第十九屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA19-034

作品名稱：棋盤陣列中行列棋子數相等之排列數研究

姓名：葉柏輝

關鍵字：棋盤、近似數列、生成函數

摘要

本篇研究探討數學競賽中的某棋盤陣列問題：「在5×5的棋盤格中，每格至多放1顆棋子，恰滿足每行每列都放有2顆棋子的情況有幾種？」這個問題引起我的興趣，希望探討在不同大小的棋盤陣列下、每行每列放置的棋子數量不同下，恰滿足的以上情境的有效排列數量。

首先，透過重新排列行與列成功簡化「每行每列都放有2顆棋子」下的棋盤陣列，並獲得二階遞迴關係式，且透過生成函數法取得一般式。同時，也探討在允許棋盤旋轉下的同構數量。

接著，在探討「每行每列都放有3顆棋子」下的棋盤陣列時，發現透過重新排列行與列的方式會過於複雜。因而，我利用了新的方法，即「將棋盤轉換成數列」，並經由分析數列的排列方法數得到棋盤的有效排列數量。值得一提的是使用本方法可較前述方法更加簡潔的獲得一般式。而我也獲得了一些有趣的結論：每行每列都放有2顆棋子下，不同大小棋盤的一般式、近似數列；每行每列都放有3顆棋子下，不同大小棋盤的一般式、近似數列。

最後，透過「將棋盤轉換成數列」的方法，探討每行、每列都放置個 k 棋子時的性質，獲得有效排列的對稱性、上界與積分形式。

目錄

壹、 研究動機

在 107 學年度省北二區數理學科能力測驗中，我們看到了一個問題「在5×5的棋盤格中，每格至多放 1 顆棋子，恰滿足每行每列都放有 2 顆棋子的情況有幾種？」(其中一種符合的情況如圖 1-1)我們覺得這個問題很有挑戰性，在解開這道題目後，我們便開始好奇如果棋盤格的大小不同、每行每列可放置之棋子數目的不同對棋盤格有效排列的情形會如何影響符合的情況。也想了解棋盤邊格數與棋子排列排列可能數之間的關聯性，以及是否存在一般性的通式。

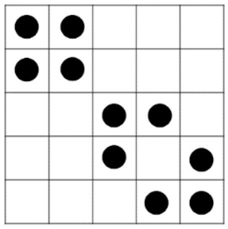


圖 1-1

貳、 名詞解釋

一、**行、列**：

使用直行橫列，由左而右、由上而下進行編碼。

二、**邊格數 n**：

在$n \times n$的正方形棋盤格，稱邊格數為n 。

如右圖，$n=8$。

三、**棋子數 k** ：

若每行每列都放置 k 個棋子，則稱棋子數為 k 。

如右圖，$k=2$。

四、**有效排列**：

在邊格數為 n 、棋子數為 k 下，若每行、每列恰有 k 個棋子，且每個棋盤格至多放置一個棋子，則為一組有效排列。

如右圖為$n=8$、$k=2$下之一組有效排列。

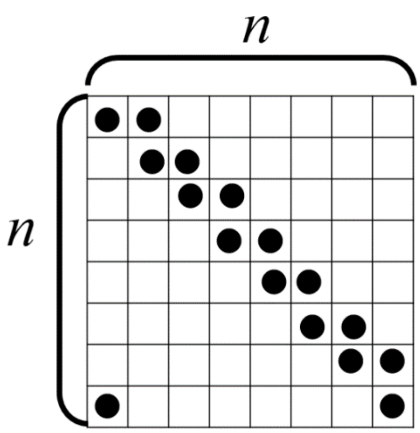


圖 2-1：名詞示例

五、 $f_k(n)$：

定義 $f_k(n)$ 為邊格數 n 的正方形棋盤，每行每列放 k 個棋子的有效排列數。

六、 $F_k(n)$

定義 $F_k(n)$ 為邊格數 n 的正方形棋盤，每行每列放 k 個棋子的同構數量，即將一有效排列旋轉 90°、180°、270°後所得到的有效排列視為同一種。

參、 研究目的

在邊格數為 n 的正方形的棋盤陣列中，若棋子數為 k ，且每個棋盤格能放置至多不超過 1 個棋子。我們試著探討在不同棋子數、邊格數下符合以上規則的有效排列可能數：

研究目的一：探討棋子數為 2、邊格數為 n 的排列可能數。

1. 討論 $f_2(n)$ 的遞迴式。
2. 討論 $f_2(n)$ 的一般式。
3. 討論 $f_2(n)$ 的近似數列。
4. 討論 $f_2(n)$ 的同構數量。

研究目的二：探討棋子數為 3、邊格數為 n 的排列可能數。

1. 討論 $f_3(n)$ 的一般式。
2. 討論 $f_3(n)$ 的近似數列。

研究目的三：探討棋子數為 k 、邊格數為 n 的性質。

1. 討論 $f_k(n)$ 的對稱性。
2. 討論 $f_k(n)$ 的上界。
3. 討論 $f_k(n)$ 的積分形式。

肆、 研究設備與器材

紙、筆、筆記型電腦、Microsoft Office、MathType、Desmos、Spyder4.0、Python3.7

伍、 研究過程

在進行研究之前，我們先簡單的思考了棋子數為 1(圖 5-1)的情況。棋子數為 1 的棋盤陣列中，每行、每列皆只能放置至多 1 個棋子。我們獲得了一個很顯然的結果：它可被視為一個具有 n 個相異元素之數列的排列問題，所以我們得到 0-1-1 式。

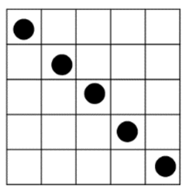


圖 5-1

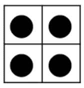
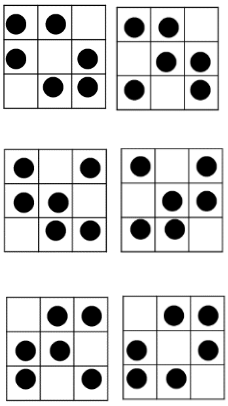
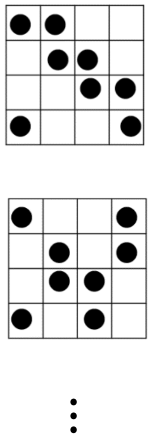
$$f_1(n)=P_n^n=n!. \qquad (0\text{-}1\text{-}1)$$

一、探討棋子數為 2、邊格數為 n 的排列可能數($f_2(n)$)

(一) 簡化問題

邊格數逐漸增加時，有效排列的排列可能數也會增加。以棋子數 2 為例，見表 5-1。因而我們想要獲得可以將有效排列歸類成幾個簡單形式、簡化本問題的方法。於是我們發想透過交換棋盤中行與列的順序，使棋盤變成幾個較為簡單的形式、方便之後分析。在分析時，我們運用排列組合的運算計算交換行與列前的排列可能數。

表 5-1： $f_2(2)$ 到 $f_2(4)$ 的排列變化：

$f_2(2)$	$f_2(3)$	$f_2(4)$
		

首先重新排列直行，將第 1 列有放置棋子的直行集中到棋盤的左側(圖 5-2)。我們發現重新排列前，直行總共有 C_k^n 種排列方式。在直行重新排列後，我們著手進行橫列的排列。我們先將第 1 列固定，然後把第 1 行中有棋子的橫列排列至棋盤上方，接著進行第 2 行，以此類推(圖 5-3)。

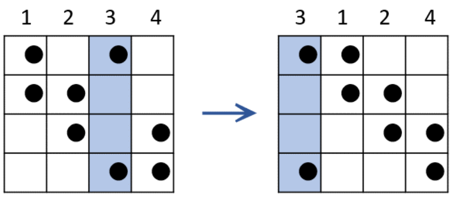


圖 5-2

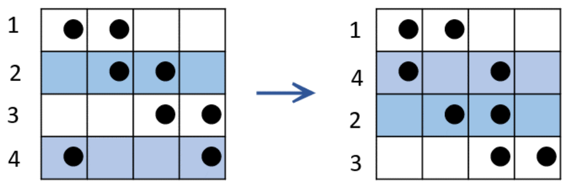


圖 5-3

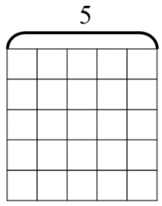
我們發現此時左上方的棋子排列方式會縮減成有限的形式，我們便可以分開探討這些形式後，再對它們的關係式進行化簡。此外，由於每行每列只能存在 n 個棋子，所以重新排列後的棋盤第 1、2 行和第 1 列都不能夠再擺置更多棋子。

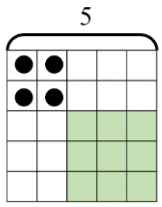
(二) 觀察 $f_2(5)$ 下的排列情形

1. 簡化排列

<u>Definition 1.</u>

定義 $A_i(n)$ 滿足「**在棋盤的邊格數為 n 下，棋盤陣列的左上角滿足型式 i**」之所有可能有效排列的總數，i 為某一特定型式的代號。





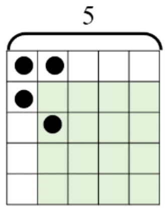


圖 5-4：5×5棋盤格　圖 5-5-1：型式 1(A_1)　　圖 5-5-2：型式 2(A_2)

棋盤第 1 列可擺放 2 個棋子，所以第 1 列棋子排列的組合總共有 C_2^5 組。觀察第 1、2 行中有棋子擺放的橫列，將他們移動到第 2、3 列，總共可分成 2 種型式(圖 5-5-1、5-5-2)。其中由於型式 2 的第 2、3 列可以交換排列。我們可得 $f_2(5)$ 時的排列可能數為「重新排列直行的組合×(型式 1 的排列可能數×重新排列橫行的組合＋型式 2 的排列可能數)」：

$$f_2(5)=\left(A_1(5)\cdot C_1^{5-1}+A_2(5)\cdot C_2^{5-1}\cdot P_2^2\right)\cdot C_2^5. \quad (1\text{-}2\text{-}1)$$

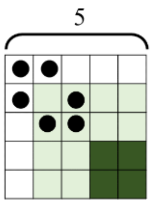
2. **討論型式 1**

型式 1 可完整切出一個邊格數為 3 的棋盤(圖 5-5-1 中綠色區域)，所以型式 1 的排列可能數為「邊格數為 3 棋盤($f_2(3)$)的排列可能數」，我們得到：

$$A_1(5)=f_2(5-2)=f_2(3). \quad (1\text{-}2\text{-}2)$$

3. **討論型式 2**

為了分析方便，我們將棋盤左上角擁有與型式 2 相同排列組合者定義其排列可能數為 $A_2(n)$，且 $A_2(3)=1$。



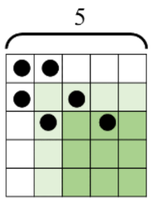


圖 5-6-1：型式 2-1(A_{2-1})　　圖 5-6-2：型式 2-2(A_{2-2})

已知型式 2 可切出一個邊格數為 4 的棋盤，如圖 5-5-2 的淺綠色區域，所以我們開始分析邊格數為 4 棋盤的排列可能數。邊格數為 4 棋盤在重新排列行與列後，棋盤會呈兩種型式(圖 5-6-1、5-6-2)。先對型式 2-1 進行分析，我們發現其中可再切分出一邊格數為 2 棋盤(圖 5-6-1 的墨綠色區域)，於是我們可以得到型式 2-1 的排列可能數為：

$$A_{2-1}(5)=f_2(2)\cdot C_1^3. \quad (1\text{-}2\text{-}3)$$

接著對型式 2-2 進行分析，我們發現可切分出邊格數為 3 的棋盤(圖 5-6-2 的深綠色區域)，重新排列後只可能出現 $A_2(3)$ ，所以我們計算出型式 2-2 的排列可能數為：

$$A_{2-2}(5)=A_2(4)\cdot C_2^{4-1}\cdot 2=A_2(3)\cdot C_2^2\cdot C_2^3\cdot 2^2. \quad (1\text{-}2\text{-}4)$$

4. **統整**

由 1-2-1 式、1-2-2 式、1-2-3 式、1-2-4 式，我們進行一些整理：

$$
\begin{aligned}
f_2(5) &= \left(A_1(5)\cdot C_1^{5-1} + A_2(5)\cdot C_2^{5-1}\cdot P_2^2\right)\cdot C_2^5 = \left(A_1\cdot C_1^{5-1} + A_2(5)\cdot C_2^4\cdot 2\right)\cdot C_2^5 \\
&= \left(f_2(5-2)\cdot C_1^{5-1} + \left(A_{2-1}(5)+A_{2-2}(5)\right)\cdot C_2^4\cdot 2\right)\cdot C_2^5 = \left(f_2(3)\cdot C_1^4 + \left(f_2(2)\cdot C_1^3 + A_2(4)\cdot C_2^{4-1}\cdot 2\right)\cdot C_2^4\cdot 2\right)\cdot C_2^5 \\
&= \left(f_2(3)\cdot C_1^4 + \left(f_2(2)\cdot C_1^3 + A_2(3)\cdot C_2^2\cdot C_2^3\cdot 2^2\right)\cdot C_2^4\cdot 2\right)\cdot C_2^5 = 2040.
\end{aligned}
$$

(1-2-5)

最後得到在棋子數為 2、邊格數為 5 下有效排列的排列可能數為 2040 組，即： $f_2(5)=2040.$

（三） 討論 $f_2(n)$ 的遞迴式

Theorem 1.

邊格數為 2 下，不同棋子數下的排列可能數具有以下遞迴關係：

$$
\begin{cases}
f_2(0)=1 \ \text{(一種有效排列)} \\
f_2(1)=0 \ \text{(不存在有效排列)} \\
f_2(n)=C_2^n\cdot\left[2\,f_2(n-1)+f_2(n-2)\cdot(n-1)\right],\ \forall n\in\mathbb{Z}^+, n\geq 2.
\end{cases}
$$

表 5-2：2 種型式

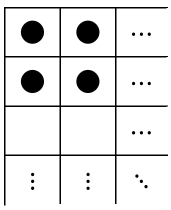
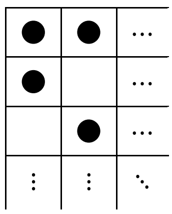
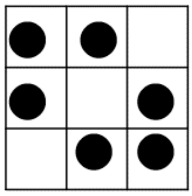
型式 1(A_1)	型式 2(A_2)
	

圖 5-7： $A_2(3)$



將棋子數為 2 下的棋盤簡化，得到棋子數為 2 下棋盤左上方有 2 種形式(表 5-2)，此時 A_1 的第 2 列已經確定。若棋盤的邊格數為 3，則棋盤只可能呈現 A_2 (圖 5-7 為 $A_2(3)$)，又透過有效排列的規定得知剩餘的棋子只有一種排列方式，所以我們便將左上角為型式 2 的排列可能數定義為 $A_2(n),(n\in\mathbb{Z})\wedge(n\geq 3)$，且 $A_2(3)=1$。我們知道第 1 列的棋子共有 C_2^n 種排列方式，所以求出 A_1 重新排列前的排列可能數(A_1)和型式 2 重新排列前的排列可能數(A_2)總和後，就可透過 1-3-1 式求出總排列可能數：

$$f_2(n)=(A_1(n)\cdot C_1^{n-1}+A_2(n)\cdot C_2^{n-1}\cdot P_2^2)\cdot C_2^n. \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

1. 型式 1 的分析

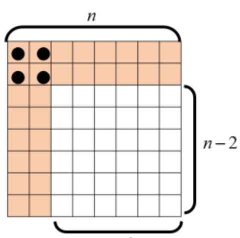


圖 5-8

我們發現型式 1 的前二行、列都已經確定(圖 5-8)，所以此狀況下的排列可能數相當於邊格數為 $n-2$ 棋盤的排列可能數，所以我們將 $f_2(n-2)$ 、橫行的

排列組合都計算出來後，便可得到$A_1(n)$，如 1-3-2 式：

$$A_1(n)=f_2(n-2)\cdot C_1^{n-1}=f_2(n-2)\cdot(n-1). \qquad (1\text{-}3\text{-}2)$$

2. 型式 2 的分析

我們已經了解 $f_2(n)$與 $A_2(n)$的關係(1-3-1 式)，接下我們對 $A_2(n)$進行更進一步的分析。首先對 $A_2(n)$的藍色部分(圖 5-9-1)進行重新排列。重新排列後，$A_2(n)$可被簡化成以下兩種型式：型式 2-1(圖 5-9-2)、型式 2-2(圖 5-9-3)。

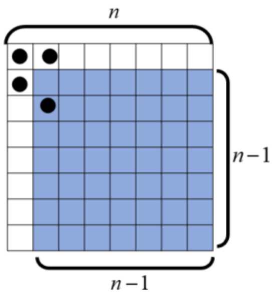


圖 5-9-1：$A_2(n)$重新排列前

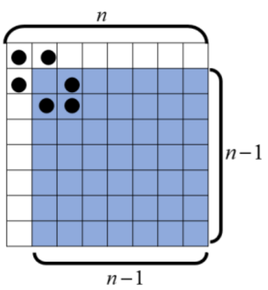


圖 5-9-2：型式 2-1

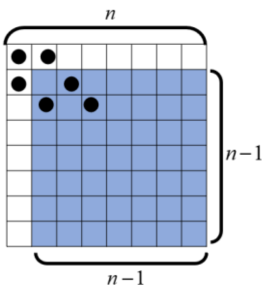
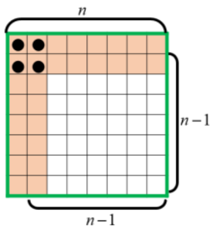
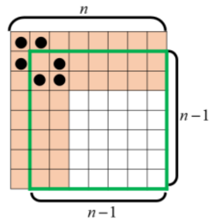
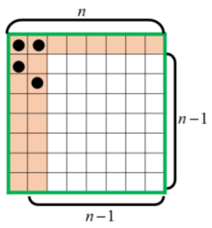
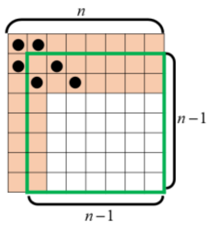


圖 5-9-3：型式 2-2

我們將圖 5-9-2 命名為型式 2-1、圖 5-9-2 命名為型式 2-2。接下來，我們先型式 2-1、2-2 排除第 1 列、第 1 行，之後比較型式 2-1、2-2 與型式 1、2，我們發現型式 2-1 與型式 1 相似、型式 2-2 與型式 2 相似，兩者的差異點只在綠色方框左上角的棋子有無(表 5-3)。

表 5-3：型式 1、2 與型式 2-1、2-2 比較

型式 1 型式 2-1		
型式 2 型式 2-2		

進一步的分析表 5-3，我們使用橘色網底表示已經放滿棋子的行與列。我們發現型式 1、2-1 和型式 2、2-2 綠色方框內的使用橘色網底的行與列呈現完全相同的狀況，所以我們推論我們可以使用分析型式 1、2 的方式來分析型式 2-1、2-2，這與我們在 $f_2(5)$所觀察的現象相同，所以我們得到了 1-3-3 式：

$$A_2(n)=f_2(n-3)\cdot(n-2)+A_2(n-1)\cdot C_2^{n-2}\cdot 2. \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

3. 統整

將 1-3-2 式帶入 1-3-1 式，並整理：

$$\begin{aligned} f_2(n) &= \left(A_1(n)\cdot C_1^{n-1}+A_2(n)\cdot C_2^{n-1}\cdot P_2^2\right)\cdot C_2^n = A_1(n)\cdot C_1^{n-1}\cdot C_2^n + A_2(n)\cdot C_2^{n-1}\cdot P_2^2\cdot C_2^n \\ &= \left(f_2(n-2)\cdot(n-1)\right)\cdot C_2^n+\left(A_2(n)\cdot C_2^{n-1}\cdot 2\right)\cdot C_2^n = f_2(n-2)\cdot(n-1)\cdot C_2^n + A_2(n)\cdot C_2^{n-1}\cdot 2\cdot C_2^n. \end{aligned} \qquad (1\text{-}3\text{-}4)$$

利用 1-3-3 式，將 $A_2(n)$ 不斷代換後可以得到以下結果：

$$\begin{aligned} f_2(n) &= f_2(n-2)\cdot(n-1)\cdot C_2^n\cdot 2^0 + f_2(n-3)\cdot(n-2)\cdot C_2^n\cdot C_2^{n-1}\cdot 2^1+\cdots+ \\ &\quad f_2(2)\cdot 3\cdot C_2^n\cdot C_2^{n-1}\cdot\cdots\cdot C_2^4\cdot 2^{n-4} + A_2(4)\cdot C_2^n\cdot C_2^{n-1}\cdot\cdots\cdot C_2^3\cdot 2^{n-3} \\ &= f_2(n-2)\cdot(n-1)\cdot C_2^n\cdot 2^0 + 2C_2^n\big(\ f_2(n-3)\cdot(n-2)\cdot C_2^{n-1}\cdot 2^0 + \\ &\quad f_2(n-4)\cdot(n-3)\cdot C_2^{n-1}\cdot C_2^{n-2}\cdot 2^1+\cdots+ f_2(2)\cdot 3\cdot C_2^{n-1}\cdot\cdots\cdot C_2^4\cdot 2^{n-5} + \\ &\quad A_2(4)\cdot C_2^{n-1}\cdot\cdots\cdot C_2^3\ \big)\cdot 2^{n-4}. \end{aligned} \tag{1-3-5}$$

已知 $f_2(n-1) = f_2(n-3)\cdot(n-2)\cdot C_2^{n-1}\cdot 2^0 + f_2(n-4)\cdot(n-3)C_2^{n-1}\cdot C_2^{n-2}\cdot 2^1+\cdots+$

$$f_2(2)\cdot 3\cdot C_2^{n-1}\cdot C_2^{n-2}\cdot\cdots\cdot C_2^4\cdot 2^{n-5} + A_2(4)\cdot C_2^{n-1}\cdot C_2^{n-2}\cdot\cdots\cdot C_2^3\cdot 2^{n-4}.$$

再將 $f_2(n-1)$ 代入 $f_2(n) \Rightarrow f_2(n) = \left[f_2(n-2)\cdot(n-1) + f_2(n-1)\cdot 2\right]\cdot C_2^n$.

整理過後，我們定義： $f_2(0)=1$（僅有一種的組合）、 $f_2(1)=0$（不可能存在有效排列）。最後得到了一個簡化後的公式：

$$f_2(n) = C_2^n\cdot\left[2f_2(n-1) + f_2(n-2)\cdot(n-1)\right], \forall n\in\mathbb{Z}^+, n\geq 2. \tag{Theorem 1}$$

（四） 討論 $f_2(n)$ 一般式

在求出 $f_2(n)$ 的遞迴關係式後，為了較方便得到 n 很大時的排列可能數，我們嘗試利用生成函數的想法計算一般式。

<u>Theorem 2.</u>

邊格數為 2 下，不同棋子數下的排列可能數具有以下關係：

$$f_2(n) = 4^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k)!}{k!\left((n-k)!\right)^2}(-2)^k, \forall n\in\mathbb{Z}, n\geq 0.$$

Proof：

首先我們令 $a_n = f_2(n)$，且 $a_0=1, a_1=0$。

所以 $a_n = C_2^n\left(2a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}\right), \forall n\geq 2, a_0=1, a_1=0.$ （1-4-1）

為了方便計算，我們再令 $b_n(n!)^2 = a_n, \forall n\geq 0$，將其代入 1-4-1 式，得到：

$$\begin{aligned} & b_n\cdot(n!)^2 = n(n-1)\cdot b_{n-1}\left((n-1)!\right)^2 + \frac{n(n-1)^2}{2}\cdot b_{n-2}\left((n-2)!\right)^2 \\ \Rightarrow\ & b_n\cdot(n-1)^2n^2 = n(n-1)\cdot(n-1)^2b_{n-1} + \frac{n(n-1)^2}{2}\cdot b_{n-2} \\ \Rightarrow\ & nb_n = (n-1)b_{n-1} + \frac{1}{2}\cdot b_{n-2}, \forall n\geq 3. \end{aligned} \tag{1-4-2}$$

又 $b_0 = \frac{a_0}{(0!)^2} = 1,\quad b_1 = \frac{a_1}{(1!)^2} = 0,\quad b_2 = \frac{a_2}{(2!)^2} = \frac{1}{4}.$

令 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 之生成函數為 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$。

為了創造出 nb_n 項，於是將 $f(x)$ 對 x 微分，得到： $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_nx^{n-1}$. （1-4-3）

$$\Rightarrow xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^n=b_1x+2b_2x^2+\sum_{n=3}^{\infty}nb_nx^n=\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\left[(n-1)b_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-2}\right]x^n\right)$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)b_{n-1}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}b_{n-2}x^n=\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=2}^{\infty}nb_nx^{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^{n+2}$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x^2\sum_{n=2}^{\infty}nb_nx^{n-1}+\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^{n-1}-1\cdot b_1x^0\right]+\frac{x^2}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n-b_0x^0\right]$$

$$=\frac{x^2}{2}+x^2\left(f'(x)\right)+\frac{x^2}{2}\left(f(x)-1\right)=x^2f'(x)+\frac{x^2}{2}f(x)$$

$$\Rightarrow xf'(x)=x^2f'(x)+\frac{x^2}{2}f(x)\Rightarrow f'(x)=xf'(x)+\frac{x}{2}f(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{2(1-x)}. \quad (1\text{-}4\text{-}4)$$

對 1-4-4 式積分：

$$\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{x}{2(1-x)}dx\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\int\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)dx$$

$$\Rightarrow\ln|f(x)|=\frac{1}{2}\left(-x-\ln|1-x|\right)+c=\frac{-x}{2}-\ln\sqrt{1-x}+c=\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}e^c\right).$$

於是 $f(x)=e^c\cdot\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}.$ （1-4-5）

$\because f(0)=b_0=1\Rightarrow f(0)=1=e^c$，$\therefore f(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}=e^{-\frac{x}{2}}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$ （1-4-6）

最後我們將 1-4-6 式中的 $e^{-\frac{x}{2}}$ 和 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ 分別轉換回冪級數形式：

$$e^{-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=x^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n. \quad (1\text{-}4\text{-}7)$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{-\frac{1}{2}}(-x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot(-1)^n\cdot x^n. \quad (1\text{-}4\text{-}8)$$

（廣義二項式定理）

將 1-4-7 式、1-4-8 式代入 1-4-6 式，再透過卷積計算 $f(x)$：

$$f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot x^n\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\cdot(-1)^n\cdot x^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}\cdot(-1)^k\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n. \qquad (1\text{-}4\text{-}9)$$

比較 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 與 1-4-9 式的係數得到：

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}\cdot(-1)^k\cdot\frac{(-1)^{n-k}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2k-1)}{2^k}}{k!}\cdot(-1)^k\cdot(-1)^{n-k}\frac{2^{k-n}}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1\cdot3\cdots(2k-1)}{k!(n-k)!}\cdot(-1)^{n-k}\cdot2^{-n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(2k-1)\cdot2k}{k!(n-k)!}\times\frac{1}{2\cdot4\cdots2k}\cdot(-1)^{n+k}\cdot2^{-n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!(n-k)!}\times\frac{1}{2^k\cdot k!}\cdot(-1)^n\cdot(-1)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{-1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2(n-k)!}\times\frac{1}{2^k\cdot k!}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^k.$$

(1-4-10)

然後將 b_n 代入 $b_n(n!)^2=a_n\Rightarrow a_n=(n!)^2b_n=(n!)^2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2(n-k)!}\left(\frac{-1}{2}\right)^k$.（1-4-11）

最後，透過變數變換對 1-4-11 式進行整理。首先令 $k=n-i$ 。

$$f_2(n)=a_n=(n!)^2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2(n-k)!}\left(\frac{-1}{2}\right)^k=(n!)^2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n-2i)!}{i!\left((n-i)!\right)^2}(-2)^{n-i}$$

$$=(n!)^2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n-2i)!}{i!\left((n-i)!\right)^2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(-2)^i=(n!)^2\left(\frac{1}{4}\right)^n\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n-2i)!}{i!\left((n-i)!\right)^2}(-2)^i$$

$$=4^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k)!}{k!\left((n-k)!\right)^2}(-2)^k.$$

（Theorem 2.）

（五） 討論 $f_2(n)$ 的近似數列

在討論完 $f_2(n)$ 之一般式後，我們發覺當 n 的數值很大時，一般式之中的階乘與 Σ 會使計算變得極為複雜，於是我們想透過求取近似數列方便快速地得到相近的數值。首先我們對當 n 的數值足夠大時數列的近似進行了定義：

Definition 2.

若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$，則稱當 n 趨近 ∞ 時，a_n 近似於 b_n 。符號記作 $a_n\sim b_n$.

透過以上的定義，我們可以獲得以下的性質：

Property 1.

若 $a_n\sim b_n,\ b_n\sim c_n$ ，則 $a_n\sim c_n$.

Proof：

$$\because a_n \sim b_n, b_n \sim c_n \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1, \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n}=1. \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{b_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n}=1\cdot 1=1.$$

透過 Definition 2、Property 1 我們開始求取近似數列。過程中，我們使用到斯特林公式(Stirling’s formula)代換階乘及自然常數代換Σ：

Theorem 3.

若 $f_2(n)=4^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k)!}{k!\left((n-k)!\right)^2}(-2)^k$, 則 $f_2(n)\sim 2\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}$.

Proof：

我們先證 $f_2(n)\sim 4^{-n}\cdot(2n)!\cdot e^{-\frac{1}{2}}$，等價於證明 $\lim_{n\to+\infty}\frac{f_2(n)}{4^{-n}\cdot(2n)!}=e^{-\frac{1}{2}}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f_2(n)}{4^{-n}\cdot(2n)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k(2n-2k)!}{k!((n-k)!)^2}}{4^{-n}\cdot(2n)!}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}\cdot\frac{(n!)^2}{((n-k)!)^2}\cdot\frac{(2n-2k)!}{(2n)!}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}\cdot\frac{(n-k+1)^2(n-k+2)^2\cdots n^2}{(2n-2k+1)(2n-2k+2)\cdots(2n)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}\cdot\frac{n^{2k}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)}{(2n)^{2k}\left(1-\frac{2k-1}{2n}\right)\left(1-\frac{2k-2}{2n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}=e^{-\frac{1}{2}}. \qquad (1\text{-}5\text{-}1)$$

再由斯特林公式知：$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. (1-5-2)

故得 $4^{-n}\cdot(2n)!\cdot e^{-\frac{1}{2}}\sim 4^{-n}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{\pi}\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{\pi}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}$.

(1-5-3)

最後由 Property 1.得到 $f_2(n)\sim 2\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}$(**Theorem 3.**)，證畢。

我們令 $g_2(n)=2\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}$，並作圖：

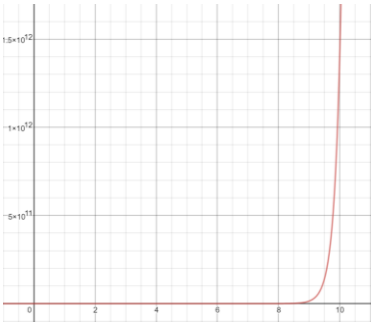


圖 5-10-1：$g_2(n)=2\sqrt{\pi}\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}$.

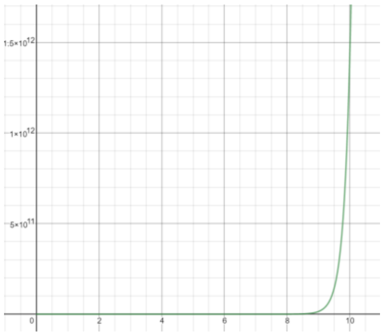


圖 5-10-2：$f_2(n)=4^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(2n-2k)!}{k!\left((n-k)!\right)^2}(-2)^k$.

表 5-4： $f_2(n)$ 與 $g_2(n)$ 之數值比較

n	2	3	4	5	6	7	50
$f_2(n)$	1	6	90	2040	67950	3110940	4.44×10^{127}
$g_2(n)$	0.89	6.73	94.54	2131.56	70439.22	3208163.73	4.46×10^{127}
誤差(%)	11.00	12.17	5.04	4.49	3.66	3.13	0.41

（六） 使用圖形法討論一般式

透過更進一步的思考後，我們發現我們或許可以使用圖形的方式探討 $f_2(n)$。我們把每一棋盤方格中的橫列視為平面上的一個點，點與點間的連線代表同一直行中有放置棋子的位置。例如圖 5-11 的第 1 行在第 1 列、第 2 列處有放置棋子(圖 5-12 的紅棋)，則在圖 5-12 的點 1、點 2 連線(圖 5-12 的紅線)；依此類推。在 $f_2(n)$ 的棋盤中，每一個橫列為一個連接兩點的線段。且每個點最多可為兩個線段的端點。圖 5-12 即為圖 5-11 的圖形表示。

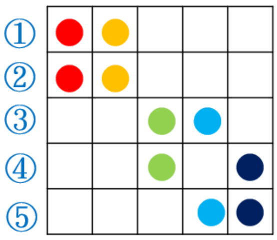


圖 5-11：邊格數為 5 的一組有效排列

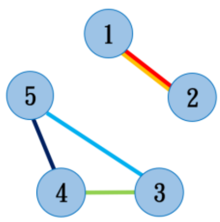


圖 5-12：圖 5-11 的圖形表示

然後，為了方便討論我們將圖 5-12 轉換成數列的形式(圖 5-13)。位於同一個底線上的數字，在棋盤上的位置為同一直行。而且同樣的數字不能出現於同一底線上。意即我們將問題轉換成為一個數列的排列問題、且每兩項的元素不能重複。數列如下：$1,1,2,2,3,3,4,4,5,5$(數列 1)。

$\boxed{\underline{1\ 2}\quad\underline{1\ 2}\quad\underline{3\ 4}\quad\underline{3\ 5}\quad\underline{4\ 5}}$ 圖 5-13

先排除每兩項不能重複的條件，數列 1 的排列總共有 $\dfrac{10!}{(2!)^5}$ 組可能。將棋盤的邊格數推廣到 n，則數列的排列方式總共有 $\dfrac{(2n)!}{(2!)^n}$ 組。

$\boxed{\underline{1\ 1}}$ 圖 5-14

接著，我們要排除會造成「不能轉換成呈現有效排列的棋盤」(不合法)的情況。不合法的排列在 $f_2(n)$ 中只有一種情形，即相同元素出現於同一底線上(圖 5-14)。我們先計算首兩項為合法的排列數、再計算次兩項為合法的排列數、直到末兩項，如此我們便可以透過排容原理進行計算：

$$f_2(n)=\frac{\frac{(2n)!}{(2!)^n}\cdot(-1)^0+C_1^n\cdot C_1^n\cdot 1!\cdot\frac{(2n-2)!}{(2!)^{n-1}}\cdot(-1)^1+\cdots+C_n^n\cdot C_n^n\cdot n!\cdot\frac{(0)!}{(2!)^0}\cdot(-1)^n}{(2!)^n}$$

$$=\frac{\frac{(2n)!}{(2!)^n}\cdot(-1)^0+\left(C_1^n\right)^2\cdot 1!\cdot\frac{(2n-2)!}{(2!)^{n-1}}\cdot(-1)^1+\cdots+\left(C_n^n\right)^2\cdot n!\cdot\frac{(0)!}{(2!)^0}\cdot(-1)^n}{(2!)^n}$$

$$=\frac{1}{(2!)^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(C_k^n\right)^2\cdot k!\cdot\frac{(2n-2k)!}{(2!)^{n-k}}\cdot(-1)^k=\frac{(n!)^2}{(2!)^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k)!}{((n-k)!)^2\cdot(2!)^{n-k}\cdot k!}\cdot(-1)^k$$

$$=4^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k)!}{k!((n-k)!)^2}(-2)^k \qquad \text{(Theorem 2.)}$$

（七） 討論同構數量

在討論完棋盤的排列數後，我們發現棋盤陣列中的一些有效排列在旋轉 90°、180°或 270°後，棋子的擺放位置會剛好符合另外一組有效排列(如圖 5-15)，而我們將這四個有效排列視為 $F_2(3)$ 下的其中一組「**同構**」。於是，我們便想了解在不同的邊格數下，棋盤陣列有多少組同構。

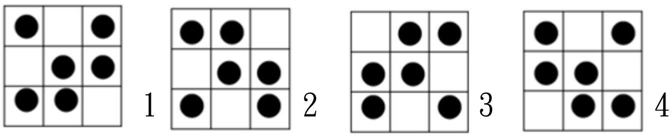


圖 5-15：一組在邊格數為 3、棋子數為 2 下的同構

Lemma 1.(Burnside Lemma)

假設一有限群 $(G,\cdot)$ 作用於一有限集 X，則共有 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|\{x\in X\,|\,g\cdot x=x\}\right|$ 個軌道。

為了使用 Lemma 1.，我們需要求出旋轉 90°、180°或 270°後仍為相同的有效排列(如圖 5-16，無論旋轉 90°、180°或 270°仍為相同的有效排列)。

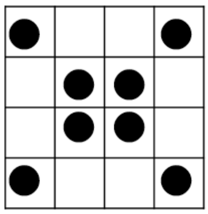


圖 5-16：$F_2(4)$ 的一個解

1.討論邊格數為偶數的情形

我們先從邊格數為偶數的棋盤陣列進行探討，我們先把棋盤切分成四個區域(圖 5-17)。由右上開始依逆時針方向依序稱為棋盤的第一、二、三、四象限。

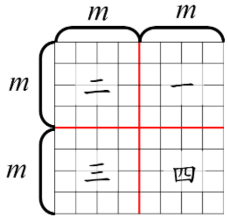


圖 5-17：邊格數為偶數的棋盤切分

(1) **旋轉 90°或 270°為相同的有效排列**

Definition 3.

定義 $R_{even}(m)$ 為邊格數 $2m\times 2m$ 的正方形棋盤，每行每列放 2 個棋子的有效排列數，且若旋轉 90°或 270°相同者視為同一種。其中 $m\in\mathbb{Z}$ 且 $m\geq 0$。

若我們將一棋盤旋轉 90°，那麼原本在第一象限的棋子會旋轉到第二象限，依此類推：第二象限會旋轉到第三象限、第三象限會旋轉到第四象限、第四象限會旋轉到第一象限。所以我們發現若將棋盤的四個象限視為四個獨立的棋盤陣列，他們恰為一組同構。同理，若我們將一棋盤旋轉 270°，四個象限也可以視為同構。

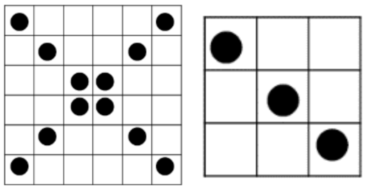


圖 5-18：一 $f_2(3)$ 的有效排列的各象限可視為同構，如圖右

因此，我們發現符合「旋轉 90°為相同的有效排列」的有效排列在旋轉 270°後也為相同的有效排列，即已知：

$$\left|\left\{x\in X\,\middle|\,x\cdot r=x\right\}\right|=\left|\left\{x\in X\,\middle|\,x\cdot r^3=x\right\}\right|. \qquad (1\text{-}7\text{-}1)$$

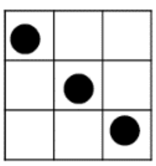
因此，我們只需要探討其中一個象限的棋子擺放可能數，就可以獲得所有在旋轉 90°或 270°後仍為自身的有效排列數。並因為旋轉 90°後仍為相同有效排列，即第二象限的第一橫列旋轉 90°後會是第三象限的第一直行。為符合「每行每列最多放置 2 個棋子」，因而 $R_{even}(m)$ 符合下列定義：

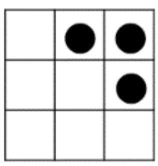
Definition 3-1.

$R_{even}(m)$ 為在邊格數為 m 的棋盤陣列中，「**第 k 行加第 k 列棋子個數為 2**」之排列方法數。其中 $m\in\mathbb{Z}$ 且 $m\geq 0$。

首先我們把符合 Definition 3-1. 的排列方法對應到一個$1\sim m$的排列。

舉例來說，圖 5-19-1、5-19-2 為 2 組在 m 為 3 下符合 Definition 3-1. 的排列組合。我們先將棋盤陣列的位置命名為位置 1~位置 9(如圖 5-20)。





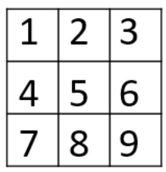


圖 5-19-1：排列 1　圖 5-19-2：排列 2　圖 5-20：位置 1~9

圖 5-19-2 之棋子放置在位置 2、3、6，其中位置 2 貢獻第一行第一列 1 個棋子個數、第二行第二列 1 個棋子個數，故將其視為一條 1→2 的邊；位置 6 貢獻第二行第二列 1 個棋子個數、第三行第三列 1 個棋子個數，故將其視為一條 2→3 的邊；位置 3 貢獻第三行第三列 1 個棋子個數、第一行第一

列 1 個棋子個數，故將其視為一條 3→1 的邊，結果記為 231。圖 5-19-1 之棋子放置在位置 1、5、9，其中位置 1 貢獻第一行第一列 2 個棋子個數，故將其視為一條 1→1 的邊；位置 5 貢獻第二行第二列 2 個棋子個數，故將其視為一條 2→2 的邊；位置 3 貢獻第三行第三列 2 個棋子個數，故將其視為一條 3→3 的邊，結果記為 123。以此類推，結果如表 5-5。

表 5-5：在 $m=3$ 下，符合 Definition 3-1. 的棋盤陣列所對應的排列。

棋子位置	對應的排列	循環排列
159	1 2 3	(1)(2)(3)
168	1 3 2	(1)(3 2)
357	3 2 1	(2) (3 1)
249	2 1 3	(3) (2 1)
236、238、267、278、 346、348、467、478	2 3 1 或 3 1 2	(2 3 1)或 (3 1 2)

除此之外，我們也發現有幾對位置的貢獻是相同的，包含位置 2 和 4(1→2 或 2→1)、位置 3 和 7(1→3 或 3→1)、位置 6 和 8(2→3 或 3→2)。所以環中的元素對應回棋盤位置時都有 2 個可能的放置位置(兩個位置有相同貢獻)，但環的大小為 1 或 2 則不成立。若環的大小為 1，則會視為「$i \to i$」，意味著必須要放置在第 i 行第 i 列；若環的大小為 2，則會視為「$i \to j$、$j \to i$」，意味著放滿了一對相同貢獻的棋盤位置。

討論滿足有效排列所對應到的一個循環表示。為了方便計算，我們先將其除以可能的循環表示數量並假設每一個循環表示中的元素在對應回棋盤時皆有 2 個可能的放置位置，將結果稱為 $r(m)$：$r(m)=\dfrac{R_{even}(m)}{m!\cdot 2^m}$.　　(1-7-2)

討論不成立(對應回棋盤時無 2 個可能的放置位置)的狀況。若循環排列中有一個環的大小為 1，要將「循環排列所對應到的棋盤數量乘 $\frac{1}{2}$」(有一個元素的可能放置位置唯一)；若循環排列中有一個環的大小為 2，要將「循環排列所對應到的棋盤數量乘 $\frac{1}{4}$」(有兩個元素的可能放置位置唯一)。此外，若環的大小大於 2，則也要「該循環排列所對應到的棋盤數量乘 $\frac{1}{2}$」(環的順時針和逆時針等價)。

於是，我們已經將問題簡化成：平均每個循環表示需要乘幾個 $\frac{1}{2}$。

Property 2.

任一 $1\sim m$ 之排列，包含 i 的環大小是 l 機率是 $\frac{1}{m}$，其中 i 為排列中的元素、$1\le i\le m$.

考慮$1\sim m$之排列中的一個元素，已知在不同大小的環的機率都是$\dfrac{1}{m}$。假若其位在大小為l的環，則排列的其他的部分可用$r(m-l)$來表示，如 1-7-3 式：$\dfrac{1}{m}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot r(m-l)\right).$（若在大小為 2 的環，須多乘 1 個$\dfrac{1}{2}$）　　(1-7-3)

由 1-7-3 式類推可以得到：

$$
\begin{aligned}
r(m) &= \frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot r(m-1)\right)+\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot r(m-2)\right)+\sum_{i=3}^{m}\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot r(m-i)\right)\\
&=\frac{1}{2m}\cdot\left(r(m-1)+\frac{1}{2}\cdot r(m-2)+\sum_{i=3}^{m}r(m-i)\right).
\end{aligned}
\tag{1-7-4}
$$

對 1-7-4 式化簡：

$$
\begin{aligned}
&\left(2m\right)r(m)-\left(2m-2\right)r(m-1)\\
&=\left(r(m-1)+\frac{1}{2}\cdot r(m-2)+\sum_{i=3}^{m}r(m-i)\right)-\left(r(m-2)+\frac{1}{2}\cdot r(m-3)+\sum_{i=4}^{m}r(m-i)\right)\\
&=r(m-1)+\frac{1}{2}\cdot r(m-2)+r(m-3)-r(m-2)-\frac{1}{2}\cdot r(m-3)\\
&=r(m-1)-\frac{1}{2}\cdot r(m-2)+\frac{1}{2}\cdot r(m-3).
\end{aligned}
\tag{1-7-5}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(2m\right)r(m)&=r(m-1)-\frac{1}{2}\cdot r(m-2)+\frac{1}{2}\cdot r(m-3)+\left(2m-2\right)r(m-1)\\
r(m)&=\frac{1}{2m}\cdot\left(\left(2m-1\right)r(m-1)-\frac{1}{2}\cdot r(m-2)+\frac{1}{2}\cdot r(m-3)\right).
\end{aligned}
\tag{1-7-6}
$$

將 1-7-6 式代入 1-7-2 式：

$$
\begin{aligned}
&R_{even}(m)\\
&=r(m)\cdot m!\cdot 2^{m}\\
&=\frac{m!\cdot 2^{m}}{2m}\cdot\left(\left(2m-1\right)r(m-1)-\frac{1}{2}\cdot r(m-2)+\frac{1}{2}\cdot r(m-3)\right)\\
&=\frac{m!\cdot 2^{m}}{2m}\cdot\left(\left(2m-1\right)\frac{R_{even}(m-1)}{(m-1)!\cdot 2^{m-1}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{R_{even}(m-2)}{(m-2)!\cdot 2^{m-2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{R_{even}(m-3)}{(m-3)!\cdot 2^{m-3}}\right)\\
&=(m-1)!\cdot 2^{m-1}\cdot\left(\left(2m-1\right)\frac{R_{even}(m-1)}{(m-1)!\cdot 2^{m-1}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{R_{even}(m-2)}{(m-2)!\cdot 2^{m-2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{R_{even}(m-3)}{(m-3)!\cdot 2^{m-3}}\right)\\
&=\left(2m-1\right)R_{even}(m-1)-\left(m-1\right)R_{even}(m-2)+2\cdot\left(m-1\right)\left(m-2\right)R_{even}(m-3).
\end{aligned}
\tag{1-7-7}
$$

另外由 Definition 3-1. 可知：$R_{even}(0)=1, R_{even}(1)=1, R_{even}(2)=2$.

(2) **旋轉 180°為相同的有效排列**

Definition 4.

定義 $S_{even}(m)$ 為邊格數 $2m \times 2m$ 的正方形棋盤，每行每列放 2 個棋子的有效排列數，且若旋轉 180°相同者視為同一種。其中 $m \in \mathbb{Z}$ 且 $m \geq 0$。

接著考慮旋轉 180°後，棋子的放置位置仍為相同的情形。因此棋盤的上半部與下半部必須符合以下關係：若在第 z_1 行、第 z_2 列放置棋子，則第 $(m-z_1+1)$ 行、第 $(m-z_2+1)$ 列必放置棋子；若第 z_1 行、第 z_2 列無放置棋子，則第 $(m-z_1+1)$ 行、第 $(m-z_2+1)$ 列也不放棋子（$z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$）。

因此我們只需要討論 $2m \times m$ 的棋盤陣列有多少組有效排列方式，而棋子排列須符合：「**每個橫列恰 2 個、每個直行至多 2 個**」。不過在分析上仍然不夠方便，於是我們將棋盤由中心軸對折，此時棋盤便會變成一個 $m \times m$ 的棋盤陣列，而棋子的放置需要符合：「**每行每列恰 2 個、每格至多放置 2 個棋子**」。若該格只有放置 1 個棋子，將棋盤重新展開之後，棋子有可能在棋盤的第一象限或第二象限，即有可能對應到 2 個位置，所以棋盤出現 1 個棋子沒有重疊的棋盤格就須將棋盤的排列可能數乘 2。

為方便運算，我們先假設棋子都沒有重疊，即「全部乘 2」。接著，我們探討重疊的情況(一個重疊的棋子，代表 2 個棋子的位置都已經固定，所以需要乘 $\frac{1}{4}$)。舉一個 $m \times m$ 的棋盤為例，若有一個重疊的棋子，則棋子所在的行與列都被占滿(如圖 5-21)。我們將已被佔滿的行與列忽略，棋盤就會變成一個簡單的排列問題，即 $f_2(m-1)$。同理可知，若有 n 個重疊的棋子，沒有放置重疊棋子的行與列可以視為 $f_2(m-n)$。而在 $m \times m$ 的棋盤上「重疊棋子」可能出現的位置為(假設共 i 個棋子)：C_i^m。相對來說，「忽略已被佔滿的行與列的較小棋盤」所在位置有 C_{m-i}^m 種可能。

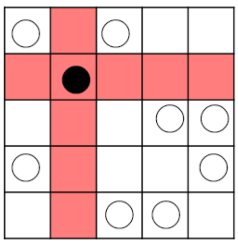


圖 5-21：一組在棋子可以重疊下的有效排列(●：重疊；○：沒有重疊)

整理上述內容我們知道：

甲、可將「旋轉 180°為相同的有效排列」視為「每行每列恰 2 個、每格

至多放置 2 個棋子」的問題。

乙、遇到一個重疊的棋子需要乘以 $\frac{1}{4}$ 。

丙、「忽略已被佔滿的行與列的較小棋盤」所在位置有 C_{m-i}^{m} 種可能。

於是我們可以得到 1-7-8 式：

$$S_{even}(m)=2^{2m}\cdot\left(f_2(m)+\frac{1!}{4^1}C_{m-1}^{m}\cdot f_2(m-1)+\frac{2!}{4^2}C_{m-2}^{m}\cdot f_2(m-2)+\cdots+\frac{m!}{4^m}C_0^m\cdot f(0)\right)$$

$$=2^{2m}\cdot\left(f_2(m)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i!}{4^i}C_{m-i}^{m}\cdot f_2(m-i)\right)\right). \qquad (1\text{-}7\text{-}8)$$

(3) **整理**

<u>Theorem 4.</u>

在邊格數為偶數下，棋盤的排列形式數具有以下關係：

$$F_2(2m)=\frac{1}{4}\left(f_2(2m)+2\cdot R_{even}(m)+2^{2m}\cdot\left(f_2(m)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i!}{4^i}C_{m-i}^{m}\cdot f_2(m-i)\right)\right)\right), m\in\mathbb{Z}^+, m\geq 0.$$

其中 $\begin{cases}R_{even}(0)=1\\ R_{even}(1)=1\\ R_{even}(2)=2\\ R_{even}(m)=(2m-1)R_{even}(m-1)-(m-1)R_{even}(m-2)+2\cdot(m-1)(m-2)R_{even}(m-3).\end{cases}$

依據 Lemma 1.(Burnside Lemma)、1-7-1 式、1-7-8 式：

定義 $G=\{e,r,r^2,r^3\}$ ，其中 e 為旋轉 0° 、 r 為旋轉 90° 。另外，定義 X 為 $f_2(n)$ 的所有有效排列。

故在邊格數為偶數下，排列形式數為：

$$F_2(n)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|\{x\in X\,|\,g\cdot x=x\}\right|=\frac{1}{4}\left(f_2(n)+2\cdot R_{even}(m)+S_{even}(m)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(f_2(n)+2\cdot R_{even}(m)+2^{2m}\cdot\left(f_2(m)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i!}{4^i}C_{m-i}^{m}\cdot f_2(m-i)\right)\right)\right)$$

$\because n=2m,$

$$\therefore F_2(2m)=\frac{1}{4}\left(f_2(2m)+2\cdot R_{even}(m)+2^{2m}\cdot\left(f_2(m)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i!}{4^i}C_{m-i}^{m}\cdot f_2(m-i)\right)\right)\right)$$ (<u>Theorem 4.</u>)

又由 1-7-7 式知： $\begin{cases}R_{even}(0)=1\\ R_{even}(1)=1\\ R_{even}(2)=2\\ R_{even}(m)=(2m-1)R_{even}(m-1)-(m-1)R_{even}(m-2)+2\cdot(m-1)(m-2)R_{even}(m-3).\end{cases}$

2.討論邊格數為奇數的情形

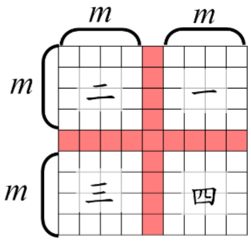


圖 5-22：邊格數為奇數的棋盤切分

在探討完偶數邊格數的棋盤陣列後，我們開始進行奇數邊格數棋盤陣列的探討。我們思考或許也可以使用我們在偶數時所運用的方式來進行分析，我們也對棋盤切分，如圖 5-22 所示。由右上的小棋盤開始依逆時針方向依序稱為棋盤的第一、二、三、四象限。

(1)　旋轉 90˚為相同的有效排列

不存在任何有效排列滿足「旋轉 90˚仍為相同的有效排列」。

Proof：

已知若要滿足旋轉 90˚仍為相同的有效排列，則棋盤的每個象限都要有相同數量的棋子，且紅色十字區域上需要有四個棋子。故棋子的總數量應為 4 的倍數。

假設邊格數為 $2n+1$，則棋盤上共有 $2\times(2n+1)$ 個棋子。

$$\frac{2\times(2n+1)}{4}=\frac{4n+2}{4}=n+\frac{1}{2}(\rightarrow\leftarrow).$$ 故得證。

(2)　旋轉 180˚為相同的有效排列

<u>Definition 5.</u>

定義 $R_{\text{odd}}(m)$ 為邊格數 $(2m+1)\times(2m+1)$ 的正方形棋盤，每行每列放 2 個棋子的有效排列數，且若旋轉 180˚相同者視為同一種。其中 $m\in\mathbb{Z}$ 且 $m\geq 0$。

與邊格數為偶數的棋盤陣列相同，旋轉 180˚後若要保持棋子的放置位置相同，則棋子的放置位置必須符合以下關係：若在第 z_1 行、第 z_2 列有放置棋子，則第 $(m-z_1+1)$ 行、第 $(m-z_2+1)$ 列必放置棋子；若第 z_1 行、第 z_2 列無放置棋子，則第 $(m-z_1+1)$ 行、第 $(m-z_2+1)$ 列也不放置棋子(其中 $z_1,z_2\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$)。之後，我們先忽略第 $(m+1)$ 行、第 $(m+1)$ 列(圖 5-22 的紅色十字區域)，將棋盤陣列轉變成一個 $m\times m$ 的棋盤陣列，棋子的放置需要符合:「**每行每列恰 2 個、每格至多放置 2 個棋子**」。考慮中間的行與列(圖 5-22 的紅色十字區域)，因為棋盤的每一個象限各有 1 行及 1 列的其中一個棋子(即棋盤上的一個棋子)會由紅色十字區域的棋子所貢獻，所以我們只要將「**偶數下的結果乘以棋盤上放置的棋子總數**(每個棋子都有可能被紅色十字區域的棋子所取代)」就可以得到：

$$S_{odd}(m)=2m\cdot S_{even}(m)=2m\cdot 2^{2m}\cdot\left(f_2(m)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i!}{4^i}C^{m}_{m-i}\cdot f_2(m-i)\right)\right).\qquad(1\text{-}7\text{-}9)$$

(3) **整理**

Theorem 5.

在邊格數為奇數下，棋盤的排列形式數具有以下關係：

$$F_2(2m+1)=\frac{1}{4}\left(f_2(2m+1)+2m\cdot 2^{2m}\cdot\left(f_2(m)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i!}{4^i}C_{m-i}^{m}\cdot f_2(m-i)\right)\right)\right),m\in\mathbb{Z}^+,m\geq 0.$$

依據 Lemma 1.(Burnside Lemma)、1-7-1 式、1-7-9 式：

定義 $G=\{e,r,r^2,r^3\}$，其中 e 為旋轉 0°、r 為旋轉 90°。另外，定義 X 為 $f_2(n)$ 的所有有效排列。

故在邊格數為奇數下，排列形式數為：

$$\begin{aligned}F_2(n)&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|\{x\in X\,|\,g\cdot x=x\}\right|\\&=\frac{1}{4}\left(\left|\{x\in X\,|\,x\cdot e=x\}\right|+\left|\{x\in X\,|\,x\cdot r=x\}\right|+\left|\{x\in X\,|\,x\cdot r^2=x\}\right|+\left|\{x\in X\,|\,x\cdot r^3=x\}\right|\right)\\&=\frac{1}{4}\left(f_2(n)+0+S_{odd}(m)+0\right)\\&=\frac{1}{4}\left(f_2(n)+2m\cdot 2^{2m}\cdot\left(f_2(m)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i!}{4^i}C_{m-i}^{m}\cdot f_2(m-i)\right)\right)\right).\end{aligned}$$

$\because n=2m+1,$

$$\therefore F_2(2m+1)=\frac{1}{4}\left(f_2(2m+1)+2m\cdot 2^{2m}\cdot\left(f_2(m)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i!}{4^i}C_{m-i}^{m}\cdot f_2(m-i)\right)\right)\right).\ (\underline{\text{Theorem 5.}})$$

二、探討棋子數為 3、邊格數為 n 的排列可能數($f_3(n)$)

(一) 使用重新排列的方式探討

首先，我們想透過與 $f_2(n)$ 相同的方式進行研究：先藉由重新排列行與列的方式求出 $f_3(n)$ 的遞迴式，接著討論一般式。我們先重新排列直排，將第一列的有棋子的直行排列至棋盤左側，再重新排列橫列，我們發現依據棋子在橫行的狀態棋子會在棋盤左上角呈現以下幾種類型的圖形：

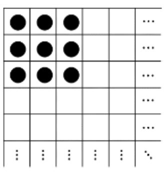


圖 5-23-1

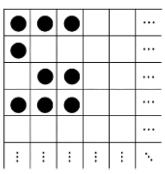


圖 5-23-2

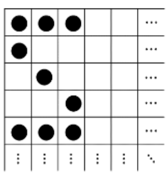


圖 5-23-3

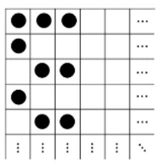


圖 5-23-4

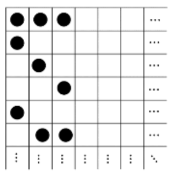


圖 5-23-5

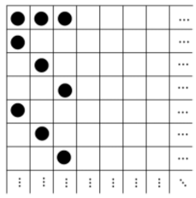


圖 5-23-6

重新排列後，會出現 13 種型式，不過在對一些類似的圖形(橫列的順序不同)整理後，總共可以獲得 6 種型式(圖 5-23-1~圖 5-23-6)。接下來，我們可以使用這個方式分析遞迴式，不過由於需要分別對六種圖形進行分析，會使探討的過程較為繁雜，

所以我們決定只使用圖形的方式討論。

（二） 使用圖形法討論 $f_3(n)$ 一般式

透過在 $f_2(n)$ 使用的方法，我們了解棋盤經轉換之後可以使用圖形呈現，於是我們將每一個橫列視為一個平面上的點，點之間的相連線段則視為同一直行中有放置棋子的位置。而在 $f_3(n)$ 的棋盤下，每一個橫列會由三個線段相連呈現一個封閉之三角形。如圖 5-25 即為圖 5-24 的圖形表示。

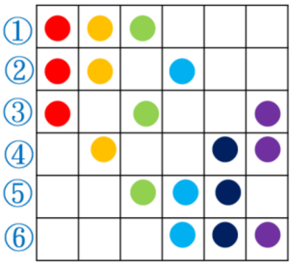


圖 5-24：邊格數為 6 的有效排列

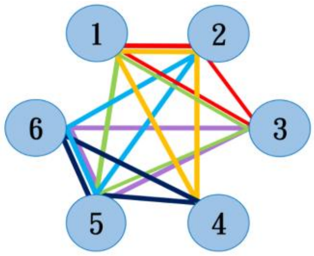


圖 5-25：圖 5-24 的圖形表示

接著我們將圖 5-25 轉換成數列的形式(圖 5-26)，在同一個底線上的數字代表在同一行上有放置棋子的橫列。顯然我們可以接著使用數列排列繼續進行探討。

$\boxed{\underline{1\,2\,3}\quad \underline{1\,2\,4}\quad \underline{1\,3\,5}\quad \underline{2\,5\,6}\quad \underline{4\,5\,6}\quad \underline{3\,4\,6}}$ 圖 5-26

在 $f_3(6)$ 的棋盤中，棋子的排列方式可視為數列 2 的排列問題，且每三項不能具有相同的元素。

$1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,6$ (數列 2)。

不考慮「數列 2 是否能夠轉換成呈現有效排列的棋盤」的情況下，數列 2 的排列方式共有 $\dfrac{18!}{(3!)^6}$ 組排列方式。若棋盤的邊格數為 n，則數列的排列方式共有 $\dfrac{(3n)!}{(3!)^n}$ 組。

$\boxed{\underline{1\,1\,1}}$ 圖 5-27-1 $\boxed{\underline{2\,2\,3}}$ 圖 5-27-2

接著對「數列不能轉換成呈現有效排列的棋盤(即不合法的排列)」的情況進行討論。在棋子數為 3 的棋盤所轉換的數列中，「**由數列第 1 項開始、每 3 項切分成 1 組。若一組中存在有至少 2 個元素相同，則該數列不能由一個呈現有效排列的棋盤轉換形成**」。由於每一呈現有效排列的棋盤當中都有可能有數組直行的排列為不合法的排列，所以我們無法將「直行棋子都位於同一棋盤格上」即「數列中該組所有元素皆相同」(如圖 5-27-1)和「直行存在 2 個棋子位於同一棋盤格上」即「數列中該組中的 2 個元素相同、存在 1 個元素與其他 2 個元素不同(兩同一異)」(如圖 5-27-2)分開討論，於是定義 $A_{i,j}$(Definition 6.)。

<u>Definition 6.</u>

定義 $A_{i,j}$ 滿足「**排列中有 i 組的所有元素皆相同，且有 j 組的 2 個元素相同、存在 1 個元素與其他 2 個元素不同(兩同一異)**」之排列的集合，其中 i,j 為非負整數。

因為 $f_3(n)$ 棋盤的邊格數為 n ，所以 $i+j$ 滿足：$0<i+j\le n$ 。透過 Definition 6.

我們得到 $f_3(n)$ 棋盤的有效排列的集合為： $A_{0,0}-\bigcup_{0<i+j\le n} A_{i,j}$ 而 $|A_{0,0}|=\dfrac{(3n)!}{(3!)^n}$. (2-2-1)

透過排容原理，我們知：

$$\begin{aligned}&\left|A_{0,0}-\bigcup_{0<i+j\le n} A_{i,j}\right|=|A_{0,j}|-|A_{1,j}|+|A_{2,j}|\cdots+(-1)^n\cdot|A_{n,j}|\\&=\left(|A_{0,0}|-|A_{0,1}|+\cdots+(-1)^n\cdot|A_{0,n}|\right)-\left(|A_{1,0}|-|A_{1,1}|+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot|A_{1,n-1}|\right)\\&\quad+\left(|A_{2,0}|-|A_{2,1}|+\cdots+(-1)^{n-2}\cdot|A_{2,n-2}|\right)+\cdots+(-1)^n\cdot|A_{n,0}|\\&=\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\left(|A_{a,b}|\cdot(-1)^{a+b}\right).\end{aligned} \tag{2-2-2}$$

Definition 7.

在所有由正整數 1 到 n 形成的排列中，定義 $t_{n,k}$ 為滿足「**對所有的 $i=1,2,\ldots,k$ ，i 必定不在第 i 個位置上**」的所有排列個數，其中 n,k 為正整數且 $n\ge k\ge 1$ 。

接著我們對 $A_{i,j}$ 進行進一步的探討，而邊格數為 n 的棋盤所形成的數列依大小排列如：$1,1,1,\cdots,n,n,n$ 。首先，我們分析「數列中有 i 組中所有元素皆相同」的情況：由於每個直行都可能出現不合法的排列，所以「出現不合法排列的直行」的組合共 C_i^n 組，而這些不合法排列在數列上出現的位置的組合為 C_i^n ，另外每組不合法排列在前述所提的位置的排列為 $P_i^i=i!$ 。統整得到： $C_i^n\cdot C_i^n\cdot i!$. (2-2-3)

$\boxed{\underline{1\,1\,2}\ \ \underline{1\,2\,1}\ \ \underline{2\,1\,1}}$ 圖 5-28：舉例說明兩同一異的排列方式

接著，我們分析「數列中有 j 組中的 2 個元素相同、存在 1 個元素與其他 2 個元素不同」的情況。同「數列中有 i 組中所有元素皆相同」的分析，不過要先扣除已經被「數列中有 i 組中所有元素皆相同」使用過的直行，所以「出現不合法排列的直行」的組合共 C_j^{n-i} 組。而這些不合法排列在數列上出現的位置的組合為 C_j^{n-i} 。另外每組不合法排列在前述所提位置的排列為 $P_j^j=j!$。然而兩同一異的情況下，總共有三種排列(圖 5-20)，因此兩同一異的排列數量需再乘上 3^j 。統整得到：

$$C_j^{n-i}\cdot C_j^{n-i}\cdot j!\cdot 3^j. \tag{2-2-4}$$

之後對剩下的元素進行排列，這些元素的排列共有 $t_{3n-3i-2j,j}$ 種排列，由於有剩下的元素中存在 $n-i-j$ 組的相同元素，而每組相同元素皆有 3 個相同元素，所以我們

要將 $t_{3n-3i-2j,j}$ 進行含相同物的排列之計算得到 $\dfrac{t_{3n-3i-2j,j}}{(3!)^{n-i-j}}$。最後，由於每組內元素排列順序不同，但仍舊為同一組有效排列，所以進行含有相同物的排列運算，即乘上 $(3!)^n$。統整得到：$\dfrac{t_{3n-3i-2j,j}}{(3!)^{n-i-j}}$.　(2-2-5)

我們整理 2-2-3 式、2-2-4 式、2-2-5 式得到：

$$\left|A_{i,j}\right|=\left[C_2^n\cdot C_2^n\cdot i!\cdot C_j^{n-i}\cdot C_j^{n-i}\cdot j!\cdot 3^j\left(\frac{t_{3n-3i-2j,j}}{(3!)^{n-i-j}}\right)\right]\cdot\frac{1}{(3!)^n}. \tag{2-2-6}$$

Property 3.

$$t_{n,k}=n!-C_1^k(n-1)!+C_2^k(n-2)!-\cdots+(-1)^kC_k^k(n-k)!.$$

Theorem 6.

邊格數為 3 下，不同棋子數下的排列可能數具有以下關係：

$$f_3(n)=6^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\sum_{i=0}^{b}\left(\frac{(-1)^{a+b}\cdot 3^b\cdot(3n-3a-2b-i)!\cdot(-1)^i}{a!\cdot i!\cdot(b-i)!\cdot((n-a-b)!)^2\cdot 6^{n-a-b}}\right),\forall n\in\mathbb{Z},n\geq 0.$$

Proof：

我們將 2-2-2 式、2-2-6 式、Property 3. 帶入 2-2-1 式得到：

$$\begin{aligned}
f_3(n)&=\left|A_{0,0}-\bigcup_{0<i+j\leq n}A_{i,j}\right|=\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\left(\left|A_{a,b}\right|\cdot(-1)^{a+b}\right)\\
&=\frac{1}{6^n}\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\left(\left(C_a^n\right)^2\cdot a!\cdot\left(C_b^{n-a}\right)^2\cdot b!\cdot 3^b\cdot\frac{t_{3n-3a-2b,b}\cdot(-1)^{a+b}}{6^{n-a-b}}\right)\\
&=\frac{1}{6^n}\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\left(\frac{(n!)^2}{a!b!((n-a-b)!)^2}\cdot 3^b\cdot\frac{t_{3n-3a-2b,b}\cdot(-1)^{a+b}}{6^{n-a-b}}\right)\\
&=\frac{(n!)^2}{6^n}\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\left(\frac{(-1)^{a+b}\cdot 3^b\cdot\sum_{i=0}^{b}\left(C_i^b\cdot(3n-3a-2b-i)!\cdot(-1)^i\right)}{a!\cdot b!\cdot((n-a-b)!)^2\cdot 6^{n-a-b}}\right)\\
&=\frac{(n!)^2}{6^n}\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\sum_{i=0}^{b}\left(\frac{(-1)^{a+b}\cdot 3^b\cdot(3n-3a-2b-i)!\cdot(-1)^i}{a!\cdot i!\cdot(b-i)!\cdot((n-a-b)!)^2\cdot 6^{n-a-b}}\right)\\
&=6^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\sum_{i=0}^{b}\left(\frac{(-1)^{a+b}\cdot 3^b\cdot(3n-3a-2b-i)!\cdot(-1)^i}{a!\cdot i!\cdot(b-i)!\cdot((n-a-b)!)^2\cdot 6^{n-a-b}}\right).
\end{aligned}$$

(Theorem 6.)

（三） 求取近似數列

在取得 $f_3(n)$ 的一般式之後，在 n 值很大時一般式之中的階乘、Σ 同樣會使數值的計算變得很不方便，所以希望可以求得近似，方便獲取相近數值。我們透過分析 Σ 運算時的數值改變簡化 Σ，並透過自然常數取代 Σ。

Theorem 7.

若 $f_3(n)=6^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\sum_{i=0}^{b}\left(\frac{(-1)^{a+b}\cdot 3^b\cdot(3n-3a-2b-i)!\cdot(-1)^i}{a!\cdot i!\cdot(b-i)!\cdot((n-a-b)!)^2\cdot 6^{n-a-b}}\right)$，則 $f_3(n)\sim 6^{-2n}\cdot(3n)!\cdot e^{-2}$.

Proof：

我們證 $f_3(n)\sim 6^{-2n}\cdot(3n)!\cdot e^{-2}$，等價於證明 $\lim_{n\to+\infty}\frac{f_3(n)}{6^{-2n}\cdot(3n)!}=e^{-2}$. （2-3-1）

透過 Theorem 6. 可知：

$$\frac{f_3(n)}{6^{-2n}\cdot(3n)!}=\frac{6^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\sum_{i=0}^{b}\left(\frac{(-1)^{a+b}\cdot 3^b\cdot(3n-3a-2b-i)!\cdot(-1)^i}{a!\cdot i!\cdot(b-i)!\cdot((n-a-b)!)^2\cdot 6^{n-a-b}}\right)}{6^{-2n}\cdot(3n)!}$$
$$=\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\sum_{i=0}^{b}\left(\frac{(-1)^{a+b+i}\cdot 3^b}{a!\cdot i!\cdot(b-i)!\cdot 6^{-a-b}}\times\frac{(3n-3a-2b-i)!}{(3n)!}\times\left(\frac{n!}{(n-a-b)!}\right)^2\right). \quad (2\text{-}3\text{-}2)$$

當 n 值很大且 $a\geq 1$ 時：$\frac{(3n-3a-2b-i)!}{(3n)!}\times\left(\frac{n!}{(n-a-b)!}\right)^2\approx 0.$ （2-3-3）

由 2-3-3 式知：

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\sum_{i=0}^{b}\left(\frac{(-1)^{a+b+i}\cdot 3^b}{a!\cdot i!\cdot(b-i)!\cdot 6^{-a-b}}\times\frac{(3n-3a-2b-i)!}{(3n)!}\times\left(\frac{n!}{(n-a-b)!}\right)^2\right)$$
$$\sim\lim_{n\to+\infty}\sum_{b=0}^{n}\sum_{i=0}^{b}\left(\frac{(-1)^{b+i}\cdot 3^b}{i!\cdot(b-i)!\cdot 6^{-b}}\times\frac{(3n-2b-i)!}{(3n)!}\times\left(\frac{n!}{(n-b)!}\right)^2\right). \quad (2\text{-}3\text{-}4)$$

當 n 值很大且 $i\geq 1$ 時：$\frac{(3n-2b-i)!}{(3n)!}\times\left(\frac{n!}{(n-b)!}\right)^2\approx 0.$ （2-3-5）

由 2-3-5 式知：

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{b=0}^{n}\sum_{i=0}^{b}\left(\frac{(-1)^{b+i}\cdot 3^b}{i!\cdot(b-i)!\cdot 6^{-b}}\times\frac{(3n-2b-i)!}{(3n)!}\times\left(\frac{n!}{(n-b)!}\right)^2\right)$$
$$\sim\lim_{n\to+\infty}\sum_{b=0}^{n}\left(\frac{(-1)^{b}\cdot 3^b}{b!\cdot 6^{-b}}\times\frac{(3n-2b)!}{(3n)!}\times\left(\frac{n!}{(n-b)!}\right)^2\right). \quad (2\text{-}3\text{-}6)$$

整理 2-3-6 式：

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{b=0}^{n}\left(\frac{(-1)^b\cdot 3^b}{b!\cdot 6^{-b}}\times\frac{(3n-2b)!}{(3n)!}\times\left(\frac{n!}{(n-b)!}\right)^2\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{b=0}^{n}\left(\frac{(-1)^b\cdot 3^b}{b!\cdot 6^{-b}}\times 3^{-2b}\right) \tag{2-3-7}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{b=0}^{n}\frac{(-1)^b\cdot 3^{-b}}{b!\cdot 6^{-b}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{b=0}^{n}\frac{(-2)^b}{b!}=\sum_{b=0}^{\infty}\frac{(-2)^b}{b!}=e^{-2}$$

於是得證 $\lim_{n\to+\infty}\frac{f_3(n)}{6^{-2n}\cdot(3n)!}=e^{-2}$，故 $f_3(n)\sim 6^{-2n}\cdot(3n)!\cdot e^{-2}$，證畢。 (Theorem 7.)

我們令 $g_3(n)=6^{-2n}\cdot(3n)!\cdot e^{-2}$，並作圖：

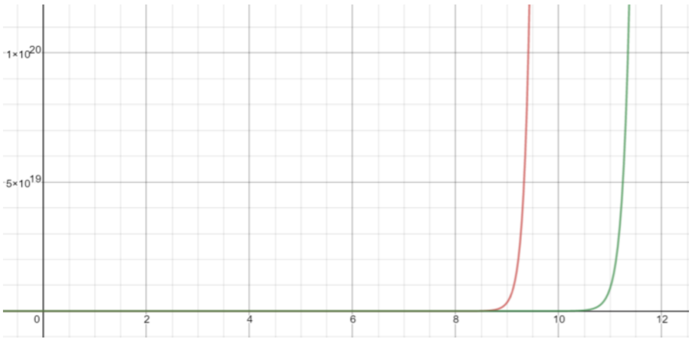


圖 5-29：紅線為 $f_3(n)=6^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\sum_{i=0}^{b}\left(\frac{(-1)^{a+b}\cdot 3^b\cdot(3n-3a-2b-i)!\cdot(-1)^i}{a!\cdot i!\cdot(b-i)!\cdot((n-a-b)!)^2\cdot 6^{n-a-b}}\right)$，綠線為 $g_3(n)=6^{-2n}\cdot(3n)!\cdot e^{-2}$。

表 5-6：$f_3(n)$ 與 $g_3(n)$ 之數值比較

n	3	4	5	6	7	8	50
$f_3(n)$	1	24	2040	297200	6.89×10^{7}	2.40×10^{10}	1.15×10^{184}
$g_3(n)$	1.05	38.60	2926.83	398049.47	8.82×10^{7}	2.98×10^{10}	1.18×10^{184}
誤差(%)	5.00	60.83	43.47	33.93	27.99	23.78	3.21

三、探討棋子數為 k、邊格數為 n 的排列可能數($f_k(n)$)

(一) 對稱性

Theorem 8.

$$f_k(n)=f_{n-k}(n).$$

Proof：

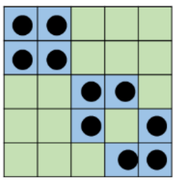


圖 5-30-1：$f_2(5)$ 的有效排列

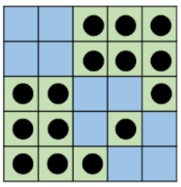


圖 5-30-2：$f_3(5)$ 的有效排列

觀察 $n\times n$ 棋盤中邊格數為 n、棋子數為 k 下的有效排列，我們將放置棋子的位置顛倒後，棋盤會呈現邊格數 n、棋子數 $k-n$ 下的有效排列。如圖 5-30-1 $f_2(5)$ 為一組 $f_2(5)$ 的有效排列，我們移除棋盤格上的棋子，然後在原本未放置棋子的棋盤格(綠色區域)放置棋子，就會呈現一組 $f_3(5)$ 的有效排列(圖 5-30-2)。

此外，一組有效排列顛倒後只會呈現唯一一組有效排列，也只有唯一一組有效排列可被顛倒成該組有效排列。經過推論可以得知一組顛倒前的有效排列與一組顛倒後的有效排列呈現一對一的對應關係。所以，獲得以下關係式：

$$f_k(n) = f_{n-k}(n).$$ (Theorem 8.)

(二) 討論上界

Theorem 9.

$$f_k(n) \le \frac{(nk)!}{(k!)^{2n}}.$$

Proof：

透過在 $f_2(n)$ 與 $f_3(n)$ 的研究結果，我們知道可以將棋盤問題透過圖形法轉化成數列的排列問題。所以在邊格數為 n 、棋子數為 k 的棋盤問題即為一個含有 $n \times k$ 項之數列的排列問題。因為數列中具有 n 組相同元素、每組有 k 項元素，所以數列的排列可

能數為：$\dfrac{(nk)!}{(k!)^n}.$ (3-2-1)

在數列排列完成後，由數列第一項開始每 k 項為一組，同組內元素就算有不同的排列順序，也只會對應到一組有效排列的棋盤格，所以需要將合法數列的排列可能數

扣除同組內的排列：$\dfrac{\text{合法數列的排列可能數}}{(k!)^n}.$ (3-2-2)

由 3-2-1 式、3-2-2 式，知 $f_k(n)$ 的上界為：$\dfrac{(nk)!}{(k!)^n} \times \dfrac{1}{(k!)^n} = \dfrac{(nk)!}{(k!)^{2n}}.$ (3-2-3)

因此，我們得到：$f_k(n) \le \dfrac{(nk)!}{(k!)^{2n}}.$ (Theorem 9.)

(三) 討論積分形式

由於在 $f_k(n)$ 時繼續使用組合的方法進行討論會過於複雜，所以我們便考慮可否用其他方式探討，於是我們利用以下定義的 $2n$ 元多項式(Definition 8.)進行討論。

Definition 8.

$$\text{若} x_k, y_k \in \mathbb{C}, \text{則} \mathrm{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n) = \prod_{i \cdot j=1}^{n} \left(1 + x_i \cdot y_j\right).$$

由 Definition 8. ，我們對 $f_k(n)$ 積分形式進行討論，並得到以下定理：

Theorem 10.

$$f_k(n) = \frac{2^{n^2}}{(2\pi)^{2n}} \overbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}^{2n} \prod_{i \cdot j=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{\theta_i + \phi_j}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{n}{2} - k\right)\left(\theta_1 + \cdots + \phi_n\right) \right) d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_n d\phi_1 \cdots d\phi_n.$$

Proof：

透過 Definition 8 可知：$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之展開式中 $x_1^k\cdot x_2^k\cdots x_n^k\cdot y_1^k\cdot y_2^k\cdots y_n^k$ 的係數為 $f_k(n)$ 的解。於是我們便設法求出 $x_1^k\cdot x_2^k\cdots x_n^k\cdot y_1^k\cdot y_2^k\cdots y_n^k$ 的係數：

首先，令 $x_j=e^{i\theta_j}, dx_j=ie^{i\theta_j}d\theta_j.\quad y_j=e^{i\phi_j}, dy_j=ie^{i\phi_j}d\phi_j.\ (1\le j\le n, j\in\mathbb{N})$

接著利用柯西積分公式知：

$$f_k(n)=\frac{1}{(2\pi i)^{2n}}\int\limits_{|x_1|=1}\int\limits_{|x_2|=1}\cdots\int\limits_{|y_n|=1}\frac{\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\left(1+x_i\cdot y_j\right)}{x_1^{k+1}\cdot x_2^{k+1}\cdots x_n^{k+1}\cdot y_1^{k+1}\cdots y_n^{k+1}}dx_1dx_2\cdots dx_ndy_1dy_2\cdots dy_n$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\left(1+e^{i(\theta_i+\phi_j)}\right)}{e^{ik(\theta_1+\theta_2+\cdots+\phi_1+\cdots+\phi_n)}}d\theta_1d\theta_2\cdots d\phi_1\cdots d\phi_n \qquad (3\text{-}3\text{-}1)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\left(e^{i\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)}\right)\right)}{e^{ik(\theta_1+\cdots+\phi_n)}}d\theta_1\cdots d\phi_n.$$

其中 $e^{i\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)}=2\cos\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right).$ (3-3-2)

又 $\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\left(e^{i\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)}\right)=e^{i\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)}=e^{\frac{i}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(n\theta_i+\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_n)}=e^{\frac{i}{2}\left[n(\theta_1+\cdots+\theta_n)+n(\phi_1+\cdots+\phi_n)\right]}=e^{\frac{i}{2}n(\theta_1+\cdots+\theta_n+\phi_1+\cdots+\phi_n)}.$

(3-3-3)

將 3-3-2 式、3-3-3 式代回 3-3-1 式：

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\left(e^{i\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)}\right)\right)}{e^{ik(\theta_1+\cdots+\phi_n)}}d\theta_1\cdots d\phi_n$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\left(e^{i\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)}\right)\times\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\left(2\cos\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)\right)}{e^{ik(\theta_1+\cdots+\phi_n)}}d\theta_1\cdots d\phi_n$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}e^{i\left(\frac{n}{2}-k\right)(\theta_1+\cdots+\phi_n)}\cdot 2^{n^2}\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)\right)d\theta_1\cdots d\phi_n$$

$$=\frac{2^{n^2}}{(2\pi)^{2n}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left(\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{n}{2}-k\right)(\theta_1+\cdots+\phi_n)+i\sin\left(\frac{n}{2}-k\right)(\theta_1+\cdots+\phi_n)\right)d\theta_1\cdots d\phi_n$$

$$=\frac{2^{n^2}}{(2\pi)^{2n}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left(\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{n}{2}-k\right)(\theta_1+\cdots+\phi_n)d\theta_1\cdots d\phi_n$$

$$+i\frac{2^{n^2}}{(2\pi)^{2n}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left(\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{n}{2}-k\right)(\theta_1+\cdots+\phi_n)d\theta_1\cdots d\phi_n$$

$$=\frac{2^{n^2}}{(2\pi)^{2n}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left(\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{n}{2}-k\right)(\theta_1+\cdots+\phi_n)d\theta_1\cdots d\phi_n. \qquad (\underline{\text{Theorem 10.}})$$

（注意：$\because\left(\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{n}{2}-k\right)(\theta_1+\cdots+\phi_n)$ 為奇函數,$\therefore\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left(\prod\limits_{i\cdot j=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{n}{2}-k\right)(\theta_1+\cdots+\phi_n)d\theta_1\cdots d\phi_n=0.$ ）

陸、 研究結果及結論

透過重新排列行與列、圖形法轉換成數列兩種不同的方式，我們成功的使本研究問題可以被簡化、並有系統的討論，接著對本問題進一步的延伸探討其在不同邊格數、棋子數的情形。並且獲得了以下結果：

1. 透過重新排列棋盤中的行與列，我們可以有效的對棋子數為 2 的棋盤進行簡化、歸納，並讓我們有系統的進行討論。
2. 我們發現可以先將棋盤轉化成點與線段(每一橫列視為一平面上的點、點間線段視為同直行中有放置棋子的位置)、再轉換成數列，接著討論數列排列的方式分析本問題，最後也可以獲得與重新排列行與列的方式相同的結果、且更為簡潔。
3. 棋子數為 1 時，本研究問題相當於一個不具相同項之數列的排列問題，我們可透過 0-1-1 式討論其有效排列總數：

   $$f_1(n)=n!. \qquad \text{（0-1-1 式）}$$

4. 棋子數為 2 時，透過重新排列行與列的方式可以獲得一個邊格數與有效排列可能數的二階遞迴關係式：

   $$\begin{cases} f_2(0)=1 \\ f_2(1)=0 \\ f_2(n)=C_2^n\cdot\left[2f_2(n-1)+f_2(n-2)\cdot(n-1)\right],\ \forall n\in\mathbb{Z}^+, n\geq 2. \end{cases} \qquad \text{（}\underline{\text{Theorem 1}}\text{）}$$

5. 棋子數為 2 時，透過生成函數的計算我們獲得了 Theorem 1 的一般式；此外，也可以透過圖形法的分析直接獲得一般式：

   $$f_2(n)=4^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k)!}{k!\left((n-k)!\right)^2}(-2)^k, \forall n\in\mathbb{Z}, n\geq 0. \qquad \text{（}\underline{\text{Theorem 2}}\text{）}$$

6. 我們求取邊格數趨近無限時 Theorem 2 的近似，並透過斯特林公式(Stirling’s formula)對階乘化簡，我們也發現其與 Theorem 2 極為相似：

   $$f_2(n)\sim 4^{-n}\cdot(n!)^2\cdot e^{-\frac{1}{2}}\sim 2\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}. \qquad \text{（}\underline{\text{Theorem 3}}\text{）}$$

7. 棋子數為 2 時，透過 Burnside 引理、將棋盤轉換成循環排列，獲得棋盤的排列形式數：

   n 為偶數： $$F_2(2m)=\frac{1}{4}\left(f_2(2m)+2\cdot R_{even}(m)+2^{2m}\cdot\left(f_2(m)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i!}{4^i}C_{m-i}^{m}\cdot f_2(m-i)\right)\right)\right), m\in\mathbb{Z}^+, m\geq 0.$$

   其中 $$\begin{cases} R_{even}(0)=1 \\ R_{even}(1)=1 \\ R_{even}(2)=2 \\ R_{even}(m)=(2m-1)R_{even}(m-1)-(m-1)R_{even}(m-2)+2\cdot(m-1)(m-2)R_{even}(m-3). \end{cases}$$

   n 為奇數： $$F_2(2m+1)=\frac{1}{4}\left(f_2(2m+1)+2m\cdot 2^{2m}\cdot\left(f_2(m)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i!}{4^i}C_{m-i}^{m}\cdot f_2(m-i)\right)\right)\right), m\in\mathbb{Z}^+, m\geq 0. \qquad \text{（}\underline{\text{Theorem 4}}\text{）}$$

(Theorem 5)

8. 棋子數為 3 時，我們透過將棋盤轉化成數列的分析得到之一般式：

$$f_3(n)=6^{-n}\cdot(n!)^2\sum_{a=0}^{n}\sum_{b=0}^{n-a}\sum_{i=0}^{b}\left(\frac{(-1)^{a+b}\cdot 3^b\cdot(3n-3a-2b-i)!\cdot(-1)^i}{a!\cdot i!\cdot(b-i)!\cdot((n-a-b)!)^2\cdot 6^{n-a-b}}\right),\forall n\in\mathbb{Z},n\geq 0.$$ (Theorem 6)

9. 我們求取邊格數趨近無限時 Theorem 4 的近似，並透過對 Σ 的分析、化簡：

$$f_3(n)\sim 6^{-2n}\cdot(3n)!\cdot e^{-2}.$$ (Theorem 7)

10. 觀察棋盤陣列發現，相同棋子數時，邊格數為 n 與 $k-n$ 之棋盤陣列中的有效排列具有一對一的對應關係：

$$f_k(n)=f_{n-k}(n).$$ (Theorem 8)

11. 棋子數為 k 時，透過圖形法的分析方式發現，我們歸納出 $f_k(n)$ 具有一個明顯的上界：

$$f_k(n)\leq\frac{(nk)!}{(k!)^{2n}}.$$ (Theorem 9)

12. 為了討論 $f_k(n)$ 的確切數值，我們討論其積分形式，並利用柯西積分公式改寫，得到：

$$f_k(n)=\frac{2^{n^2}}{(2\pi)^{2n}}\overbrace{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}}^{2n}\prod_{i\cdot j=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{\theta_i+\phi_j}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{n}{2}-k\right)(\theta_1+\cdots+\phi_n)\right)d\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_n d\phi_1\cdots d\phi_n.$$

(Theorem 10)

柒、 未來展望及應用

未來我們希望可以繼續探討本問題在棋子數為 k 、邊格數 n 下的排列可能數，並嘗試獲得其一般式、更為精確的上界與下界或加入棋盤可旋轉特性下的排列數。

除此之外，在將棋盤轉化成點與線段以進行圖形法分析時，我們發現如果將正方形的棋盤拓展成為矩形，似乎圖形法可解。我們需要改變每個點可連結的線段數，並討論轉換成數列後的不合法排列的情況，這留待我們更進一步的探討與研究。

本研究問題也可以應用於益智遊戲，在符合有效排列的規則下，尋找新的有效排列。

本研究問題等價於探討一種特定形式(行合與列和相等)的 0-1 矩陣數量，所以也可以應用於矩陣問題的探討。我們也發展出將棋盤陣列重新排列(用以簡化棋盤)或將其表示成數列的方法，可以應用在棋盤問題的討論。

捌、 參考文獻

1. 葉名倉(編)(2013)。**普通高級中學一年級下學期數學課本**。南一書局。
2. 107 學年度台灣省北二區高級中等學校數理及資訊學科能力競賽—數學科筆試(二)試題。
3. 張福春與曾介政(2008)。一般生成函數之應用。**數學傳播，127**，12-35。
4. Jenny Jin (2018). *Analysis and Applications of Burnside's Lemma*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
5. Conway, J. B.(2012). *Functions of One Complex Variable*. New York, NY: Springer Science & Business Media.

附錄一：計算有效排列的程式(以邊格數為 4、棋子數為 2 為例)

```
import sys
sys.setrecursionlimit(100000)
from itertools import permutations as shuffle
#定義 length(邊格數), totalchess(棋子數)
length , totalchess , end , Cnumber = 4 , 2 , 0 , 1

def pool(length,totalchess):
    poollist = []
    n , m = 0 , totalchess
    while n < totalchess :
        poollist.append(1)
        n += 1
    while m < length :
        poollist.append(0)
        m += 1
    return poollist

def mapprinter(_list_):
    print('No.'+str(Cnumber),end='\n')
    itern = 1
    for i in _list_:
        rown = str(itern)
        _str = ''
        for j in i:
            _str = _str + str(j)
        print( rown.rjust(3) , '|| ' + str(_str))
        itern += 1

def mapcheck(_list,length,totalchess):
    for i in range(length):
        memorize = 0
        for j in range(length):
            _int = _list[j][i]
            memorize += _int
            if memorize > totalchess :
                return False
            else: continue
        if memorize == totalchess: continue
        else: return False
```

```
    return True

def intshuffle(length,totalchess):
    final_list = []
    first_list = list(shuffle(pool(length,totalchess),length))
    for i in first_list:
        if i not in final_list:
            if sum(list(i)) == totalchess:
                final_list.append(i)
                final_list.append(i)
                final_list.append(i)
            else: pass
        else: pass
    del first_list
    return final_list

def listshuffle(length,totalchess):
    first_list = list(shuffle(intshuffle(length,totalchess),length))
    return first_list

#main
print('program start')
discussed_list = listshuffle(length,totalchess)
final_list = []
for i in discussed_list:
    if i not in final_list:
        if mapcheck(i,length,totalchess) == True:
            final_list.append(i)
            mapprinter(i)
            Cnumber += 1
        else: continue
    else: continue
print ('\n\ntotal:  ' + str(Cnumber-1) + '  types')
input(end)
```

附錄二：計算同構的程式(以邊格數為 4、棋子數為 2 為例)

```
#shuffle([range],length)
import numpy as n
import sys
sys.setrecursionlimit(100000)
from itertools import permutations as shuffle
#定義 length(邊格數), totalchess(棋子數)
length , totalchess , end , Cnumber = 4 , 2 , 0 , 1

#item in each row,e.g. [1,1,0,...,0]
def pool(length,totalchess):  #
    poollist = []
    n , m = 0 , totalchess
    while n < totalchess :
        poollist.append(1)
        n += 1
    while m < length :
        poollist.append(0)
        m += 1
    print (poollist)
    return poollist

#chess table printer
def mapprinter(_list_):
    print('No.'+str(Cnumber),end='\n')
    itern = 1
    for i in _list_:
        rown = str(itern)
        _str = ''
        for j in i:
            _str = _str + str(j)
        print( rown.rjust(3) , '|| ' + str(_str))
        itern += 1

#chess checker(check colums)
def mapcheck(_list,length,totalchess):
    for i in range(length):
        memorize = 0
        for j in range(length):
            _int = _list[j][i]
```

```
            memorize += _int
            if memorize > totalchess :
                return False
            else: continue
        if memorize == totalchess: continue
        else: return False
    return True

#chess checker(check rows)
def intshuffle(length,totalchess):
    final_list = []
    first_list = list(shuffle(pool(length,totalchess),length))
    for i in first_list:
        if i not in final_list:
            if sum(list(i)) == totalchess:
                final_list.append(i)
                final_list.append(i)
            else: pass
        else: pass
    del first_list
    return final_list

# shuffle rows and rows
def listshuffle(length,totalchess):
    first_list = list(shuffle(intshuffle(length,totalchess),length))
    return first_list

#rotate 90 degree
def r90(_list_):
    temp_tuple=[]
    temp=n.rot90(n.array(_list_))
    for i in temp.tolist():
        temp_tuple.append(tuple(i))
    return tuple(temp_tuple)

#main
print('program start')
discussed_list = listshuffle(length,totalchess)
final_list = []
```

```
for i in discussed_list:
    if mapcheck(i,length,totalchess) == True:
        if i in final_list:continue
        else:
            templist=r90(i)
            if templist in final_list:continue#90
            else:
                templist=r90(templist)
                if templist in final_list:continue#180
                else:
                    templist=r90(templist)
                    if templist in final_list:continue#270
                    else:
                        final_list.append(i)
                        mapprinter(i)
                        Cnumber += 1
    else: continue
print ('\n\ntotal:  ' + str(Cnumber-1) + '  types')
input(end)
```