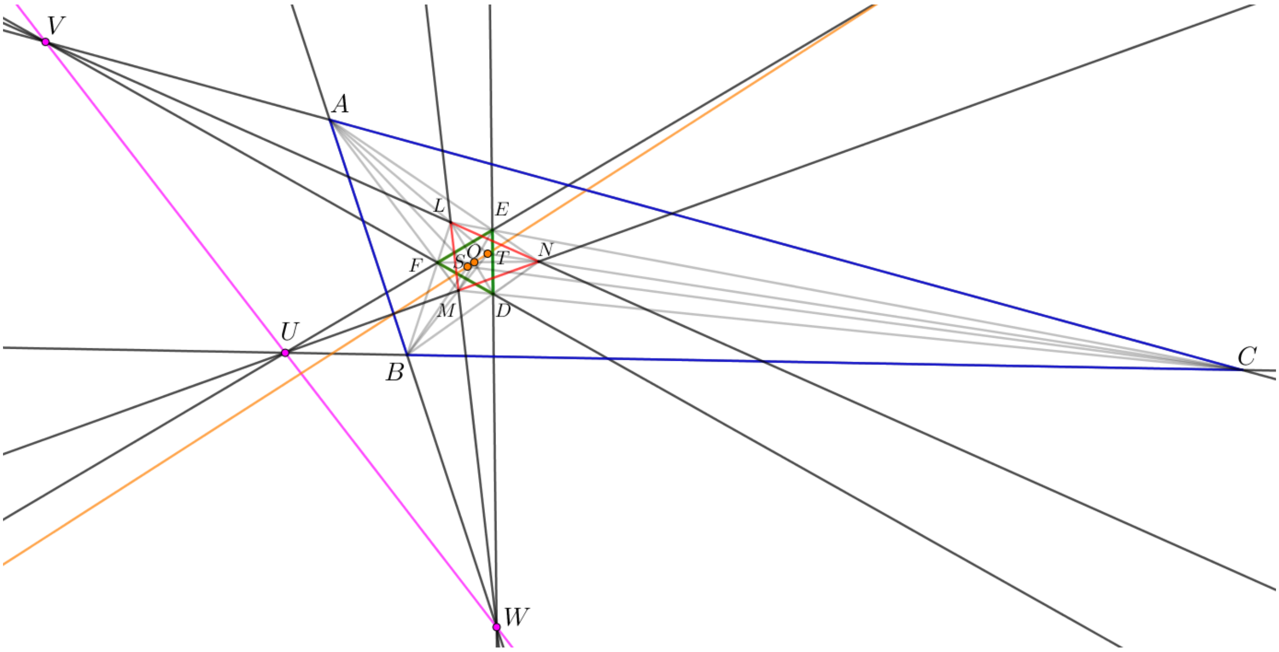
（圖 9）

證明：我們觀察 ΔBFM 與 ΔCEN ，$\overleftrightarrow{FM} \cap \overleftrightarrow{EN} = A$, $\overleftrightarrow{BF} \cap \overleftrightarrow{CE} = L$, $\overleftrightarrow{BM} \cap \overleftrightarrow{CN} = T$ ，T 為 ΔABC 的 *Third Morley Center* ，由 Lemma 2，A, L, T 三點共線。故由 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{CB}$ 三線交於一點 U 。 ■

Proposition：$\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{NL}$, $\overleftrightarrow{FD}$ 三線交於一點，設為 V 點，$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{LM}$, $\overleftrightarrow{ED}$ 三線交於一點，設為 W 點。

雖然在[11]中提出 *First Morley Center, Second Morley Center, Third Morley Center* 三點共線，但我們並未查詢到關於此特性之非坐標的證明，故我們在這裡給出另一種證明，以觀察它們之間的關聯性。

Theorem 1 在任意三角形 ABC 中，它的 *First Morley Center, Second Morley Center, Third Morley Center* 三點共線。



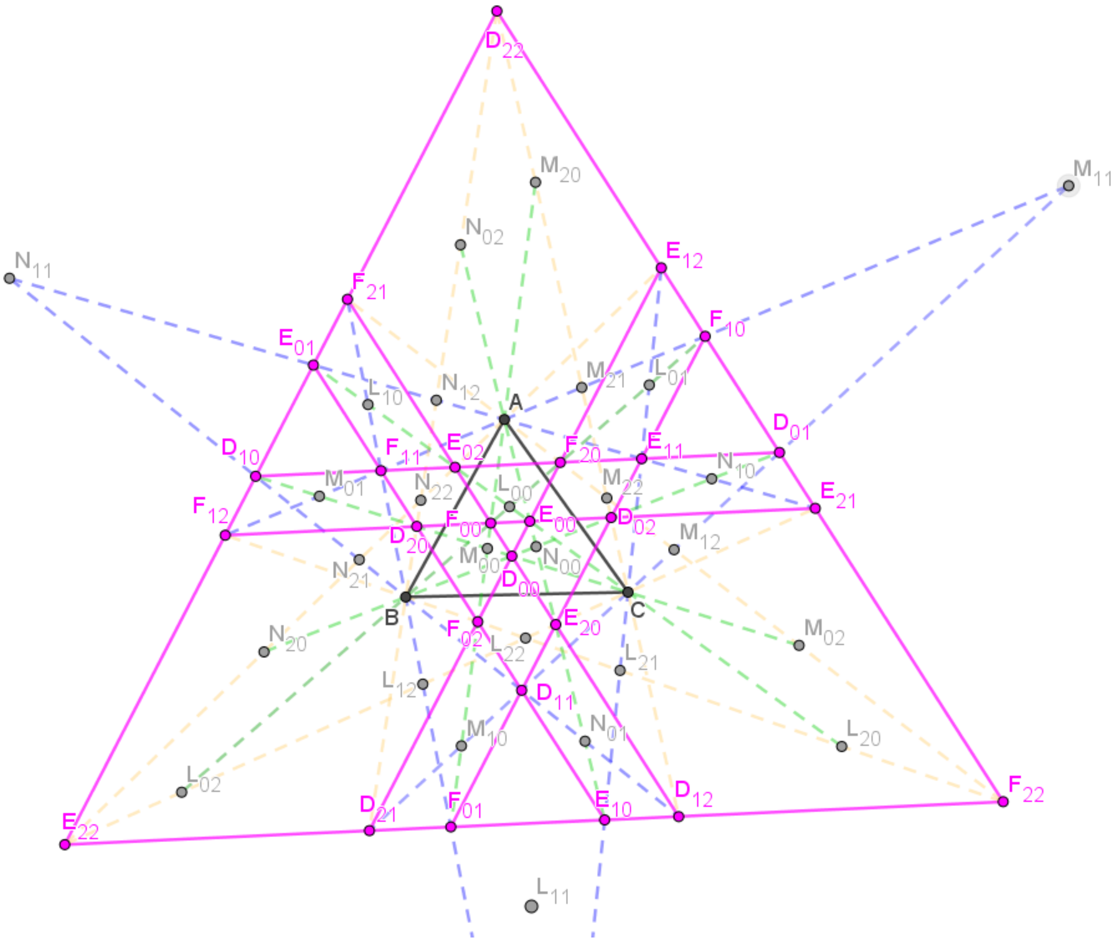
（圖 10）

證明： 如（圖 10），設 O 點為 ΔABC 的 *First Morley Center*，S 點為 ΔABC 的 *Second Morley Center*，T 點為 ΔABC 的 *Third Morley Center*。觀察 ΔLMN 與 ΔDEF，$\overleftrightarrow{DL}$, $\overleftrightarrow{EM}$, $\overleftrightarrow{FN}$ 交於 O 點，由 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{EF}\cap\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{FD}\cap\overleftrightarrow{NL}$, $\overleftrightarrow{DE}\cap\overleftrightarrow{LM}$ 三點共線，$\overleftrightarrow{UVW}$ 為 ΔLMN 與 ΔDEF 之透視軸；觀察 ΔABC 與 ΔDEF，$\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{CF}$ 交於 S 點，由 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{BC}\cap\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CA}\cap\overleftrightarrow{FD}$, $\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{DE}$ 三點共線，$\overleftrightarrow{UVW}$ 為 ΔABC 與 ΔDEF 之透視軸；觀察 ΔLMN 與 ΔABC，$\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$, $\overleftrightarrow{CN}$ 交於 T 點，由 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{BC}\cap\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{CA}\cap\overleftrightarrow{NL}$, $\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{LM}$ 三點共線，$\overleftrightarrow{UVW}$ 為 ΔLMN 與 ΔABC 之透視軸。故 ΔABC, ΔDEF, ΔLMN 互為"透視的"。因為 ΔABC, ΔDEF, ΔLMN 的透視軸三線共點(特別地，它們的透視軸皆為 $\overleftrightarrow{UVW}$)，由 Lemma 3，O, S, T 三點共線。 ■

我們稱 $\overleftrightarrow{OST}$ 為 ΔABC 的 *Morley Line*。

在 F.Glanville Taylor and W.L.Marr [12], p123 中，證明了這樣一個有趣的結論：

Lemma 5 如(圖 11)，我們將 $\overleftrightarrow{AE}$，$\overleftrightarrow{AF}$，$\overleftrightarrow{BD}$，$\overleftrightarrow{BF}$，$\overleftrightarrow{CD}$，$\overleftrightarrow{CE}$ 六條角的三等分線旋轉 $120°$ (逆時針以及順時針) ，在每一個頂點我們可以得到六條這樣的的三等分線。而這些三等分線一共交出 27 個頂點，分別有 9 個關於 D，E，F 的(D_{qr}, E_{rp}, F_{pq} p，q，$r \in \{0, 1, 2\}$)。而這些頂點落在九條直線上，並且是三對三(3 *by* 3)平行的。這 27 個頂點一共構成 27 個正三角形，18 個關於 D, E, F 的($\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$，且 $p+q+r \equiv 0, 2 \pmod 3$)，另外 9 個只由 D，E，F 其中一種所構成(如 $\Delta D_{00}D_{12}D_{21}$)。而 L_{qr}, M_{rp}, N_{pq} 分別是 D_{qr}，E_{rp}，F_{pq} 的等角共軛點。那我們在這裡稱形如 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 的正三角形為 $pqr - morley\ triangle$ 。



(圖 11)

那有了前面的結論，我們自然會好奇，在這些廣義的 18 個莫利三角形中，是否能夠類似地定義出關於 ΔABC 的 *Morley Centers* ？而這些特殊點之間是否存在更進一步的關聯性？在深入討論前，我們先作以下定義：

Definition ：廣義 *Morley Centers* 與 *Morley Line*

設 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 是由 ΔABC 的角的三等分線所構成的正三角形，則其對 ΔABC 的三個特殊點定義如下：

$First\ Morley\ Center\left(pqr-FMC\right)$ ： $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 的中心。

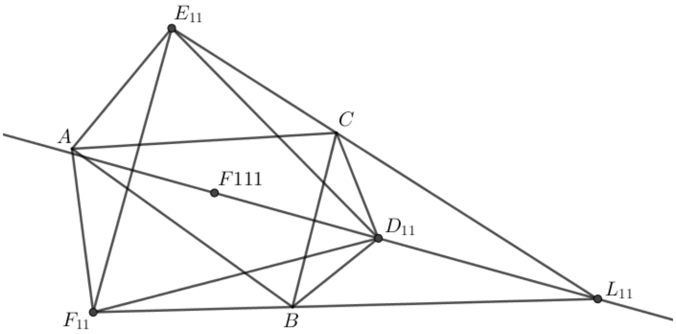
$Second\ Morley\ Center\left(pqr-SMC\right)$ ： $\overleftrightarrow{AD_{qr}}, \overleftrightarrow{BE_{rp}}, \overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 的交點(只在此三線共點時有定義)。

$Third\ Morley\ Center\left(pqr-TMC\right)$ ： $pqr-SMC$ (若有定義)對 ΔABC 的等角共軛點。

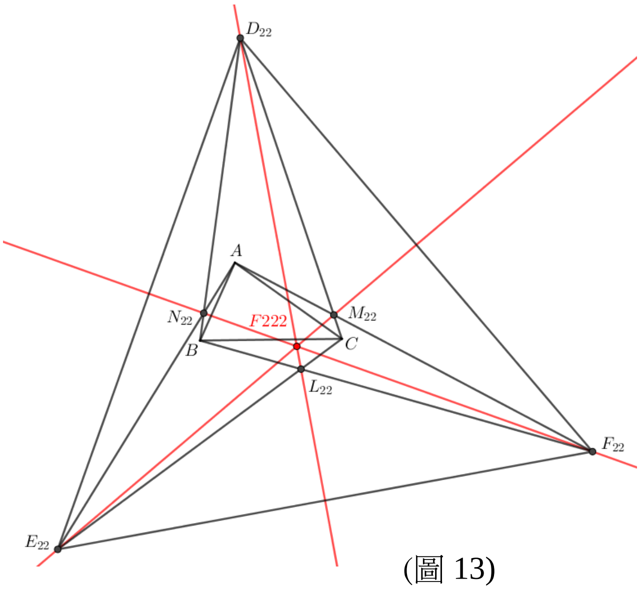
$Morley\ Line\ (pqr-Morley\ Line)$ ：若上述此三個特殊點共線，則這條線稱作 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 對 ΔABC 的 $Morley\ Line$ 。

Lemma 6 $pqr-FMC=\overleftrightarrow{D_{qr}L_{qr}}\cap\overleftrightarrow{E_{rp}M_{rp}}\cap\overleftrightarrow{F_{pq}N_{pq}}$

證明： 我們分成三種情形討論



(圖 12)



(圖 13)

(1) $111-FMC=\overleftrightarrow{D_{11}L_{11}}\cap\overleftrightarrow{E_{11}M_{11}}\cap\overleftrightarrow{F_{11}N_{11}}$

如(圖 12)，我們不難得知 $\overleftrightarrow{BF_{11}}\cap\overleftrightarrow{CE_{11}}=L_{11}$, $\overleftrightarrow{CD_{11}}\cap\overleftrightarrow{AF_{11}}=M_{11}$, $\overleftrightarrow{AE_{11}}\cap\overleftrightarrow{BD_{11}}=N_{11}$ (M_{11} , N_{11} 因版面關係無法在上圖中呈現)，以及 D_{11} 為 ΔBCL_{11} 之內心，故 $\angle BL_{11}D_{11}=\angle CL_{11}D_{11}$ ，又 $\overline{D_{11}L_{11}}=\overline{D_{11}L_{11}}$, $\overline{D_{11}F_{11}}=\overline{D_{11}E_{11}}$ 所以 $\Delta F_{11}L_{11}D_{11}$ 與 $\Delta E_{11}L_{11}D_{11}$ 為 "SSA" 之關係。

而 $\angle D_{11}F_{11}L_{11}+\angle D_{11}E_{11}L_{11}=180°\Leftrightarrow(\angle D_{11}F_{11}L_{11}+60°)+(\angle D_{11}E_{11}L_{11}+60°)=300°$

$\Leftrightarrow\angle E_{11}F_{11}B+\angle F_{11}E_{11}C=300°\Leftrightarrow\angle F_{11}BC+E_{11}CB=60°$

$\Leftrightarrow\angle B+\angle C+\dfrac{\angle A+\angle B}{3}+\dfrac{\angle A+\angle C}{3}=60°\Leftrightarrow\angle B+\angle C+\dfrac{\angle A}{3}=0°\ (\rightarrow\leftarrow)$

故 $\Delta D_{11}F_{11}L_{11} \cong \Delta D_{11}E_{11}L_{11} \Rightarrow \overline{D_{11}L_{11}} \perp \overline{E_{11}F_{11}}$ 。同理，$\overline{E_{11}M_{11}} \perp \overline{F_{11}D_{11}}$，$\overline{F_1N_1} \perp \overline{D_{11}E_{11}}$ 。

$\therefore \overleftrightarrow{D_{11}L_{11}}, \overleftrightarrow{E_{11}M_{11}}, \overleftrightarrow{F_{11}N_{11}}$ 皆過 $\Delta D_{11}E_{11}F_{11}$ 之中心，$111-FMC = \overleftrightarrow{D_{11}L_{11}} \cap \overleftrightarrow{E_{11}M_{11}} \cap \overleftrightarrow{F_{11}N_{11}}$ 。

(2) $222-FMC = \overleftrightarrow{D_{22}L_{22}} \cap \overleftrightarrow{E_{22}M_{22}} \cap \overleftrightarrow{F_{22}N_{22}}$

如(圖 13)，為證明 $\overleftrightarrow{D_{22}L_{22}} \perp \overleftrightarrow{E_{22}F_{22}}$，我們只需證明 $\angle BF_{22}D_{22} = \angle CE_{22}D_{22}$ 。

$$\frac{\sin\angle BF_{22}D_{22}}{\sin\angle CE_{22}D_{22}} = \frac{\overline{D_{22}B}\cdot\dfrac{\sin\angle D_{22}BF_{22}}{\overline{D_{22}F_{22}}}}{\overline{D_{22}C}\cdot\dfrac{\sin\angle D_{22}CE_{22}}{\overline{D_{22}E_{22}}}} = \frac{\overline{D_{22}B}}{\overline{D_{22}C}}\cdot\frac{\sin\angle D_{22}BF_{22}}{\sin\angle D_{22}CE_{22}} = \frac{\overline{D_{22}B}}{\overline{D_{22}C}}\cdot\frac{\sin(120^\circ-\dfrac{\angle B}{3})}{\sin(120^\circ-\dfrac{\angle C}{3})}$$

$$= \frac{\overline{D_{22}B}}{\overline{D_{22}C}}\cdot\frac{\sin(60^\circ+\dfrac{\angle B}{3})}{\sin(60^\circ+\dfrac{\angle C}{3})} = \frac{\overline{D_{22}B}}{\overline{D_{22}C}}\cdot\frac{\sin\angle D_{22}BC}{\sin\angle D_{22}CB} = 1$$

$\therefore \overleftrightarrow{D_{22}L_{22}} \perp \overleftrightarrow{E_{22}F_{22}}$ 。同理，$\overleftrightarrow{E_{22}M_{22}} \perp \overleftrightarrow{F_{22}D_{22}}$，$\overleftrightarrow{F_{22}N_{22}} \perp \overleftrightarrow{D_{22}E_{22}}$，故 $\overleftrightarrow{D_{11}L_{11}}, \overleftrightarrow{E_{11}M_{11}}, \overleftrightarrow{F_{11}N_{11}}$ 皆過 $\Delta D_{22}E_{22}F_{22}$ 之中心，$222-FMC = \overleftrightarrow{D_{22}L_{22}} \cap \overleftrightarrow{E_{22}M_{22}} \cap \overleftrightarrow{F_{22}N_{22}}$ 。

(3) $pqr-FMC = \overleftrightarrow{D_{qr}L_{qr}} \cap \overleftrightarrow{E_{rp}M_{rp}} \cap \overleftrightarrow{F_{pq}N_{pq}}$ (當 p，q，r 不全相同)

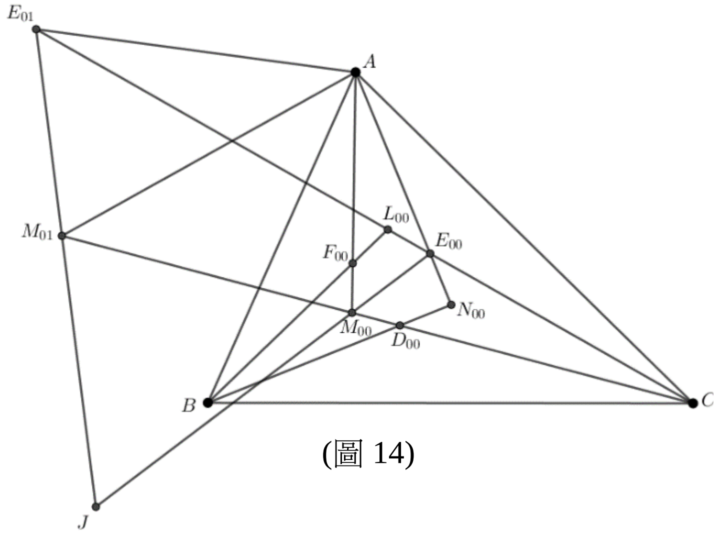
同樣地，我們需要證 $\overleftrightarrow{D_{qr}L_{qr}}$，$\overleftrightarrow{E_{rp}M_{rp}}$，$\overleftrightarrow{F_{pq}N_{pq}}$ 為 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 的中垂線，而在這裡我們只證 $\overleftrightarrow{E_{01}M_{01}} \perp \overleftrightarrow{D_{12}F_{20}}$ 和 $\overleftrightarrow{E_{20}M_{20}} \perp \overleftrightarrow{D_{02}F_{00}}$ 的情形，其餘同理可證。注意到 $\overleftrightarrow{D_{12}F_{20}}$，$\overleftrightarrow{D_{02}F_{00}}$ 和 $\overleftrightarrow{D_{00}F_{00}}$ 都相差 60°，所以我們變成要證明 $\overleftrightarrow{E_{01}M_{01}}$，$\overleftrightarrow{E_{20}M_{20}}$ 與 $\overleftrightarrow{E_{00}M_{00}}$ 夾角為 60° 。

(i) $\overleftrightarrow{E_{01}M_{01}} \perp \overleftrightarrow{D_{12}F_{20}}$

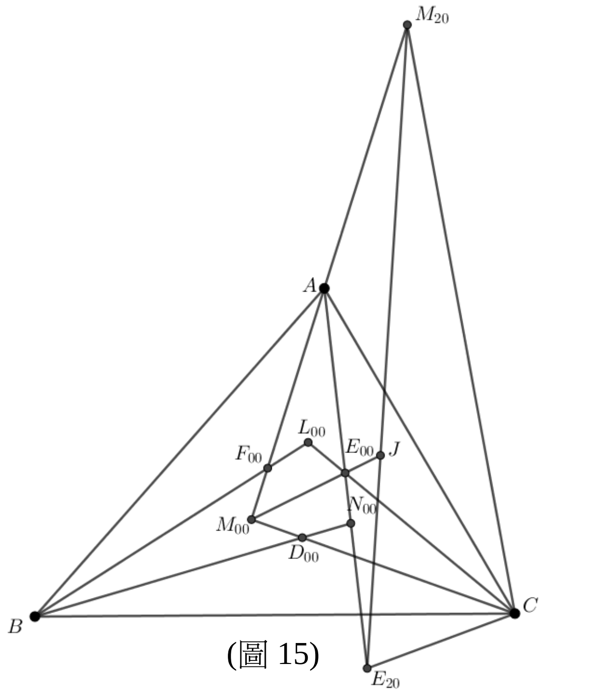
如(圖 14)，設 $\overleftrightarrow{E_{00}M_{00}} \cap \overleftrightarrow{E_{01}M_{01}} = J$ 。由 Lemma 5，$\angle E_{00}AE_{01} = 120^\circ$，$\angle M_{00}AM_{01} = 60^\circ$ 。

$\angle CAM_{01} = 60^\circ + \dfrac{2}{3}\angle A$ ， $\angle E_{01}AM_{01} = \angle EAE_{01} - \angle M_{00}AM_{01} - \angle E_{00}AM_{00} = 60^\circ - \dfrac{1}{3}\angle A$ $= \dfrac{1}{2}(180^\circ - \angle CAM_{01}) \Rightarrow \overleftrightarrow{AE_{01}}$ 是 $\angle CAM_{01}$ 的外角平分線。又 $\overleftrightarrow{CE_{00}}$ 為 $\angle ACM_{01}$ 的角平分線，$\therefore E_{01}$ 是 ΔACM_{01} 的旁心，$\overleftrightarrow{E_{01}M_{01}}$ 平分 $\angle AM_{01}M$ 的外角。又 E_{00} 為 $\Delta AM_{00}C$ 之內心，故 $\overleftrightarrow{E_{00}M_{00}}$ 為 $\angle AM_{00}M_{01}$ 的外角平分線，J 為 $\Delta AM_{00}M_{01}$ 的旁心。

$\angle E_{01}JE_{00} = \angle M_{01}JM = 180^\circ - \angle M_{00}M_{01}J - \angle M_{01}M_{00}J = 60^\circ$



(圖 14)



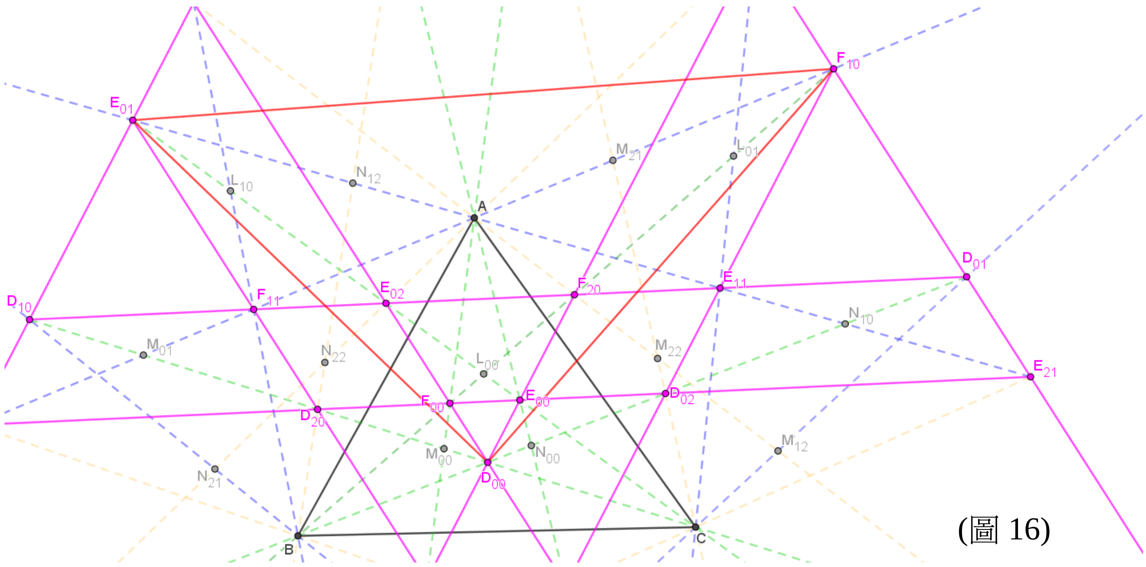
(圖 15)

(ii) $\overleftrightarrow{E_{20}M_{20}} \perp \overleftrightarrow{D_{02}F_{00}}$

如(圖 15)，設 $\overleftrightarrow{E_{00}M_{00}} \cap \overleftrightarrow{E_{20}M_{20}} = J$。由 Lemma 5，$\angle E_{00}CE_{20} = 60^\circ$, $\angle M_{00}CM_{20} = 60^\circ$。

$\angle E_{20}CA = 60^\circ + \frac{1}{3}\angle A = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle M_{20}CA) \Rightarrow \overleftrightarrow{CE_{20}}$ 是 $\angle M_{20}CA$ 的外角平分線。

$\angle CAE_{20} = \frac{1}{2}\angle CAM_{00} = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CAM_{20}) \Rightarrow \overleftrightarrow{AE_{20}}$ 是 $\angle CAM_{20}$ 的外角平分線，$\therefore E_{20}$ 為 ΔACM_{20} 的旁心，$\overleftrightarrow{E_{20}M_{20}}$ 平分 $\angle CM_{20}M_{00}$。又 E_{00} 為 $\Delta AM_{00}C$ 之內心，故 $\overleftrightarrow{E_{00}M_{00}}$ 為 $\angle AM_{00}M_{01}$ 的角平分線，J 為 $\Delta CM_{00}M_{20}$ 的內心。$\angle M_{00}JE_{20} = 180^\circ - \angle M_{00}JM_{20} = 60^\circ$。 ■



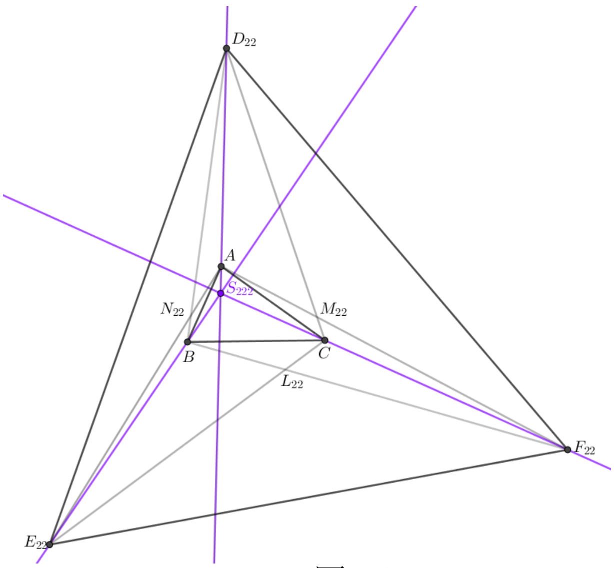
(圖 16)

如(圖 16)，當 $p+q+r \equiv 1 \pmod 3$ 時，以 $\Delta D_{00}E_{01}F_{10}$ 為例，從上圖我們可以知道他並不是正三角形，也就無法定義其中心。

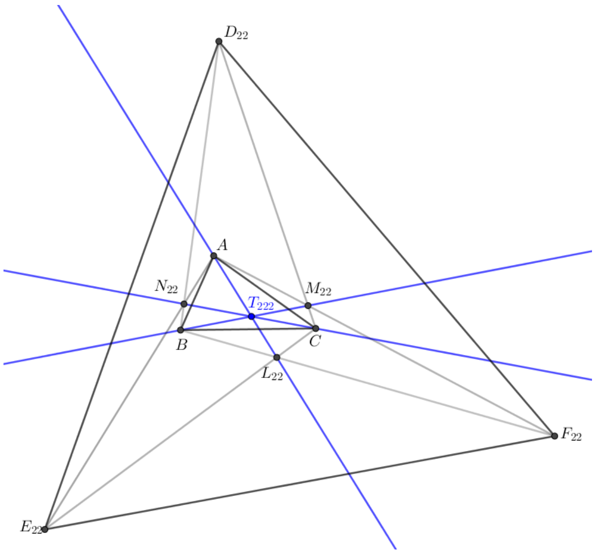
以下(圖 17) (圖 18) (圖 19) (圖 20)，皆以 $222-Morley\ Triangle$ 的情況為例。

Lemma 7 對任意 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ ， $pqr-SMC$ 存在，即 $\overleftrightarrow{AD_{qr}}$, $\overleftrightarrow{BE_{rp}}$, $\overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 三線共點。

證明：由 Lemma 6， $\overleftrightarrow{D_{qr}L_{qr}}$, $\overleftrightarrow{E_{rp}M_{rp}}$, $\overleftrightarrow{F_{pq}N_{pq}}$ 三線共點，故由 *Brianchon's Theorem* 知 $L_{qr}F_{pq}M_{rp}D_{qr}N_{pq}E_{rp}$ 是一個 *Brianchon hexagon* ，故 $AF_{pq}BD_{qr}CE_{rp}$ 也是一個 *Brianchon hexagon*（因為 $\overleftrightarrow{L_{qr}F_{pq}}=\overleftrightarrow{BF_{pq}}$, $\overleftrightarrow{F_{pq}M_{rp}}=\overleftrightarrow{F_{pq}A}$, $\overleftrightarrow{M_{rp}D_{qr}}=\overleftrightarrow{CD_{qr}}$, $\overleftrightarrow{D_{qr}N_{pq}}=\overleftrightarrow{D_{qr}B}$ $\overleftrightarrow{N_{pq}E_{rp}}=\overleftrightarrow{N_{pq}A}$, $\overleftrightarrow{E_{rp}L_{qr}}=\overleftrightarrow{E_{rp}C}$ ）， $\overleftrightarrow{AD_{qr}}$, $\overleftrightarrow{BE_{rp}}$, $\overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 三線交於一點。(圖 17) ■



(圖 17)



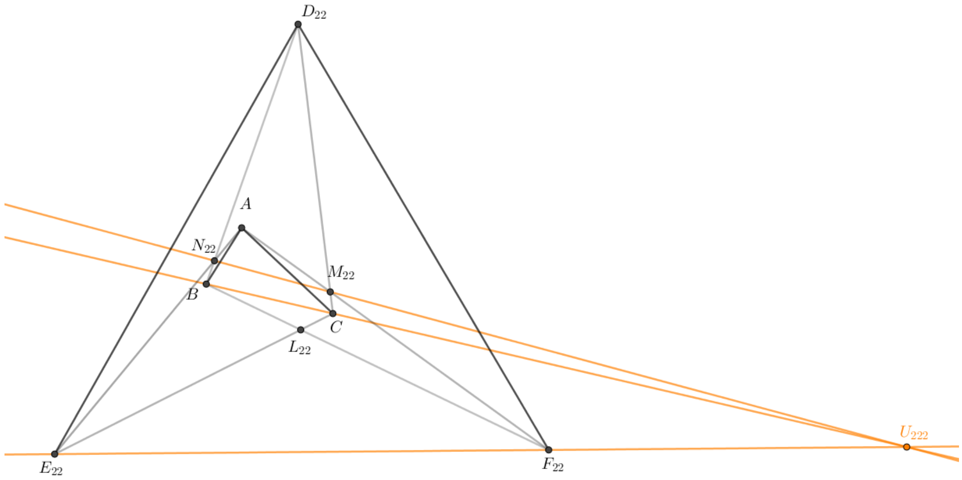
(圖 18)

Lemma 8 $pqr-TMC=\overleftrightarrow{AL_{qr}}\cap\overleftrightarrow{BM_{rp}}\cap\overleftrightarrow{CN_{pq}}$

證明：由 L_{qr} 為 D_{qr} , M_{rp} 為 E_{rp} , N_{pq} 為 F_{pq} 的等角共軛點，以及 *Trigonometric Ceva's Theorem*， $\overleftrightarrow{AD_{qr}}$, $\overleftrightarrow{BE_{rp}}$, $\overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 三線共點 $\Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{AL_{qr}}$, $\overleftrightarrow{BM_{rp}}$, $\overleftrightarrow{CN_{pq}}$ 三線共點，且其交點為 $pqr-SMC$ 之等角共軛點。(圖 18) ■

Lemma 9 $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{E_{rp}F_{pq}}$, $\overleftrightarrow{M_{rp}N_{pq}}$ 三線交於一點

證明：對 $\Delta BF_{pq}M_{rp}$ 和 $\Delta CE_{rp}N_{pq}$ 運用 *Desargue's Theorem* ， $\overleftrightarrow{BF_{pq}}\cap\overleftrightarrow{CE_{rp}}=L_{qr}$, $\overleftrightarrow{F_{pq}M_{rp}}\cap\overleftrightarrow{E_{rp}N_{pq}}=A$, $\overleftrightarrow{M_{rp}B}\cap\overleftrightarrow{N_{pq}C}=pqr-TMC$ ，由 Lemma 8， L_{qr} , A , $pqr-TMC$ 三點共線，故 $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{E_{rp}F_{pq}}$, $\overleftrightarrow{M_{rp}N_{pq}}$ 交於一點，並設此點為 U_{pqr} 。(圖 19) ■



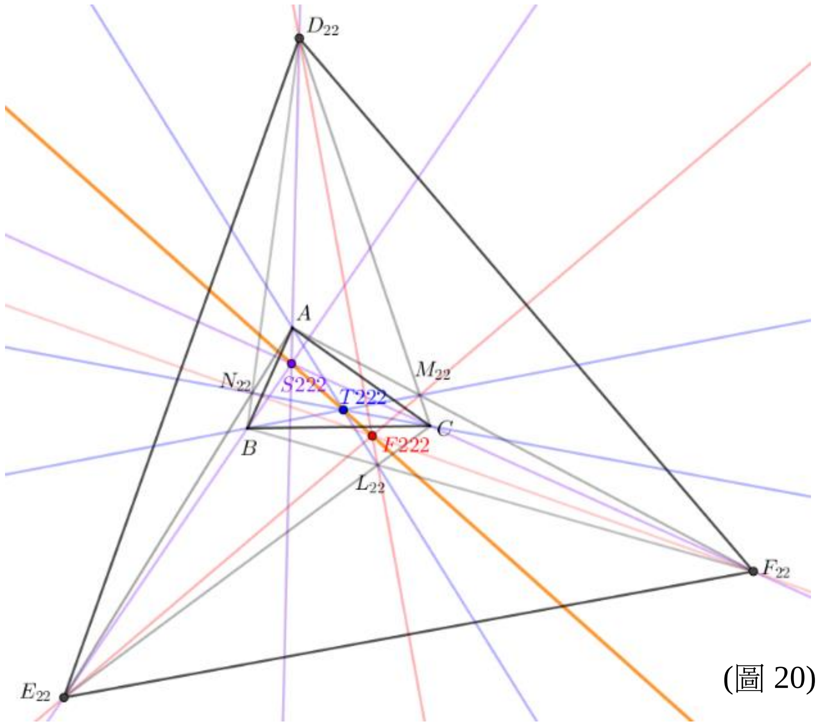
(圖 19)

Proposition：$\overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{F_{pq}D_{qr}}, \overleftrightarrow{N_{pq}L_{qr}}$ 三線交於一點，設此點為 V_{pqr} ；$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{D_{qr}E_{rp}}, \overleftrightarrow{L_{qr}M_{rp}}$ 三線交於一點，設此點為 W_{pqr} 。

Theorem 2 $pqr-FMC$, $pqr-SMC$, $pqr-TMC$ 三點共線 ($pqr-Morley\ Line$)

證明：由 Lemma 7， $\overleftrightarrow{AD_{qr}}$, $\overleftrightarrow{BE_{rp}}$, $\overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 三線交於一點，由 *Desargue's Theroem* ， ΔABC 和 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 透視，故 $U_{pqr}, V_{pqr}, W_{pqr}$ 三點共線，即 $\overleftrightarrow{U_{pqr}V_{pqr}W_{pqr}}$ 為 ΔABC 和 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 之透視軸。同理， $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ ， $\Delta L_{qr}M_{rp}N_{pq}$ 和 $\Delta L_{qr}M_{rp}N_{pq}$ ， ΔABC 也都以 $\overleftrightarrow{U_{pqr}V_{pqr}W_{pqr}}$ 為它們的透視軸，由 Lemma 3，這三對三角形的三個透視中心 $pqr-FMC$, $pqr-SMC$, $pqr-TMC$ 三點共線，這條線即為 $pqr-Morley\ Line$ 。(圖 20)

■

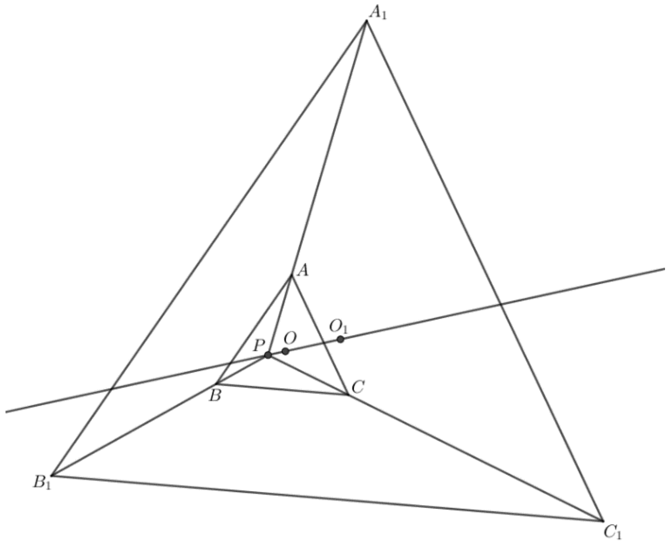


(圖 20)

到這裡，我們證明了對於所有廣義的莫利三角形，其 *Morley Line* 皆會存在，那在這 18 條 *Morley Line* 之中，是否還存在進一步的關聯呢？事實上，我們發現任意一條 *Morley Line* 都會過 “特定 *Morley Triangle* 的中心”。

Lemma 10 若有兩個正三角形 ΔABC，$\Delta A_1B_1C_1$，$\overline{AB}//\overline{A_1B_1}$，$\overline{BC}//\overline{B_1C_1}$，$\overline{CA}//\overline{C_1A_1}$，

則 $\overleftrightarrow{AA_1}$，$\overleftrightarrow{BB_1}$，$\overleftrightarrow{CC_1}$ 三線共點(圖 21)



(圖 21)

證明：設 $\overleftrightarrow{AA_1}\cap\overleftrightarrow{BB_1}=P$，延長 $\overleftrightarrow{PC}$，則 $\dfrac{\overline{PC}}{P(\overleftrightarrow{PC}\cap\overleftrightarrow{A_1C_1})}=\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PA_1}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PB_1}}=\dfrac{\overline{PC}}{P(\overleftrightarrow{PC}\cap\overleftrightarrow{B_1C_1})}$，故

$\overleftrightarrow{PC}\cap\overleftrightarrow{B_1C_1}=\overleftrightarrow{PC}\cap\overleftrightarrow{A_1C_1}$，即 $\overleftrightarrow{PC}$ 過 C_1。 ■

Lemma 11 設 ΔABC 和 $\Delta A_1B_1C_1$ 的重心分別為 O 及 O_1，則 O，O_1，P 三點共線(圖 21)

證明：由 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PA_1}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PB_1}}=\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PC_1}}$，得到 P 是 ΔABC 和 $\Delta A_1B_1C_1$ 的位似中心，故 P,O,O_1 共線。 ■

Lemma 12 當 $p+q+r\equiv 0 \pmod 3$ $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q-1r-1}E_{r-1p-1}F_{p-1q-1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$

當 $p+q+r\equiv 2 \pmod 3$ $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q+1r+1}E_{r+1p+1}F_{p+1q+1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$

（註：當 p，q，$r\notin\{0,1,2\}$ 時，p，q，r 的值即代表它們所處的模 3 最小非負剩餘系。）

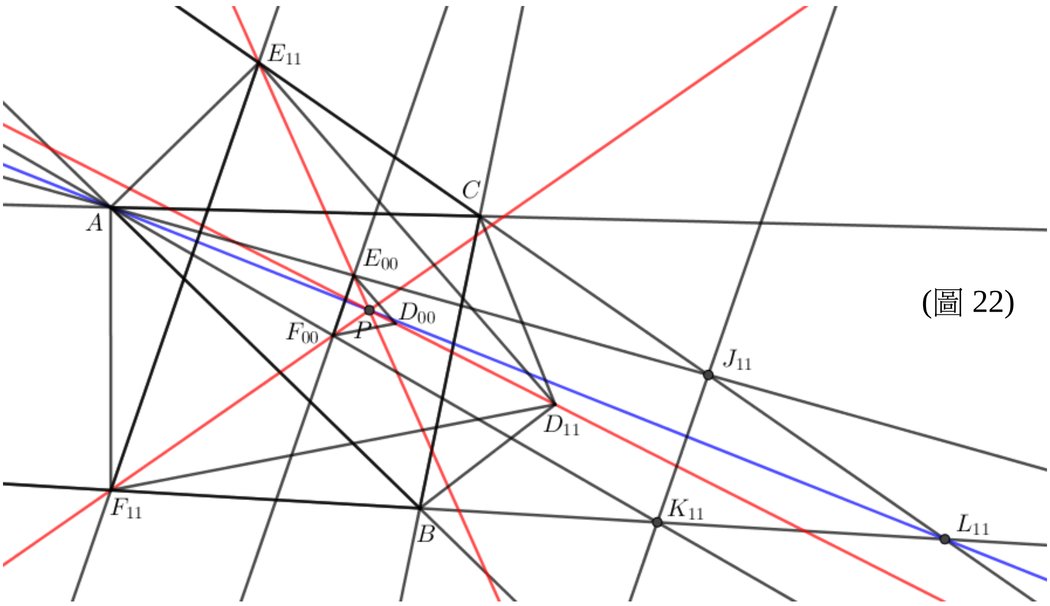
現在我們需要證明兩個正三角形的透視中心，就是其中一個的 *Third Morley Center*。而注意到 *Third Morley Center* 事實上是 $\overleftrightarrow{AL_{qr}}$, $\overleftrightarrow{BM_{rp}}$, $\overleftrightarrow{CN_{pq}}$ 的交點，所以我們只需要證明透視中心落在其中一條(設為 $\overleftrightarrow{AL_{qr}}$)就好了。

證明：

(1) 當 $p=q=r$

設 $\overleftrightarrow{D_{p-1p-1}D_{pp}} \cap \overleftrightarrow{E_{p-1p-1}E_{pp}} \cap \overleftrightarrow{F_{p-1p-1}F_{pp}} = P_{pp}$ ，，觀察 $\Delta L_{pp}E_{pp}F_{pp}$ 和 $\Delta AE_{p-1p-1}F_{p-1p-1}$ ，由於 $\overline{E_{p-1p-1}F_{p-1p-1}} // \overline{E_{pp}F_{pp}}$ (Lemma 5)，故它們相交於 $\overleftrightarrow{E_{pp}F_{pp}}$ 方向的無窮遠點。設 $\overleftrightarrow{AE_{p-1p-1}} \cap \overleftrightarrow{L_{pp}E_{pp}} = J_{pp}$, $\overleftrightarrow{AF_{p-1p-1}} \cap \overleftrightarrow{L_{pp}F_{pp}} = K_{pp}$ ，則由於 $\overline{J_{pp}K_{pp}} // \overline{EF}$ ($J \equiv E_{p\,p-1}, K \equiv F_{p-1p}$)，所以 $\Delta L_{pp}E_{pp}F_{pp}$ 和 $\Delta AE_{p-1p-1}F_{p-1p-1}$ 透視，$\overleftrightarrow{E_{p-1p-1}E_{pp}} \cap \overleftrightarrow{F_{p-1p-1}F_{pp}} = P_{pp}$ 落在 $\overleftrightarrow{AL_{pp}}$ 上。同理，P_{pp} 落在 $\overleftrightarrow{BM_{pp}}$, $\overleftrightarrow{CN_{pp}}$ 上，即 $P_{pp} \equiv D_{pp}E_{pp}F_{pp} - TMC$ 。

舉 *p*=1 時為例，如(圖 22)，紅色線的交點為 $\Delta D_{00}E_{00}F_{00}$ 和 $\Delta D_{11}E_{11}F_{11}$ 的透視中心，藍色線為 $\overleftrightarrow{AL_{11}}$ ，$\overleftrightarrow{AE_{00}} \cap \overleftrightarrow{L_{11}E_{11}} = J_{11} = E_{10}$, $\overleftrightarrow{AF_{00}} \cap \overleftrightarrow{L_{11}F_{11}} = K_{11} = F_{01}$ ，$\overleftrightarrow{E_{10}F_{01}} // \overline{E_{00}F_{00}} // \overline{E_{11}F_{11}}$ ，所以由 *Desargue's Theorem* ，$\overleftrightarrow{AL_{11}}$, $\overleftrightarrow{D_{00}D_{11}}$, $\overleftrightarrow{E_{00}E_{11}}$ 三線交於 P_{11}。同理，$\overleftrightarrow{BM_{11}}$, $\overleftrightarrow{CN_{11}}$ 也過 P_{11} ，故 $P_{11} = 111 - Thrid\ Morley\ Center$ 。



(圖 22)

(2) 當$(p, q, r) = (0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1)$，

觀察$\Delta L_{qr}E_{rp}F_{pq}$和$\Delta AE_{r-1p-1}F_{p-1q-1}$，由$\overleftrightarrow{L_{qr}E_{rp}} \cap \overleftrightarrow{AE_{r-1p-1}} = E_{rr}$，$\overleftrightarrow{L_{qr}F_{pq}} \cap \overleftrightarrow{AF_{p-1q-1}} = F_{rq}$，

以及 $\overline{E_{rr}F_{rq}} // \overline{E_{rp}F_{pq}}$ ，得到 $\Delta L_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta AE_{r-1p-1}F_{p-1q-1}$ 透視。由 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{E_{rp}E_{r-1p-1}}, \overleftrightarrow{F_{pq}F_{p-1q-1}}, \overleftrightarrow{AL_{qr}}$三線共點。

(3) 當$(p, q, r) = (0, 2, 1), (1, 0, 2), (2, 1, 0)$，

觀察$\Delta L_{qr}E_{rp}F_{pq}$和$\Delta AE_{r-1p-1}F_{p-1q-1}$，由$\overleftrightarrow{L_{qr}E_{rp}} \cap \overleftrightarrow{AE_{r-1p-1}} = E_{rq}$，$\overleftrightarrow{L_{qr}F_{pq}} \cap \overleftrightarrow{AF_{p-1q-1}} = F_{qq}$，

以及 $\overline{E_{rq}F_{qq}} // \overline{E_{rp}F_{pq}}$ ，得到 $\Delta L_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta AE_{r-1p-1}F_{p-1q-1}$ 透視。由 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{E_{rp}E_{r-1p-1}}, \overleftrightarrow{F_{pq}F_{p-1q-1}}, \overleftrightarrow{AL_{qr}}$三線共點。

(4) 當$p+q+r \equiv 2 \pmod 3$

觀察 $\Delta L_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta AE_{r+1p+1}F_{p+1q+1}$ ，由 $\overleftrightarrow{L_{qr}E_{rp}} \cap \overleftrightarrow{AE_{r+1p+1}} = E_{r\ p+1}$，$\overleftrightarrow{L_{qr}F_{pq}} \cap \overleftrightarrow{AF_{p+1q+1}} = F_{p+1\ q}$ 以及 $\overline{E_{r\ p+1}F_{p+1\ q}} // \overline{E_{rp}F_{pq}}$ ，得到 $\Delta L_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta AE_{r+1p+1}F_{p+1q+1}$透視，由 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{E_{rp}E_{r+1p+1}}, \overleftrightarrow{F_{pq}F_{p+1q+1}}, \overleftrightarrow{AL_{qr}}$ 三線共點。

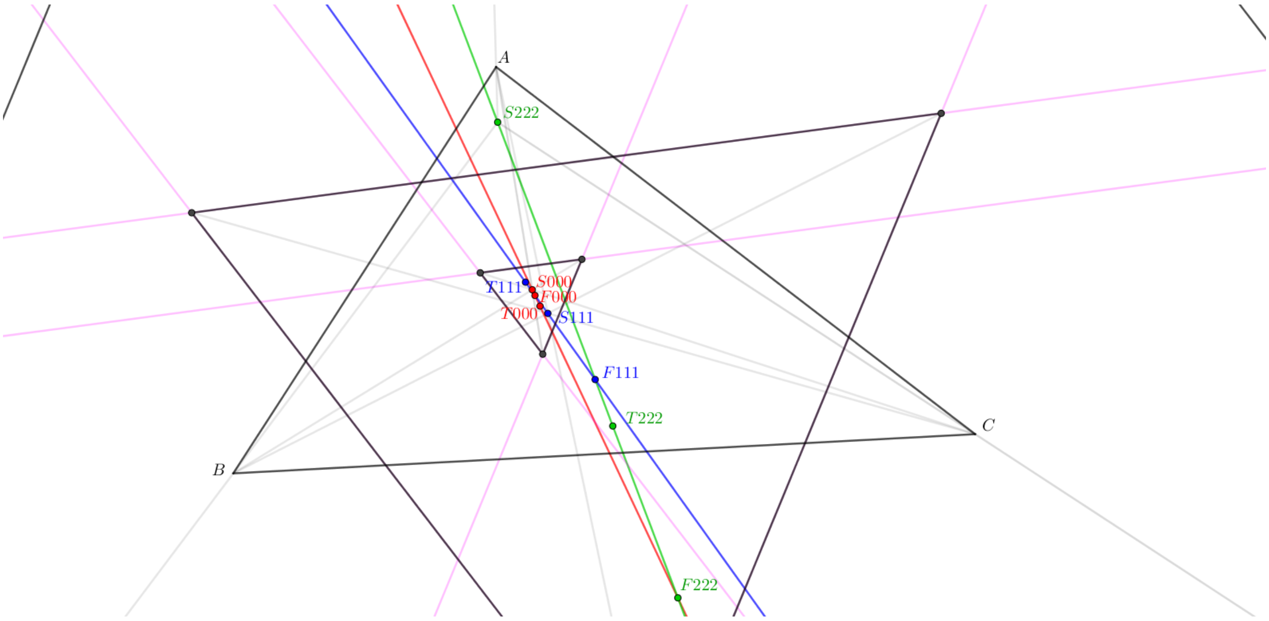
■

至此，由於兩點決定一直線$(pqr-FMC,\ pqr-TMC)$，我們得到所要的結論：

Theorem 3 當$p+q+r \equiv 0 \pmod 3$，$pqr-\textit{Morley Line}$通過$p-1q-1r-1-FMC$；

當$p+q+r \equiv 2 \pmod 3$，$pqr-\textit{Morley Line}$通過$p+1q+1r+1-FMC$

我們以下的圖舉(000,111,222)，(011,122,200)，(012,120,201)這三組為例 (圖 23)(圖 24)(圖 25)：

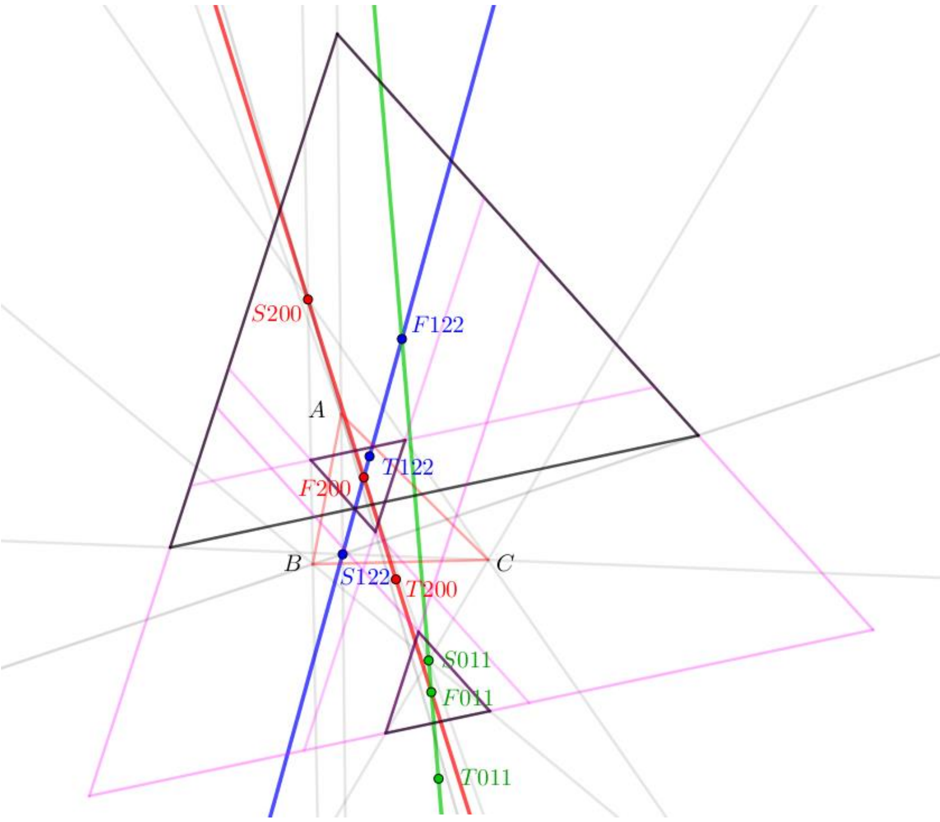


(圖 23)

$111-$*Morley Line* 通過 $000-$*FMC*

$222-$*Morley Line* 通過 $111-$*FMC*

$000-$*Morley Line* 通過 $222-$*FMC*

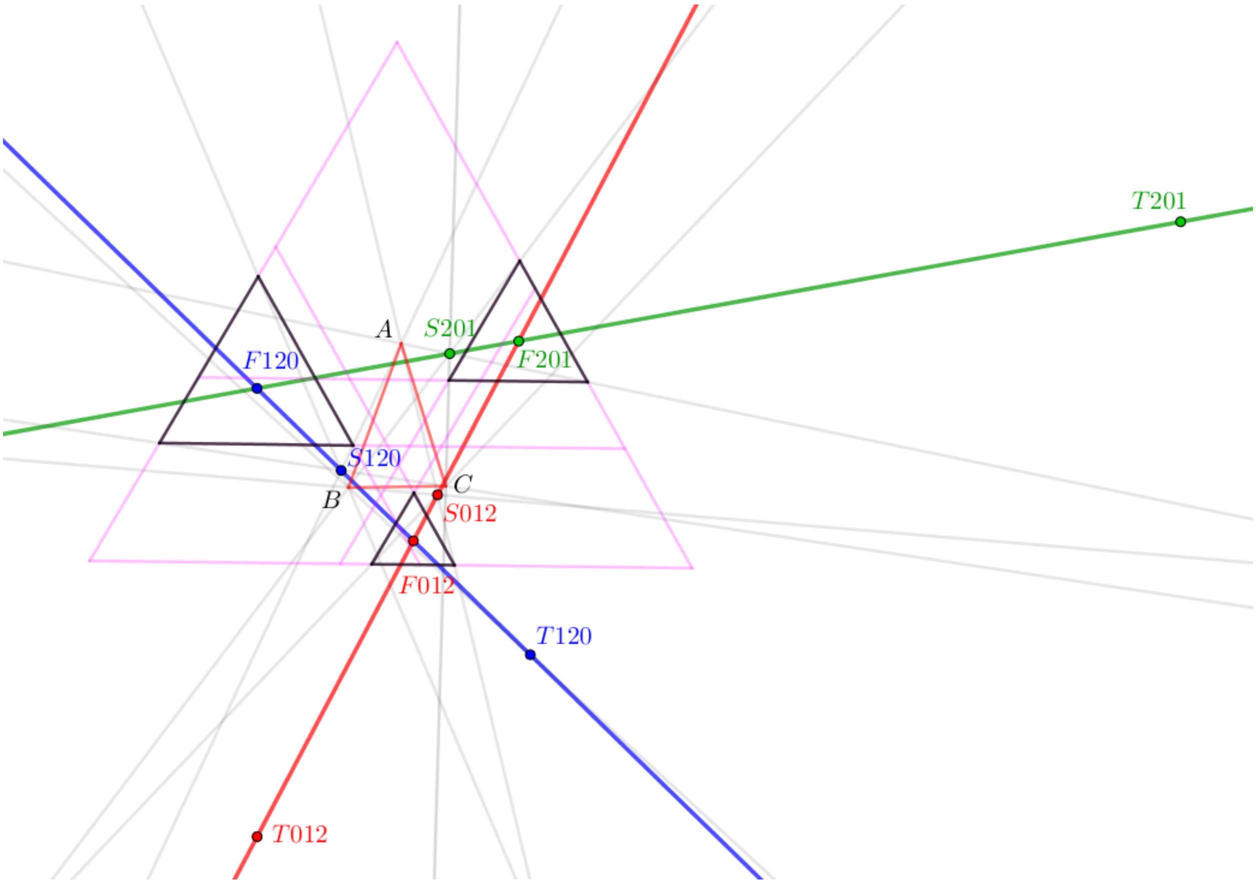


(圖 24)

$011-$*Morley Line* 通過 $122-$*FMC*

$122-$*Morley Line* 通過 $200-$*FMC*

$200-$*Morley Line* 通過 $011-$*FMC*



(圖 25)

$201-Morley\ Line$ 通過 $120-FMC$

$120-Morley\ Line$ 通過 $012-FMC$

$012-Morley\ Line$ 通過 $201-FMC$

Theorem 3 告訴我們， *Morley Triangle* 可以透過它們的 *Morley Line* 來將這 18 個正三角形依此特性分類(形成六個三元組)。

那由以上結論我們可以得出一個有趣的性質：

Proposition：

設 $pqr-morley\ triangle$，$p+1\,q+1\,r+1-morley\ triangle$，$p+2\,q+2\,r+2-morley\ triangle$ 是滿足 Theorem 3 的一個三元組，則 $pqr-TMC$，$p+1\,q+1\,r+1-TMC$，$p+2\,q+2\,r+2-TMC$ 三點共線。

證明：

易知， $pqr-morley\ triangle$，$p+1\,q+1\,r+1-morley\ triangle$，$p+2\,q+2\,r+2-morley\ triangle$ 滿足 Lemma 3，故由 Lemma 12 即可得到我們所想要的結論。 ■

有趣的是，若我們以 $pqr-FMC=\overleftrightarrow{D_{qr}L_{qr}}\cap\overleftrightarrow{E_{rp}M_{rp}}\cap\overleftrightarrow{F_{pq}N_{pq}}$ 來定義當 $p+q+r\equiv 1\ (\bmod 3)$ 時的情形，以 $\Delta D_{00}E_{01}F_{10}$ 為例，$100-FMC$ 就會是 $\overleftrightarrow{D_{00}L_{00}}$ 方向的無窮遠點，而同時在此定義下，$100-Morley\ Line$ 也會存在，是一條平行 $\overleftrightarrow{D_{00}L_{00}}$ 的直線。而 $211-Morley\ Line$, $022-Morley\ Line$ 也都平行 $\overleftrightarrow{D_{00}L_{00}}$。也就是說，上述的定理對於 $p+q+r\equiv 1\ (\bmod 3)$ 時仍然成立(它們的 $pqr-FMC$ 都是 $\overleftrightarrow{D_{00}L_{00}}$ 方向的無窮遠點)。由於證明大致相同，在此便不贅述。

我們知道 *First Morley Triangle* 對 ΔABC 的 *First Morley Center*, *Second Morley Center*, *Third Morley Center* 三點會落在同一條線上，自然會好奇它們的分布情形 (以下我們對這三個特殊點的討論皆是關於 *First Morley Triangle* 的)，於是我們有：

Theorem 4 *First Morley Center* 總是位於 *Second Morley Center* 和 *Third Morley Center* 之間

以一般古典幾何的形式似乎較難處理這個問題，於是我們將利用三線坐標 (*Trilinear coordinates*)證明之。

不使用直角坐標系的原因是我們很難將莫利三角形以漂亮的形式呈現，三線坐標很大程度上協助我們解決了這個問題。

三線坐標 (*Trilinear coordinates*) [13]

我們將 ΔABC 的 A 點坐標定為 $(1:0:0)$，B 點坐標定為 $(0:1:0)$，C 點坐標定為 $(0:0:1)$，若平面上有一點 P，我們便將其坐標定為其至 ΔABC 三邊 ($\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$) 的距離比。

範例：內心 $=(1:1:1)$，重心 $=(\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c})=(bc:ca:ab)$，外心 $=(\cos A:\cos B:\cos C)$。

則 *First Morley Center* $=(\cos\frac{A}{3}+\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}:\cos\frac{B}{3}+\cos\frac{C}{3}\cos\frac{A}{3}:\cos\frac{C}{3}+\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})$

Second Morley Center $=(\sec\frac{A}{3}:\sec\frac{B}{3}:\sec\frac{C}{3})=(\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}:\cos\frac{C}{3}\cos\frac{A}{3}:\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})$

以上資料來自[11]，證明在此便不贅述。

而由 Lemma 2 的證明，我們得到 *Second Morley Center* 和 *Third Morley Center* 互為等角共軛點。而在三線坐標中，若有一點 $P=(d:e:f)$，則其等角共軛點 $P'=(\frac{1}{d}:\frac{1}{e}:\frac{1}{f})$。

故 $Third\ Morley\ Center=(\cos\frac{A}{3}:\cos\frac{B}{3}:\cos\frac{C}{3})$。

Lemma 12 若平面上有三點 $P_1=(a_1:a_2:a_3)$，$P_2=(a_1+b_1:a_2+b_2:a_3+b_3)$，$P_3=(b_1:b_2:b_3)$，則 P_2 位於 P_1，P_3 之間。

證明：我們先將 P_1，P_2，P_3 的坐標調成齊次：

$$P_1=(a_1\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}:a_2\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}:a_3\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}),\ P_2=(a_1+b_1:a_2+b_2:a_3+b_3)$$

$$P_3=(b_1\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}b_1}:b_2\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}b_1}:b_3\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}b_1})\text{ 。}$$

$$a_1\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}\le a_1+b_1\Leftrightarrow a_1\cdot\frac{\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}\le b_1\Leftrightarrow\frac{\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}\le\frac{b_1}{a_1}$$

$$b_1\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}b_1}\le a_1+b_1\Leftrightarrow b_1\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1}{\sum_{cyc}a_1}\le a_1\Leftrightarrow\frac{b_1}{a_1}\le\frac{\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}$$

所以我們得到 P_2 位於 P_1，P_3 之間。特別地，當所有等式成立，我們有 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}$，$P_1$，$P_2$，$P_3$ 三點重合。 ■

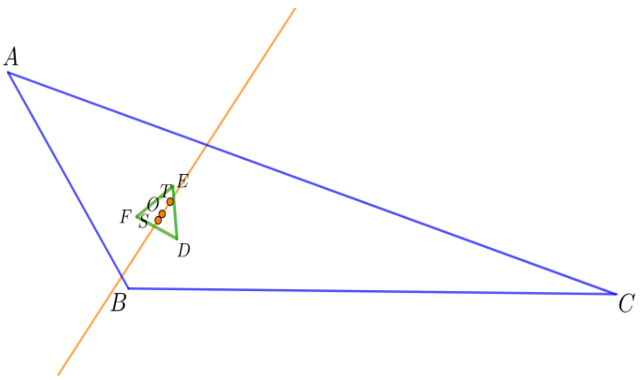
故由 Lemma 12，我們取 $P_1\equiv Second\ Morley\ Center$，$P_2\equiv First\ Morley\ Center$，$P_3\equiv Third\ Morley\ Center$（$a_1=\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}$，$b_1=\cos\frac{A}{3}\cdots\cdots$），即證明了 Theorem 4。特別地，此三點重合若且唯若 ΔABC 為正三角形。

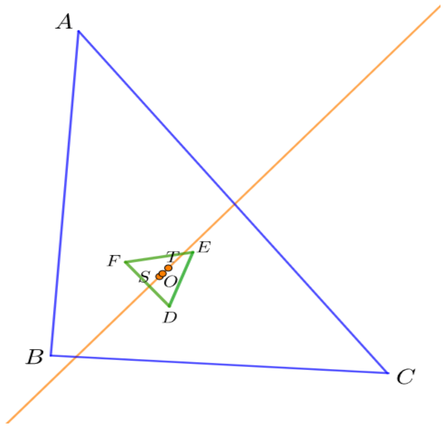
到這裡為止，我們可能會覺得 *Morley Line* 和 *Euler Line* 有幾分相似(三點共線、點的固定位置)。那 *Morley Line* 中間的線段比例是否也是固定的呢？很可惜，這是否定的。以下為三線座標的兩點距離公式(距離$=d$ ，兩點分別為$(a_1':b_1':c_1')$，$(a_2':b_2':c_2')$)：

$$d^2=\frac{(a_1'-a_2')^2+(b_1'-b_2')^2+2(a_1'-a_2')(b_1'-b_2')\cos C}{\sin^2 C},\ (aa_i'+bb_i'+cc_i'=2S_{\Delta}ABC,\ i=1,2)$$

故我們很難實際求出它們的線段長。不過，經過測試後，$\dfrac{\overline{SO}}{\overline{OT}}$的值大約在 0.5~0.5321 間浮動，仍離 0.5 相去不遠。

在繪製 *Morley Line* 的過程中，我們發現在拉動ΔABC的時候，*First Morley Center* , *Second Morley Center* , *Third Morley Center* 不曾離開ΔABC的 *First Morley Triangle*。





於是我們合理的猜測：

Theorem 5 *First Morley Center* , *Second Morley Center* , *Third Morley Center* 總是落在ΔABC的 *First Morley Triangle* 內。

證明： “某個點落在某個區域內”這件事似乎不好下手，若單單只是將問題轉換成求距離的形式，將會使計算變為極其複雜。我們不妨換個角度來作思考，假設在某個時候點跑出了我們所限制的區域外，因為在拉動ΔABC時點的軌跡是連續的，故必存在一個瞬間，點落在了區域的邊界上。換言之，我們只須證明“不存在某個瞬間使得 *First Morley Center* , *Second Morley Center* , *Third Morley Center* 落在 *First Morley Triangle* 的邊界上”即可。

注意到 *First Morley Center* 為 *First Morley Triangle* 的重心，所以我們只須證明 *Second Morley Center* , *Third Morley Center* 的情況即可。

設 ΔDEF 為 ΔABC 的 *First Morley Triangle*，則 $D=(1:2\cos\frac{C}{3}:2\cos\frac{B}{3})$，$E=(2\cos\frac{C}{3}:1:2\cos\frac{A}{3})$，$F=(2\cos\frac{B}{3}:2\cos\frac{A}{3}:1)$，我們先考慮 D，E，*Second Morley Center* 三點何時共線。而在三線坐標中，$P=(p:q:r)$，$U=(u:v:w)$，$X=(x,\ y,\ z)$ 三點共線若且唯若行列式 $D=\begin{vmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$ 之值為 0。先證明 *Second Morley Center* 的情形，於是我們有：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\cos\frac{C}{3} & 2\cos\frac{B}{3} \\ 2\cos\frac{C}{3} & 1 & 2\cos\frac{A}{3} \\ \cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3} & \cos\frac{C}{3}\cos\frac{A}{3} & \cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2\cos\frac{C}{3} & 2\cos\frac{B}{3} \\ 2\cos\frac{C}{3} & 1 & 2\cos\frac{A}{3} \\ 2\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3} & 2\cos\frac{C}{3}\cos\frac{A}{3} & 2\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2\cos\frac{C}{3} & 2\cos\frac{B}{3} \\ 2\cos\frac{C}{3} & 1 & 2\cos\frac{A}{3} \\ 2\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=8\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}\cos^2\frac{C}{3}-4\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}-4\cos^2\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}+2\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}$$

$$=2(2\cos\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{B}{3})(2\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3})\geq 0$$

最後一式成立是因為

$2\cos\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}\geq 2\cos\frac{\pi}{3}\cos 0^{\circ}=1\geq\cos\frac{B}{3}$，$2\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}\geq 1\geq\cos\frac{A}{3}$，等式成立當且僅當 $\angle A=0^{\circ}$，$\angle B=0^{\circ}$，$\angle C=180^{\circ}$，而此時 ABC 無法構成一個三角形。

由 Theorem 4 我們得知當 ΔABC 為正三角形時，*Second Morley Center* 位於 *First Morley Triangle* 內部，從而 *Second Morley Center* 不曾離開 *First Morley Triangle* 內部。

接下來我們證明 *Third Morley Center* 的情形：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\cos\frac{C}{3} & 2\cos\frac{B}{3} \\ 2\cos\frac{C}{3} & 1 & 2\cos\frac{A}{3} \\ \cos\frac{A}{3} & \cos\frac{B}{3} & \cos\frac{C}{3} \end{vmatrix}$$

$$=\cos\frac{C}{3}+4\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+4\cos^2\frac{\mathrm{B}}{3}\cos\frac{C}{3}-4\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}-4\cos^3\frac{C}{3}$$

$$=(\cos\frac{C}{3}-4\cos^3\frac{C}{3})+4(\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})$$

然而，接下來的證明卻遭遇到了瓶頸，我們無法輕易將它順利化簡。如果代一下值就會發現，等式除了在會等於 0 之外，在 $\angle A=90^o$, $\angle B=90^o$, $\angle C=0^o$ 亦為 0。注意到等式成立的時候有 $\angle A=\angle B$，所以我們先證明在 $\angle C$ 之值固定時，最小值發生在 $\angle A=\angle B$，再證明原來的不等式。

$$(\cos\frac{C}{3}-4\cos^3\frac{C}{3})+4(\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})-[(\cos\frac{C}{3}-4\cos^3\frac{C}{3})$$

$$+4(\cos^2\frac{A+B}{6}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{A+B}{6}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A+B}{6}\cos\frac{A+B}{6})]$$

$$=4[(\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})-(\cos^2\frac{A+B}{6}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{A+B}{6}\cos\frac{C}{3}$$

$$-\cos\frac{A+B}{6}\cos\frac{A+B}{6})]$$

$$=4[\cos\frac{C}{3}(\cos^2\frac{A}{3}+\cos^2\frac{B}{3}-2\cos^2\frac{A+B}{6})-(\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}-\cos^2\frac{A+B}{6})]$$

$$\geq 2(\cos^2\frac{A}{3}+\cos^2\frac{B}{3}-2\cos^2\frac{A+B}{6})-4(\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}-\cos^2\frac{A+B}{6})$$

$$\geq 2(\cos^2\frac{A}{3}+\cos^2\frac{B}{3}-2\cos^2\frac{A+B}{6})-4(\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}-\cos^2\frac{A+B}{6})$$

$$=(\cos\frac{A}{3}-\cos\frac{B}{3})^2\geq 0$$

$$\therefore(\cos\frac{C}{3}-4\cos^3\frac{C}{3})+4(\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})$$

$$\geq (\cos\frac{C}{3}-4\cos^3\frac{C}{3})+4(\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos^2\frac{A}{3})\ (\because \angle A=\angle B)$$

$$=\cos\frac{C}{3}(1-4\cos^2\frac{C}{3})+4\cos^2\frac{A}{3}(2\cos\frac{C}{3}-1)$$

$$=[4\cos^2\frac{A}{3}-(2\cos\frac{C}{3}+1)](2\cos\frac{C}{3}-1)\geq 0\ \ (\because 4\cos^2\frac{A}{3}\geq 4\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=3\geq(2\cos\frac{C}{3}+1))$$

從而等號成立在 ∠A=0°，∠B=0°，∠C=180° 和 ∠A=90°，∠B=90°，∠C=0°。而此時 ABC 無法構成一個三角形。

由 Theorem 4 我們得知當 ΔABC 為正三角形時，*Third Morley Center* 位於 *First Morley Triangle* 內部，從而 *Third Morley Center* 不曾離開 *First Morley Triangle* 內部。 ■

陸、結論

設在 ΔABC 中，$\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 為其所有角的三等分線所建構的 *Morley Triangle* $(p+q+r\equiv 0,\ 2 \pmod 3)$，詳細見 Lemma 5)，而三個特殊點定義如下：

First Morley Center $(pqr-FMC)$：$\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 的重心。

Second Morley Center $(pqr-SMC)$：$\overleftrightarrow{AD_{qr}}$，$\overleftrightarrow{BE_{rp}}$，$\overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 的交點。

Third Morley Center $(pqr-TMC)$: $pqr-SMC$ 對 ΔABC 的等角共軛點。

L_{qr}，M_{rp}，N_{pq} 分別是 D_{qr}，E_{rp}，F_{pq} 的等角共軛點。

則我們有以下結論：

1. $\overleftrightarrow{D_{qr}L_{qr}}\cap\overleftrightarrow{E_{rp}M_{rp}}\cap\overleftrightarrow{F_{pq}N_{pq}}=pqr-FMC$

2. 正三角形 $D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 對 ΔABC 的 *Second Morley Center* 皆存在。$(pqr-SMC)$

3. $\overleftrightarrow{AL_{qr}}\cap\overleftrightarrow{BM_{rp}}\cap\overleftrightarrow{CN_{pq}}=pqr-TMC$

4. $pqr-FMC$, $pqr-SMC$, $pqr-TMC$ 三點共線 ($pqr-$*Morley Line*)

5. 當 $p+q+r\equiv 0 \pmod 3$，$\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q-1r-1}E_{r-1p-1}F_{P-1q-1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$；
   當 $p+q+r\equiv 2 \pmod 3$，$\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q+1r+1}E_{r+1p+1}F_{p+1q+1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$

6. 當 $p+q+r\equiv 0\pmod 3$ ， $pqr-Morley\ Line$ 通過 $p-1\,q-1\,r-1-FMC$ ；

當 $p+q+r\equiv 2\pmod 3$ ， $pqr-Morley\ Line$ 通過 $p+1\,q+1\,r+1-FMC$

$(pqr, p{+}1\,q{+}1\,r{+}1, p{+}2\,q{+}2\,r{+}2)$	$pqr-Morley\ Line$ 所經過的 FMC	$p+1\,q+1\,r+1-Morley\ Line$ 所經過的 FMC	$p+2\,q+2\,r+2-Morley\ Line$ 所經過的 FMC
(000,111,222)	222	000	111
(012,120,201)	201	120	102
(021,102,210)	210	102	021
(011,122,200)	122	200	011
(101,212,020)	212	020	101
(110,221,002)	221	002	110

7. $pqr-TMC$, $p+1\,q+1\,r+1-TMC$, $p+2\,q+2\,r+2-TMC$ 三點共線。

8. *First Morley Center* 總是位於 *Second Morley Center* 和 *Third Morley Center* 之間 (*First Morley Triangle*)。

9. *First Morley Center* , *Second Morley Center* , *Third Morley Center* 總是落在 ΔABC 的 *First Morley Triangle* 內。

柒、 未來展望

從 Theorem 4 和 Theorem 5 我們探討了有關 *First Morley Triangle* 內三個特殊點的分布關係，而我們發現在其他衍生的 *Morley Triangle* 中的特殊點也會有類似的關聯性。因此，我們期望能建構一套簡潔的系統來解決這個問題。另外，我們還想知道 *Morley Line* 是否還與其他三角形中的特殊線(如歐拉線)有著更進一步的聯結，期待能在日後進行更進一步的探討。

捌、 參考文獻

1. 黃家禮(2014)。《幾何明珠》（第三版）。九章出版社。
2. Isogonal Conjugate 。http://mathworld.wolfram.com/IsogonalConjugate.html。
3. Trigonometric Ceva's Theorem 。https://www.cut-the-knot.org/triangle/TrigCeva.shtml。
4. Desargue's Theorem 。http://mathworld.wolfram.com/DesarguesTheorem.html。
5. Brianchon's Theorem。http://mathworld.wolfram.com/BrianchonsTheorem.html。
6. Homothetic Center。http://mathworld.wolfram.com/HomotheticCenter.html。
7. First Morley Center 。http://mathworld.wolfram.com/FirstMorleyCenter.html。
8. Second Morley Center。http://mathworld.wolfram.com/SecondMorleyCenter.html。
9. First Morley Adjunct Triangle 。
   http://mathworld.wolfram.com/FirstMorleyAdjunctTriangle.html。
10. Chen-Jung Hsu(1967). A Problem on Three Desarguean Pairs of Triangles.
    (https://www.jstor.org/stable/2688280?seq=1#page_scan_tab_contents). 。
11. Encyclopedia of Triangle Centers。https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html。
12. F.Glanville Taylor and W.L.Marr(1913). The six trisectors of each of the angles of a triangle. 。
    (https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/C4D463D0556830C0E4ED61D6D2FA5F5C/S0013091500035100a.pdf/six_trisectors_of_each_of_the_angles_of_a_triangle.pdf) 。
13. Trilinear coordinates。
    https://en.wikipedia.org/wiki/Trilinear_coordinates#Actual-distance_trilinear_coordinates。