第十九屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：**SA19-265**

作品名稱：探討兩全等正 n 邊形所圍凸、凹與交叉 2n 邊形之交錯邊所成線段與有向線段比值的 m 次方和關係

姓　　名：**施怡萱**

關 鍵 字：**正弦函數的 m 次方轉換成餘弦函數和公式、等冪和問題、有向線段比值**

目錄

摘要 ……1

壹、 研究動機 ……1

貳、 研究目的 ……1

參、 研究設備及器材 ……2

肆、 研究過程與方法 ……2

一、 探討兩正三角形之邊所在直線所圍六邊形之交錯邊的二次方和關係。

(所圍六邊形均落在兩正三角形之內部)

(**引理 1**) ……3

二、 探討兩正三角形之邊所在直線所圍六邊形之交錯邊的二次方和關係。

(所圍六邊形有部分落在兩正三角形之外部)

(**引理 2**) ……3

三、 探討兩正 n 邊形之邊所在直線所圍 2n 邊形之交錯邊的二次方和關係。

(**定理 1**) ……4

四、 探討兩正 n 邊形之邊所在直線所圍 2n 邊形之交錯邊的一次方和關係。

(**定理 2**) ……4

五、 與正餘弦函數相關之求和公式(一)。

(**引理 3**) ……5

六、 正弦函數的 m 次方轉換成餘弦函數和公式

(**引理 4**) ……5

七、 探討兩正三角形之邊所在直線所圍六邊形之交錯邊的 m 次方和關係。

(**定理 3**) ……5

八、 探討兩正方形之邊所在直線所圍八邊形之交錯邊的三次方和關係。

(**定理 4**) ……16

九、 探討兩正方形之邊所在直線所圍八邊形之交錯邊的 m 次方和關係。

(**定理 5**) ……17

十、 探討兩正五邊形之邊所在直線所圍十邊形之交錯邊的三次方和關係。

(**定理 6**) ……18

十一、探討兩正五邊形之邊所在直線所圍十邊形之交錯邊的四次方和關係。

（**定理 7**）……………………………………………………………………18

十二、探討兩正五邊形之邊所在直線所圍十邊形之交錯邊的 m 次方和關係。

（**定理 8**）……………………………………………………………………19

十三、探討兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的 m 次方和關係。

（**定理 9**）……………………………………………………………………19

十四、探討兩正三角形之邊所在直線所圍六邊形之交錯邊的**帶號一次方和**關係。

（所圍六邊形有部分落在兩正三角形之外部）

（**定理 10**）……………………………………………………………………20

十五、兩個向量的除法之定義。

（**定義** 1）……………………………………………………………………21

十六、探討兩正三角形之邊所在直線所圍六邊形之交錯邊所成有向線段比值的一次方和關係。（所圍六邊形有部分落在兩正三角形之外部）

（**定理 11**）……………………………………………………………………21

十七、探討兩正三角形之邊所在直線所圍六邊形之交錯邊所成有向線段比值的的 m 次方和關係。（所圍六邊形有部分落在兩正三角形之外部）

（**定理 12**）……………………………………………………………………22

十八、探討兩正方形之邊所在直線所圍八邊形之交錯邊所成有向線段比值的 m 次方和關係。（所圍八邊形有部分落在兩正方形之外部）

（**定理 13**）……………………………………………………………………22

十九、探討兩正五邊形之邊所在直線所圍十邊形之交錯邊所成有向線段比值的 m 次方和關係。（所圍十邊形有部分落在兩正五邊形之外部）

（**定理 14**）……………………………………………………………………23

二十、探討兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊所成有向線段比值的 m 次方和關係。

（所圍 2n 邊形有部分落在兩正 n 邊形之外部）

（**定理 15**）……………………………………………………………………24

伍、 實例 —『實數版本的等冪和問題之解』…………………………25

陸、 討論與應用 ……………………………………………………………28

柒、 結論與展望 ……………………………………………………………30

捌、 參考資料 ……………………………………………………………………30
玖、 附錄……………………………………………………………………………31
一、 引理 2 之證明……………………………………………………………31
二、 定理 1 之證明……………………………………………………………32
三、 定理 2 之證明……………………………………………………………33
四、 定理 3 之證明……………………………………………………………35
五、 定理 4 之證明……………………………………………………………51
六、 定理 5 之證明……………………………………………………………56
七、 定理 6 之證明……………………………………………………………56
八、 定理 7 之證明……………………………………………………………61
九、 定理 8 之證明……………………………………………………………61
十、 定理 9 之證明……………………………………………………………61
十一、定理 10 之證明 …………………………………………………………87
十二、定理 11 之證明…………………………………………………………102
十三、定理 12 之證明…………………………………………………………102
十四、定理 13 之證明…………………………………………………………107
十五、定理 14 之證明…………………………………………………………111
十六、定理 15 之證明…………………………………………………………115

摘要

本文主要探討將兩個全等的正n邊形之n個邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊所生線段與有向線段比值的m次方和關係，在參考資料[1]中的原始問題為：『已知平面上ΔABC與$\Delta A_1B_1C_1$為兩個全等的正三角形，且$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$分別相交於$P$、$Q$、$R$、$S$、$T$、$U$等六點，又六邊形$PQRSTU$未落在正三角形$ABC$與正三角形$A_1B_1C_1$的外部時，如圖 L1-1，則$\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2$。』我們好奇地嘗試且發現兩組線段的一次方和亦相等，所以我們就接著嘗試推廣到正方形與正五邊形，發現均有類似的結果。此外，我們也考慮正n邊形的兩組線段的一次方和與二次方和的情形，並且從正三角形、正方形與正五邊形的證明過程發現如下的規則：『當$0\le m\le n-1$時，兩組線段的m次方和亦相等；而當$m\ge n$時，雖然兩組線段的m次方和不再維持恆等，但在滿足特定的條件下，還是有機會相等的。』接著，我們也考慮了兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的**帶號一次方和**關係，發現適當地調整每個線段為『正』或『負』，可以得到兩組線段的帶號一次方和相等，連同『定理 2』之結果總共可以列出三十二類的結果；最後，我們給了兩個向量除法的定義，並且考慮了兩個全等正n邊形之n個邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊所成**有向線段比值的m次方和**關係，我們發現了與**兩組線段的m次方和**類似的結論，亦即『當$0\le m\le n-1$時，兩組有向線段比值的m次方和會相等；而當$m\ge n$時，雖然兩組有向線段的m次方和不再維持恆等，但在滿足特定的條件下，還是有機會相等的。』此結果算是『**引理 1**』的另類推廣情形，又因為此時兩正n邊形所圍$2n$邊形可以允許有部分落在兩正n邊形之外部，所以此部分的結果事實上也已經推廣了『兩組線段的m次方和關係的情形』的結果。

壹、 研究動機

我們在參考資料[1]中發現兩個正三角形部分重疊相交出來的六邊形之交錯邊的二次方和相等的結果，詳見『**引理 1**』，我們實際用 Geogebra 繪圖軟體做了測試，發現結果無誤，於是就想說對於其他的正多邊形是不是也有類似的結果，我們先是用軟體測試，發現在正方形與正五邊形均有類似的結果，後來我們發現『**引理 1**』其實可以推廣到正多邊形，並且我們從正三角形、正方形與正五邊形的證明過程發現如下的規則：『當$0\le m\le n-1$時，兩全等正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的m次方和會相等；而當$m\ge n$時，雖然兩全等正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的m次方和不再維持恆等，但在滿足特定的條件下，還是有機會相等的。』接著，我們考慮了兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的帶號一次方和關係；最後，我們又將『**引理 1**』推廣到兩全等正n邊形所圍$2n$邊形之兩組有向線段比值的m次方和關係的情形，發現也有類似的結果。

貳、 研究目的

一、將『**引理 1**』推廣到正n邊形，並探討兩全等正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的 **m** 次方和是否維持恆等，抑或需滿足特定的條件才會相等。

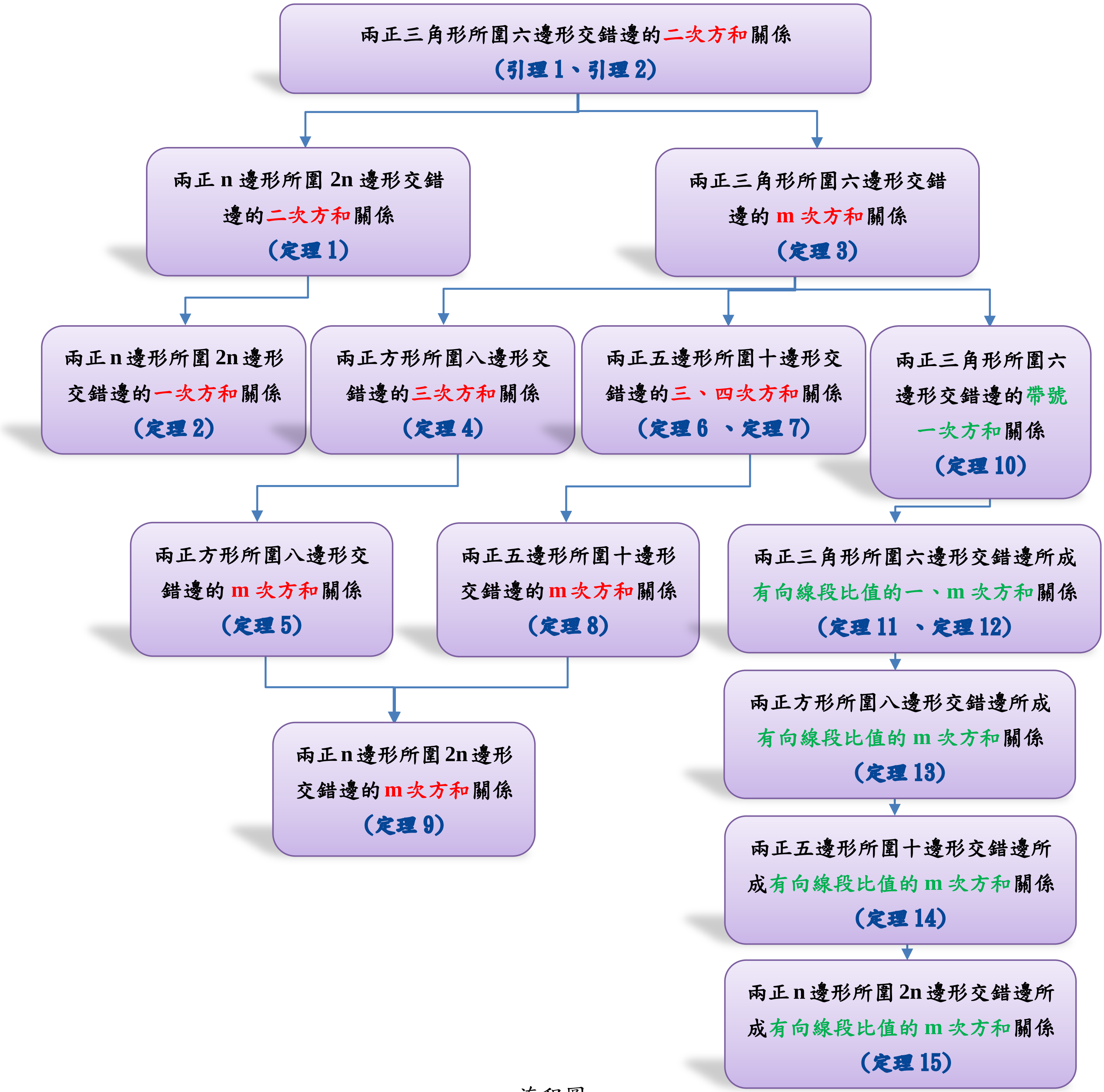
二、將『**引理 1**』推廣到有向線段比值的情形，並探討兩全等正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊所成有向線段比值的 **m** 次方和是否維持恆等，抑或需滿足特定的條件才會相等。

參、 研究設備及器材

頭腦、紙、筆、電腦、電腦軟體（Microsoft Word, Geogebra5.0）

肆、 研究過程與方法

我們證明的過程與脈絡大致上如下之流程圖：



流程圖

在參考資料[1]中曾經提到如下『**引理 1**』之結果，詳述如下。

引理 1：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的二次方和關係)

已知平面上 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 為兩個全等的正三角形，且 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$ 分別相交於 P、Q、R、S、T、U 等六點，且六邊形 $PQRSTU$ **未落在**正三角形 ABC 與正三角形 $A_1B_1C_1$ 的外部時，如下圖 L1-1，則

$\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2$。

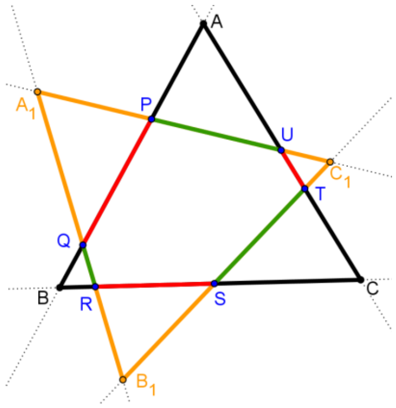


圖 L1-1

證明：參考資料[1]第 156 頁之證明。 □

經使用 Geogebra 軟體測試之後，我們發現『**引理 1**』中，當六邊形 $PQRSTU$ 有部分落在正三角形 ABC 與正三角形 $A_1B_1C_1$ 的外部時，則其交錯邊之二次方和亦相等，如下之『**引理 2**』。

引理 2：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的二次方和關係)

承『**引理 1**』之前提描述，但是六邊形 $PQRSTU$ **有部分落在**正三角形 ABC 與正三角形 $A_1B_1C_1$ 的外部時，如圖 L2-1 所示，則 $\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2$。

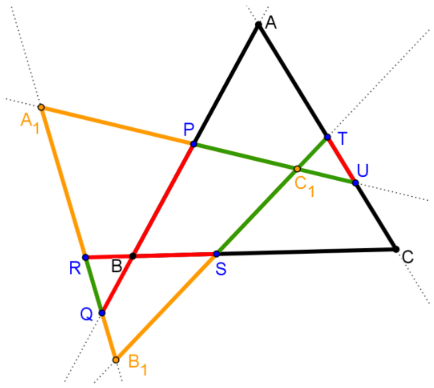


圖 L2-1

證明：利用兩相似三角形面積比等於邊長平方比，將線段的平方和比值轉換成三角形面積和的比值，利用兩組三角形面積和相減為零，並證明比值為 1，證明過程詳見附錄。□

我們嘗試將『**引理 1**』與『**引理 2**』之結論合併並推廣到正 n 邊形，如下之『**定理 1**』。

定理 1：(兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的二次方和關係)

已知平面上 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 為兩個全等的正 n 邊形，且 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、…、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_{n-1}B_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$ 分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、…、P_{2n-1}、P_{2n} 等 $2n$ 點，如圖 T1-1 與圖 T1-2，則 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^2$ (於此，視 $P_{2n+1}=P_1$)。

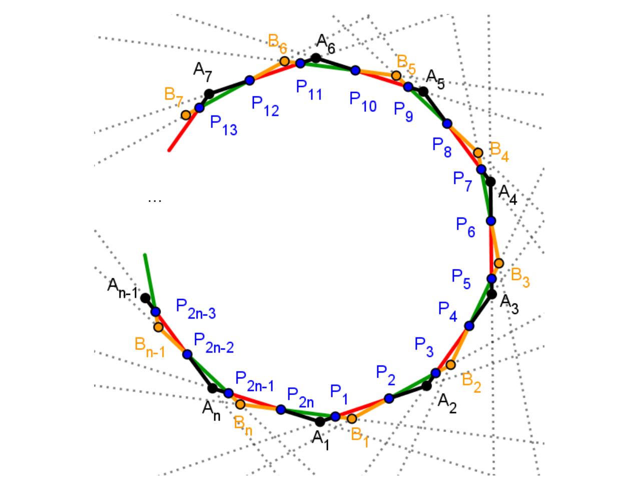


圖 T1-1

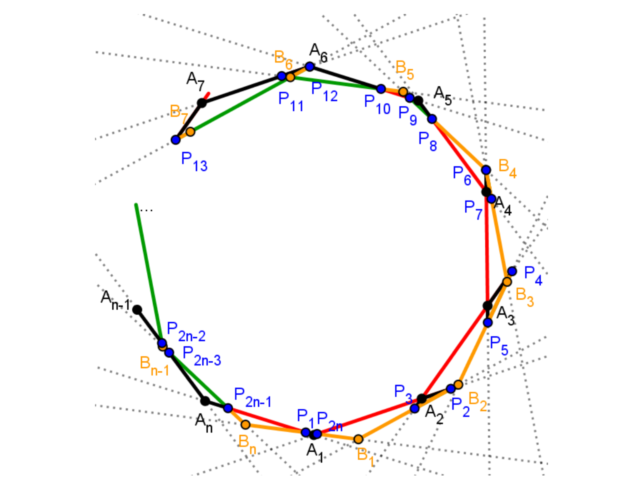


圖 T1-2

證明：類似『**引理 1**』之證明方式可證明原命題成立，證明過程詳見附錄。□

經使用 Geogebra 軟體測試之後，我們發現『**引理 1**』中，當六邊形 $PQRSTU$ 未落在兩個正三角形外部時，則其交錯邊之一次方和亦相等，我們亦嘗試了正方形的情形，發現結果亦然，於是我們將之推廣到正 n 邊形，結果詳述如下之『**定理 2**』。

定理 2：(兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的一次方和關係)

承『**定理 1**』之前提描述，當 $2n$ 邊形 $P_1P_2\cdots P_{2n}$ 未落在兩正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在線段 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在線段 $\overline{A_2A_3}$ 上、P_5 與 P_6 均落在線段 $\overline{A_3A_4}$ 上、…、P_{2n-1} 與 P_{2n} 均落在線段 $\overline{A_nA_1}$ 上，如圖 T1-1 所示，則 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}$ (於此，視 $P_{2n+1}=P_1$)。

證明：利用兩相似三角形周長比等於對應邊長比，將線段和的比值轉換成三角形周長和

的比值，並證明比值為 1，證明過程詳見附錄。 □

引理 3：

設 β 為一任意角，則

(1) $\sin\beta-\sin\left(60^\circ+\beta\right)+\sin\left(120^\circ+\beta\right)=0$

(2) $\cos\beta+\cos\left(120^\circ+\beta\right)+\cos\left(240^\circ+\beta\right)=0$

證明：利用和差化積公式可得證原命題成立。 □

為了將『**定理 1**』中的結果推廣到 m 次方和的情形，我們需要用到『**正弦函數的 m 次方轉換成餘弦函數和公式**』，如下『**引理 4**』所示，詳見參考資料[2]。

引理 4：(正弦函數的 m 次方轉換成餘弦函數和公式)

設 m 為非負整數，則 $\sin^m\theta=\dfrac{1}{2^m}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_j^m\cos\left[\left(2j-m\right)\theta+90^\circ\times m\right]$。

證明：詳見參考資料[2]。 □

承『**引理 1**』之前提描述，接下來我們想考慮 $\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ 與 $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ 是否會相等，其中 $m\geq3$ 且 m 是正整數，詳述如下之『**定理 3**』。

定理 3：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的 **m** 次方和關係)

已知平面上 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 為兩個全等的正三角形，且 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$ 分別相交於 P、Q、R、S、T、U 等六點，且六邊形 $PQRSTU$ 未落在正三角形 ABC 與正三角形 $A_1B_1C_1$ 的外部時，又若 $m\geq3$ 且 m 是正整數，如下圖 T3-1，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正 $\Delta A_1B_1C_1$ 乃由正 ΔABC 平移向量 $\left(a,b\right)$ （a 與 b 為實數)再繞著重心 G 點逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $m\geq3$ 時，『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **不再維持恆等**』。

(3) 當 $m=3$、$m=4$、$m=5$、$m=6$、$m=7$ 與 $m=8$ 時，則

僅當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq120^\circ$，$\theta\neq180^\circ$，$\theta\neq300^\circ$』 或 『$\theta=60^\circ$』時，

『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$與$\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$仍會相等』。

(4) 當$m\geq6$時，則

當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq120^\circ$，$\theta\neq180^\circ$，$\theta\neq300^\circ$』 或 『$\theta=60^\circ$』時，

『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$與$\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$仍會相等』。

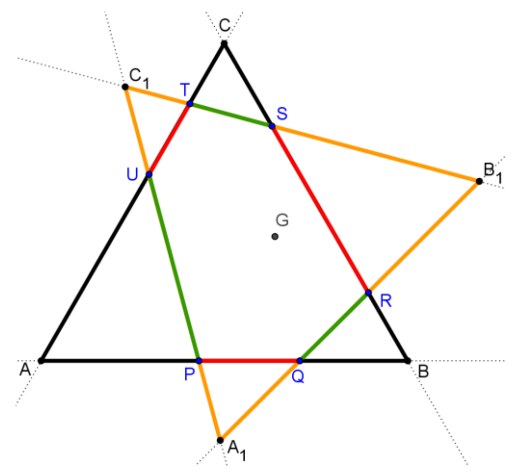


圖 T3-1

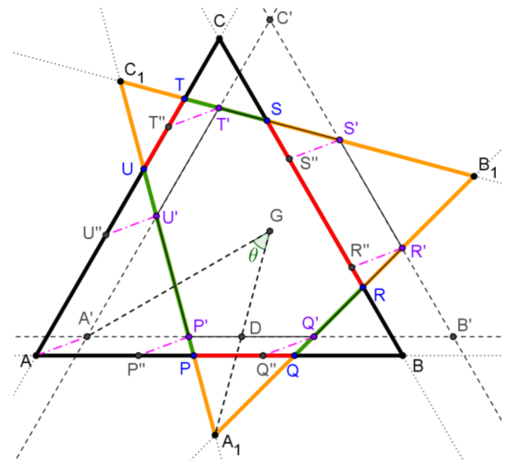


圖 T3-2

(以下為『**定理 3**』之簡略證明，詳細的證明過程參考附錄)

證明：設正$\Delta A_1B_1C_1$之重心為G，則

(i) 在不失一般性下，我們可以假設正$\Delta A_1B_1C_1$乃由正ΔABC平移向量(a,b) (a與b為實數)再繞著G點逆時針旋轉角度$\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$而得，於此我們僅考慮$a$與$b$均為正數之情形，如上圖 T3-2 所示。我們假設正ΔABC平移向量(a,b)後可得正$\Delta A'B'C'$，所以由前述可知G點同為正$\Delta A'B'C'$之重心。為了方便起見，我們令$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即$\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(ii) ①為了方便起見，我們假設$\overleftrightarrow{A'B'}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{A'B'}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{C'A'}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{C'A'}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$分別相交於$P'$、$Q'$、$R'$、$S'$、$T'$、$U'$等六點，如上圖 T3-2 所示；

②再假設$P''=P'-(a,b)$、$Q''=Q'-(a,b)$、$R''=R'-(a,b)$、$S''=S'-(a,b)$、$T''=T'-(a,b)$、$U''=U'-(a,b)$，如上圖 T3-2 所示。

(iii) 已知正$\Delta A'B'C'$與正$\Delta A_1B_1C_1$之重心同為G點，則我們想先證明$\angle A'GA_1=\angle PQA_1$，詳述如下：

設$\overline{A'B'}$與$\overline{GA_1}$相交於D點，且令$\angle A'GA_1=\theta$，則

①$\because G$ 為正 $\Delta A'B'C'$ 之重心，$\therefore \angle GA'D = 30^\circ$；又 $\because G$ 為正 $\Delta A_1B_1C_1$ 之重心，$\therefore \angle DA_1Q' = 30^\circ$；

故 $\angle GA'D = \angle DA_1Q'$。

②在 $\Delta GA'D$ 與 $\Delta Q'A_1D$ 中，$\because \angle GA'D = \angle DA_1Q'$ 且 $\angle GDA' = \angle Q'DA_1$，$\therefore \angle A_1Q'D = \angle A'GD = \theta$。

③$\because \overline{AB} // \overline{A'B'}$，$\therefore \angle PQA_1 = \angle A_1Q'D$；故可推知 $\angle PQA_1 = \angle A'GD = \theta$，亦即 $\angle A'GA_1 = \angle PQA_1$。

(同理可得 $\angle RSB_1 = \angle R'S'B_1 = \angle TUC_1 = \angle T'U'C_1 = \theta$)

(iv) 承步驟(ii)所述，我們將證明六邊形 $P'Q'R'S'T'U'$ 的六邊長均相等，亦即 $\overline{P'Q'} = \overline{Q'R'} = \overline{R'S'} = \overline{S'T'} = \overline{T'U'} = \overline{U'P'}$，詳述如下：

①連接 $\overline{GP'}$，則因為正 $\Delta A'B'C'$ 與正 $\Delta A_1B_1C_1$ 之重心同為 G 點且該兩正三角形全等，所以 $\overline{GA'} = \overline{GA_1}$，進而推知 $\angle GA'A_1 = \angle GA_1A'$；

②因為正 $\Delta A'B'C'$ 與正 $\Delta A_1B_1C_1$ 之重心同為 G 點，所以 $\angle GA'P' = 30^\circ = \angle GA_1P'$；

③上述由①與②得知 $\angle GA'A_1 - \angle GA'P' = \angle GA_1A' - \angle GA_1P'$，故推知 $\angle P'A'A_1 = \angle P'A_1A'$，

因此 $\overline{P'A'} = \overline{P'A_1}$；

④考慮 $\Delta A'P'U'$ 與 $\Delta A_1P'Q'$，$\because \angle A'P'U' = \angle A_1P'Q'$，$\overline{P'A'} = \overline{P'A_1}$，且 $\angle P'A'U' = 60^\circ = \angle P'A_1Q'$，

$\therefore \Delta A'P'U' \cong \Delta A_1P'Q'$ (ASA 全等性質)，故 $\overline{U'P'} = \overline{P'Q'}$；

⑤同理可得 $\overline{P'Q'} = \overline{Q'R'}$、$\overline{Q'R'} = \overline{R'S'}$、$\overline{R'S'} = \overline{S'T'}$、$\overline{S'T'} = \overline{T'U'}$ 與 $\overline{T'U'} = \overline{U'P'}$，因此得證 $\overline{P'Q'} = \overline{Q'R'} = \overline{R'S'} = \overline{S'T'} = \overline{T'U'} = \overline{U'P'}$。

(v) 接下來我們將找出六邊形 $PQRSTU$ 的六邊長 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$、$\overline{RS}$、$\overline{ST}$、$\overline{TU}$、$\overline{UP}$ 分別與六邊形 $P'Q'R'S'T'U'$ 的六邊長 $\overline{P'Q'}$、$\overline{Q'R'}$、$\overline{R'S'}$、$\overline{S'T'}$、$\overline{T'U'}$、$\overline{U'P'}$ 的關係，詳述如下。經過一些努力之後，我們發現 $\Delta PP'P''$、$\Delta QQ'Q''$、$\Delta RR'R''$、$\Delta SS'S''$、$\Delta TT'T''$ 與 $\Delta UU'U''$ 等六個三角形之內角均可用步驟(i)中提及的角度 θ 與角度 α 表示之，且由步驟(i)中提及的向量 (a,b)，我們可推知 $\overline{P'P''} = \overline{Q'Q''} = \overline{R'R''} = \overline{S'S''} = \overline{T'T''} = \overline{U'U''} = \sqrt{a^2+b^2}$，詳見下述之圖 T3-3、圖 T3-4、圖 T3-5、圖 T3-6、圖 T3-7 與圖 T3-8。

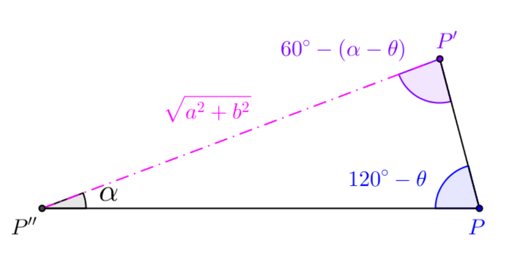


圖 T3-3

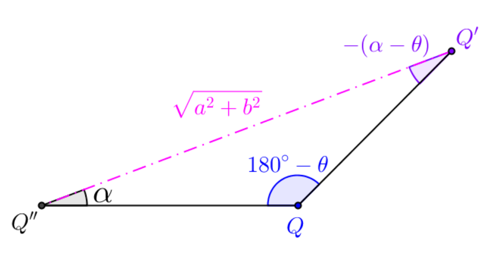


圖 T3-4

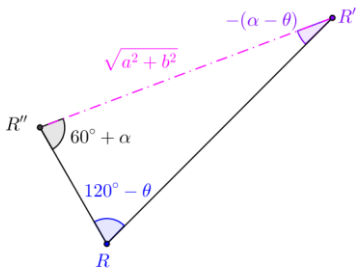


圖 T3-5

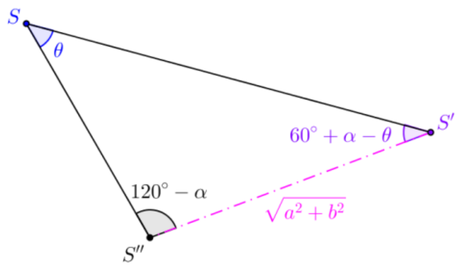


圖 T3-6

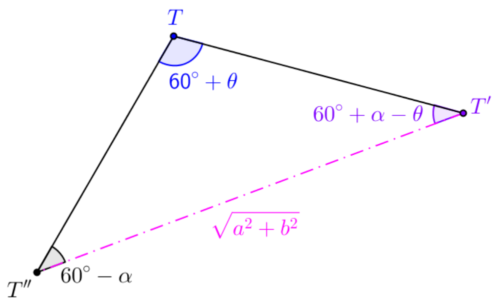


圖 T3-7

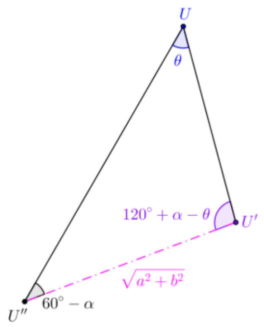


圖 T3-8

(1) 先考慮 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{P'Q'}$ 之關係：

①如上圖 T3-3 所示，在 $\Delta PP'P''$ 中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{PP''}}{\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\overline{P'P''}}{\sin(120^\circ-\theta)}\Rightarrow\frac{\overline{PP''}}{\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin(120^\circ-\theta)}\Rightarrow\overline{PP''}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}{\sin(120^\circ-\theta)}$$

②如上圖 T3-4 所示，在 $\Delta QQ'Q''$ 中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{QQ''}}{\sin\left[-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\overline{Q'Q''}}{\sin(180^\circ-\theta)}\Rightarrow\frac{\overline{QQ''}}{\sin\left[-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin(180^\circ-\theta)}\Rightarrow\overline{QQ''}=\frac{-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta}$$

③由上圖 T3-2，我們可得

$$\overline{PQ}=\overline{P''Q''}-\overline{PP''}+\overline{QQ''}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha-\theta\right)}{\sin\theta}\text{(利用和差化積公式)}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\frac{1}{2}\left[2\cos\left(90^\circ-\alpha\right)\times\cos 30^\circ\right]\right\}$$

$$=\overline{P'Q'}-\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\right]\times\sin\alpha$$

為了方便起見，我們令 $u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}$ ，則 $\overline{PQ}=\overline{P'Q'}-u\times\sin\alpha$ 。

(2) 仿照上述步驟(1)可得：

$\overline{QR}=\overline{Q'R'}+u\times\sin\left(\alpha-\theta\right)$ 、 $\overline{RS}=\overline{R'S'}+u\times\sin\left(60^\circ+\alpha\right)$ 、 $\overline{ST}=\overline{S'T'}-u\times\sin\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)$

、 $\overline{TU}=\overline{T'U'}-u\times\sin\left(120^\circ+\alpha\right)$ 、 $\overline{UP}=\overline{U'P'}+u\times\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)$ 。

(vi) 令 $L_{3,m,1}=\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ 且 $L_{3,m,2}=\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ ，則

承步驟(iv)所述，因為 $\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$ ，為了方便起見，所以我們再令 $\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}=r$ ，因此可得

$$
\begin{aligned}
&L_{3,m,1}\\
&=\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m\\
&=\left(r-u\times\sin\alpha\right)^m+\left[r+u\times\sin\left(60^\circ+\alpha\right)\right]^m+\left[r-u\times\sin\left(120^\circ+\alpha\right)\right]^m\\
&=\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}(-1)^q u^q\sin^q\alpha+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}u^q\sin^q\left(60^\circ+\alpha\right)+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}(-1)^q u^q\sin^q\left(120^\circ+\alpha\right)
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
&L_{3,m,2}\\
&=\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m\\
&=\left[r+u\times\sin\left(\alpha-\theta\right)\right]^m+\left[r-u\times\sin\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]^m+\left[r+u\times\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\right]^m\\
&=\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}u^q\sin^q\left(\alpha-\theta\right)+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}(-1)^q u^q\sin^q\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}u^q\sin^q\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\ ;
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&L_{3,m,1}-L_{3,m,2}\\
&=\sum_{q=0}^{m}\left\{\begin{aligned}&C_q^m r^{m-q}u^q\times\left[(-1)^q\sin^q\alpha+\sin^q(60^\circ+\alpha)+(-1)^q\sin^q(120^\circ+\alpha)\right]\\&-C_q^m r^{m-q}u^q\times\left[\sin^q(\alpha-\theta)+(-1)^q\sin^q(60^\circ+\alpha-\theta)+\sin^q(120^\circ+\alpha-\theta)\right]\end{aligned}\right\}\\
&=\sum_{q=1}^{m}(-1)^q C_q^m r^{m-q}u^q\times C_q
\end{aligned}
$$

且對於每一個 $q\in\{1,2,3,\cdots,m\}$ ，我們均定義

$$C_q=\begin{bmatrix}\sin^q\alpha+(-1)^q\sin^q(60^\circ+\alpha)+\sin^q(120^\circ+\alpha)\\+(-1)^{q+1}\sin^q(\alpha-\theta)-\sin^q(60^\circ+\alpha-\theta)+(-1)^{q+1}\sin^q(120^\circ+\alpha-\theta)\end{bmatrix}$$

(vii) 我們將證明 $C_1=C_2=C_4=0$，但是『C_3、C_5、…、C_m **不保證恆等於** 0』，詳述如下：

①首先我們證明 $C_1=0$ 如下：(部份兩兩分組後，再利用和差化積公式)

$$C_1=\sin\alpha-\sin\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin\left(120^\circ+\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\theta\right)-\sin\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)$$

$$=\sin\alpha-\sin\alpha+\sin\left(\alpha-\theta\right)-\sin\left(\alpha-\theta\right)=0\text{；}$$

②我們證明 $C_2=0$ 如下：

(先利用餘弦函數的二倍角公式，再部份兩兩分組，然後利用和差化積公式)

(註：餘弦函數的二倍角公式 $\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta\Rightarrow\sin^2\beta=\dfrac{1-\cos 2\beta}{2}$)

$$C_2=\sin^2\alpha+\sin^2\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin^2\left(120^\circ+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\theta\right)-\sin^2\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin^2\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\times\left[\cos 2\alpha-\cos 2\alpha-\cos\left(2\alpha-2\theta\right)+\cos\left(2\alpha-2\theta\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times 0=0$$

③我們將證明『C_3 **不保證恆等於** 0』如下：

(先利用正弦函數的三倍角公式；再部份兩兩分組，然後利用和差化積公式)

(註：正弦函數的三倍角公式 $\sin 3\beta=-4\sin^3\beta+3\sin\beta\Rightarrow\sin^3\beta=\dfrac{3\sin\beta-\sin 3\beta}{4}$)

$$C_3=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}-\frac{3\sin\left(60^\circ+\alpha\right)-\sin\left(180^\circ+3\alpha\right)}{4}+\frac{3\sin\left(120^\circ+\alpha\right)-\sin\left(360^\circ+3\alpha\right)}{4}$$

$$+\frac{3\sin\left(\alpha-\theta\right)-\sin\left(3\alpha-3\theta\right)}{4}-\frac{3\sin\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin\left(180^\circ+3\alpha-3\theta\right)}{4}+\frac{3\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin\left(360^\circ+3\alpha-3\theta\right)}{4}$$

$$=-\frac{3}{4}\times\left[\sin 3\alpha+\sin\left(3\alpha-3\theta\right)\right]$$

$$=-\frac{3}{2}\times\left[\sin\left(3\alpha-\frac{3\theta}{2}\right)\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

④我們將證明 $C_4=0$ 如下：

(過程中我們主要利用餘弦函數的二倍角公式)

$$C_4=\sin^4\alpha+\sin^4(60^\circ+\alpha)+\sin^4(120^\circ+\alpha)-\sin^4(\alpha-\theta)-\sin^4(60^\circ+\alpha-\theta)-\sin^4(120^\circ+\alpha-\theta)$$

$$=\left(\sin^2\alpha\right)^2+\left[\sin^2(60^\circ+\alpha)\right]^2+\left[\sin^2(120^\circ+\alpha)\right]^2-\left[\sin^2(\alpha-\theta)\right]^2-\left[\sin^2(60^\circ+\alpha-\theta)\right]^2-\left[\sin^2(120^\circ+\alpha-\theta)\right]^2$$

$$=-\frac{1}{2}\times\begin{Bmatrix}\left[\cos 2\alpha+\cos(120^\circ+2\alpha)+\cos(240^\circ+2\alpha)\right]\\-\left[\cos(2\alpha-2\theta)+\cos(120^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos(240^\circ+2\alpha-2\theta)\right]\end{Bmatrix}$$

$$+\frac{1}{4}\times\begin{Bmatrix}\left[\cos^2 2\alpha+\cos^2(120^\circ+2\alpha)+\cos^2(240^\circ+2\alpha)\right]\\-\left[\cos^2(2\alpha-2\theta)+\cos^2(120^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos^2(240^\circ+2\alpha-2\theta)\right]\end{Bmatrix}$$

再由『**引理 3**』得，

$$C_4=-\frac{1}{2}\times\{0-0\}$$

$$+\frac{1}{4}\times\begin{Bmatrix}\left[\frac{1+\cos 4\alpha}{2}+\frac{1+\cos(240^\circ+4\alpha)}{2}+\frac{1+\cos(480^\circ+4\alpha)}{2}\right]\\-\left[\frac{1+\cos(4\alpha-4\theta)}{2}+\frac{1+\cos(240^\circ+4\alpha-4\theta)}{2}+\frac{1+\cos(480^\circ+4\alpha-4\theta)}{2}\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\times\begin{Bmatrix}\left[\cos 4\alpha+\cos(240^\circ+4\alpha)+\cos(480^\circ+4\alpha)\right]\\-\left[\cos(4\alpha-4\theta)+\cos(240^\circ+4\alpha-4\theta)+\cos(480^\circ+4\alpha-4\theta)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\times\{0-0\}=0$$

⑤我們將證明『C_5 **不保證恆等於** 0』如下：

(過程中我們主要利用『引理 4』之正弦函數的五次方轉換成餘弦函數和公式)

由『**引理 4**』可得

$$\sin^5\beta$$

$$=\frac{1}{2^5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j C_j^5\cos\left((2j-5)\beta+90^\circ\times 5\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left[10\sin\beta-5\sin 3\beta+\sin 5\beta\right]$$ (利用餘角關係和負角關係而得)

因此

$$C_5=\sin^5\alpha-\sin^5(60^\circ+\alpha)+\sin^5(120^\circ+\alpha)+\sin^5(\alpha-\theta)-\sin^5(60^\circ+\alpha-\theta)+\sin^5(120^\circ+\alpha-\theta)$$

(代入合併化簡)

$$=\frac{10}{16}\times\left[\sin\alpha-\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(120^\circ+\alpha)+\sin(\alpha-\theta)-\sin(60^\circ+\alpha-\theta)+\sin(120^\circ+\alpha-\theta)\right]$$

$$-\frac{5}{16}\times\begin{bmatrix}\sin 3\alpha-\sin(180^\circ+3\alpha)+\sin(360^\circ+3\alpha)\\ +\sin(3\alpha-3\theta)-\sin(180^\circ+3\alpha-3\theta)+\sin(360^\circ+3\alpha-3\theta)\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{16}\times\begin{bmatrix}\sin 5\alpha-\sin(300^\circ+5\alpha)+\sin(600^\circ+5\alpha)\\ +\sin(5\alpha-5\theta)-\sin(300^\circ+5\alpha-5\theta)+\sin(600^\circ+5\alpha-5\theta)\end{bmatrix}$$

再由『**引理 3**』得，

$$C_5=\frac{10}{16}\times[0+0]-\frac{5}{16}\times\begin{bmatrix}\sin 3\alpha+\sin 3\alpha+\sin 3\alpha\\ +\sin(3\alpha-3\theta)+\sin(3\alpha-3\theta)+\sin(3\alpha-3\theta)\end{bmatrix}+\frac{1}{16}\times[0+0]$$

$$=-\frac{5}{16}\times[3\sin 3\alpha+3\sin(3\alpha-3\theta)]$$ (利用和差化積公式)

$$=-\frac{15}{8}\times\left[\sin\left(3\alpha-\frac{3\theta}{2}\right)\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

(viii)接下來，我們化簡將 C_q (其中 $6\le q\le m$)，過程中我們主要利用『**引理 4**』之正弦函數的 q 次方轉換成餘弦函數和公式，我依 q 之值分成四類情形討論如下：

(1). 當 $q=4t+1$ 時，其中 t 是正整數，則

由『**引理 4**』可得

$$\sin^q\beta=\sin^{4t+1}\beta$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^j C_j^{4t+1}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\beta+90^\circ\times(4t+1)\right]$$ (利用餘角關係和負角關係)

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1} C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\beta\right]$$

因此

$$C_q=C_{4t+1}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin^{4t+1}\alpha+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin^{4t+1}\left(120^\circ+\alpha\right)\\ +(-1)^{4t+2}\sin^{4t+1}\left(\alpha-\theta\right)-\sin^{4t+1}\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)+(-1)^{4t+2}\sin^{4t+1}\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\end{bmatrix}$$

(利用和差化積公式，提出共同的項合併化簡)

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\begin{matrix}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\\ +2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{matrix}\right\}\right\}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{4t+1}}\displaystyle\sum_{\substack{j=0\\,\text{且}j\text{是偶數}}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\right\}\right\}\\ +\dfrac{1}{2^{4t+1}}\displaystyle\sum_{\substack{j=0\\,\text{且}j\text{是奇數}}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\frac{1}{2}-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\right\}\right\}\end{cases}$$

考慮一般情形之t值，則$q=4t+1$且推知$0\le j\le 4t+1$，此時可得C_q之值如下：

(1-1). 我們發現如下(甲)、(乙)、(丙)與(丁)等四個結果：

(甲). 當j是偶數且$j-\dfrac{(4t+1)-3}{2}=3v$時，其中v是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\right\}=\frac{3}{2}\ ;$$

(乙). 當j是偶數且$j-\dfrac{(4t+1)-3}{2}\ne 3v$時，其中$v$是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\right\}=0\ ;$$

(丙). 當j是奇數且$j-\dfrac{(4t+1)-3}{2}=3v$時，其中v是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\right\}=\frac{3}{2}\ ;$$

(丁). 當j是奇數且$j-\dfrac{(4t+1)-3}{2}\ne 3v$時，其中$v$是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\right\}=0\ ;$$

我們將分別證明上述(甲)與(乙)等四個結果如下：

(甲).

(甲-1). $\because\ j-\dfrac{(4t+1)-3}{2}=3v\ ,\ \therefore\ j=(2t-1)+3v$ ；

又因為j是偶數且$(2t-1)$是奇數，所以v是奇數。

(甲-2). $\because 0\le j\le 4t+1\ ,\ \therefore 0\le(2t-1)+3v\le 4t+1$，

$$\Rightarrow -2t+1\le 3v\le 2t+2\ \Rightarrow \frac{-2t+1}{3}\le v\le\frac{2t+2}{3}$$

$$\Rightarrow\left\lceil\frac{-2t+1}{3}\right\rceil\le v\le\left\lfloor\frac{2t+2}{3}\right\rfloor\quad\cdots\cdots\cdots ①$$

又$\because q=4t+1\ ,\ \therefore\ t=\dfrac{q-1}{4}$，代入上述之①式得

$$\left\lceil \frac{-2\left(\frac{q-1}{4}\right)+1}{3} \right\rceil \le v \le \left\lfloor \frac{2\left(\frac{q-1}{4}\right)+2}{3} \right\rfloor \Rightarrow \left\lceil \frac{-q+3}{6} \right\rceil \le v \le \left\lfloor \frac{q+3}{6} \right\rfloor$$ 。

(甲-3). 此時，$2j-(4t+1)=2\left[(2t-1)+3v\right]-(4t+1)=6v-3$ 。

(甲-4). 由上述步驟(甲-1)與(甲-3)之結果得知

$$\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\right\}=\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[(6v-3)\times 30^\circ\right]\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}+\sin\left(180^\circ\times v-90^\circ\right)\right\}=\left\{\frac{1}{2}+\sin 90^\circ\right\}=\left\{\frac{1}{2}+1\right\}=\frac{3}{2}$$

，故得證命題(甲)成立。

(乙).仿照上述(甲)之證明方法可得證該結果成立。

(丙).仿照上述(甲)之證明方法可得證該結果成立。

(丁).仿照上述(甲)之證明方法可得證該結果成立。

(1-2). 利用上述命題(甲)、(乙)、(丙)與(丁)等四個結果，我們可以將 C_q 的值化簡如下：

$$C_q=C_{4t+1}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2^{4t+1}}\sum\limits_{\substack{j=0\\ ,且j是偶數}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\\ \times\left\{\dfrac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\right\}\end{array}\right\} \\ +\dfrac{1}{2^{4t+1}}\sum\limits_{\substack{j=0\\ ,且j是奇數}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\\ \times\left\{\dfrac{1}{2}-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^\circ\right]\right\}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{3}{2^{q-1}}\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+3}{6}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+3}{6}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+6v-1}{2}}C^q_{\frac{q+6v-3}{2}}\left\{\sin\left[(6v-3)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[(6v-3)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

(2). 當 $q=4t+2$ 時，其中 t 是正整數，則(同 $q=4t+1$ 的證明方式可得)

$$C_q=C_{4t+2}=-\frac{3}{2^{q-1}}\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+6}{6}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+6}{6}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+6v-4}{2}}C^q_{\frac{q+6v-6}{2}}\left\{\sin\left[(6v-6)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[(6v-6)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

(3). 當 $q=4t+3$ 時，其中 t 是正整數，則(同 $q=4t+1$ 的證明方式可得)

$$C_q = C_{4t+3} = \frac{3}{2^{q-1}} \sum_{v=\left\lceil \frac{-q+3}{6} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{q+3}{6} \right\rfloor} (-1)^{\frac{q+6v-3}{2}} C^q_{\frac{q+6v-3}{2}} \left\{ \sin\left[(6v-3)\left(\alpha - \frac{\theta}{2} \right) \right] \times \cos\left[(6v-3)\left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\}$$

(4). 當 $q = 4t$ 時，其中 t 是正整數，則(同 $q = 4t+1$ 的證明方式可得)

$$C_q = C_{4t} = -\frac{3}{2^{q-1}} \sum_{v=\left\lceil \frac{-q+6}{6} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{q+6}{6} \right\rfloor} (-1)^{\frac{q+6v-6}{2}} C^q_{\frac{q+6v-6}{2}} \left\{ \sin\left[(6v-6)\left(\alpha - \frac{\theta}{2} \right) \right] \times \sin\left[(6v-6)\left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\}$$

故『$L_{3,m,1} - L_{3,m,2}$ **不保證恆等於 0**』，也就是說『$\overline{PQ}^m + \overline{RS}^m + \overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m + \overline{ST}^m + \overline{UP}^m$ **不再維持恆等**』。

(ix) 承上述步驟(viii)所述，雖然『$\overline{PQ}^m + \overline{RS}^m + \overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m + \overline{ST}^m + \overline{UP}^m$ **不再維持恆等**』，其中 $m \geq 3$ 且 m 是正整數，但我們想進一步的了解要滿足什麼條件，才可以確定『$\overline{PQ}^m + \overline{RS}^m + \overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m + \overline{ST}^m + \overline{UP}^m$ **仍會相等**』，詳述如下：

$\overline{PQ}^m + \overline{RS}^m + \overline{TU}^m = \overline{QR}^m + \overline{ST}^m + \overline{UP}^m$

$\Rightarrow L_{3,m,1} - L_{3,m,2} = 0$

$\Rightarrow \sum_{q=1}^{m} (-1)^q C_q^m r^{m-q} u^q \times C_q = 0$，其中 $u = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 30^\circ}{\sin(120^\circ - \theta) \times \sin\theta}$

，$r = \overline{P'Q'} = \overline{Q'R'} = \overline{R'S'} = \overline{S'T'} = \overline{T'U'} = \overline{U'P'}$，且 C_q 如上述步驟(vi)中之定義，C_q 之值依 q 之值分別為 $q = 4t+1$、$q = 4t+2$、$q = 4t+3$、$q = 4t$ 分成四大類，其中 t 是非負整數，如上頁所示：

我們發現如下兩個結果：

(1) 當『$b = a\tan\left(\frac{\theta}{2} + 60^\circ \times t_1 \right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta \neq 120^\circ$，$\theta \neq 180^\circ$，$\theta \neq 300^\circ$』時，$C_q = 0$。

理由如下：

$$b = a\tan\left(\frac{\theta}{2} + 60^\circ \times t_1 \right) \Rightarrow \frac{b}{a} = \tan\left(\frac{\theta}{2} + 60^\circ \times t_1 \right) \Rightarrow \tan\alpha = \tan\left(\frac{\theta}{2} + 60^\circ \times t_1 \right)$$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\theta}{2} + 60^\circ \times t_1 + 180^\circ \times t_2$，其中 t_2 是整數，

推知

(1-1). $\sin\left[(6v-3)\left(\alpha - \frac{\theta}{2} \right) \right] = \sin\left[(6v-3)\left(\left(\frac{\theta}{2} + 60^\circ \times t_1 + 180^\circ \times t_2 \right) - \frac{\theta}{2} \right) \right]$

$= \sin\left[(6v-3)\left(60^\circ \times t_1 + 180^\circ \times t_2 \right) \right] = \sin\left[(2v-1)(t_1 + 3t_2) \times 180^\circ \right] = 0$

(1-2). $\sin\left[(6v-6)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]=\sin\left[(6v-6)\left(\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2\right)-\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$=\sin\left[(6v-6)(60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2)\right]=\sin\left[(2v-2)(t_1+3t_2)\times180^\circ\right]=0$

故得證當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq120^\circ$，$\theta\neq180^\circ$，$\theta\neq300^\circ$』時，$C_q=0$。

(2) 當『θ=60°』時，$C_q=0$。

理由如下：

(2-1). $\cos\left[(6v-3)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]=\cos\left[(6v-3)\left(\frac{60^\circ}{2}\right)\right]=\cos\left[(2v-1)\times90^\circ\right]=0$

(2-2). $\sin\left[(6v-6)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]=\sin\left[(6v-6)\left(\frac{60^\circ}{2}\right)\right]=\sin\left[(v-1)\times180^\circ\right]=0$

故得證當『θ=60°』時，$C_q=0$。

(3) 綜合上述(1)與(2)得知，

當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times \mathrm{t}_1\right)$，其中$\mathrm{t}_1$是整數且$\theta\neq120^\circ$，$\theta\neq180^\circ$，$\theta\neq300^\circ$』或『$\theta$=60°』時，

『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **仍會相等**』，故得證原命題成立。 □

接下來，我們開始去思考兩正方形所圍八邊形之交錯邊的三次方和是否會相等，經過努力發現答案是肯定的，詳述如下之『**定理 4**』。

定理 4：(兩全等正方形所圍八邊形之交錯邊的三次方和關係)

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 為兩個全等的正方形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_4B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$與$\overleftrightarrow{B_4B_1}$分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8 等八點，當八邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 未落在正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在線段 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在線段 $\overline{A_2A_3}$ 上、P_5 與 P_6 均落在線段 $\overline{A_3A_4}$ 上、P_7 與 P_8 均落在線段 $\overline{A_4A_1}$ 上，如下圖 T4-0-1 與圖 T4-0-2，則

$\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3=\overline{P_8P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3$ 。

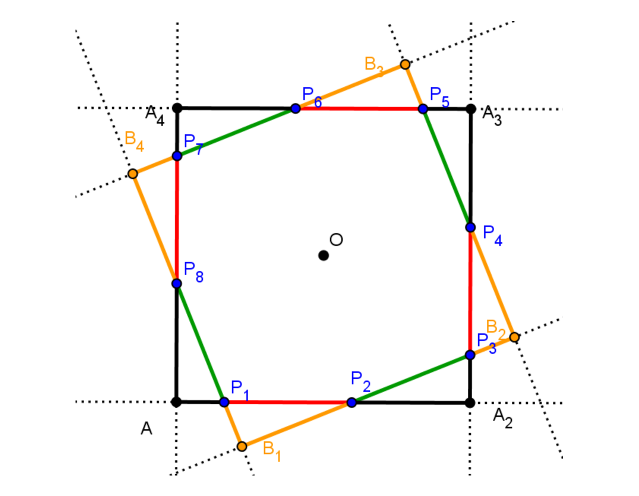


圖 T4-0-1

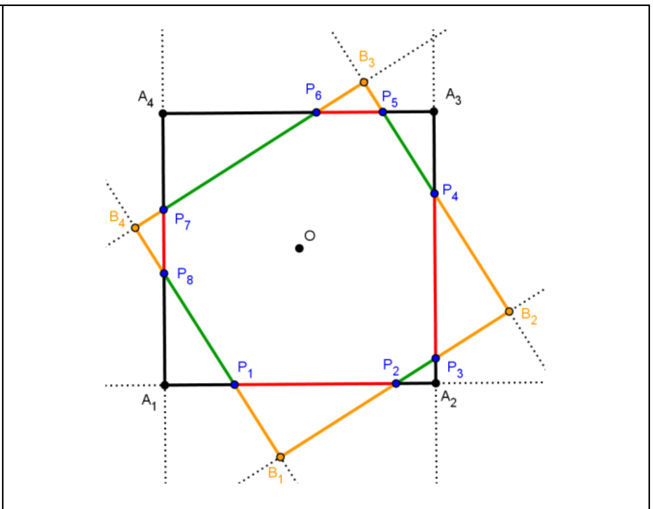


圖 T4-0-2

證明：分類討論，利用三角形相似性質，將八邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 之邊長轉換成與(a,b)及 θ 有關的式子，再將兩組線段的三次方和展開化簡，即可得證，證明過程詳見附錄。 □

接下來我們想考慮 $\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$ 與 $\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$ 是否會相等，其中 $m\geq 4$ 且 m 是正整數，詳述如下之『**定理 5**』。

定理 5：(兩全等正方形所圍八邊形之交錯邊的 m 次方和關係)

承『**定理 4**』之前提描述，又若 $m\geq 4$ 且 m 是正整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 乃由正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 平移向量 (a,b) （a 與 b 為實數)再繞著中心點 O 逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $m\geq 4$ 時，『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$ 與 $\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$ **不再維持恆等**』。

(3) 當 $m=4$ 與 $m=5$ 時，則

僅當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+45^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 90^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 270^\circ$』時，

『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$ 與 $\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$ **仍會相等**』。

(4) 當 $m\geq 6$ 時，則

當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+45^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 90^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 270^\circ$』時，

『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$ 與 $\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$ **仍會相等**』。

證明：仿照『**定理 3**』之證明方式可證明原命題成立。 □

在『**定理 4**』中，我們考慮了兩全等正方形之邊所在直線所圍八邊形之交錯邊的三次方和會相等，於此我們將『**定理 5**』的結果推廣到兩個全等正五邊形的情形，發現也有類似的結果，詳述如下『**定理 6**』。

定理 6：(兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊的三次方和關係)

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 為兩個全等的正五邊形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_5B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$與$\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$與$\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$與$\overleftrightarrow{B_5B_1}$分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8、P_9、P_{10} 等十點，當十邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}$ 未落在正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在 $\overline{A_2A_3}$ 上、P_5 與 P_6 均落在 $\overline{A_3A_4}$ 上、P_7 與 P_8 均落在 $\overline{A_4A_5}$ 上、P_9 與 P_{10} 均落在 $\overline{A_5A_1}$ 上，如下圖 T6-0-1 與 T6-0-2，則

$\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3+\overline{P_9P_{10}}^3=\overline{P_{10}P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3+\overline{P_8P_9}^3$。

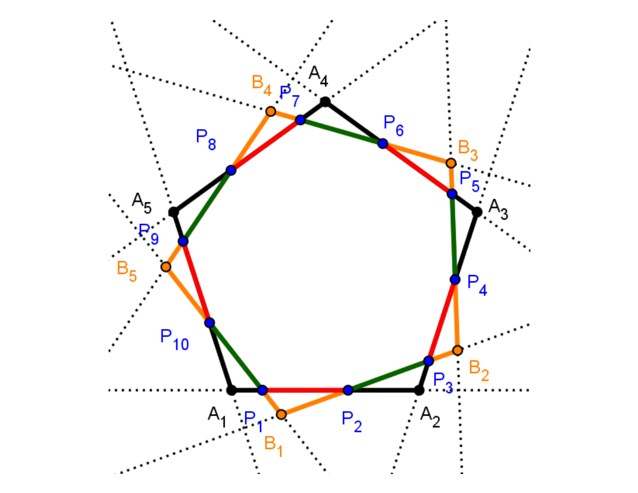


圖 T6-0-1

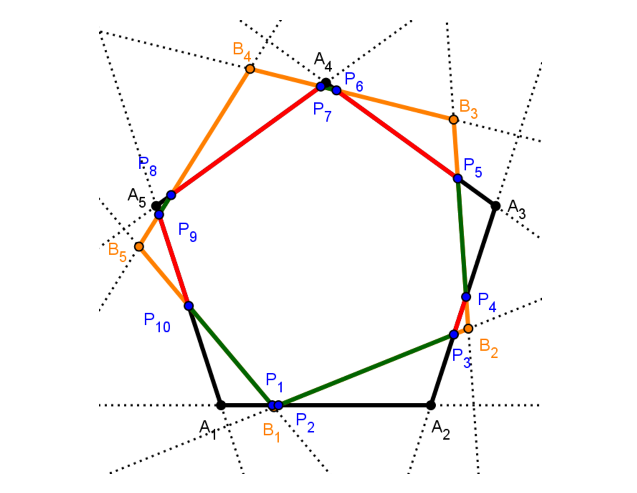


圖 T6-0-2

證明：類似『**定理 4**』之證明方式可證明原命題成立，證明過程詳見附錄。 □

定理 7：(兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊的四次方和關係)

承『**定理 6**』之前提描述，則

$\overline{P_1P_2}^4+\overline{P_3P_4}^4+\overline{P_5P_6}^4+\overline{P_7P_8}^4+\overline{P_9P_{10}}^4=\overline{P_{10}P_1}^4+\overline{P_2P_3}^4+\overline{P_4P_5}^4+\overline{P_6P_7}^4+\overline{P_8P_9}^4$。

證明：仿照『**定理 6**』之證明方式可證明原命題成立。 □

接下來想考慮 $\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$ 與 $\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$ 是否會相等，其中 $m\geq5$ 且 m 是正整數，詳述如下之『**定理 8**』。

定理 8：(兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊的 m 次方和關係)

承『**定理 6**』之前提描述，又若$m\geq 5$且m是正整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正五邊形$B_1B_2B_3B_4B_5$乃由正五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$平移向量(a,b) (a與b為實數)再繞著中心點O逆時針旋轉角度$\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$而得，為了方便起見，我們令$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即$\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當$m\geq 5$時，『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$ **與** $\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$ **不再維持恆等**』。

(3) 當$m=5$時，則**僅**當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+36^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq 72^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 252^\circ$』或『$\theta$=36°』或『$\theta$=108°』

時，『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$ **與** $\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$ **仍會相等**』。

(4) 當$m\geq 6$時，則當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+36^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq 72^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 252^\circ$』 或『$\theta$=36°』或『$\theta$=108°』

時，『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$ **與** $\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$ **仍會相等**』。

證明：仿照『**定理 3**』之證明方式可證明原命題成立。 □

從兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的二次方和與一次方和關係(**定理 1 與定理 2**)、兩全等正三角形之邊所在直線所圍六邊形之交錯邊的 **m** 次方和(**定理 3**)、兩全等正方形之邊所在直線所圍八邊形之交錯邊的 **m** 次方和(**定理 4 與定理 5**)與兩全等正五邊形之邊所在直線所圍十邊形之交錯邊的 **m** 次方和(**定理 6、定理 7 與定理 8**)的論證過程中，我們發現一些規律，並且找到了『**引理 1**』的一般化推論，如下『**定理 9**』所示：

定理 9：(兩全等正 **n** 邊形所圍 **2n** 邊形之交錯邊的 **m** 次方和關係)

已知平面上$A_1A_2\cdots A_n$與$B_1B_2\cdots B_n$為兩個全等的正$n\left(n\geq 3\right)$邊形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_nB_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、…、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$與$\overleftrightarrow{B_{n-1}B_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$與$\overleftrightarrow{B_nB_1}$分別相交於$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、…、$P_{2n-1}$、$P_{2n}$等$2n$點，當$2n$邊形$P_1P_2\cdots P_{2n}$**未落在**正$n$邊形$A_1A_2\cdots A_n$與正$n$邊形$B_1B_2\cdots B_{2n}$的外部時，亦即$P_1$與$P_2$均落在$\overline{A_1A_2}$上、$P_3$與$P_4$均落在$\overline{A_2A_3}$上、…、$P_{2n-3}$與$P_{2n-2}$均落在$\overline{A_{n-1}A_n}$上、$P_{2n-1}$與$P_{2n}$均落在$\overline{A_nA_1}$上；又若$m$是非負整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正n邊形$B_1B_2\cdots B_n$乃由正n邊形$A_1A_2\cdots A_n$平移向量(a,b) (a與b為實數)再繞著中心點O逆時針旋轉角度$\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$而得，為了方便起見，我們

令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $0\le m\le n-1$ 時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{\mathrm{m}}=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{\mathrm{m}}$ (於此，視 $P_{2n+1}=P_1$)。

(3) 當 $m\ge n$ 時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{\mathrm{m}}$ **與** $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{\mathrm{m}}$ **不再維持恆等**。

(4) 當 $m\ge n$ 時，則當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{180^\circ}{n}\times t_1\right)$, 其中$t_1$是整數 或 $\theta=\dfrac{180^\circ}{n}+\dfrac{360^\circ}{n}\times t_2$, 其中$t_2$是整數

且$\theta\ne\dfrac{360^\circ}{n}+180^\circ\times t_3$, 其中$t_3$是整數，$\theta\ne 180^\circ\times t_4$, 其中$t_4$是整數』

時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{\mathrm{m}}$ **與** $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{\mathrm{m}}$ **仍會相等**。

證明：類似『**定理 3**』之證明方式可證明原命題成立，證明過程詳見附錄。 □

經使用 Geogebra 軟體測試之後，我們發現『**引理 1**』中，當六邊形 $PQRSTU$ **有部分落在**兩個正三角形外部時，則交錯邊之一次方和不再總是相等，但是經過適當地調整各邊長的『正』與『負』，我們發現如下的結果，詳述如下之『**定理 10**』。

定理 10：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊的帶號一次方和關係)

承『**引理 1**』之前提描述，當六邊形 $PQRSTU$ **有部分落在**正三角形 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 的外部時，則(註：在此我們舉 2 種情形，還有其他 29 種在附錄裡的『**定理 10**』)

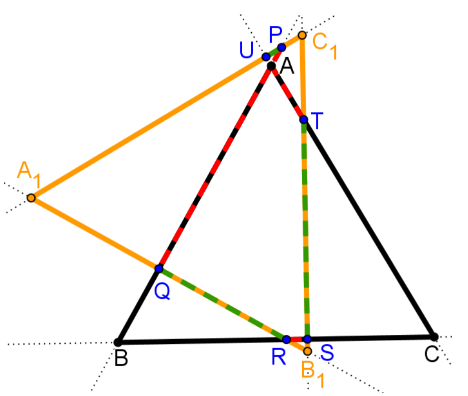


圖 T10-1-1

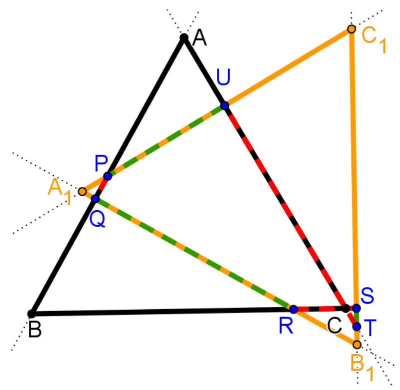


圖 T10-2-1

(1) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ **反方向**時，如上圖 T10-1-1 所示，則
$\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}+\overline{ST}-\overline{UP}$。

證明：類似『**定理 2**』之證明方式可證明原命題成立，證明過程詳見附錄。 □

(2) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如上圖 T10-2-1 所示，則

$\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

證明：類似『**定理 2**』之證明方式可證明原命題成立，證明過程詳見附錄。 □

為了方便本文後續內容之描述，我們定義<u>兩個向量的除法</u>如下之『**定義 1**』。

定義 1：

(1) 在空間中，若兩向量 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 的夾角為 $\theta(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$ 時，則我們定義 $\dfrac{\vec{v}}{\vec{u}}=\dfrac{|\vec{v}|\cos\theta}{|\vec{u}|}$ 。

(2) 承(1)，在空間中，若兩向量 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 同方向，則我們定義 $\dfrac{\vec{v}}{\vec{u}}=\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ 。 (此時 $\theta=0^\circ$)

(3) 承(1)，在空間中，若兩向量 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 反方向，則我們定義 $\dfrac{\vec{v}}{\vec{u}}=-\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ 。(此時 $\theta=180^\circ$)

□

我們發現『**定理 10**』中的 31 類情形與『**定理 2**』其實可以歸併為一個統一的結果，詳述如下之『**定理 11**』。

定理 11：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊所成有向線段比值的一次方和關係)

已知平面上 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 為兩個全等的正三角形，且$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$分別相交於 P 、Q 、R 、S 、T 、U 等六點，則

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{AB}}+\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{BC}}+\frac{\overrightarrow{TU}}{\overrightarrow{CA}}=\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{A_1B_1}}+\frac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{B_1C_1}}+\frac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}} 。$$

證明：由『**定義 1**』及利用『**定理 2**』與『**定理 10**』之結果可得證原命題成立。 □

接下來我們將『**定理 11**』推廣到 m 次方和的情形，其中 m 是非負整數，詳述如下之『**定理 12**』。

定理 12：(兩全等正三角形所圍六邊形之交錯邊所成有向線段比值的 m 次方和關係)

已知平面上 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 為兩個全等的正三角形，且 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$ 分別相交於 P、Q、R、S、T、U 等六點，又 m 是非負整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正 $\Delta A_1B_1C_1$ 乃由正 ΔABC 平移向量 (a,b) （a 與 b 為實數)再繞著重心 G 點逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $0\le m\le 2$ 時，『$\left(\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{AB}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{BC}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{TU}}{\overrightarrow{CA}}\right)^m$ **與** $\left(\dfrac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{A_1B_1}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{B_1C_1}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}}\right)^m$ **維持恆等』**。

(3) 當 $m\ge 3$ 時，『$\left(\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{AB}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{BC}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{TU}}{\overrightarrow{CA}}\right)^m$ **與** $\left(\dfrac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{A_1B_1}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{B_1C_1}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}}\right)^m$ **不再維持恆等』**。

(4) 當 $m\ge 3$ 時，則

當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 120^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 300^\circ$』 或 『$\theta=60^\circ$』時，

『$\left(\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{AB}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{BC}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{TU}}{\overrightarrow{CA}}\right)^m$ **與** $\left(\dfrac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{A_1B_1}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{B_1C_1}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}}\right)^m$ **仍會相等』**。

證明：我們依 m 為奇數或偶數分兩類情形討論，由『**定義 1**』，並將『**定理 3**』的證明步驟(v)得出的線段長代入，可證明原命題成立，證明過程詳見附錄。 □

接下來我們將『**定理 11**』推廣到兩個全等的正方形的 m 次方和情形，看看是否也有類似的結果，其中 m 是非負整數，詳述如下之『**定理 13**』。

定理 13：(兩全等正方形所圍八邊形之交錯邊所成有向線段比值的 m 次方和關係)

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 為兩個全等的正方形，且 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_4B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_4B_1}$ 分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8 等八點，又 m 是非負整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 乃由正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 平移向量 (a,b) （a 與

b 為實數)再繞著中心點 O 逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $0\le m\le 3$ 時，『$\left(\dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_1}}\right)^m$ **與** $\left(\dfrac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_8P_1}}{\overrightarrow{B_4B_1}}\right)^m$ **維持恆等』**。

(3) 當 $m\ge 4$ 時，『$\left(\dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_1}}\right)^m$ **與** $\left(\dfrac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_8P_1}}{\overrightarrow{B_4B_1}}\right)^m$ **不再維持恆等』**。

(4) 當 $m\ge 4$ 時，則

當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+45^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\ne 90^\circ$，$\theta\ne 180^\circ$，$\theta\ne 270^\circ$』時，

『$\left(\dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_1}}\right)^m$ **與** $\left(\dfrac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_8P_1}}{\overrightarrow{B_4B_1}}\right)^m$ **仍會相等』**。

證明：仿照『**定理 12**』之證明方式可證明原命題成立。 □

接下來我們將『**定理 11**』推廣到兩個全等的正五邊形的 m 次方和情形，看看是否也有類似的結果，其中 m 是非負整數，詳述如下之『**定理 14**』。

定理 14：(兩全等正五邊形所圍十邊形之交錯邊所成有向線段比值的 m 次方和關係)

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 為兩個全等的正五邊形，且 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_5B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_5B_1}$ 分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8、P_9、P_{10} 等十點，又 m 是非負整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 乃由正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 平移向量 (a,b) (a 與 b 為實數)再繞著中心點 O 逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，

我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $0\le m\le 4$ 時，『$\left(\dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_5}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_9P_{10}}}{\overrightarrow{A_5A_1}}\right)^m$ 與

$\left(\dfrac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_8P_9}}{\overrightarrow{B_4B_5}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_{10}P_1}}{\overrightarrow{B_5B_1}}\right)^m$ 維持恆等』。

(3) 當 $m\ge 5$ 時，『$\left(\dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_5}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_9P_{10}}}{\overrightarrow{A_5A_1}}\right)^m$ 與

$\left(\dfrac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_8P_9}}{\overrightarrow{B_4B_5}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_{10}P_1}}{\overrightarrow{B_5B_1}}\right)^m$ 不再維持恆等』。

(4) 當 $m\ge 5$ 時，則當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+36^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\ne 72^\circ$，$\theta\ne 180^\circ$，$\theta\ne 252^\circ$』 或『$\theta=36^\circ$』或『$\theta=108^\circ$』

時，『$\left(\dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_5}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_9P_{10}}}{\overrightarrow{A_5A_1}}\right)^m$ 與

$\left(\dfrac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_8P_9}}{\overrightarrow{B_4B_5}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{P_{10}P_1}}{\overrightarrow{B_5B_1}}\right)^m$ 仍會相等』。

證明：仿照『**定理 12**』之證明方式可證明原命題成立。 □

利用『**定義 1**』，再由『**定理 10**』、『**定理 11**』、『**定理 12**』、『**定理 13**』與『**定理 14**』，我們發現一些規律，並且找到了一般化的推論，如下『**定理 15**』所示。

定理 15：(兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊所成有向線段比值的 m 次方和關係)

已知平面上 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 為兩個全等的正 $n\,(n\ge 3)$ 邊形，且 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_{n-1}B_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$ 分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、⋯、P_{2n-1}、P_{2n} 等 $2n$ 點；又若 m 是非負整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 乃由正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 平移向量 (a,b) (a 與 b 為實數)再繞著中心點 O 逆時針旋轉角度 $\theta\,(0^\circ<\theta<360^\circ)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $0 \le m \le n-1$ 時，$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}}{\overrightarrow{A_kA_{k+1}}}\right)^m = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}}{\overrightarrow{B_kB_{k+1}}}\right)^m$ (於此，視 $A_{n+1}=A_1$、$B_{n+1}=B_1$、$P_{2n+1}=P_1$)。

(3) 當 $m \ge n$ 時，$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}}{\overrightarrow{A_kA_{k+1}}}\right)^m$ 與 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}}{\overrightarrow{B_kB_{k+1}}}\right)^m$ 不再維持恆等。

(4) 當 $m \ge n$ 時，則當

『 $b = a\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數 或 $\theta = \frac{180^\circ}{n}+\frac{360^\circ}{n}\times t_2$，其中 t_2 是整數

且 $\theta \ne \frac{360^\circ}{n}+180^\circ\times t_3$，其中 t_3 是整數，$\theta \ne 180^\circ \times t_4$，其中 t_4 是整數』

時，$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}}{\overrightarrow{A_kA_{k+1}}}\right)^m$ 與 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}}{\overrightarrow{B_kB_{k+1}}}\right)^m$ 仍會相等。

證明：仿照『**定理 12**』之證明方式可證明原命題成立。 □

伍、 實例 —『實數版本的等冪和問題之解』

利用本文，我們找出了一些正 n 邊形所圍 $2n$ 邊形的兩組線段長的實際例子，如下所示：

(1) 正三角形

(1-1)當 $\theta = 45^\circ, (a,b) = (0.5, 0.5), \alpha = 45^\circ, r = 1$ 時，則兩組線段為

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{5-2\sqrt{3}}{2}\right) \text{與} \left(1, \frac{2-3\sqrt{1.5}+3\sqrt{0.5}}{2}, \frac{2+3\sqrt{1.5}-3\sqrt{0.5}}{2}\right)$$

$\Rightarrow$(1 個整數，5 個無理數)

(1-2)當 $\theta = 30^\circ, (a,b) = (\sqrt{3}, 3), \alpha = 60^\circ, r = 10$ 時，則兩組線段為

$$\left(10-3\sqrt{3}, 10+3\sqrt{3}, 10\right) \text{與} \left(13, 4, 13\right)$$

$\Rightarrow$(4 個整數，2 個無理數)

(2) 正方形

(2-1)當 $\theta = 30^\circ, (a,b) = (\sqrt{3}, 3), \alpha = 60^\circ, r = 10$ 時，則兩組線段為

$$\left(10-4\sqrt{3}, 14, 10+4\sqrt{3}, 6\right) \text{與} \left(14, 10-4\sqrt{3}, 6, 10+4\sqrt{3}\right)$$

$\Rightarrow$兩組線段一樣

(2-2)當 $\theta=45^{\circ},(a,b)=(\sqrt{3},1),\alpha=30^{\circ},r=10$ 時，則兩組線段為

$$\left(10-2\sqrt{2},10+2\sqrt{2},10+2\sqrt{2},10-2\sqrt{2}\right)$$ 與

$$\left(10-\sqrt{6}+\sqrt{2},10-\sqrt{6}-\sqrt{2},10+\sqrt{6}-\sqrt{2},10+\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

$\Rightarrow$(0 個整數，4 個無理數)

(2-3)當 $\theta=45^{\circ},(a,b)=(\sqrt{3},3),\alpha=60^{\circ},r=20$ 時，則兩組線段為

$$\left(14,20+2\sqrt{3},26,20-2\sqrt{3}\right)$$ 與

$$\left(20+3\sqrt{2}-\sqrt{6},20-3\sqrt{2}-\sqrt{6},20-3\sqrt{2}+\sqrt{6},20+3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$$

$\Rightarrow$(2 個整數，6 個無理數)

(2-4) $\theta=45^{\circ},(a,b)=(1,1),\alpha=45^{\circ},r=10$ 時，則兩組線段為

$$(8,12,12,8)$$ 與 $$\left(10,10-2\sqrt{2},10,10+2\sqrt{2}\right)$$

$\Rightarrow$(6 個整數，2 個無理數)

(3) 正六邊形

(3-1)當 $\theta=30^{\circ},(a,b)=(\sqrt{3},3),\alpha=60^{\circ},r=20$ 時，則兩組線段為

$$\left(20-6\sqrt{3},20,20+6\sqrt{3},20+6\sqrt{3},20,20-6\sqrt{3}\right)$$ 與 $$(26,14,8,14,16,32)$$

$\Rightarrow$(8 個整數，4 個無理數)

(4) 正八邊形

(4-1)當 $\theta=90^{\circ},(a,b)=(\sqrt{3},1),\alpha=30^{\circ},r=20$ 時，則兩組線段為

$$\left(21,\frac{40-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},20-\sqrt{3},\frac{40-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}19,\frac{40+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},20+\sqrt{3},\frac{40+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$$ 與

$$\left(20+\sqrt{3},\frac{40+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},21,\frac{40-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},20-\sqrt{3},\frac{40-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},19,\frac{40+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\Rightarrow$兩組線段一樣

(4-2)當 $\theta=30^{\circ},(a,b)=(1,1),\alpha=45^{\circ},r=20$ ，則兩組線段為

$$\left(18-2\sqrt{3},20,22+2\sqrt{3},20+2\sqrt{6}+2\sqrt{2},22+2\sqrt{3},20,18-2\sqrt{3},20-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)$$ 與

$\left(22,20-\sqrt{6}-\sqrt{2},16-4\sqrt{3},20-3\sqrt{2}-\sqrt{6},18,20+\sqrt{6}+\sqrt{2},24+4\sqrt{3},20+3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$

$\Rightarrow$(4 個整數，14 個無理數)

(5) 正十二邊形

(5-1)當 $\theta=60^\circ,(a,b)=\left(\sqrt{3},3\right),\alpha=60^\circ,r=20$ 時，則兩組線段為

$\left(20+2\sqrt{3},22,20,18,20-2\sqrt{3},16,20-2\sqrt{3},18,20,22,20+2\sqrt{3},24\right)$ 與

$\left(20,22,20+2\sqrt{3},24,20+2\sqrt{3},22,20,18,20-2\sqrt{3},16,20-2\sqrt{3},18\right)$

$\Rightarrow$兩組線段一樣

(5-2)當 $\theta=30^\circ,(a,b)=(1,1),\alpha=45^\circ,r=20$ ，則兩組線段為

$\left(21+\sqrt{3},21,19,19-\sqrt{3},18-\sqrt{3},18-\sqrt{3},19-\sqrt{3},19,21,21+\sqrt{3},22+\sqrt{3},22+\sqrt{3}\right)$ 與

$$\left(\begin{array}{l}20,\dfrac{40+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\dfrac{40+\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2},20+\sqrt{6}+\sqrt{2},\dfrac{40+\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2},\dfrac{40+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},20\\,\dfrac{40-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\dfrac{40-\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2},20-\sqrt{6}-\sqrt{2},\dfrac{40-\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2},\dfrac{40-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$(6 個整數，18 個無理數)

(6) 正二十四邊形

(6-1)當 $\theta=30^\circ,(a,b)=\left(\sqrt{3},1\right),\alpha=30^\circ,r=20$ 時，則兩組線段為

$$\left(\begin{array}{l}22,20+\sqrt{6}-\sqrt{2},20,20-\sqrt{6}+\sqrt{2},18,20-2\sqrt{2},20-2\sqrt{3},20-\sqrt{6}-\sqrt{2},16\\,20-\sqrt{6}-\sqrt{2},20-2\sqrt{3},20-2\sqrt{2},18,20-\sqrt{6}+\sqrt{2},20,20+\sqrt{6}-\sqrt{2},22\\,20+2\sqrt{2},20+2\sqrt{3},20+\sqrt{6}+\sqrt{2},24,20+\sqrt{6}+\sqrt{2},20+2\sqrt{3},20+2\sqrt{2}\end{array}\right)$$ 與

$$\left(\begin{array}{l}20,20+\sqrt{6}-\sqrt{2},20+2\sqrt{2},22,20+2\sqrt{3},20+\sqrt{6}+\sqrt{2},24,20+\sqrt{6}+\sqrt{2}\\,20+2\sqrt{3},20+2\sqrt{2},22,20+\sqrt{6}-\sqrt{2},20,20-\sqrt{6}+\sqrt{2},18,20-2\sqrt{2}\\,20-2\sqrt{3},20-\sqrt{6}-\sqrt{2},16,20-\sqrt{6}-\sqrt{2},20-2\sqrt{3},20-2\sqrt{2},18,20-\sqrt{6}+\sqrt{2}\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$兩組線段一樣

(7) 正三十六邊形

(7-1)當 $\theta=45^\circ,(a,b)=(1,1),\alpha=45^\circ,r=20$ 時，則兩組線段為

$$\left(\begin{array}{l}
20+\frac{\sqrt{2}\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ},20+2\sin 10^\circ,20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 25^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{\sin 10^\circ\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 5^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 5^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{\sin 10^\circ\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 25^\circ}{\sin 35^\circ},20-2\sin 10^\circ,20-\frac{\sqrt{2}\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 55^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 65^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{\sin 10^\circ\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 85^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 85^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{\sin 10^\circ\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 65^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 55^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20-\frac{\sqrt{2}\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ},20-2\sin 10^\circ,20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 25^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{\sin 10^\circ\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 5^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 5^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{\sin 10^\circ\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 25^\circ}{\sin 35^\circ},20+2\sin 10^\circ 20+\frac{\sqrt{2}\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 55^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 65^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{\sin 10^\circ\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 85^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 85^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{\sin 10^\circ\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 65^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 55^\circ}{\sin 35^\circ}
\end{array}\right)$$

與

$$\left(\begin{array}{l}
20,20+\frac{2\sin^2 10^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 20^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 40^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 50^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20+\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 80^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 80^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 50^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 40^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20+\frac{2\sin 10^\circ\sin 20^\circ}{\sin 35^\circ},20+\frac{2\sin^2 10^\circ}{\sin 35^\circ},20,20-\frac{2\sin^2 10^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 20^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 40^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 50^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 80^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 80^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ}\\
,20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 50^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 40^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{\sin 10^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin 10^\circ\sin 20^\circ}{\sin 35^\circ},20-\frac{2\sin^2 10^\circ}{\sin 35^\circ}
\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$(2 個整數，70 個無理數)

陸、 討論與應用

本文成功地將『**引理 1**』推廣到一次方和，再將『**引理 1**』中的正三角形換成正方形與正五邊形，都發現會有類似的結果。此外，我們也考慮正n邊形的兩組線段的一次方和與二次方和的情形，並且從正三角形、正方形與正五邊形的證明過程發現如下的規則：『當$0 \le m \le n-1$時，兩正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的m次

方和會相等；而當$m \ge n$時，雖然兩正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的m次方和不再維持恆等，但在滿足特定的條件下，還是有機會相等的。』除此之外，我們也討論了兩組線段的**帶號一次方和**的恆等關係，共歸納得到32類結果，值得注意的是這32類情形中只有26類的等式會成立，有6類情形之圖形不存在；最後，我們將『**引理1**』推廣到**有向線段比值之m次方和**的情形，**並容許兩全等正n邊形所圍$2n$邊形得有部分落在兩正n邊形外部**，我們發現也有和**線段之m次方和**的情形類似的規則，或者說後者其實是前者的特例，如此便更清楚地看見『**引理1**』的一般化面貌。

在應用上，我們發現我們的結果似乎與數論上的『等冪和問題』(Prouhet– Tarry–Escott problem)有一些相關性，詳見參考資料[6]，『等冪和問題』描述如下：

給定一個正整數k，找兩組不全然相等的整數，每一組整數各有n個，使得兩組整數的一次方和相等、二次方和相等、三次方和相等、…、k次方和相等。

該問題在1850年代先是由Eugène Prouhet投入研究，後來在1910年代則有Gaston Tarry和Escott投入該問題之研究，目前該問題還未找到一般化的通解，截至目前為止已找到解的最大n值為12與最大k值為11，且兩組整數分別為

$A=\{\pm22,\pm61,\pm86,\pm127,\pm140,\pm151\}$與$B=\{\pm35,\pm47,\pm94,\pm121,\pm146,\pm148\}$。

而我們這篇文章前半部的結果似乎是實數版本的『等冪和問題』，後半部的結果則似乎變成廣度更大的有向線段比值版本的『等冪和問題』，我們在想如果可以適當地調整我們的正n邊形之邊長、旋轉的角度θ與平移的向量(a,b)，或許有機會使得兩個正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形$P_1P_2\cdots P_{2n}$之各邊均恰為整數，如此一來便能成功地解決這懸宕一百多年的數學難題—『等冪和問題』，只是可不可以達成，還需要再試試看才知道，希望我們真得可以在不久的將來找到一條通往解答的秘徑。

本文除了與『等冪和問題』有著相關性之外，我們其實可以將之適當地調整並將之應用在密碼系統上，我們的想法如下：

假設部隊P要傳訊息給友軍部隊Q，但是中間會有敵軍部隊R試著攔截訊息，為了讓P可以順利地將訊息傳遞給Q，且不讓R攔截到，或縱使讓R攔截到，R亦無法在短時間內解譯，舉例來說，我們可以這樣做：

步驟1： P先選一組六元數組(n,a,b,θ,r,t)，然後先將五元整數組(n,a,b,θ,r)做較簡單的平移加密，例如：

$$(n,a,b,\theta,r)\xrightarrow{\text{平移加密}}(n+t,a+t,b+t,\theta+t,r+t)\xrightarrow{\text{得出}}(n_1,a_1,b_1,\theta_1,r_1)$$

P再將六元數組$(n_1,a_1,b_1,\theta_1,r_1,t)$傳送出去給Q。

步驟2： Q接收到訊息$(n_1,a_1,b_1,\theta_1,r_1,t)$之後，再先將$(n_1,a_1,b_1,\theta_1,r_1)$解譯，亦即

$$(n_1,a_1,b_1,\theta_1,r_1)\xrightarrow{\text{平移解密}}(n-t,a-t,b-t,\theta-t,r-t)\xrightarrow{\text{得出}}(n,a,b,\theta,r)$$

步驟3： Q解譯出五元整數組(n,a,b,θ,r)後，再將n、a、b、θ、r之值分別輸入軟體計算，其中n表示正多邊形的邊數、(a,b)表示平移的向量、θ表示旋轉的角度、r表示正多邊形的邊長，輸入之後可以得到兩正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之奇數邊與偶數邊的兩組有向線段比值，如果n是奇數，則以奇數邊的n個有向線段比值當作開啟檔案的密碼金鑰，如果n是偶數，則以偶數邊的n個有向線段比值當作開啟檔

案的密碼金鑰。(附註：由於我們可以將 n 的值取得很大，這樣開啟檔案用的那一組金鑰的有向線段比值所成的數串就會是很長的一串數字，不容易被記憶與破解，這樣的金鑰安全性是很高的。總之，它可以運用在銀行的密碼金鑰系統上，是很棒的一個與生活結合的應用。)

柒、 結論與展望

本文中所討論的兩個正n邊形均為**『全等』**之情形，展望未來，我們希望考慮兩個**『相似』**正n邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊所成線段與有向線段比值的m次方和是否依舊會保持相等，或者存在某一特定關係；更甚者，我們將考慮兩任意多邊形是否也存在類似的結果，企盼不久的未來，我們可以有美麗的新發現。

捌、 參考資料

[1]. 初中數學競賽教程，第 156 頁，嚴鎮軍主編，余紅兵、劉亞強編著，九章出版社，2011 年 1 月。

[2]. 正餘弦函數的 n 次方公式與 n 倍角公式，https://baike.baidu.com/item/倍角公式。

[3]. 正弦函數與餘弦函數的 n 倍角公式(pdf 檔中的第 15 頁)，

http://www.math.ntu.edu.tw/~hchu/Calculus/Calculus%5B104%5D-01.pdf。

[4]. 地板函數(高斯函數)與天花板函數的定義(pdf 檔中的第 8 頁)，http://www.math.ntu.edu.tw/~hchu/Calculus/Calculus%5B104%5D-01.pdf。

[5]. 組合數計算公式，https://zh.wikipedia.org/zh-tw/組合。

[6]. 等冪和問題，https://zh.wikipedia.org/zh-tw/等冪和問題。

玖、 附錄

引理 2 之證明

承『**引理 1**』之前提描述，但是六邊形 $PQRSTU$ 有部分落在正三角形 ABC 與正三角形 $A_1B_1C_1$ 的外部時，如圖 L2-1 所示，則 $\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2$ 。

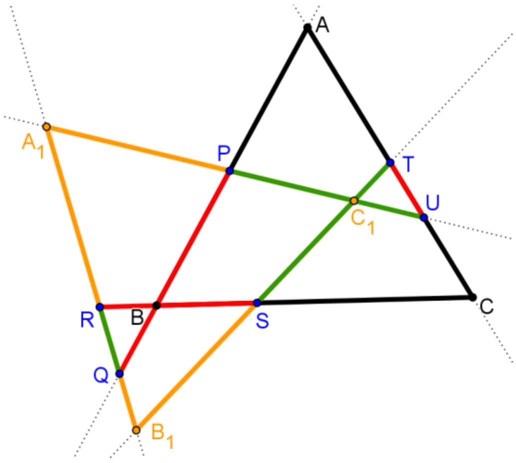


圖 L2-1

證明：

(i) 仿照『**引理一**』之證明步驟(i)與(ii)可得 $\dfrac{S_1+S_2+S_3}{S_1'+S_2'+S_3'}=\dfrac{\overline{UP}^2+\overline{QR}^2+\overline{ST}^2}{\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2}$

(ii) 如圖 L2-1 所示，

$(S_1'+S_2'+S_3')-(S_1+S_2+S_3)$

$=\left[(\Delta A_1PQ\text{面積})+(\Delta B_1RS\text{面積})+(\Delta C_1TU\text{面積})\right]-\left[(\Delta AUP\text{面積})+(\Delta BQR\text{面積})+(\Delta CST\text{面積})\right]$

$=\left[\left((A_1PBR\text{面積})+(\Delta BQR\text{面積})\right)+\left((\Delta B_1RS\text{面積})+(\Delta C_1TU\text{面積})\right)\right]$

$-\left[\left((APC_1T\text{面積})+(\Delta C_1TU\text{面積})\right)+\left((\Delta BQR\text{面積})+(\Delta CST\text{面積})\right)\right]$

$=\left[(\Delta A_1B_1C_1\text{面積})-(PBSC_1\text{面積})\right]-\left[(\Delta ABC\text{面積})-(PBSC_1\text{面積})\right]=0$

推知 $(S_1+S_2+S_3)=(S_1'+S_2'+S_3')$ ，所以 $\dfrac{S_1+S_2+S_3}{S_1'+S_2'+S_3'}=1$ ，故 $\dfrac{\overline{UP}^2+\overline{QR}^2+\overline{ST}^2}{\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2}=1$

，亦即 $\overline{PQ}^2+\overline{RS}^2+\overline{TU}^2=\overline{QR}^2+\overline{ST}^2+\overline{UP}^2$

，故得證原命題成立。 □

我們嘗試將『**引理 1**』與『**引理 2**』之結論合併並推廣到正 n 邊形，如下之『**定理 1**』。

定理 1 之證明

已知平面上 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 為兩個全等的正 n 邊形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_nB_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、…、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$與$\overleftrightarrow{B_{n-1}B_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$與$\overleftrightarrow{B_nB_1}$分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、…、P_{2n-1}、P_{2n} 等 $2n$ 點，如圖 T1-1 與圖 T1-2，則 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^2$ (於此，視 $P_{2n+1}=P_1$)。

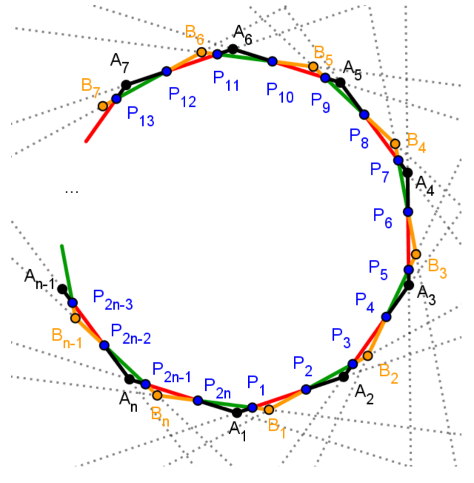


圖 T1-1

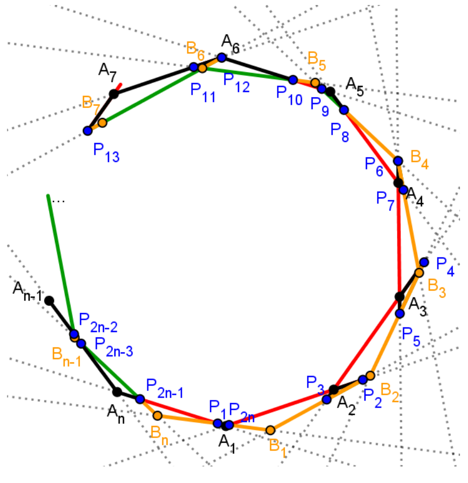


圖 T1-2

證明：

(i) $\because \angle P_{2n}A_1P_1=\angle P_1B_1P_2$ 且 $\angle A_1P_1P_{2n}=\angle B_1P_1P_2$，$\therefore \Delta A_1P_1P_{2n}\sim\Delta B_1P_1P_2$ (AA相似)；

同理可得 $\Delta B_1P_1P_2\sim\Delta A_2P_3P_2$，$\Delta A_2P_3P_2\sim\Delta B_2P_3P_4$，…，$\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}\sim\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$，$\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}\sim\Delta A_1P_1P_{2n}$

，故 $\Delta A_1P_1P_{2n}\sim\Delta B_1P_1P_2\sim\Delta A_2P_3P_2\sim\Delta B_2P_3P_4\sim\cdots\sim\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}\sim\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$ 。

(ii) 為了方便起見，我們分別以 S_1、S_1'、S_2、S_2'、S_3、S_3'、…、S_n、S_n' 表示 $\Delta A_1P_1P_{2n}$、$\Delta B_1P_1P_2$、$\Delta A_2P_3P_2$、$\Delta B_2P_3P_4$、$\Delta A_3P_5P_4$、$\Delta B_3P_5P_6$、…、$\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}$、$\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$ 等 2n 個三角形的面積，則

$\dfrac{S_1'}{S_1}=\dfrac{\overline{P_1P_2}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}$，$\dfrac{S_2'}{S_1}=\dfrac{\overline{P_3P_4}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}$，$\dfrac{S_3'}{S_1}=\dfrac{\overline{P_5P_6}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}$，…，$\dfrac{S_n'}{S_1}=\dfrac{\overline{P_{2n-1}P_{2n}}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}$，$n$ 個等式相加得

$$\frac{S_1'+S_2'+S_3'+\cdots+S_n'}{S_1}=\frac{\overline{P_1P_2}^2+\overline{P_3P_4}^2+\overline{P_5P_6}^2+\cdots+\overline{P_{2n-1}P_{2n}}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}\Rightarrow\frac{\sum_{k=1}^{n}S_k'}{S_1}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}{\overline{P_{2n}P_1}^2}\Rightarrow\frac{S_1}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}=\frac{\overline{P_{2n}P_1}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}\cdots①；$$

同理可得，

$$\frac{S_2}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}=\frac{\overline{P_2P_3}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}\cdots②；\quad\frac{S_3}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}=\frac{\overline{P_4P_5}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}\cdots③；\quad\cdots\quad\frac{S_n}{\sum_{k=1}^{n}S_k'}=\frac{\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}\cdots ⓝ；$$

由①+②+③+⋯+ⓝ得

$$\frac{S_1}{\sum_{k=1}^{n}S'_k}+\frac{S_2}{\sum_{k=1}^{n}S'_k}+\frac{S_3}{\sum_{k=1}^{n}S'_k}+\cdots+\frac{S_n}{\sum_{k=1}^{n}S'_k}=\frac{\overline{P_{2n}P_1}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}+\frac{\overline{P_2P_3}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}+\frac{\overline{P_4P_5}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}+\cdots+\frac{\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\sum_{k=1}^{n}S_k}{\sum_{k=1}^{n}S_k{}'}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}$$

(iii) 又$\sum_{k=1}^{n}S'_k=(B_1B_2B_3\cdots B_n\text{面積})-(P_1P_2P_3\cdots P_{2n}\text{面積})=(A_1A_2A_3\cdots A_n\text{面積})-(P_1P_2P_3\cdots P_{2n}\text{面積})=\sum_{k=1}^{n}S_k$

推知$\frac{\sum_{k=1}^{n}S_k}{\sum_{k=1}^{n}S'_k}=1$，所以$\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^2}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2}=1$，亦即$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^2=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^2$

，故得證原命題成立。 □

經使用 Geogebra 軟體測試之後，我們發現『**引理 1**』中，當六邊形 *PQRSTU* 未落在兩個正三角形外部時，則其交錯邊之一次方和亦相等，我們亦嘗試了正方形的情形，發現結果亦然，於是我們將之推廣到正 n 邊形，結果詳述如下之『**定理 2**』。

定理 2 之證明

承『**定理 1**』之前提描述，當$2n$邊形$P_1P_2\cdots P_{2n}$未落在n邊形$A_1A_2\cdots A_n$與$B_1B_2\cdots B_n$的外部時，亦即P_1與P_2均落在線段$\overline{A_1A_2}$上、P_3與P_4均落在線段$\overline{A_2A_3}$上、P_5與P_6均落在線段$\overline{A_3A_4}$上、$\cdots$、P_{2n-1}與P_{2n}均落在線段$\overline{A_nA_1}$上，如圖 T1-1 所示，則$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}$ (於此，視$P_{2n+1}=P_1$)。

證明：

(i) $\because\angle P_{2n}A_1P_1=\angle P_1B_1P_2$且$\angle A_1P_1P_{2n}=\angle B_1P_1P_2$，$\therefore\Delta A_1P_1P_{2n}\sim\Delta B_1P_1P_2$ $(AA\text{相似})$；

同理可得$\Delta B_1P_1P_2\sim\Delta A_2P_3P_2$，$\Delta A_2P_3P_2\sim\Delta B_2P_3P_4$，$\cdots$， $\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}\sim\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$，$\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}\sim\Delta A_1P_1P_{2n}$

，故$\Delta A_1P_1P_{2n}\sim\Delta B_1P_1P_2\sim\Delta A_2P_3P_2\sim\Delta B_2P_3P_4\sim\cdots\sim\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}\sim\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$。

(ii) 為了方便起見，我們分別以l_1、l'_1、l_2、l'_2、l_3、l'_3、$\cdots$、l_n、l'_n表示$\Delta A_1P_1P_{2n}$、$\Delta B_1P_1P_2$、$\Delta A_2P_3P_2$、$\Delta B_2P_3P_4$、$\Delta A_3P_5P_4$、$\Delta B_3P_5P_6$、$\cdots$、$\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}$、$\Delta B_nP_{2n-1}P_{2n}$等 2n 個三角形的周長，則

$\frac{l'_1}{l_1}=\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_{2n}P_1}}$，$\frac{l'_2}{l_1}=\frac{\overline{P_3P_4}}{\overline{P_{2n}P_1}}$，$\frac{l'_3}{l_1}=\frac{\overline{P_5P_6}}{\overline{P_{2n}P_1}}$，$\cdots$，$\frac{l'_n}{l_1}=\frac{\overline{P_{2n-1}P_{2n}}}{\overline{P_{2n}P_1}}$，將此 n 個等式相加得

$$\frac{l_1'+l_2'+l_3'+\cdots+l_n'}{l_1}=\frac{\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\cdots+\overline{P_{2n-1}P_{2n}}}{\overline{P_{2n}P_1}}\Rightarrow\frac{\sum_{k=1}^{n}l_k'}{l_1}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}{\overline{P_{2n}P_1}}\Rightarrow\frac{l_1}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\overline{P_{2n}P_1}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}\cdots ①\ ;$$

同理可得，

$$\frac{l_2}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\overline{P_2P_3}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}\cdots ②\ ;\quad \frac{l_3}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\overline{P_4P_5}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}\cdots ③\ ;\quad\cdots\quad \frac{l_n}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}\cdots ⓝ\ ;$$

由①+②+③+⋯+ⓝ得

$$\frac{l_1}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}+\frac{l_2}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}+\frac{l_3}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}+\cdots+\frac{l_n}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\overline{P_{2n}P_1}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}+\frac{\overline{P_2P_3}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}+\frac{\overline{P_4P_5}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}+\cdots+\frac{\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}\Rightarrow\frac{\sum_{k=1}^{n}l_k}{\sum_{k=1}^{n}l_k'}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}}{\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}$$

(iii) 令 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}=m$ ， $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}=m'$

，且假設 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 與 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 之周長分別為 L 與 L' ，則

$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n=L+m-m'$ ， $l_1'+l_2'+l_3'+\cdots+l_n'=L'+m'-m$

$$\Rightarrow\frac{l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n}{l_1'+l_2'+l_3'+\cdots+l_n'}=\frac{L+m-m'}{L'+m'-m}\Rightarrow\frac{m}{m'}=\frac{L+m-m'}{L'+m'-m}\text{ 又}\because L=L'\text{ ，}\frac{m}{m'}=\frac{L+m-m'}{L+m'-m}$$

$mL+mm'-m^2=m'L+mm'-m'^2\Rightarrow mL-m^2-m'L+m'^2=0\Rightarrow L(m-m')-(m^2-m'^2)=0$

$L(m-m')-(m+m')(m-m')=0\Rightarrow(m-m')(L-m-m')=0$

$m=m'$ or $L=m+m'$

(iv) 我們想證明 $L>m+m'$

在 $\Delta A_1P_{2n}P_1$ 中， $\overline{A_1P_{2n}}+\overline{A_1P_1}>\overline{P_{2n}P_1}$ ；在 $\Delta A_2P_3P_2$ 中， $\overline{A_2P_2}+\overline{A_2P_3}>\overline{P_2P_3}$ ；

在 $\Delta A_3P_5P_4$ 中， $\overline{A_3P_4}+\overline{A_3P_5}>\overline{P_4P_5}$ ；⋯在 $\Delta A_nP_{2n-1}P_{2n-2}$ 中， $\overline{A_nP_{2n-2}}+\overline{A_nP_{2n-1}}>\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}$ ；

將 n 個不等式相加得

$$\overline{A_1P_{2n}}+\overline{A_1P_1}+\overline{A_2P_2}+\overline{A_2P_3}+\overline{A_3P_4}+\overline{A_3P_5}+\cdots+\overline{A_nP_{2n-2}}+\overline{A_nP_{2n-1}}>\overline{P_{2n}P_1}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}+\cdots+\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}$$

$$\Rightarrow\overline{A_1P_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{A_2P_2}+\overline{A_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\overline{A_3P_4}+\overline{A_3P_5}+\overline{P_5P_6}+\cdots+\overline{A_nP_{2n-2}}+\overline{A_nP_{2n-1}}+\overline{P_{2n-1}P_{2n}}+\overline{A_1P_{2n}}$$

$$>\overline{P_{2n}P_1}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}+\cdots+\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\cdots+\overline{P_{2n-1}P_{2n}}$$

$\Rightarrow L>m+m'$

，故得證原命題成立。 □

承『**引理 1**』之前提描述，接下來我們想考慮$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$與$\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$是否會相等，其中$m\geq 3$且$m$是正整數，詳述如下之『**定理 3**』。

定理 3 之證明

已知平面上ΔABC與$\Delta A_1B_1C_1$為兩個全等的正三角形，且$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$分別相交於$P$、$Q$、$R$、$S$、$T$、$U$等六點，且六邊形$PQRSTU$未落在正三角形$ABC$與正三角形$A_1B_1C_1$的外部時，又若$m\geq 3$且$m$是正整數，則如下圖 T3-1，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正$\Delta A_1B_1C_1$乃由正ΔABC平移向量(a,b) (a與b為實數)再繞著重心G點逆時針旋轉角度$\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$而得，為了方便起見，我們令$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即$\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當$m\geq 3$時，『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **不再維持恆等**』。

(3) 當$m=3$、$m=4$與$m=5$時，則

僅當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq 120^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 300^\circ$』 或 『$\theta=60^\circ$』時，『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **仍會相等**』。

(4) 當$m\geq 6$時，則

當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq 120^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 300^\circ$』 或 『$\theta=60^\circ$』時，

『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **仍會相等**』。

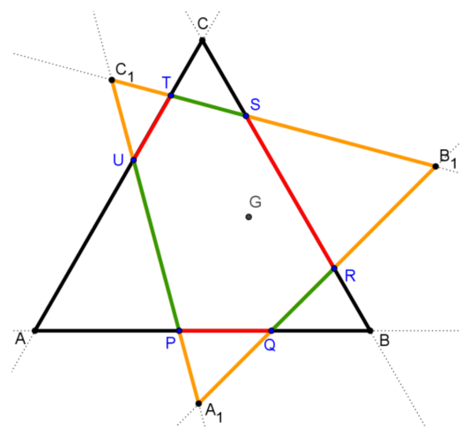


圖 T3-1

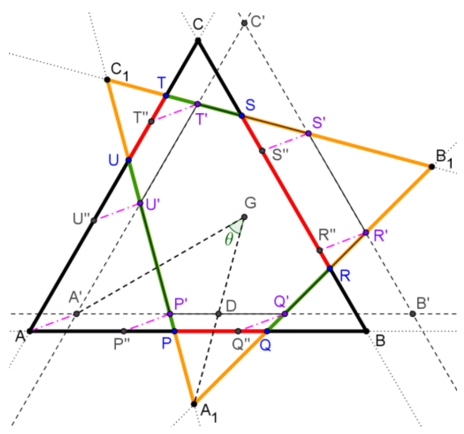


圖 T3-2

證明：設正$\Delta A_1B_1C_1$之重心為G，則

(i) 在不失一般性下，我們可以假設正$\Delta A_1B_1C_1$乃由正ΔABC平移向量(a,b) (a與b為實數)再繞著G點逆時針旋轉角度$\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$而得，於此我們僅考慮$a$與$b$均為正數之情形，如上圖 T3-2 所示。我們假設正ΔABC平移向量(a,b)後可得正$\Delta A'B'C'$，所以由前述可知G點同為正$\Delta A'B'C'$之重心。為了方便起見，我們令$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即$\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(ii) ①為了方便起見，我們假設$\overleftrightarrow{A'B'}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{A'B'}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$與$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{B'C'}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{C'A'}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{C'A'}$與$\overleftrightarrow{C_1A_1}$分別相交於$P'$、$Q'$、$R'$、$S'$、$T'$、$U'$等六點，如上圖 T3-2 所示；

②再假設$P''=P'-(a,b)$、$Q''=Q'-(a,b)$、$R''=R'-(a,b)$、$S''=S'-(a,b)$、$T''=T'-(a,b)$、$U''=U'-(a,b)$，如上圖 T3-2 所示。

(iii) 已知正$\Delta A'B'C'$與正$\Delta A_1B_1C_1$之重心同為G點，則我們想先證明$\angle A'GA_1=\angle PQA_1$，詳述如下：

設$\overline{A'B'}$與$\overline{GA_1}$相交於D點，且令$\angle A'GA_1=\theta$，則

①$\because G$為正$\Delta A'B'C'$之重心，$\therefore\angle GA'D=30^\circ$；又$\because G$為正$\Delta A_1B_1C_1$之重心，$\therefore\angle DA_1Q'=30^\circ$；

故$\angle GA'D=\angle DA_1Q'$。

②在$\Delta GA'D$與$\Delta Q'A_1D$中，$\because\angle GA'D=\angle DA_1Q'$且$\angle GDA'=\angle Q'DA_1$，$\therefore\angle A_1Q'D=\angle A'GD=\theta$。

③$\because\overline{AB}\,//\,\overline{A'B'}$，$\therefore\angle PQA_1=\angle A_1Q'D$；故可推知$\angle PQA_1=\angle A'GD=\theta$，亦即$\angle A'GA_1=\angle PQA_1$。

(同理可得$\angle RSB_1=\angle R'S'B_1=\angle TUC_1=\angle T'U'C_1=\theta$)

(iv) 承步驟(ii)所述，我們將證明六邊形$P'Q'R'S'T'U'$的六邊長均相等，亦即$\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$，詳述如下：

①連接$\overline{GP'}$，則因為正$\Delta A'B'C'$與正$\Delta A_1B_1C_1$之重心同為G點且該兩正三角形全等，所以$\overline{GA'}=\overline{GA_1}$，進而推知$\angle GA'A_1=\angle GA_1A'$；

②因為正$\Delta A'B'C'$與正$\Delta A_1B_1C_1$之重心同為G點，所以$\angle GA'P'=30^\circ=\angle GA_1P'$；

③上述由①與②得知$\angle GA'A_1-\angle GA'P'=\angle GA_1A'-\angle GA_1P'$，故推知$\angle P'A'A_1=\angle P'A_1A'$，因此$\overline{P'A'}=\overline{P'A_1}$；

④考慮$\Delta A'P'U'$與$\Delta A_1P'Q'$，$\because\angle A'P'U'=\angle A_1P'Q'$，$\overline{P'A'}=\overline{P'A_1}$，且$\angle P'A'U'=60^\circ=\angle P'A_1Q'$，

$\therefore\Delta A'P'U'\cong\Delta A_1P'Q'$ (ASA 全等性質)，故$\overline{U'P'}=\overline{P'Q'}$；

⑤同理可得$\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}$、$\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}$、$\overline{R'S'}=\overline{S'T'}$、$\overline{S'T'}=\overline{T'U'}$與$\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$，因此得

證 $\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$ 。

(v) 接下來我們將找出六邊形 $PQRSTU$ 的六邊長 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$、$\overline{RS}$、$\overline{ST}$、$\overline{TU}$、$\overline{UP}$ 分別與六邊形 $P'Q'R'S'T'U'$ 的六邊長 $\overline{P'Q'}$、$\overline{Q'R'}$、$\overline{R'S'}$、$\overline{S'T'}$、$\overline{T'U'}$、$\overline{U'P'}$ 的關係，詳述如下。經過一些努力之後，我們發現 $\Delta PP'P''$、$\Delta QQ'Q''$、$\Delta RR'R''$、$\Delta SS'S''$、$\Delta TT'T''$ 與 $\Delta UU'U''$ 等六個三角形之內角均可用步驟(i)中提及的角度 θ 與角度 α 表示之，且由步驟(i)中提及的向量 (a,b)，我們可推知 $\overline{P'P''}=\overline{Q'Q''}=\overline{R'R''}=\overline{S'S''}=\overline{T'T''}=\overline{U'U''}=\sqrt{a^2+b^2}$，詳見下述之圖 T3-3、圖 T3-4、圖 T3-5、圖 T3-6、圖 T3-7 與圖 T3-8。

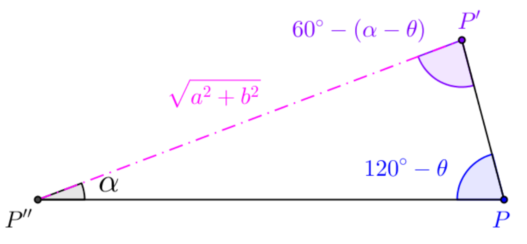


圖 T3-3

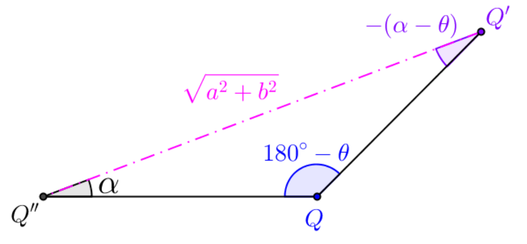


圖 T3-4

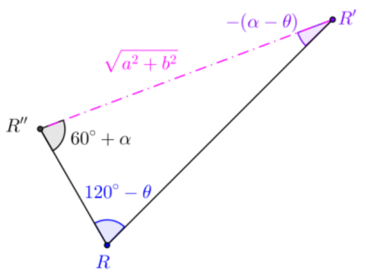


圖 T3-5

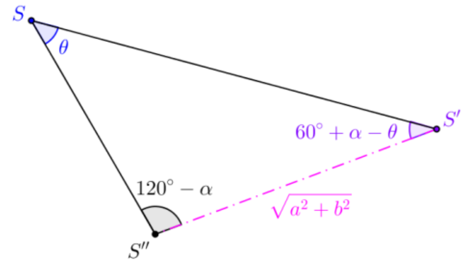


圖 T3-6

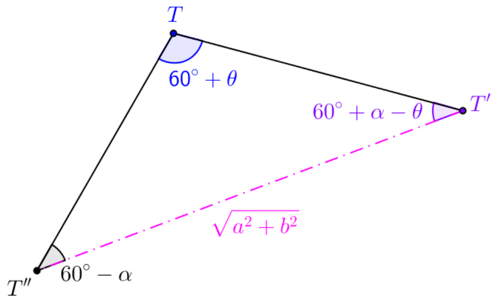


圖 T3-7

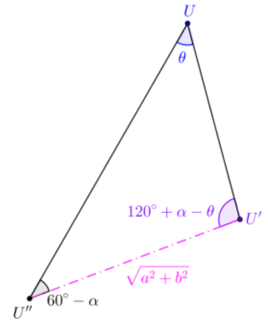


圖 T3-8

(1) 先考慮 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{P'Q'}$ 之關係：

①如上圖 T3-3 所示，在 $\Delta PP'P''$ 中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{PP''}}{\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\overline{P'P''}}{\sin(120^\circ-\theta)}\Rightarrow\frac{\overline{PP''}}{\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin(120^\circ-\theta)}\Rightarrow\overline{PP''}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}{\sin(120^\circ-\theta)}$$

②如上圖 T3-4 所示，在 $\Delta QQ'Q''$ 中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{QQ''}}{\sin\left[-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\overline{Q'Q''}}{\sin(180^\circ-\theta)}\Rightarrow\frac{\overline{QQ''}}{\sin\left[-(\alpha-\theta)\right]}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin(180^\circ-\theta)}\Rightarrow\overline{QQ''}=\frac{-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta}$$

③由上圖 T3-2，我們可得

$$\overline{PQ}=\overline{P''Q''}-\overline{PP''}+\overline{QQ''}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha-\theta\right)}{\sin\theta}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\sin\left[60^\circ-(\alpha-\theta)\right]\times\sin\theta+\sin\left(\alpha-\theta\right)\times\sin\left(120^\circ-\theta\right)\right\}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(60^\circ-\alpha+2\theta\right)-\cos\left(60^\circ-\alpha\right)\right]\\-\frac{1}{2}\left[\cos\left(120^\circ+\alpha-2\theta\right)-\cos\left(120^\circ-\alpha\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(60^\circ-\alpha+2\theta\right)-\cos\left(60^\circ-\alpha\right)\right]\\-\frac{1}{2}\left[-\cos\left(60^\circ-\alpha+2\theta\right)-\cos\left(120^\circ-\alpha\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\frac{1}{2}\left[\cos\left(60^\circ-\alpha\right)+\cos\left(120^\circ-\alpha\right)\right]\right\}$$

$$=\overline{P'Q'}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\frac{1}{2}\left[2\cos\left(90^\circ-\alpha\right)\times\cos30^\circ\right]\right\}\quad\text{(利用和差化積公式)}$$

$$=\overline{P'Q'}-\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cos30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\right]\times\sin\alpha$$

為了方便起見，我們令$u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}$，則$\overline{PQ}=\overline{P'Q'}-u\times\sin\alpha$。

(2) 次考慮$\overline{QR}$與$\overline{Q'R'}$之關係：

①如上圖 T3-4 所示，在$\Delta QQ'Q''$中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{QQ'}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{Q'Q''}}{\sin\left(180^\circ-\theta\right)}\Rightarrow\frac{\overline{QQ'}}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(180^\circ-\theta\right)}\Rightarrow\overline{QQ'}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha}{\sin\left(180^\circ-\theta\right)}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha}{\sin\theta}$$

②如上圖 T2-5 所示，在$\Delta RR'R''$中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{RR'}}{\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}=\frac{\overline{R'R''}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)}\Rightarrow\frac{\overline{RR'}}{\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)}\Rightarrow\overline{RR'}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)}$$

③由上圖 T3-2，我們可得

$$\overline{QR}=\overline{Q'R'}+\overline{QQ'}-\overline{RR'}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha}{\sin\theta}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\sin\alpha\times\sin\left(120^\circ-\theta\right)-\sin\left(60^\circ+\alpha\right)\times\sin\theta\right\}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)-\cos\left(120^\circ-\alpha-\theta\right)\right]\\+\frac{1}{2}\left[\cos\left(60^\circ+\alpha+\theta\right)-\cos\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)-\cos\left(120^\circ-\alpha-\theta\right)\right]\\+\frac{1}{2}\left[-\cos\left(120^\circ-\alpha-\theta\right)-\cos\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{-\frac{1}{2}\left[\cos\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)+\cos\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\right\}$$

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{-\frac{1}{2}\left[2\cos\left(90^\circ+\alpha-\theta\right)\times\cos30^\circ\right]\right\}$$ (利用和差化積公式)

$$=\overline{Q'R'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{-\frac{1}{2}\left[2\left(-\sin\left(\alpha-\theta\right)\right)\times\cos30^\circ\right]\right\}$$

$$=\overline{Q'R'}+\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cos30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\right]\times\sin\left(\alpha-\theta\right)$$

$=\overline{Q'R'}+u\times\sin\left(\alpha-\theta\right)$，其中 $u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}$ 。

(3) 仿照上述步驟(1)與步驟(2)可得：

$\overline{RS}=\overline{R'S'}+u\times\sin\left(60^\circ+\alpha\right)$、$\overline{ST}=\overline{S'T'}-u\times\sin\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)$

$\overline{TU}=\overline{T'U'}-u\times\sin\left(120^\circ+\alpha\right)$、$\overline{UP}=\overline{U'P'}+u\times\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)$

(vi) 令 $L_{3,m,1}=\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ 且 $L_{3,m,2}=\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ (符號說明：$L_{3,m,1}$ 足標的第一個數字 3 表示正三角形的『三』，$L_{3,m,1}$ 的足標的第二個數字 m 表示 m 次方和的『 m 』， $L_{3,m,1}$ 足標的第三個數字 1 表示六邊形 $PQRSTU$ 的六邊的第一組邊(即 $\overline{PQ}$、$\overline{RS}$ 與 $\overline{TU}$)的『一』；類似地，$L_{3,m,2}$ 足標的前兩個數字同 $L_{3,m,1}$ 的足標的前兩個數字的代表意義，$L_{3,m,2}$ 的足標的第三個數字 2 表示六邊形 $PQRSTU$ 的六邊的第二組邊(即 $\overline{QR}$ 、 $\overline{ST}$ 與 $\overline{UP}$)的『二』)

，則

承步驟(iv)所述，因為 $\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$ ，為了方便起見，所以我們再令 $\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}=r$ ，因此可得

$$L_{3,m,1}$$

$$=\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$$

$$=\left(r-u\times\sin\alpha\right)^m+\left[r+u\times\sin\left(60^\circ+\alpha\right)\right]^m+\left[r-u\times\sin\left(120^\circ+\alpha\right)\right]^m$$

$$=\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}(-1)^q u^q\sin^q\alpha+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}u^q\sin^q\left(60^\circ+\alpha\right)+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}(-1)^q u^q\sin^q\left(120^\circ+\alpha\right)$$

且

$$L_{3,m,2}$$

$$=\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$$

$$=\left[r+u\times\sin\left(\alpha-\theta\right)\right]^m+\left[r-u\times\sin\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]^m+\left[r+u\times\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\right]^m$$

$$=\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}u^q\sin^q\left(\alpha-\theta\right)+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}(-1)^q u^q\sin^q\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)+\sum_{q=0}^{m}C_q^m r^{m-q}u^q\sin^q\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\ ;$$

所以

$$L_{3,m,1}-L_{3,m,2}$$

$$=\sum_{q=0}^{m}\left\{\begin{array}{l}C_q^m r^{m-q}u^q\times\left[(-1)^q\sin^q\alpha+\sin^q(60^\circ+\alpha)+(-1)^q\sin^q(120^\circ+\alpha)\right]\\-C_q^m r^{m-q}u^q\times\left[\sin^q(\alpha-\theta)+(-1)^q\sin^q(60^\circ+\alpha-\theta)+\sin^q(120^\circ+\alpha-\theta)\right]\end{array}\right\}$$

$$=\sum_{q=0}^{m}\left\{\begin{array}{l}C_q^m r^{m-q}u^q\times\left[(-1)^q\sin^q\alpha+\sin^q(60^\circ+\alpha)+(-1)^q\sin^q(120^\circ+\alpha)\right]\\+C_q^m r^{m-q}u^q\times\left[-\sin^q(\alpha-\theta)+(-1)^{q+1}\sin^q(60^\circ+\alpha-\theta)-\sin^q(120^\circ+\alpha-\theta)\right]\end{array}\right\}$$

$$=\sum_{q=1}^{m}\left\{C_q^m r^{m-q}u^q\times\left[\begin{array}{l}(-1)^q\sin^q\alpha+\sin^q(60^\circ+\alpha)+(-1)^q\sin^q(120^\circ+\alpha)\\-\sin^q(\alpha-\theta)+(-1)^{q+1}\sin^q(60^\circ+\alpha-\theta)-\sin^q(120^\circ+\alpha-\theta)\end{array}\right]\right\}$$

$$=\sum_{q=1}^{m}(-1)^q C_q^m r^{m-q} u^q \times C_q$$

且對於每一個 $q \in \{1,2,3,\cdots,m\}$，我們均定義

$$C_q=\begin{bmatrix}\sin^q\alpha+(-1)^q\sin^q(60^\circ+\alpha)+\sin^q(120^\circ+\alpha)\\ +(-1)^{q+1}\sin^q(\alpha-\theta)-\sin^q(60^\circ+\alpha-\theta)+(-1)^{q+1}\sin^q(120^\circ+\alpha-\theta)\end{bmatrix}$$

(vii) 我們將證明 $C_1=C_2=C_4=0$，但是『C_3、C_5 、⋯ 、C_m **不保證恆等於** 0』，詳述如下：

①首先我們證明 $C_1=0$ 如下：(部份兩兩分組後，再利用和差化積公式)

$$C_1=\sin\alpha-\sin\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin\left(120^\circ+\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\theta\right)-\sin\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)$$

$$=\sin\alpha+2\cos\left(90^\circ+\alpha\right)\sin30^\circ+\sin\left(\alpha-\theta\right)+2\cos\left(90^\circ+\alpha-\theta\right)\sin30^\circ$$

$$=\sin\alpha+\cos\left(90^\circ+\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\theta\right)+\cos\left(90^\circ+\alpha-\theta\right)$$

$$=\sin\alpha-\sin\alpha+\sin\left(\alpha-\theta\right)-\sin\left(\alpha-\theta\right)=0\text{；}$$

②我們證明 $C_2=0$ 如下：

(先利用餘弦函數的二倍角公式，再部份兩兩分組，然後利用和差化積公式)

(註：餘弦函數的二倍角公式 $\cos2\beta=1-2\sin^2\beta \Rightarrow \sin^2\beta=\dfrac{1-\cos2\beta}{2}$)

$$C_2=\sin^2\alpha+\sin^2\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin^2\left(120^\circ+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\theta\right)-\sin^2\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin^2\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)$$

$$=\left[\frac{1-\cos2\alpha}{2}\right]+\left[\frac{1-\cos\left(120^\circ+2\alpha\right)}{2}\right]+\left[\frac{1-\cos\left(240^\circ+2\alpha\right)}{2}\right]$$

$$-\left[\frac{1-\cos\left(2\alpha-2\theta\right)}{2}\right]-\left[\frac{1-\cos\left(120^\circ+2\alpha-2\theta\right)}{2}\right]-\left[\frac{1-\cos\left(240^\circ+2\alpha-2\theta\right)}{2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}\cos2\alpha+\cos\left(120^\circ+2\alpha\right)+\cos\left(240^\circ+2\alpha\right)\\ -\cos\left(2\alpha-2\theta\right)-\cos\left(120^\circ+2\alpha-2\theta\right)-\cos\left(240^\circ+2\alpha-2\theta\right)\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\times\left[\cos2\alpha+2\cos\left(180^\circ+2\alpha\right)\cos60^\circ-\cos\left(2\alpha-2\theta\right)-2\cos\left(180^\circ+2\alpha-2\theta\right)\cos60^\circ\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times\left[\cos2\alpha+\cos\left(180^\circ+2\alpha\right)-\cos\left(2\alpha-2\theta\right)-\cos\left(180^\circ+2\alpha-2\theta\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times\left[\cos2\alpha-\cos2\alpha-\cos\left(2\alpha-2\theta\right)+\cos\left(2\alpha-2\theta\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times 0=0$$

③我們將證明『C_3 **不保證恆等於** 0』如下：

(先利用正弦函數的三倍角公式；再部份兩兩分組，然後利用和差化積公式)

(註：正弦函數的三倍角公式 $\sin 3\beta=-4\sin^3\beta+3\sin\beta \Rightarrow \sin^3\beta=\frac{3\sin\beta-\sin 3\beta}{4}$)

$$C_3=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}-\frac{3\sin\left(60^\circ+\alpha\right)-\sin\left(180^\circ+3\alpha\right)}{4}+\frac{3\sin\left(120^\circ+\alpha\right)-\sin\left(360^\circ+3\alpha\right)}{4}$$

$$+\frac{3\sin(\alpha-\theta)-\sin(3\alpha-3\theta)}{4}-\frac{3\sin\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin\left(180^\circ+3\alpha-3\theta\right)}{4}+\frac{3\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin\left(360^\circ+3\alpha-3\theta\right)}{4}$$

$$=\frac{3}{4}\times\left[\sin\alpha-\sin\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin\left(120^\circ+\alpha\right)\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin 3\alpha-\sin\left(180^\circ+3\alpha\right)+\sin\left(360^\circ+3\alpha\right)\right]$$

$$+\frac{3}{4}\times\left[\sin(\alpha-\theta)-\sin\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\right]$$

$$-\frac{1}{4}\times\left[\sin(3\alpha-3\theta)-\sin\left(180^\circ+3\alpha-3\theta\right)+\sin\left(360^\circ+3\alpha-3\theta\right)\right]$$

$$=\frac{3}{4}\times\left[\sin\alpha+2\cos\left(90^\circ+\alpha\right)\sin 30^\circ\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin 3\alpha+2\cos\left(270^\circ+3\alpha\right)\sin 90^\circ\right]$$

$$+\frac{3}{4}\times\left[\sin(\alpha-\theta)+2\cos\left(90^\circ+\alpha-\theta\right)\sin 30^\circ\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin(3\alpha-3\theta)+2\cos\left(270^\circ+3\alpha-3\theta\right)\sin 90^\circ\right]$$

$$=\frac{3}{4}\times\left[\sin\alpha+\cos\left(90^\circ+\alpha\right)\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin 3\alpha+2\cos\left(270^\circ+3\alpha\right)\right]$$

$$+\frac{3}{4}\times\left[\sin(\alpha-\theta)+\cos\left(90^\circ+\alpha-\theta\right)\right]-\frac{1}{4}\times\left[\sin(3\alpha-3\theta)+2\cos\left(270^\circ+3\alpha-3\theta\right)\right]$$

$$=\frac{3}{4}\times[\sin\alpha-\sin\alpha]-\frac{1}{4}\times[\sin 3\alpha+2\sin 3\alpha]+\frac{3}{4}\times[\sin(\alpha-\theta)-\sin(\alpha-\theta)]-\frac{1}{4}\times[\sin(3\alpha-3\theta)+2\sin(3\alpha-3\theta)]$$

$$=\frac{3}{4}\times 0-\frac{1}{4}\times(3\sin 3\alpha)+\frac{3}{4}\times 0-\frac{1}{4}\times(3\sin(3\alpha-3\theta))$$

$$=-\frac{3}{4}\times\left[\sin 3\alpha+\sin(3\alpha-3\theta)\right]$$

$$=-\frac{3}{4}\times\left[2\sin\left(3\alpha-\frac{3\theta}{2}\right)\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$=-\frac{3}{2}\times\left[\sin\left(3\alpha-\frac{3\theta}{2}\right)\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

④我們將證明 $C_4=0$ 如下：

(過程中我們主要利用餘弦函數的二倍角公式)

$$C_4=\sin^4\alpha+\sin^4(60^\circ+\alpha)+\sin^4(120^\circ+\alpha)-\sin^4(\alpha-\theta)-\sin^4(60^\circ+\alpha-\theta)-\sin^4(120^\circ+\alpha-\theta)$$

$$=\left(\sin^2\alpha\right)^2+\left[\sin^2(60^\circ+\alpha)\right]^2+\left[\sin^2(120^\circ+\alpha)\right]^2-\left[\sin^2(\alpha-\theta)\right]^2-\left[\sin^2(60^\circ+\alpha-\theta)\right]^2-\left[\sin^2(120^\circ+\alpha-\theta)\right]^2$$

$$=\left[\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right]^2+\left[\frac{1-\cos(120^\circ+2\alpha)}{2}\right]^2+\left[\frac{1-\cos(240^\circ+2\alpha)}{2}\right]^2$$

$$-\left[\frac{1-\cos(2\alpha-2\theta)}{2}\right]^2-\left[\frac{1-\cos(120^\circ+2\alpha-2\theta)}{2}\right]^2-\left[\frac{1-\cos(240^\circ+2\alpha-2\theta)}{2}\right]^2$$

$$=\left[\frac{1-2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{4}\right]+\left[\frac{1-2\cos(120^\circ+2\alpha)+\cos^2(120^\circ+2\alpha)}{4}\right]+\left[\frac{1-2\cos(240^\circ+2\alpha)+\cos^2(240^\circ+2\alpha)}{4}\right]$$

$$-\left[\frac{1-2\cos(2\alpha-2\theta)+\cos^2(2\alpha-2\theta)}{4}\right]-\left[\frac{1-2\cos(120^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos^2(120^\circ+2\alpha-2\theta)}{4}\right]$$

$$-\left[\frac{1-2\cos(240^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos^2(240^\circ+2\alpha-2\theta)}{4}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\times\left\{\begin{array}{l}\left[\cos 2\alpha+\cos(120^\circ+2\alpha)+\cos(240^\circ+2\alpha)\right]\\-\left[\cos(2\alpha-2\theta)+\cos(120^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos(240^\circ+2\alpha-2\theta)\right]\end{array}\right\}$$

$$+\frac{1}{4}\times\left\{\begin{array}{l}\left[\cos^2 2\alpha+\cos^2(120^\circ+2\alpha)+\cos^2(240^\circ+2\alpha)\right]\\-\left[\cos^2(2\alpha-2\theta)+\cos^2(120^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos^2(240^\circ+2\alpha-2\theta)\right]\end{array}\right\}$$

再由『**引理 3**』得知，

$\cos 2\alpha+\cos(120^\circ+2\alpha)+\cos(240^\circ+2\alpha)=0$ 且

$\cos(2\alpha-2\theta)+\cos(120^\circ+2\alpha-2\theta)+\cos(240^\circ+2\alpha-2\theta)=0$ ，

所以

$$C_4=-\frac{1}{2}\times\{0-0\}$$

$$+\frac{1}{4}\times\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{1+\cos 4\alpha}{2}+\frac{1+\cos(240^\circ+4\alpha)}{2}+\frac{1+\cos(480^\circ+4\alpha)}{2}\right]\\-\left[\frac{1+\cos(4\alpha-4\theta)}{2}+\frac{1+\cos(240^\circ+4\alpha-4\theta)}{2}+\frac{1+\cos(480^\circ+4\alpha-4\theta)}{2}\right]\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\times\begin{Bmatrix}\left[\cos 4\alpha+\cos(240^\circ+4\alpha)+\cos(480^\circ+4\alpha)\right]\\ -\left[\cos(4\alpha-4\theta)+\cos(240^\circ+4\alpha-4\theta)+\cos(480^\circ+4\alpha-4\theta)\right]\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\times\begin{Bmatrix}\left[\cos 4\alpha+\cos(120^\circ+4\alpha)+\cos(240^\circ+4\alpha)\right]\\ -\left[\cos(4\alpha-4\theta)+\cos(120^\circ+4\alpha-4\theta)+\cos(240^\circ+4\alpha-4\theta)\right]\end{Bmatrix}$$

再由『**引理 3**』得知，

$\cos 4\alpha+\cos(120^\circ+4\alpha)+\cos(240^\circ+4\alpha)=0$ 且
$\cos(4\alpha-4\theta)+\cos(120^\circ+4\alpha-4\theta)+\cos(240^\circ+4\alpha-4\theta)=0$ ，

所以

$$C_4=\frac{1}{8}\times\{0-0\}=0$$

⑤我們將證明『**C_5 不保證恆等於 0**』如下：

(過程中我們主要利用『**引理 4**』之正弦函數的五次方轉換成餘弦函數和公式)

由『**引理 4**』可得

$\sin^5\beta$

$$=\frac{1}{2^5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j C_j^5\cos\left(\left(2j-5\right)\beta+90^\circ\times 5\right)$$

$$=\frac{1}{2^5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j C_j^5\cos\left[\left(2j-5\right)\beta+90^\circ\right]$$

$$=\frac{1}{2^5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j C_j^5\left\{-\sin\left[\left(2j-5\right)\beta\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2^5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^{j+1} C_j^5\left\{\sin\left[\left(2j-5\right)\beta\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2^5}\left[-C_0^5\sin\left(-5\beta\right)+C_1^5\sin\left(-3\beta\right)-C_2^5\sin\left(-\beta\right)+C_3^5\sin\beta-C_4^5\sin 3\beta+C_5^5\sin 5\beta\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[10\sin\beta-5\sin 3\beta+\sin 5\beta\right]$$

因此

$$C_5=\sin^5\alpha-\sin^5(60^\circ+\alpha)+\sin^5(120^\circ+\alpha)+\sin^5(\alpha-\theta)-\sin^5(60^\circ+\alpha-\theta)+\sin^5(120^\circ+\alpha-\theta)$$

$$=\left[\frac{10\sin\alpha-5\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{16}\right]-\left[\frac{10\sin(60^\circ+\alpha)-5\sin(180^\circ+3\alpha)+\sin(300^\circ+5\alpha)}{16}\right]$$

$$+\left[\frac{10\sin(120^\circ+\alpha)-5\sin(360^\circ+3\alpha)+\sin(600^\circ+5\alpha)}{16}\right]+\left[\frac{10\sin(\alpha-\theta)-5\sin(3\alpha-3\theta)+\sin(5\alpha-5\theta)}{16}\right]$$

$$-\left[\frac{10\sin(60^\circ+\alpha-\theta)-5\sin(180^\circ+3\alpha-3\theta)+\sin(300^\circ+5\alpha-5\theta)}{16}\right]$$

$$+\left[\frac{10\sin(120^\circ+\alpha-\theta)-5\sin(360^\circ+3\alpha-3\theta)+\sin(600^\circ+5\alpha-5\theta)}{16}\right]$$

$$=\frac{10}{16}\times\left[\sin\alpha-\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(120^\circ+\alpha)+\sin(\alpha-\theta)-\sin(60^\circ+\alpha-\theta)+\sin(120^\circ+\alpha-\theta)\right]$$

$$-\frac{5}{16}\times\left[\begin{array}{l}\sin 3\alpha-\sin(180^\circ+3\alpha)+\sin(360^\circ+3\alpha)\\+\sin(3\alpha-3\theta)-\sin(180^\circ+3\alpha-3\theta)+\sin(360^\circ+3\alpha-3\theta)\end{array}\right]$$

$$+\frac{1}{16}\times\left[\begin{array}{l}\sin 5\alpha-\sin(300^\circ+5\alpha)+\sin(600^\circ+5\alpha)\\+\sin(5\alpha-5\theta)-\sin(300^\circ+5\alpha-5\theta)+\sin(600^\circ+5\alpha-5\theta)\end{array}\right]$$

再由『**引理 3**』得知，

$\sin\alpha-\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(120^\circ+\alpha)=0$ 且 $\sin(\alpha-\theta)-\sin(60^\circ+\alpha-\theta)+\sin(120^\circ+\alpha-\theta)=0$ ，

所以

$$C_5=\frac{10}{16}\times\left[0+0\right]-\frac{5}{16}\times\left[\begin{array}{l}\sin 3\alpha+\sin 3\alpha+\sin 3\alpha\\+\sin(3\alpha-3\theta)+\sin(3\alpha-3\theta)+\sin(3\alpha-3\theta)\end{array}\right]$$

$$+\frac{1}{16}\times\left[\begin{array}{l}\sin 5\alpha-\sin(-60^\circ+5\alpha)+\sin(-120^\circ+5\alpha)\\+\sin(5\alpha-5\theta)-\sin(-60^\circ+5\alpha-5\theta)+\sin(-120^\circ+5\alpha-5\theta)\end{array}\right]$$

$$=\frac{10}{16}\times\left[0+0\right]-\frac{5}{16}\times\left[3\sin 3\alpha+3\sin(3\alpha-3\theta)\right]$$

$$+\frac{1}{16}\times\left\{\begin{array}{l}-\left[\sin(-5\alpha)-\sin(60^\circ-5\alpha)+\sin(120^\circ-5\alpha)\right]\\-\left[\sin(-5\alpha+5\theta)-\sin(60^\circ-5\alpha+5\theta)+\sin(120^\circ-5\alpha+5\theta)\right]\end{array}\right\}$$

再由『**引理 3**』得知，

$\sin(-5\alpha)-\sin(60^\circ-5\alpha)+\sin(120^\circ-5\alpha)=0$ 且

$\sin(-5\alpha+5\theta)-\sin(60^\circ-5\alpha+5\theta)+\sin(120^\circ-5\alpha+5\theta)=0$ ，

所以

$$C_5=-\frac{5}{16}\times\left[3\sin 3\alpha+3\sin(3\alpha-3\theta)\right]+\frac{1}{16}\times\left\{-\left[0\right]-\left[0\right]\right\}$$

$$=-\frac{15}{16}\times\left[\sin 3\alpha+\sin(3\alpha-3\theta)\right]$$

$$=-\frac{15}{16}\times\left[2\sin\left(3\alpha-\frac{3\theta}{2}\right)\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$=-\frac{15}{8}\times\left[\sin\left(3\alpha-\frac{3\theta}{2}\right)\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

(viii)接下來，我們化簡將C_q (其中$6\le q\le m$)，過程中我們主要利用『**引理 4**』之正弦函數的q次方轉換成餘弦函數和公式，我依q之值分成四類情形討論如下

(1).當$q=4t+1$時，其中t是正整數，則

由『**引理 4**』可得

$$\sin^{q}\beta=\sin^{4t+1}\beta$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j}C_j^{4t+1}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\beta+90^\circ\times(4t+1)\right]$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j}C_j^{4t+1}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\beta+90^\circ\right]$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j}C_j^{4t+1}\left[-\sin\left(2j-(4t+1)\right)\beta\right]$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\beta\right]$$

因此

$$C_q=C_{4t+1}$$

$$=\left[\begin{array}{l}\sin^{4t+1}\alpha+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin^{4t+1}\left(120^\circ+\alpha\right)\\+(-1)^{4t+2}\sin^{4t+1}\left(\alpha-\theta\right)-\sin^{4t+1}\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)+(-1)^{4t+2}\sin^{4t+1}\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\end{array}\right]$$

$$=\left[\sin^{4t+1}\alpha-\sin^{4t+1}\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin^{4t+1}\left(120^\circ+\alpha\right)+\sin^{4t+1}\left(\alpha-\theta\right)-\sin^{4t+1}\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin^{4t+1}\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]$$

$$-\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(60^\circ+\alpha\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(120^\circ+\alpha\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\theta\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(60^\circ+\alpha\right)\right]+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(120^\circ+\alpha\right)\right]\right\}\\+\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\theta\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(60^\circ+\alpha-\theta\right)\right]+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]+2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha\right)\right]\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\right\}\\+\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\theta\right)\right]+2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\theta\right)\right]\right\}\\+2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\times\left\{\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha\right)\right]+\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha-\theta\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}\left\{2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\\+2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\times\left\{2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\begin{array}{l}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\\+2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(90^\circ+\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{array}\right\}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2^{4t+1}}\sum\limits_{\substack{j=0\\ \text{,且}j\text{是偶數}}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\begin{array}{l}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\\+2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\times\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{array}\right\}\right\}\\+\frac{1}{2^{4t+1}}\sum\limits_{\substack{j=0\\ \text{,且}j\text{是奇數}}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{2\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\begin{array}{l}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\\+2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\times\left\{-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2^{4t+1}}\sum\limits_{\substack{j=0\\ \text{,且}j\text{是偶數}}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\right\}\right\}\\+\frac{1}{2^{4t+1}}\sum\limits_{\substack{j=0\\ \text{,且}j\text{是奇數}}}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\frac{1}{2}-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times30^\circ\right]\right\}\right\}\end{array}\right\}$$

考慮一般情形之t值，則$q=4t+1$且推知$0\le j\le 4t+1$，此時可得C_q之值如下：

(1-3). 我們發現如下(甲)、(乙)、(丙)與(丁)等四個結果：

(甲). 當 j 是偶數且 $j-\dfrac{(4t+1)-3}{2}=3v$ 時，其中 v 是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^{\circ}\right]\right\}=\frac{3}{2}\ ;$$

(乙). 當 j 是偶數且 $j-\dfrac{(4t+1)-3}{2}\neq 3v$ 時，其中 v 是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^{\circ}\right]\right\}=0\ ;$$

(丙). 當 j 是奇數且 $j-\dfrac{(4t+1)-3}{2}=3v$ 時，其中 v 是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^{\circ}\right]\right\}=\frac{3}{2}\ ;$$

(丁). 當 j 是奇數且 $j-\dfrac{(4t+1)-3}{2}\neq 3v$ 時，其中 v 是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^{\circ}\right]\right\}=0\ ;$$

我們將分別證明上述(甲)與(乙)等四個結果如下：

(甲).

(甲-1). $\because\ j-\dfrac{(4t+1)-3}{2}=3v$, $\therefore\ j=(2t-1)+3v$ ；

又因為 j 是偶數且 $(2t-1)$ 是奇數，所以 v 是奇數。

(甲-2). $\because 0\le j\le 4t+1$, $\therefore 0\le(2t-1)+3v\le 4t+1$ ，

$$\Rightarrow -2t+1\le 3v\le 2t+2\quad\Rightarrow \frac{-2t+1}{3}\le v\le\frac{2t+2}{3}$$

$$\Rightarrow\left\lceil\frac{-2t+1}{3}\right\rceil\le v\le\left\lfloor\frac{2t+2}{3}\right\rfloor\quad\cdots\cdots\cdots①$$

，其中 $\lfloor x\rfloor$ 是地板函數(高斯函數)，亦即 $\lfloor x\rfloor$ 表示小於或等於 x 的最大整數；$\lceil x\rceil$ 是天花板函數，亦即 $\lceil x\rceil$ 表示大於或等於 x 的最小整數，詳見參考資料[4]。

又 $\because\ q=4t+1$, $\therefore\ t=\dfrac{q-1}{4}$ ，代入上述之①式得

$$\left\lceil\frac{-2\left(\frac{q-1}{4}\right)+1}{3}\right\rceil\le v\le\left\lfloor\frac{2\left(\frac{q-1}{4}\right)+2}{3}\right\rfloor\Rightarrow\left\lceil\frac{-q+3}{6}\right\rceil\le v\le\left\lfloor\frac{q+3}{6}\right\rfloor\ 。$$

(註：若 $q=5$，則 $\left\lceil \frac{-5+3}{6} \right\rceil \le v \le \left\lfloor \frac{5+3}{6} \right\rfloor \Rightarrow 0 \le v \le 1 \Rightarrow v=0$ 或 1，

又因為 v 是奇數，所以 $v=1$。)

(甲-3). 此時，$2j-(4t+1)=2\left[(2t-1)+3v\right]-(4t+1)=6v-3$。

(註：若 $q=5$，則 $v=1 \Rightarrow \left(2j-(4t+1)\right)=(6v-3)=3$。)

(甲-4). 由上述步驟(甲-1)與(甲-3)之結果得知

$$\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^{\circ}\right]\right\}=\left\{\frac{1}{2}+\sin\left[\left(6v-3\right)\times 30^{\circ}\right]\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}+\sin\left(180^{\circ}\times v-90^{\circ}\right)\right\}=\left\{\frac{1}{2}+\sin 90^{\circ}\right\}=\left\{\frac{1}{2}+1\right\}=\frac{3}{2}$$

，故得證命題(甲)成立。

(乙). 仿照上述(甲)之證明方法可得證該結果成立。

(丙). 仿照上述(甲)之證明方法可得證該結果成立。

(丁). 仿照上述(甲)之證明方法可得證該結果成立。

(1-4). 利用上述命題(甲)、(乙)、(丙)與(丁)等四個結果，我們可以將 C_q 的值化簡如下：

$C_q = C_{4t+1}$

$$=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2^{4t+1}} \displaystyle\sum_{\substack{j=0 \\ ,\text{且}j\text{是偶數}}}^{4t+1} (-1)^{j+1} C_j^{4t+1} \left\{\begin{array}{l} 4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \\ \times\left\{\dfrac{1}{2}+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^{\circ}\right]\right\} \end{array}\right\} \\ +\dfrac{1}{2^{4t+1}} \displaystyle\sum_{\substack{j=0 \\ ,\text{且}j\text{是奇數}}}^{4t+1} (-1)^{j+1} C_j^{4t+1} \left\{\begin{array}{l} 4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \\ \times\left\{\dfrac{1}{2}-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\times 30^{\circ}\right]\right\} \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2^{q}} \displaystyle\sum_{\substack{v=\left\lceil\frac{-q+3}{6}\right\rceil \\ ,\text{且}v\text{是奇數}}}^{\left\lfloor\frac{q+3}{6}\right\rfloor} (-1)^{\frac{q+6v-1}{2}} C_{\frac{q+6v-3}{2}}^{q} \left\{4\sin\left[\left(6v-3\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(6v-3\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\dfrac{3}{2}\right\}\right\} \\ +\dfrac{1}{2^{q}} \displaystyle\sum_{\substack{v=\left\lceil\frac{-q+3}{6}\right\rceil \\ ,\text{且}v\text{是偶數}}}^{\left\lfloor\frac{q+3}{6}\right\rfloor} (-1)^{\frac{q+6v-1}{2}} C_{\frac{q+6v-3}{2}}^{q} \left\{4\sin\left[\left(6v-3\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(6v-3\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\dfrac{3}{2}\right\}\right\} \end{array}\right\}$$

$$=\frac{3}{2^{q-1}}\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+3}{6}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+3}{6}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+6v-1}{2}}C^{q}_{\frac{q+6v-3}{2}}\left\{\sin\left[(6v-3)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[(6v-3)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

(2). 當 $q=4t+2$ 時，其中 t 是正整數，則(同 $q=4t+1$ 的證明方式可得)

$$C_q=C_{4t+2}=-\frac{3}{2^{q-1}}\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+6}{6}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+6}{6}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+6v-4}{2}}C^{q}_{\frac{q+6v-6}{2}}\left\{\sin\left[(6v-6)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[(6v-6)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

(3). 當 $q=4t+3$ 時，其中 t 是正整數，則(同 $q=4t+1$ 的證明方式可得)

$$C_q=C_{4t+3}=\frac{3}{2^{q-1}}\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+3}{6}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+3}{6}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+6v-3}{2}}C^{q}_{\frac{q+6v-3}{2}}\left\{\sin\left[(6v-3)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[(6v-3)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

(4). 當 $q=4t$ 時，其中 t 是正整數，則(同 $q=4t+1$ 的證明方式可得)

$$C_q=C_{4t}=-\frac{3}{2^{q-1}}\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+6}{6}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+6}{6}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+6v-6}{2}}C^{q}_{\frac{q+6v-6}{2}}\left\{\sin\left[(6v-6)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[(6v-6)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

故『$L_{3,m,1}-L_{3,m,2}$ **不保證恆等於 0**』，也就是說『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **不再維持恆等**』。

(ix) 承上述步驟(viii)所述，雖然『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **不再維持恆等**』，其中 $m\geq 3$ 且 m 是正整數，但我們想進一步的了解要滿足什麼條件，才可以確定『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **仍會相等**』，詳述如下：

$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m=\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$

$\Rightarrow L_{3,m,1}-L_{3,m,2}=0$

$$\Rightarrow\sum_{q=1}^{m}(-1)^q C^m_q r^{m-q}u^q\times C_q=0$$

，其中 $u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}$ ，$r=\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$，且 C_q 如上述步驟(vi)中之定義，C_q 之值依 q 之值分別為 $q=4t+1$、$q=4t+2$、$q=4t+3$、$q=4t$ 分成四大類，其中 t 是非負整數，如上頁所示：

我們發現如下兩個結果：

(1) 當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 120^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 300^\circ$』時，$C_q=0$。

理由如下：

$$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)\Rightarrow\frac{b}{a}=\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)\Rightarrow\tan\alpha=\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$$

$\Rightarrow\alpha=\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2$，其中 t_2是整數，

推知

(1-1). $\sin\left[(6v-3)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]=\sin\left[(6v-3)\left(\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2\right)-\frac{\theta}{2}\right)\right]$
$=\sin\left[(6v-3)\left(60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2\right)\right]=\sin\left[(2v-1)(t_1+3t_2)\times180^\circ\right]=0$

(1-2). $\sin\left[(6v-6)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]=\sin\left[(6v-6)\left(\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2\right)-\frac{\theta}{2}\right)\right]$
$=\sin\left[(6v-6)\left(60^\circ\times t_1+180^\circ\times t_2\right)\right]=\sin\left[(2v-2)(t_1+3t_2)\times180^\circ\right]=0$

故得證當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq120^\circ$，$\theta\neq180^\circ$，$\theta\neq300^\circ$』時，$C_q=0$。

(2) 當『$\theta=60^\circ$』時，$C_q=0$。

理由如下：

(2-1). $\cos\left[(6v-3)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]=\cos\left[(6v-3)\left(\frac{60^\circ}{2}\right)\right]=\cos\left[(2v-1)\times90^\circ\right]=0$

(2-2). $\sin\left[(6v-6)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]=\sin\left[(6v-6)\left(\frac{60^\circ}{2}\right)\right]=\sin\left[(v-1)\times180^\circ\right]=0$

故得證當『$\theta=60^\circ$』時，$C_q=0$。

(3) 綜合上述(1)與(2)得知，

當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq120^\circ$，$\theta\neq180^\circ$，$\theta\neq300^\circ$』或『$\theta=60^\circ$』時，

『$\overline{PQ}^m+\overline{RS}^m+\overline{TU}^m$ **與** $\overline{QR}^m+\overline{ST}^m+\overline{UP}^m$ **仍會相等**』，故得證原命題成立。 □

接下來，我們開始去思考兩正方形所圍八邊形之交錯邊的三次方和是否會相等，經過努力發現答案是肯定的，詳述如下之『**定理 4**』。

定理 4 之證明

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 為兩個全等的正方形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_4B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$與$\overleftrightarrow{B_4B_1}$分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8 等八點，當八邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 未落在正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在線段 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在線段 $\overline{A_2A_3}$ 上、P_5 與 P_6 均落在線段 $\overline{A_3A_4}$ 上、P_7 與 P_8 均落在線段 $\overline{A_4A_1}$ 上，如下圖 T4-0-1 與圖 T4-0-2，則

$\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3=\overline{P_8P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3$ 。

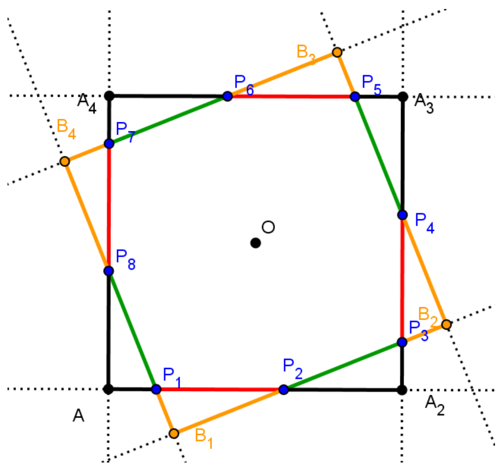


圖 T4-0-1

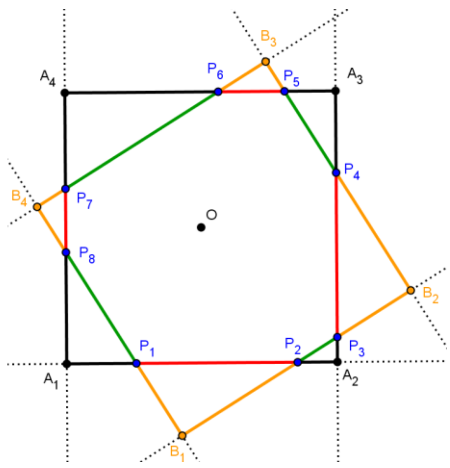


圖 T4-0-2

證明：

(i) 依題意可知，$A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 兩個正方形之圖形的相對關係大致上可分成如下兩大類：

(1) 第一類情形：

正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 乃由正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 繞著其中心點 O 逆時針旋轉角度 θ 而得，如下圖 T4-1 所示。

(2) 第二類情形：

正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 乃由正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 平移向量(a,b)(a,b 為任意實數)再繞著其中心點 O 逆時針旋轉角度 θ 而得，如下圖 T4-2 所示。(正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 平移向量(a,b)可得正方形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$，其中 a,b 為任意實數使得八邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 未落在正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 的外部)

註明：正方形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 與正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 之各邊相交情形如下：

$\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{B_4B_1}$、$\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{A_2'A_3'}$ 與 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{A_2'A_3'}$ 與 $\overline{B_2B_3}$、$\overline{A_3'A_4'}$ 與 $\overline{B_2B_3}$、$\overline{A_3'A_4'}$ 與 $\overline{B_3B_4}$、$\overline{A_4'A_1'}$ 與 $\overline{B_3B_4}$、$\overline{A_4'A_1'}$ 與 $\overline{B_4B_1}$ 分別相交於 P_1'、P_2'、⋯、P_8' 等八點，如下圖 T4-2 所示。

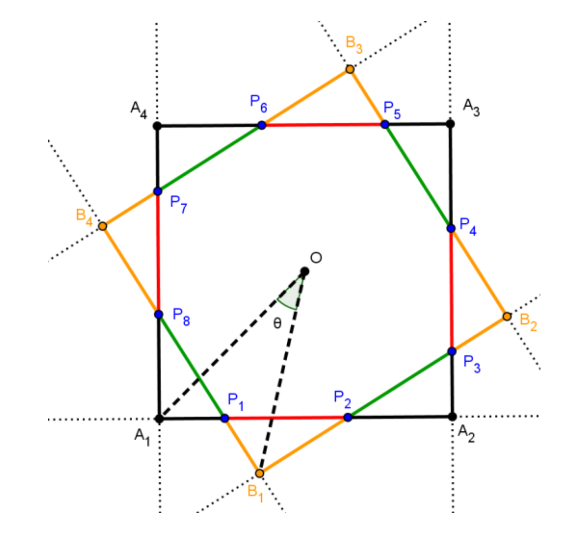


圖 T4-1

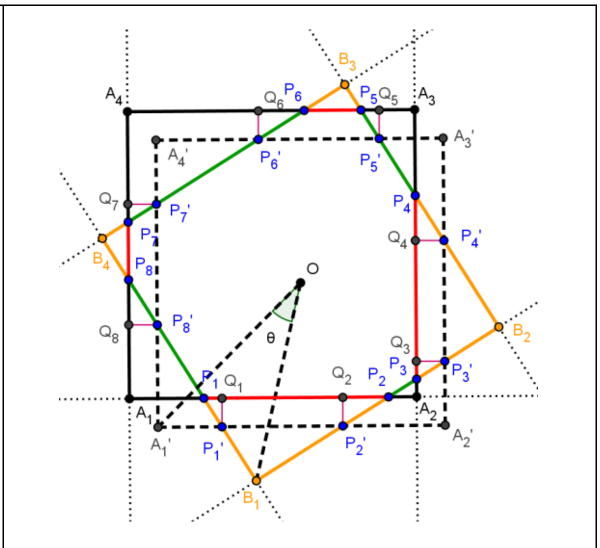


圖 T4-2

(ii) 我們依序證明第(1)類與第(2)類情形如下：

(1) 第(1)類情形：

如圖 T4-1 所示，

$\because \angle P_8A_1P_1 = 90^\circ = \angle P_2B_1P_1$ ， $\angle P_8P_1A_1 = \angle P_2P_1B_1$ ，

又 $\overline{A_1O} = \overline{B_1O} \Rightarrow \angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1 \Rightarrow \angle P_1A_1B_1 + 45^\circ = \angle P_1B_1A_1 + 45^\circ \Rightarrow \angle P_1A_1B_1 = \angle P_1B_1A_1 \Rightarrow \overline{A_1P_1} = \overline{B_1P_1}$ ，

$\therefore \Delta A_1P_1P_8 \cong \Delta B_1P_1P_2$ (ASA 全等) $\Rightarrow \overline{P_8P_1} = \overline{P_1P_2}$ ，

同理可得 $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$ ， $\overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4}$ ， $\overline{P_4P_5} = \overline{P_5P_6}$ ， $\overline{P_5P_6} = \overline{P_6P_7}$ ， $\overline{P_6P_7} = \overline{P_7P_8}$ ， $\overline{P_7P_8} = \overline{P_8P_1}$

，故 $\overline{P_8P_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \overline{P_4P_5} = \overline{P_5P_6} = \overline{P_6P_7} = \overline{P_7P_8}$

$\therefore \overline{P_8P_1}^3 = \overline{P_1P_2}^3 = \overline{P_2P_3}^3 = \overline{P_3P_4}^3 = \overline{P_4P_5}^3 = \overline{P_5P_6}^3 = \overline{P_6P_7}^3 = \overline{P_7P_8}^3$

$\overline{P_1P_2}^3 + \overline{P_3P_4}^3 + \overline{P_5P_6}^3 + \overline{P_7P_8}^3 = \overline{P_8P_1}^3 + \overline{P_2P_3}^3 + \overline{P_4P_5}^3 + \overline{P_6P_7}^3$

，故得證原命題成立。

(2) 第(2)類情形：

(2-1) 如圖 T4-2 所示，

我們先證明 $\angle A_1'OB_1 = \angle B_1P_2P_1$ ，詳述如下：

設 $\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{OB_1}$ 相交於 C_1 點，且令 $\angle A_1'OB_1 = \theta$ ，則

① $\because O$ 為正方形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 之中心點，$\therefore \angle OA_1'C_1 = 45^\circ$；又 $\because O$ 為正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 之中心點，$\therefore \angle C_1B_1P_2' = 45^\circ$；故 $\angle OA_1'C_1 = \angle C_1B_1P_2'$ 。

②在 $\Delta OA_1'C_1$ 與 $\Delta P_2'B_1C_1$ 中，$\angle OA_1'C_1 = \angle C_1B_1P_2'$ 且 $\angle OC_1A_1' = \angle P_2'C_1B_1$，

$\therefore \angle B_1P_2'C_1 = \angle A_1'OC_1 = \theta$。

③ $\because \overline{A_1A_2} \mathbin{//} \overline{A_1'A_2'}$，$\therefore \angle B_1P_2'C_1 = \angle B_1P_2P_1$；故可推知 $\angle B_1P_2P_1 = \angle A_1'OC_1 = \theta$，亦即 $\angle B_1P_2P_1 = \angle A_1'OB_1$。

(2-2) $\because \Delta A_1P_1P_8 \sim \Delta B_1P_1P_2 \sim \Delta A_2P_3P_2 \sim \Delta B_2P_3P_4 \sim \Delta A_3P_5P_4 \sim \Delta B_3P_5P_6 \sim \Delta A_4P_7P_6 \sim \Delta B_4P_7P_8$

$\therefore \angle B_1P_2P_1 = \angle A_2P_2P_3 = \angle B_2P_4P_3 = \angle A_3P_4P_5 = \angle B_3P_6P_5 = \angle A_4P_6P_7 = \angle B_4P_8P_7 = \angle A_1P_8P_1 = \theta$

(2-3) $\because$ 正方形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 與正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 相交之情形符合第(1)類情形，

$\therefore \overline{P_1'P_2'}^3 + \overline{P_3'P_4'}^3 + \overline{P_5'P_6'}^3 + \overline{P_7'P_8'}^3 = \overline{P_8'P_1'}^3 + \overline{P_2'P_3'}^3 + \overline{P_4'P_5'}^3 + \overline{P_6'P_7'}^3$

(2-4) 如圖 T4-2 所示，設 P_1' 與 P_2' 在 $\overline{A_1A_2}$ 上之投影點分別為 Q_1 與 Q_2，P_3' 與 P_4' 在 $\overline{A_2A_3}$ 上之投影點分別為 Q_3 與 Q_4，P_5' 與 P_6' 在 $\overline{A_3A_4}$ 上之投影點分別為 Q_5 與 Q_6，P_7' 與 P_8' 在 $\overline{A_4A_1}$ 上之投影點分別為 Q_7 與 Q_8，則

① $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1'P_2'} + \overline{P_1Q_1} + \overline{P_2Q_2} = \overline{P_1'P_2'} + b\times\tan\theta + \dfrac{b}{\tan\theta} = \overline{P_1'P_2'} + b\left(\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}\right) = \overline{P_1'P_2'} + \dfrac{2b}{\sin 2\theta}$

② $\overline{P_2P_3} = \overline{P_2'P_3'} - \overline{P_2P_2'} - \overline{P_3P_3'} = \overline{P_2'P_3'} - \dfrac{b}{\sin\theta} - \dfrac{a}{\cos\theta}$

③ $\overline{P_3P_4} = \overline{P_3'P_4'} + \overline{P_3Q_3} + \overline{P_4Q_4} = \overline{P_3'P_4'} + a\times\tan\theta + \dfrac{a}{\tan\theta} = \overline{P_3'P_4'} + a\left(\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}\right) = \overline{P_3'P_4'} + \dfrac{2a}{\sin 2\theta}$

④ $\overline{P_4P_5} = \overline{P_4'P_5'} - \overline{P_4P_4'} + \overline{P_5P_5'} = \overline{P_4'P_5'} - \dfrac{a}{\sin\theta} + \dfrac{b}{\cos\theta}$

⑤ $\overline{P_5P_6} = \overline{P_5'P_6'} - \overline{P_5Q_5} - \overline{P_6Q_6} = \overline{P_5'P_6'} - b\times\tan\theta - \dfrac{b}{\tan\theta} = \overline{P_5'P_6'} - b\left(\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}\right) = \overline{P_5'P_6'} - \dfrac{2b}{\sin 2\theta}$

⑥ $\overline{P_6P_7} = \overline{P_6'P_7'} + \overline{P_6P_6'} + \overline{P_7P_7'} = \overline{P_6'P_7'} + \dfrac{b}{\sin\theta} + \dfrac{a}{\cos\theta}$

⑦ $\overline{P_7P_8} = \overline{P_7'P_8'} - \overline{P_7Q_7} - \overline{P_8Q_8} = \overline{P_7'P_8'} - a\times\tan\theta - \dfrac{a}{\tan\theta} = \overline{P_7'P_8'} - a\left(\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}\right) = \overline{P_7'P_8'} - \dfrac{2a}{\sin 2\theta}$

⑧ $\overline{P_8P_1} = \overline{P_8'P_1'} + \overline{P_8P_8'} - \overline{P_1P_1'} = \overline{P_8'P_1'} + \dfrac{a}{\sin\theta} - \dfrac{b}{\cos\theta}$

(2-5) 因為 $\overline{P_1'P_2'} = \overline{P_2'P_3'} = \overline{P_3'P_4'} = \overline{P_4'P_5'} = \overline{P_5'P_6'} = \overline{P_6'P_7'} = \overline{P_7'P_8'} = \overline{P_8'P_1'}$，為了方便起見，所以我們再令 $\overline{P_1'P_2'} = \overline{P_2'P_3'} = \overline{P_3'P_4'} = \cdots = \overline{P_8'P_1'} = r$，因此可得

$\overline{P_1P_2}^3 + \overline{P_3P_4}^3 + \overline{P_5P_6}^3 + \overline{P_7P_8}^3$

$$=\left(r+\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^3+\left(r+\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^3+\left(r-\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^3+\left(r-\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^3$$

$$=r^3+3r^2\times\frac{2b}{\sin 2\theta}+3r\times\left(\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^2+\left(\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^3+r^3+3r^2\times\frac{2a}{\sin 2\theta}+3r\times\left(\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^2+\left(\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^3$$

$$+r^3-3r^2\times\frac{2b}{\sin 2\theta}+3r\times\left(\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^2-\left(\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^3+r^3-3r^2\times\frac{2a}{\sin 2\theta}+3r\times\left(\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^2-\left(\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^3$$

$$=4r^3+3\left(\frac{2b}{\sin 2\theta}\right)^2\times(r+r)+3\left(\frac{2a}{\sin 2\theta}\right)^2\times(r+r)$$

$$=4r^3+6r\times\frac{4a^2+4b^2}{(\sin 2\theta)^2}=4r^3+24r\times\frac{a^2+b^2}{(\sin 2\theta)^2}$$

(2-6) $\overline{P_8P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3$

$$=\left(r+\frac{a}{\sin\theta}-\frac{b}{\cos\theta}\right)^3+\left(r-\frac{b}{\sin\theta}-\frac{a}{\cos\theta}\right)^3+\left(r-\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}\right)^3+\left(r+\frac{b}{\sin\theta}+\frac{a}{\cos\theta}\right)^3$$

$$=r^3+\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^3-\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^3+3r\times\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2+3r\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2+3r^2\times\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)$$

$$-3r^2\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)-3\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2+3\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)-6r\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)$$

$$+r^3-\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^3-\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^3+3r\times\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2+3r\times\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2-3r^2\times\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)$$

$$-3r^2\times\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)-3\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2-3\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)+6r\times\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)$$

$$+r^3+\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^3-\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^3+3r\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2+3r\times\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2+3r^2\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)$$

$$-3r^2\times\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)+3\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2-3\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)-6r\times\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)$$

$$+r^3+\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^3+\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^3+3r\times\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2+3r\times\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2+3r^2\times\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)$$

$$+3r^2\times\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)+3\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2+3\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)+6r\times\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)$$

$$=4r^3+3r\times\left(\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2\right)$$

$$=4r^3+3r\times\left(\frac{a^2+b^2}{(\sin\theta\cos\theta)^2}\times 2\right)=4r^3+6r\times\left(\frac{4\times\left(a^2+b^2\right)}{(\sin 2\theta)^2}\right)=4r^3+24r\times\frac{a^2+b^2}{(\sin 2\theta)^2}$$

(2-7) 由上述步驟(2-5)與(2-6)得知

$$\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3=\overline{P_8P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3$$

，故得證原命題成立。 □

接下來我們想考慮 $\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$ 與 $\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$ 是否會相等，其中 $m\ge 4$ 且 m 是正整數，詳述如下之『**定理 5**』。

定理 5 之證明

承『**定理 4**』之前提描述，又若 $m\ge 4$ 且 m 是正整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 乃由正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 平移向量 (a,b) （a 與 b 為實數)再繞著中心點 O 逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$ ，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ 。

(2) 當 $m\ge 4$ 時，『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$ **與** $\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$ **不再維持恆等**』。

(3) 當 $m=4$ 與 $m=5$ 時，則

僅當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+45^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\ne 90^\circ$，$\theta\ne 180^\circ$，$\theta\ne 270^\circ$』時，

『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$ **與** $\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$ **仍會相等**』。

(4) 當 $m\ge 6$ 時，則

當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+45^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\ne 90^\circ$，$\theta\ne 180^\circ$，$\theta\ne 270^\circ$』時，

『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m$ **與** $\overline{P_8P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m$ **仍會相等**』。

證明：仿照『**定理 3**』之證明方式可證明原命題成立。 □

在『**定理 4**』中，我們考慮了兩全等正方形之邊所在直線所圍八邊形之交錯邊的三次方和會相等，於此我們將『**定理 5**』的結果推廣到兩個全等正五邊形的情形，發現也有類似的結果，詳述如下『**定理 6**』。

定理 6 之證明

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 為兩個全等的正五邊形，且 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_5B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_5B_1}$ 分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8、P_9、P_{10} 等十點，當十邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}$ 未落在正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在 $\overline{A_2A_3}$ 上、P_5 與 P_6 均落在 $\overline{A_3A_4}$ 上、P_7 與 P_8 均落在 $\overline{A_4A_5}$ 上、P_9 與 P_{10} 均落在 $\overline{A_5A_1}$ 上，如下圖 T6-0-1 與 T6-0-2，則

$\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3+\overline{P_9P_{10}}^3=\overline{P_{10}P_1}^3+\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3+\overline{P_8P_9}^3$。

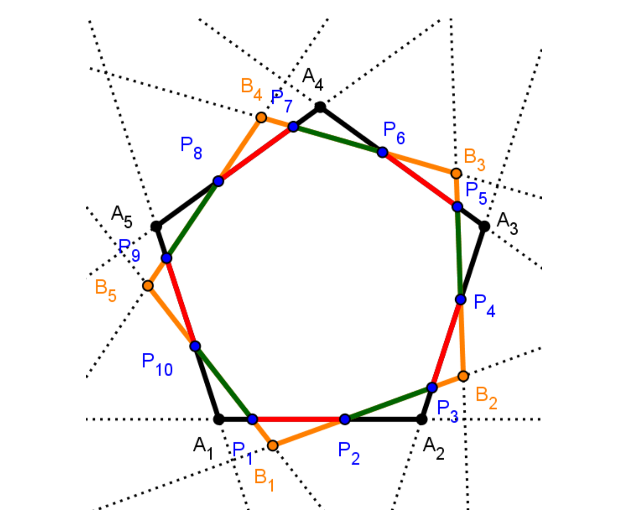


圖 T6-0-1

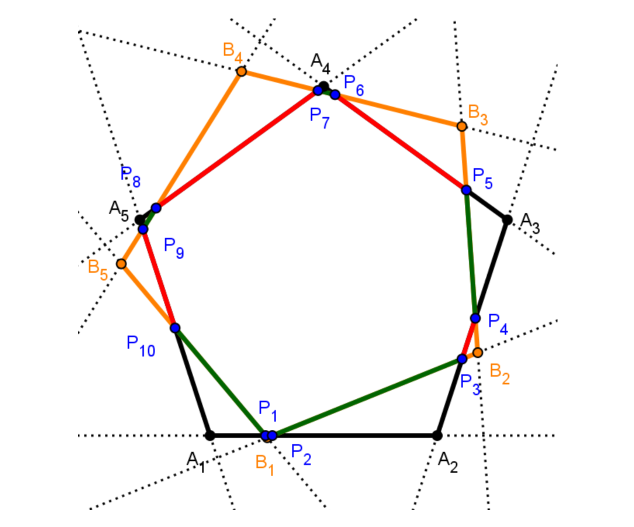


圖 T6-0-2

證明：

(i) 依題意可知，$A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 兩個正五邊形之圖形的相對關係大致上可分成如下兩大類：

(1) 第一類情形：

正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 乃由正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 繞著其中心點 O 逆時針旋轉角度 θ 而得，如下圖 T6-1 所示。

(2) 第二類情形：

正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 乃由正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 平移向量(a,b)(a,b 為任意實數)再繞著其中心點 O 逆時針旋轉角度 θ 而得，如下圖 T6-2 所示。(正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 平移向量(a,b)(a,b 為任意實數)後可得正五邊形 $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$)

註明：正五邊形 $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ 與正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 之各邊相交情形如下：

$\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{B_5B_1}$、$\overline{A_1'A_2'}$ 與 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{A_2'A_3'}$ 與 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{A_2'A_3'}$ 與 $\overline{B_2B_3}$、$\overline{A_3'A_4'}$ 與 $\overline{B_2B_3}$、$\overline{A_3'A_4'}$ 與 $\overline{B_3B_4}$、$\overline{A_4'A_5'}$ 與 $\overline{B_3B_4}$、$\overline{A_4'A_5'}$ 與 $\overline{B_4B_5}$、$\overline{A_5'A_1'}$ 與 $\overline{B_4B_5}$、$\overline{A_5'A_1'}$ 與 $\overline{B_5B_1}$ 分別相交於 P_1'、P_2'、⋯、P_{10}' 等十點，如下圖 T6-2 所示。

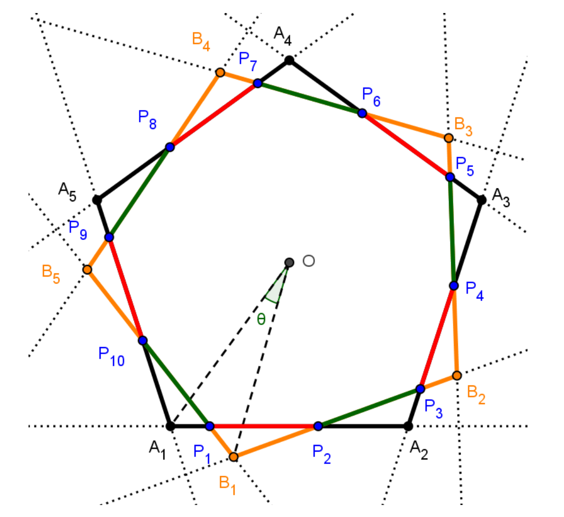


圖 T6-1

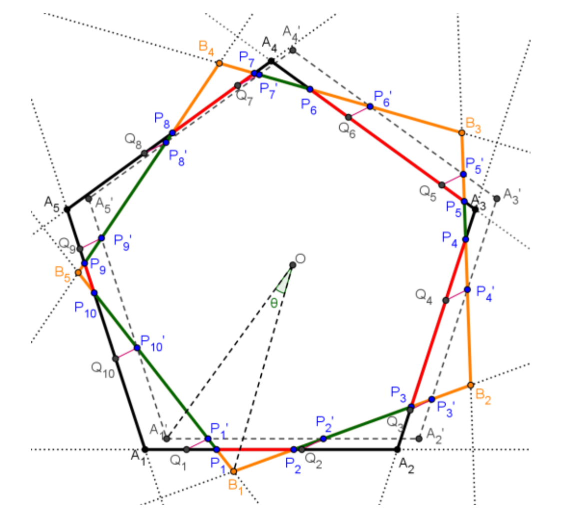


圖 T6-2

(ii) 我們依序證明第(1)類與第(2)類情形如下：

(1) 第(1)類情形，如圖 T6-1 所示，

$\because \angle P_{10}A_1P_1 = 108^\circ = \angle P_2B_1P_1$ ， $\angle P_{10}P_1A_1 = \angle P_2P_1B_1$ ，

又 $\overline{A_1O} = \overline{B_1O} \Rightarrow \angle OA_1B_1 = \angle OB_1A_1 \Rightarrow \angle P_1A_1B_1 + 54^\circ = \angle P_1B_1A_1 + 54^\circ \Rightarrow \angle P_1A_1B_1 = \angle P_1B_1A_1 \Rightarrow \overline{A_1P_1} = \overline{B_1P_1}$ ，

$\therefore \Delta A_1P_1P_{10} \cong \Delta B_1P_1P_2$ (ASA 全等) $\Rightarrow \overline{P_{10}P_1} = \overline{P_1P_2}$ ，

同理可得 $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$ ， $\overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4}$ ， $\overline{P_4P_5} = \overline{P_5P_6}$ ， $\overline{P_5P_6} = \overline{P_6P_7}$ ， $\overline{P_6P_7} = \overline{P_7P_8}$ ， $\overline{P_7P_8} = \overline{P_8P_9}$
$\overline{P_8P_9} = \overline{P_9P_{10}}$ ， $\overline{P_9P_{10}} = \overline{P_{10}P_1}$

，故 $\overline{P_{10}P_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \overline{P_4P_5} = \overline{P_5P_6} = \overline{P_6P_7} = \overline{P_7P_8} = \overline{P_8P_9} = \overline{P_9P_{10}}$

$$\therefore \overline{P_{10}P_1}^3 = \overline{P_1P_2}^3 = \overline{P_2P_3}^3 = \overline{P_3P_4}^3 = \overline{P_4P_5}^3 = \overline{P_5P_6}^3 = \overline{P_6P_7}^3 = \overline{P_7P_8}^3 = \overline{P_8P_9}^3 = \overline{P_9P_{10}}^3$$

$$\overline{P_1P_2}^3 + \overline{P_3P_4}^3 + \overline{P_5P_6}^3 + \overline{P_7P_8}^3 + \overline{P_9P_{10}}^3 = \overline{P_{10}P_1}^3 + \overline{P_2P_3}^3 + \overline{P_4P_5}^3 + \overline{P_6P_7}^3 + \overline{P_8P_9}^3$$

，故得證原命題成立。

(2) 第(2)類情形，如圖 T6-2，

設 P_{2i-1}' 與 P_{2i}' 平移向量(-a,-b)單位在 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 上之點分別為 Q_{2i-1} 與 Q_{2i}，其中 $1 \le i \le 5$ (於此，視 $A_6 = A_1$)，則

(2-1)

針對第(2)類情形，我們僅考慮 $a > 0$ 且 $b > 0$ 之情形，其餘情形證明方法類似，且為了方便起見，我們令 $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)$，亦即 $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$ 。

則(同『**定理 3**』之證明步驟(v)可得)

$\overline{P_1P_2}=\overline{P_1'P_2'}-u\times\sin\alpha$ 、 $\overline{P_2P_3}=\overline{P_2'P_3'}+u\times\sin(\alpha-\theta)$ 、 $\overline{P_3P_4}=\overline{P_3'P_4'}+u\times\cos(18^\circ+\alpha)$ 、

$\overline{P_4P_5}=\overline{P_4'P_5'}-u\times\cos(18^\circ+\alpha-\theta)$ 、 $\overline{P_5P_6}=\overline{P_5'P_6'}+u\times\sin(36^\circ+\alpha)$ 、

$\overline{P_6P_7}=\overline{P_6'P_7'}-u\times\sin(36^\circ+\alpha-\theta)$ 、 $\overline{P_7P_8}=\overline{P_7'P_8'}-u\times\sin(36^\circ-\alpha)$ 、

$\overline{P_8P_9}=\overline{P_8'P_9'}+u\times\sin(36^\circ-\alpha+\theta)$ 、 $\overline{P_9P_{10}}=\overline{P_9'P_{10}'}-u\times\cos(18^\circ-\alpha)$ 、

$\overline{P_{10}P_1}=\overline{P_{10}'P_1'}+u\times\cos(18^\circ-\alpha+\theta)$ ，其中$u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\times\cos18^\circ}{\sin(72^\circ-\theta)\sin\theta}$ 。

(2-2)令$L_{5,3,1}=\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3+\overline{P_9P_{10}}^3$且$L_{5,3,2}=\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3+\overline{P_8P_9}^3+\overline{P_{10}P_1}^3$，

則因為$\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_2'P_3'}=\overline{P_3'P_4'}=\cdots=\overline{P_{10}'P_1'}$ ，為了方便起見，所以我們再令

$\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_2'P_3'}=\overline{P_3'P_4'}=\cdots=\overline{P_{10}'P_1'}=r$ ，因此可得

$$
\begin{aligned}
L_{5,3,1}&=\overline{P_1P_2}^3+\overline{P_3P_4}^3+\overline{P_5P_6}^3+\overline{P_7P_8}^3+\overline{P_9P_{10}}^3\\
&=(r-u\times\sin\alpha)^3+\left[r+u\times\cos(18^\circ+\alpha)\right]^3+\left[r+u\times\sin(36^\circ+\alpha)\right]^3\\
&\quad+\left[r-u\times\sin(36^\circ-\alpha)\right]^3+\left[r-u\times\cos(18^\circ-\alpha)\right]^3\\
&=\left[r^3-3\times r^2\times u\times\sin\alpha+3\times r\times(u\sin\alpha)^2-(u\sin\alpha)^3\right]\\
&\quad+\left[r^3+3\times r^2\times u\times\cos(18^\circ+\alpha)+3\times r\times(u\times\cos(18^\circ+\alpha))^2+(u\times\cos(18^\circ+\alpha))^3\right]\\
&\quad+\left[r^3+3\times r^2\times u\times\sin(36^\circ+\alpha)+3\times r\times(u\times\sin(36^\circ+\alpha))^2+(u\times\sin(36^\circ+\alpha))^3\right]\\
&\quad+\left[r^3-3\times r^2\times u\times\sin(36^\circ-\alpha)+3\times r\times(u\times\sin(36^\circ-\alpha))^2-(u\times\sin(36^\circ-\alpha))^3\right]\\
&\quad+\left[r^3-3\times r^2\times u\times\cos(18^\circ-\alpha)+3\times r\times(u\times\cos(18^\circ-\alpha))^2-(u\times\cos(18^\circ-\alpha))^3\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{5,3,2}&=\overline{P_2P_3}^3+\overline{P_4P_5}^3+\overline{P_6P_7}^3+\overline{P_8P_9}^3+\overline{P_{10}P_1}^3\\
&=\left[r+u\times\sin(\alpha-\theta)\right]^3+\left[r-u\times\cos(18^\circ+\alpha-\theta)\right]^3+\left[r-u\times\sin(36^\circ+\alpha-\theta)\right]^3\\
&\quad+\left[r+u\times\sin(36^\circ-\alpha+\theta)\right]^3+\left[r+u\times\cos(18^\circ-\alpha+\theta)\right]^3\\
&=\left[r^3+3\times r^2\times u\times\sin(\alpha-\theta)+3\times r\times(u\times\sin(\alpha-\theta))^2+(u\times\sin(\alpha-\theta))^3\right]
\end{aligned}
$$

$$+\left[r^3-3\times r^2\times u\times\cos\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)+3\times r\times\left(u\times\cos\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)\right)^2-\left(u\times\cos\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)\right)^3\right]$$

$$+\left[r^3-3\times r^2\times u\times\sin\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)+3\times r\times\left(u\times\sin\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)\right)^2-\left(u\times\sin\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)\right)^3\right]$$

$$+\left[r^3+3\times r^2\times u\times\sin\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)+3\times r\times\left(u\times\sin\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)\right)^2+\left(u\times\sin\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)\right)^3\right]$$

$$+\left[r^3+3\times r^2\times u\times\cos\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)+3\times r\times\left(u\times\cos\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\right)^2+\left(u\times\cos\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\right)^3\right]$$

所以

$$L_{5,3,1}-L_{5,3,2}$$

$$=-3r^2u\left[\left(\sin\alpha-\cos\left(18^\circ+\alpha\right)-\sin\left(36^\circ+\alpha\right)+\sin\left(36^\circ-\alpha\right)+\cos\left(18^\circ-\alpha\right)\right)\right.$$

$$\left.-\left(-\sin\left(\alpha-\theta\right)+\cos\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)-\cos\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\right)\right]$$

$$+3ru^2\left[\left(\sin^2\alpha+\cos^2\left(18^\circ+\alpha\right)+\sin^2\left(36^\circ+\alpha\right)+\sin^2\left(36^\circ-\alpha\right)+\cos^2\left(18^\circ-\alpha\right)\right)\right.$$

$$\left.-\left(\sin^2\left(\alpha-\theta\right)+\cos^2\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin^2\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin^2\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)+\cos^2\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\right)\right]$$

$$-u^3\left[\left(\sin^3\alpha-\cos^3\left(18^\circ+\alpha\right)-\sin^3\left(36^\circ+\alpha\right)+\sin^3\left(36^\circ-\alpha\right)+\cos^3\left(18^\circ-\alpha\right)\right)\right.$$

$$\left.-\left(-\sin^3\left(\alpha-\theta\right)+\cos^3\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin^3\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin^3\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)-\cos^3\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\right)\right]$$

(2-3)同『**定理 3**』之證明步驟(vi)可得

①$$C_1=\begin{bmatrix}\sin\alpha-\cos\left(18^\circ+\alpha\right)-\sin\left(36^\circ+\alpha\right)+\sin\left(36^\circ-\alpha\right)+\cos\left(18^\circ-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\theta\right)\\-\cos\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)+\cos\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\end{bmatrix}=0$$

②$$C_2=\begin{bmatrix}\sin^2\alpha+\cos^2\left(18^\circ+\alpha\right)+\sin^2\left(36^\circ+\alpha\right)+\sin^2\left(36^\circ-\alpha\right)+\cos^2\left(18^\circ-\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\theta\right)\\-\cos^2\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin^2\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin^2\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)-\cos^2\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\end{bmatrix}=0$$

③$$C_3=\begin{bmatrix}\sin^3\alpha-\cos^3\left(18^\circ+\alpha\right)-\sin^3\left(36^\circ+\alpha\right)+\sin^3\left(36^\circ-\alpha\right)+\cos^3\left(18^\circ-\alpha\right)+\sin^3\left(\alpha-\theta\right)\\-\cos^3\left(18^\circ+\alpha-\theta\right)-\sin^3\left(36^\circ+\alpha-\theta\right)+\sin^3\left(36^\circ-\alpha+\theta\right)+\cos^3\left(18^\circ-\alpha+\theta\right)\end{bmatrix}=0$$

④由上述之①、②與③推知

$$L_{5,3,1}-L_{5,3,2}=-3r^2u\times0+3ru^2\times0-u^3\times0=0$$

，故得證原命題成立。 □

定理 7 之證明

承『**定理 6**』之前提描述，則

$\overline{P_1P_2}^4+\overline{P_3P_4}^4+\overline{P_5P_6}^4+\overline{P_7P_8}^4+\overline{P_9P_{10}}^4=\overline{P_{10}P_1}^4+\overline{P_2P_3}^4+\overline{P_4P_5}^4+\overline{P_6P_7}^4+\overline{P_8P_9}^4$ 。

證明：仿照**定理 6** 之證明方式可證明原命題成立。 □

接下來想考慮 $\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$ 與 $\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$ 是否會相等，其中 $m\geq 5$ 且 m 是正整數，詳述如下之『**定理 8**』。

定理 8 之證明

承『**定理 6**』之前提描述，又若 $m\geq 5$ 且 m 是正整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 乃由正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 平移向量 (a,b) (a 與 b 為實數)再繞著中心點 O 逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$ ，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ 。

(2) 當 $m\geq 5$ 時，**『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$ 與 $\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$ 不再維持恆等』**。

(3) 當 $m=5$ 時，則**僅**當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+36^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 72^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 252^\circ$』或『θ=36°』或『θ=108°』

時，**『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$ 與 $\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$ 仍會相等』**。

(4) 當 $m\geq 6$ 時，則當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+36^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 72^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 252^\circ$』 或『θ=36°』或『θ=108°』

時，**『$\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\overline{P_7P_8}^m+\overline{P_9P_{10}}^m$ 與 $\overline{P_{10}P_1}^m+\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\overline{P_8P_9}^m$ 仍會相等』**。

證明：仿照定理 3 之證明方式可證明原命題成立。 □

從兩全等正 n 邊形所圍 2n 邊形之交錯邊的二次方和與一次方和關係(**定理 1 與定理 2**)、兩全等正三角形之邊所在直線所圍六邊形之交錯邊的 **m** 次方和(**定理 3**)、兩全等正方形之邊所在直線所圍八邊形之交錯邊的 **m** 次方和(**定理 4 與定理 5**)與兩全等正五邊形之邊所在直線所圍十邊形之交錯邊的 **m** 次方和(**定理 6**、**定理 7 與定理 8**)的論證過程中，我們發現一些規律，並且找到了『**引理 1**』的一般化推論，如下『**定理 9**』所示：

定理 9 之證明

已知平面上 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 為兩個全等的正 $n(n\ge 3)$ 邊形，且 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、…、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_{n-1}B_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$ 分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、…、P_{2n-1}、P_{2n} 等 $2n$ 點，當 $2n$ 邊形 $P_1P_2\cdots P_{2n}$ 未落在正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 與正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_{2n}$ 的外部時，亦即 P_1 與 P_2 均落在 $\overline{A_1A_2}$ 上、P_3 與 P_4 均落在 $\overline{A_2A_3}$ 上、…、P_{2n-3} 與 P_{2n-2} 均落在 $\overline{A_{n-1}A_n}$ 上、P_{2n-1} 與 P_{2n} 均落在 $\overline{A_nA_1}$ 上；又若 m 是非負整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 乃由正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 平移向量 (a,b)（a 與 b 為實數)再繞著中心點 O 逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $0\le m\le n-1$ 時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}=\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ (於此，視 $P_{2n+1}=P_1$)。

(3) 當 $m\ge n$ 時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}$ **與** $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ **不再維持恆等**。

(4) 當 $m\ge n$ 時，則當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{180^\circ}{n}\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數 或 $\theta=\dfrac{180^\circ}{n}+\dfrac{360^\circ}{n}\times t_2$，其中 t_2 是整數

且 $\theta\ne\dfrac{360^\circ}{n}+180^\circ\times t_3$，其中 t_3 是整數，$\theta\ne180^\circ\times t_4$，其中 t_4 是整數』

時，$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}$ **與** $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ **仍會相等**。

證明：

(i) 令 $L_{n,m,1}=\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\cdots+\overline{P_{2n-5}P_{2n-4}}^m+\overline{P_{2n-3}P_{2n-2}}^m+\overline{P_{2n-1}P_{2n}}^m$ 且

$L_{n,m,2}=\overline{P_2P_3}^m+\overline{P_4P_5}^m+\overline{P_6P_7}^m+\cdots+\overline{P_{2n-4}P_{2n-3}}^m+\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}^m+\overline{P_{2n}P_1}^m$，則仿照『**定理** 3』的步驟(v)可發現關於 $\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$、$\overline{P_4P_5}$、…、$\overline{P_{2n-3}P_{2n-2}}$、$\overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}$、$\overline{P_{2n-1}P_{2n}}$ 與 $\overline{P_{2n}P_1}$ 等 2n 個線段之規則等式並得

$$
\begin{aligned}
&L_{n,m,1}\\
&=\overline{P_1P_2}^m+\overline{P_3P_4}^m+\overline{P_5P_6}^m+\cdots+\overline{P_{2n-5}P_{2n-4}}^m+\overline{P_{2n-3}P_{2n-2}}^m+\overline{P_{2n-1}P_{2n}}^m\\
&=(r-u\times\sin\alpha)^m+\left[r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha\right)\right]^m+\left[r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times2}{n}-\alpha\right)\right]^m\\
&\quad+\cdots+\left[r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)\right]^m+\left[r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)\right]^m
\end{aligned}
$$

$$=\sum_{q=0}^{m} C_q^m r^{m-q} (-1)^q u^q \sin^q \alpha + \sum_{q=0}^{m} C_q^m r^{m-q} u^q \sin^q \left(\frac{360^\circ}{n} - \alpha\right) + \sum_{q=0}^{m} C_q^m r^{m-q} u^q \sin^q \left(\frac{360^\circ \times 2}{n} - \alpha\right)$$

$$+\cdots+\sum_{q=0}^{m} C_q^m r^{m-q} u^q \sin^q \left(\frac{360^\circ \times (n-2)}{n} - \alpha\right) + \sum_{q=0}^{m} C_q^m r^{m-q} u^q \sin^q \left(\frac{360^\circ \times (n-1)}{n} - \alpha\right)$$

且

$L_{n,m,2}$

$$=\overline{P_2P_3}^m + \overline{P_4P_5}^m + \overline{P_6P_7}^m + \cdots + \overline{P_{2n-4}P_{2n-3}}^m + \overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}^m + \overline{P_{2n}P_1}^m$$

$$=\left[r+u\times\sin(\alpha-\theta)\right]^m + \left[r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right)\right]^m + \left[r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha+\theta\right)\right]^m$$

$$+\cdots+\left[r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)\right]^m + \left[r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)\right]^m$$

$$=\sum_{q=0}^{m} C_q^m r^{m-q} u^q \sin^q(\alpha-\theta) + \sum_{q=0}^{m} C_q^m r^{m-q} (-1)^q u^q \sin^q \left(\frac{360^\circ}{n} - \alpha+\theta\right) + \sum_{q=0}^{m} C_q^m r^{m-q} (-1)^q u^q \sin^q \left(\frac{360^\circ \times 2}{n} - \alpha+\theta\right)$$

$$+\cdots+\sum_{q=0}^{m} C_q^m r^{m-q} (-1)^q u^q \sin^q \left(\frac{360^\circ \times (n-2)}{n} - \alpha+\theta\right) + \sum_{q=0}^{m} C_q^m r^{m-q} (-1)^q u^q \sin^q \left(\frac{360^\circ \times (n-1)}{n} - \alpha+\theta\right)$$

所以

$L_{n,m,1}-L_{n,m,2}$

$$=\sum_{q=0}^{m}\left\{\begin{array}{l} C_q^m r^{m-q} u^q \times \left[\begin{array}{l}(-1)^q \sin^q \alpha + \sin^q\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha\right) + \sin^q\left(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha\right)+\cdots \\ +\sin^q\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)+\sin^q\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)\end{array}\right] \\ -C_q^m r^{m-q} u^q \times \left[\begin{array}{l}\sin^q(\alpha-\theta) + (-1)^q\sin^q\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right) + (-1)^q\sin^q\left(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha+\theta\right) \\ +\cdots+(-1)^q\sin^q\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)+(-1)^q\sin^q\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$=\sum_{q=0}^{m}\left\{\begin{array}{l}C_q^m r^{m-q}u^q\times\left[\begin{array}{l}(-1)^q\sin^q\alpha+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ}{n}-\alpha\right)+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha\right)+\cdots\\+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)\end{array}\right]\\+C_q^m r^{m-q}u^q\times\left[\begin{array}{l}-\sin^q(\alpha-\theta)+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right)+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha+\theta\right)\\+\cdots+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$=\sum_{q=0}^{m}\left\{C_q^m r^{m-q}u^q\times\left[\begin{array}{l}(-1)^q\sin^q\alpha+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ}{n}-\alpha\right)+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha\right)+\cdots+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)\\+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)-\sin^q(\alpha-\theta)+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right)\\+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha+\theta\right)+\cdots+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)\\+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)\end{array}\right]\right\}$$

$$=\sum_{q=1}^{m}\left\{C_q^m r^{m-q}u^q\times\left[\begin{array}{l}(-1)^q\sin^q\alpha+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ}{n}-\alpha\right)+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha\right)+\cdots+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)\\+\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)-\sin^q(\alpha-\theta)+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right)\\+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha+\theta\right)+\cdots+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)\\+(-1)^{q+1}\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)\end{array}\right]\right\}$$

$$=\sum_{q=1}^{m}(-1)^q C_q^m r^{m-q}u^q\times C_q$$

，其中每一個 $q\in\{1,2,3,\cdots,m\}$ ，我們均定義

$$C_q=\begin{bmatrix}\sin^q\alpha+(-1)^q\sin^q\left(\dfrac{360^\circ}{n}-\alpha\right)+(-1)^q\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha\right)+\cdots+(-1)^q\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)\\+(-1)^q\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)+(-1)^{q+1}\sin^q(\alpha-\theta)-\sin^q\left(\dfrac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right)-\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha+\theta\right)\\-\cdots-\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)-\sin^q\left(\dfrac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)\end{bmatrix}$$

(ii) 我們依 n 是奇數或偶數分成兩類情形，討論如下：

(1) 當 n 為奇數，即 $n=2k+1$，其中 k 為正整數時，

接下來，我們將化簡 C_q (其中 $1\le q\le m$)，過程中我們主要利用『**引理 4**』之正弦函數的 q 次方轉換成餘弦函數和公式，我依 q 之值分成四類情形討論如下：

(1-1). 當 $q=4t+1$ 時，其中 t 是正整數或 0，則

同『**定理 3**』之證明步驟(viii)的(1)可得

$$\sin^q\beta=\sin^{4t+1}\beta=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\beta\right]$$

因此

$$C_q=C_{4t+1}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin^{4t+1}\alpha+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ}{2k+1}-\alpha\right)+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{2k+1}-\alpha\right)+\cdots+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times(2k-1)}{2k+1}-\alpha\right)\\+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times 2k}{2k+1}-\alpha\right)+(-1)^{4t+2}\sin^{4t+1}(\alpha-\theta)-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\\-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{2k+1}-\alpha+\theta\right)-\cdots-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times(2k-1)}{2k+1}-\alpha+\theta\right)-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times 2k}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin^{4t+1}\alpha-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ}{2k+1}-\alpha\right)-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{2k+1}-\alpha\right)-\cdots-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times(2k-1)}{2k+1}-\alpha\right)\\-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times 2k}{2k+1}-\alpha\right)+\sin^{4t+1}(\alpha-\theta)-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\\-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times 2}{2k+1}-\alpha+\theta\right)-\cdots-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times(2k-1)}{2k+1}-\alpha+\theta\right)-\sin^{4t+1}\left(\dfrac{360^\circ\times 2k}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\end{bmatrix}$$

$$=\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ}{2k+1}-\alpha\right)\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k+1}-\alpha\right)\right]\right\}$$

$$-\cdots-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k+1}-\alpha\right)\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times 2k}{2k+1}-\alpha\right)\right]\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)(\alpha-\theta)\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]\right\}$$

$$-\cdots-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times 2k}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ}{2k+1}-\alpha\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k+1}-\alpha\right)\right]\\ -\cdots-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k+1}-\alpha\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times 2k}{2k+1}-\alpha\right)\right]\end{array}\right\}\\ +\left\{\begin{array}{l}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)(\alpha-\theta)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]\\ -\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]-\cdots-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k+1}-\alpha\right)\right]\\ -\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times 2k}{2k+1}-\alpha\right)\right]\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$
=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right] \\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k+1)}{2k+1}-\alpha\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-1)}{2k+1}\right)\right] \\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k+1)}{2k+1}-\alpha\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-3)}{2k+1}\right)\right] \\
-\cdots \\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k+1)}{2k+1}-\alpha\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times3}{2k+1}\right)\right] \\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k+1)}{2k+1}-\alpha\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ}{2k+1}\right)\right]
\end{array}\right\} \\
+\left\{\begin{array}{l}
\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)(\alpha-\theta)\right] \\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k+1)}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-1)}{2k+1}\right)\right] \\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k+1)}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-3)}{2k+1}\right)\right] \\
-\cdots \\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k+1)}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times3}{2k+1}\right)\right] \\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k+1)}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ}{2k+1}\right)\right]
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}
$$

$$
=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}
\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)(\alpha-\theta)\right]\right\} \\
-2\left\{\begin{array}{l}
\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-1)}{2k+1}\right)\right]+\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-3)}{2k+1}\right)\right] \\
+\cdots+\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times3}{2k+1}\right)\right]+\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ}{2k+1}\right)\right]
\end{array}\right\} \\
\times\left\{2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(180^\circ-\alpha+\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}
\end{array}\right\}
$$

$$
=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}
\left\{2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\} \\
-2\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right] \\
\times\left\{2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(180^\circ-\alpha+\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}
\end{array}\right\}
$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l} 2\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ \times\left\{\begin{array}{l} \sin\left[(2j-(4t+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ -2\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]\times\sin\left[(2j-(4t+1))\left(180^\circ-\alpha+\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l} 2\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ \times\left\{\begin{array}{l} \sin\left[(2j-(4t+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ -2\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]\times\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l} 4\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ \times\left\{\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]\right\} \end{array}\right\}$$

考慮一般情形之 t 值，則 $q=4t+1$ 且推知 $0\le j\le 4t+1$，此時可得 C_q 之值如下：

(1-1-1) 我們發現了如下(甲) 與(乙)二個結果：

(甲). 當 $j-\frac{(4t+1)-(2k+1)}{2}=(2k+1)v$ 時，其中 v 是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]\right\}=\frac{2k+1}{2}\ ;$$

(乙). 當 $j-\frac{(4t+1)-(2k+1)}{2}\ne(2k+1)v$ 時，其中 v 是整數，則

$$\left\{\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]\right\}=0\ ;$$

我們將分別證明上述(甲)與(乙)二個結果如下：

(甲). 當 $j-\frac{(4t+1)-(2k+1)}{2}=(2k+1)v$ 時，其中 v 是整數，則

(甲-1). $\quad j-(2t-k)=(2k+1)v$

$$\Rightarrow j=(2t-k)+(2k+1)v$$

$$=2\times\left(\frac{q-1}{4}\right)-k+(2k+1)v$$

$$=\left(\frac{q-1}{2}\right)-\frac{2k}{2}+(2k+1)v$$

$$=\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}$$

$$\Rightarrow j+1=\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2}{2}$$

(甲-2). $0\le j\le 4t+1$

$$\Rightarrow 0\le(2t-k)+(2k+1)v\le 4t+1$$

$$\Rightarrow \frac{-2t+k}{2k+1}\le v\le\frac{2t+k+1}{2k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{-2\times\left(\frac{q-1}{4}\right)+k}{2k+1}\le v\le\frac{2\times\left(\frac{q-1}{4}\right)+k+1}{2k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\le v\le\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}$$

$$\Rightarrow \left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil\le v\le\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor$$

(甲-3). 此時，$2j-(4t+1)=2\left[(2t-k)+(2k+1)v\right]-(4t+1)$

$$=\left[4t-2k+2(2k+1)v\right]-(4t+1)$$

$$=2(2k+1)v-(2k+1)$$

$$=(2k+1)(2v-1)$$ 。

(甲-4). 由上述步驟(甲-3)之結果得知

$$\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2k+1)(2v-1)\left(\frac{180^\circ\times(2k-2i+1)}{2k+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2v-1)(2k-2i+1)\times180^\circ\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos180^\circ$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}(-1)$$

$$=\frac{1}{2}-(-k)$$

$$=\frac{2k+1}{2}$$

，故得證命題(甲)成立。

(乙). 當 $j-\dfrac{(4t+1)-(2k+1)}{2}\neq(2k+1)v$ 時，其中 v 是整數，則

$j-\dfrac{(4t+1)-(2k+1)}{2}=(2k+1)v+f$ ，其中 $f\in\{1,2,\cdots,2k\}$ 。

(乙-1). $j-(2t-k)=(2k+1)v+f$

$$\Rightarrow j=(2t-k)+(2k+1)v+f$$

$$=2\times\left(\frac{q-1}{4}\right)-k+(2k+1)v+f$$

$$=\left(\frac{q-1}{2}\right)-\frac{2k}{2}+(2k+1)v+f$$

$$=\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2f}{2}$$

$$\Rightarrow j+1=\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2f+2}{2}$$

(乙-2). $0\leq j\leq 4t+1$

$$\Rightarrow 0\leq(2t-k)+(2k+1)v+f\leq 4t+1$$

$$\Rightarrow\frac{-2t+k-f}{2k+1}\leq v\leq\frac{2t+k+1-f}{2k+1}$$

$$\Rightarrow\frac{-2\times\left(\frac{q-1}{4}\right)+k-f}{2k+1}\leq v\leq\frac{2\times\left(\frac{q-1}{4}\right)+k+1-f}{2k+1}$$

$$\Rightarrow\frac{-q+(2k+1)-2f}{2(2k+1)}\leq v\leq\frac{q+(2k+1)-2f}{2(2k+1)}$$

$$\Rightarrow\left\lceil\frac{-q+(2k+1)-2f}{2(2k+1)}\right\rceil\leq v\leq\left\lfloor\frac{q+(2k+1)-2f}{2(2k+1)}\right\rfloor$$

(乙-3). 此時， $2j-(4t+1)=2\left[(2t-k)+(2k+1)v+f\right]-(4t+1)$

$$=\left[4t-2k+2(2k+1)v+2f\right]-(4t+1)$$

$$=2(2k+1)v-(2k+1)+2f$$

$$=(2k+1)(2v-1)+2f\ 。$$

(乙-4). 由上述步驟(乙-3)之結果得知

$$\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^{\circ}\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\left((2k+1)(2v-1)+2f\right)\left(\frac{180^{\circ}\times(2k-2i+1)}{2k+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2v-1)(2k-2i+1)\times180^{\circ}+\frac{2f\times(2k-2i+1)\times180^{\circ}}{2k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[180^{\circ}+\frac{2f\times(2k-2i+1)\times180^{\circ}}{2k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\frac{2f\times\left((2k+1)-2i\right)\times180^{\circ}}{2k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\frac{2f\times(2k+1)\times180^{\circ}-2f\times2i\times180^{\circ}}{2k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\cos\left[2f\times180^{\circ}-\frac{4fi\times180^{\circ}}{2k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\frac{fi\times720^{\circ}}{2k+1}\right]$$

令 $p=\sum_{i=1}^{k}\cos\left(\frac{f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)$

$$\Rightarrow p\times\left(2\sin\left(\frac{f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}2\cos\left(\frac{fi\times720^{\circ}}{2k+1}\right)\sin\left(\frac{f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left[\sin\left(\frac{(i+1)\times f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)-\sin\left(\frac{(i-1)\times f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)\right]$$

$$=\left[\sin\left(\frac{2\times f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)-\sin\left(\frac{0\times f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)\right]+\left[\sin\left(\frac{3\times f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)-\sin\left(\frac{1\times f\times720^{\circ}}{2k+1}\right)\right]$$

$$+\left[\sin\left(\frac{4\times f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)-\sin\left(\frac{2\times f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)\right]+\cdots+\left[\sin\left(\frac{(k-1)\times f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)-\sin\left(\frac{(k-3)\times f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)\right]$$

$$+\left[\sin\left(\frac{k\times f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)-\sin\left(\frac{(k-2)\times f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)\right]+\left[\sin\left(\frac{(k+1)\times f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)-\sin\left(\frac{(k-1)\times f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)\right]$$

$$=0-\sin\left(\frac{f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)+\sin\left(\frac{k\times f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)+\sin\left(\frac{(k+1)\times f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)$$

$$=-\sin\left(\frac{f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)+2\sin(f\times 360^{\circ})\cos\left(\frac{f\times 360^{\circ}}{2k+1}\right)$$

$$=-\sin\left(\frac{f\times 720^{\circ}}{2k+1}\right)+0$$

$$\Rightarrow p=-\frac{1}{2}$$

故

$$\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^{\circ}\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\cos\left[\frac{fi\times 720^{\circ}}{2k+1}\right]=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

，故得證命題(乙)成立。

(1-1-2) 利用上述命題(甲)與(乙)等二個結果，我們可以將 C_q 的值化簡如下：

$$C_q=C_{4t+1}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}4\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\\ \times\left\{\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^{\circ}\times(2k-(2i-1))}{2k+1}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2^q}\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}\\ \left\{4\sin\left[(2(2k+1)v-(2k+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[(2(2k+1)v-(2k+1))\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\left\{\frac{2k+1}{2}\right\}\right\}\end{array}\right\}$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}} \\
\left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\right\}
\end{array}\right\}
$$

(1-2). 當 $q=4t+2$ 時，其中 t 是正整數或 0，則類似上述(1-1)之證明過程可得

$$C_q=C_{4t+2}$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)+2}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}} \\
\left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\right\}
\end{array}\right\}
$$

(1-3). 當 $q=4t+3$ 時，其中 t 是正整數或 0，則類似上述(1-1)之證明過程可得

$$C_q=C_{4t+3}$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}} \\
\left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\right\}
\end{array}\right\}
$$

(1-4). 當 $q=4t$ 時，其中 t 是正整數，則類似上述(1-1)之證明過程可得

$$C_q=C_{4t}$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}} \\
\left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\right\}
\end{array}\right\}
$$

(2) 當 n 為偶數，即 $n=2k$，其中 k 為正整數時，

接下來，我們化簡將 C_q (其中 $1\le q\le m$)，過程中我們主要利用『**引理 4**』之正弦函數的 q 次方轉換成餘弦函數和公式，我依 q 之值分成四類情形討論如下：

(2-1). 當 $q=4t+1$ 時，其中 t 是正整數或 0，則

同『**定理 3**』之證明步驟(viii)的(1)可得

$$\sin^q\beta=\sin^{4t+1}\beta=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\beta\right]$$

因此

$$C_q=C_{4t+1}$$

$$=\left[\begin{array}{l}\sin^{4t+1}\alpha+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ}{2k}-\alpha\right)+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k}-\alpha\right)+\cdots+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times k}{2k}-\alpha\right)\\ +\cdots+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times(2k-2)}{2k}-\alpha\right)+(-1)^{4t+1}\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k}-\alpha\right)\\ +(-1)^{4t+2}\sin^{4t+1}(\alpha-\theta)-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ}{2k}-\alpha+\theta\right)-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k}-\alpha+\theta\right)-\cdots-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times 2k}{2k}-\alpha+\theta\right)\\ -\cdots-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times(2k-2)}{2k}-\alpha+\theta\right)-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k}-\alpha+\theta\right)\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{l}\sin^{4t+1}\alpha-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ}{2k}-\alpha\right)-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k}-\alpha\right)-\cdots-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times k}{2k}-\alpha\right)\\ -\cdots-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times(2k-2)}{2k}-\alpha\right)-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k}-\alpha\right)\\ +\sin^{4t+1}(\alpha-\theta)-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ}{2k}-\alpha+\theta\right)-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k}-\alpha+\theta\right)-\cdots-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times 2k}{2k}-\alpha+\theta\right)\\ -\cdots-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times(2k-2)}{2k}-\alpha+\theta\right)-\sin^{4t+1}\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k}-\alpha+\theta\right)\end{array}\right]$$

$$=\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ}{2k}-\alpha\right)\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k}-\alpha\right)\right]\right\}$$

$$-\cdots-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times k}{2k}-\alpha\right)\right]\right\}$$

$$-\cdots-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{360^\circ\times(2k-2)}{2k}-\alpha\right)\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k}-\alpha\right)\right]\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[(2j-(4t+1))(\alpha-\theta)\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ}{2k}-\alpha+\theta\right)\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k}-\alpha+\theta\right)\right]\right\}$$

$$-\cdots-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times 2k}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]\right\}$$

$$-\cdots-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times(2k-2)}{2k}-\alpha+\theta\right)\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k+1}-\alpha+\theta\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\sin\left[(2j-(4t+1))\alpha\right]-\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ}{2k}-\alpha\right)\right]-\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k+1}-\alpha\right)\right]\\ -\cdots-\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times k}{2k}-\alpha\right)\right]-\cdots-\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times(2k-2)}{2k}-\alpha\right)\right]\\ -\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k}-\alpha\right)\right]\end{array}\right\}\\ +\left\{\begin{array}{l}\sin\left[(2j-(4t+1))(\alpha-\theta)\right]-\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ}{2k}-\alpha+\theta\right)\right]\\ -\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times 2}{2k}-\alpha+\theta\right)\right]-\cdots-\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times k}{2k}-\alpha\right)\right]\\ -\cdots-\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times(2k-2)}{2k}-\alpha\right)\right]-\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{360^\circ\times(2k-1)}{2k}-\alpha\right)\right]\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$
=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(180^\circ-\alpha\right)\right]\\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2k}{2k}-\alpha\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-2)}{2k}\right)\right]\\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2k}{2k}-\alpha\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-4)}{2k}\right)\right]\\
-\cdots\\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2k}{2k}-\alpha\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 4}{2k}\right)\right]\\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2k}{2k}-\alpha\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2}{2k}\right)\right]
\end{array}\right\}\\
+\left\{\begin{array}{l}
\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\theta\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(180^\circ-\alpha+\theta\right)\right]\\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2k}{2k}-\alpha+\theta\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-2)}{2k}\right)\right]\\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2k}{2k}-\alpha+\theta\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-4)}{2k}\right)\right]\\
-\cdots\\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2k}{2k}-\alpha+\theta\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 4}{2k}\right)\right]\\
-2\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2k}{2k}-\alpha+\theta\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2}{2k}\right)\right]
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}
$$

$$
=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}
\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\alpha\right]+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\theta\right)\right]\right\}\\
-\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(180^\circ-\alpha\right)\right]+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(180^\circ-\alpha+\theta\right)\right]\right\}\\
-2\left\{\begin{array}{l}
\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-2)}{2k}\right)\right]+\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-4)}{2k}\right)\right]\\
+\cdots+\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 4}{2k}\right)\right]+\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2}{2k}\right)\right]
\end{array}\right\}\\
\times\left\{\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(180^\circ-\alpha\right)\right]+\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(180^\circ-\alpha+\theta\right)\right]\right\}
\end{array}\right\}
$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}\left\{2\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\\ -2\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}+\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-2)}{2k}\right)\right]+\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-4)}{2k}\right)\right]\\ +\cdots+\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times4}{2k}\right)\right]+\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times2}{2k}\right)\right]\end{array}\right\}\\ \times\left\{2\sin\left[(2j-(4t+1))\left(180^\circ-\alpha+\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[(2j-(4t+1))\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}2\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\\ \times\left\{\begin{array}{l}\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\\ -2\left\{\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k-1}\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-2i)}{2k}\right)\right]\right\}\times\sin\left[(2j-(4t+1))\left(180^\circ-\alpha+\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}2\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\\ \times\left\{\begin{array}{l}\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\\ -2\left\{\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k-1}\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-2i)}{2k}\right)\right]\right\}\times\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}-4\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\\ \times\left\{-\sum_{i=1}^{k-1}\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-2i)}{2k}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

(2-1-1)

$$令\ p=\sum_{i=1}^{k-1}\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-2i)}{2k}\right)\right]$$

$$p\times2\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ}{2k}\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1}2\cos\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ\times(2k-2i)}{2k}\right)\right]\sin\left[(2j-(4t+1))\left(\frac{180^\circ}{2k}\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1}\left[\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-2i+1)}{2k}\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-2i-1)}{2k}\right)\right]\right]$$

$$=\left[\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-1)}{2k}\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-3)}{2k}\right)\right]\right]$$

$$+\left[\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-3)}{2k}\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-5)}{2k}\right)\right]\right]$$

$$+\cdots+\left[\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 5}{2k}\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 3}{2k}\right)\right]\right]$$

$$+\left[\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 3}{2k}\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ}{2k}\right)\right]\right]$$

$$=\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times(2k-1)}{2k}\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ}{2k}\right)\right]$$

$$=\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times 2k-180^\circ}{2k}\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ}{2k}\right)\right]$$

$$=\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(180^\circ-\frac{180^\circ}{2k}\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ}{2k}\right)\right]$$

$$=\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ}{2k}\right)\right]-\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ}{2k}\right)\right]$$

$$=0$$

(2-1-2)

$$C_q=C_{4t+1}$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{\begin{array}{l}-4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\\ \times\left\{-\sum_{i=1}^{k-1}\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{180^\circ\times\left(2k-2i\right)}{2k}\right)\right]\right\}\end{array}\right.$$

$$=\frac{1}{2^{4t+1}}\sum_{j=0}^{4t+1}(-1)^{j+1}C_j^{4t+1}\left\{-4\sin\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\left[\left(2j-(4t+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\times 0\right\}$$

$$=0$$

(2-2). 當 $q=4t+2$ 時，其中 t 是正整數或 0，則類似上述(2-1)之證明過程可得

$$C_q = C_{4t+2}$$

$$= -\frac{k}{2^{q-2}} \sum_{v=\left\lceil \frac{-q+2k}{4k} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{q+2k}{4k} \right\rfloor} (-1)^{\frac{q+4kv-2k+2}{2}} C^{q}_{\frac{q+4kv-2k}{2}} \left\{ \sin\left[(4kv-2k)\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) \right] \times \sin\left[(4kv-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\}$$

(2-3). 當 $q = 4t+3$ 時，其中 t 是正整數或 0，則類似上述(2-1)之證明過程可得

$$C_q = C_{4t+3} = 0$$

(2-4). 當 $q = 4t$ 時，其中 t 是正整數，則類似上述(2-1)之證明過程可得

$$C_q = C_{4t}$$

$$= -\frac{k}{2^{q-2}} \sum_{v=\left\lceil \frac{-q+2k}{4k} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{q+2k}{4k} \right\rfloor} (-1)^{\frac{q+4kv-2k}{2}} C^{q}_{\frac{q+4kv-2k}{2}} \left\{ \sin\left[(4kv-2k)\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) \right] \times \sin\left[(4kv-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\}$$

(iii)承上述所述，雖然『$\sum_{k=1}^{n} \overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}$ **與** $\sum_{k=1}^{n} \overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ **不再維持恆等**』，其中 $m \geq n$ 且 m 是正整數，但我們想進一步的了解要滿足什麼條件，才可以確定『$\sum_{k=1}^{n} \overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m}$ **與** $\sum_{k=1}^{n} \overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$ **仍會相等**』，詳述如下：

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{P_{2k-1}P_{2k}}^{m} = \sum_{k=1}^{n} \overline{P_{2k}P_{2k+1}}^{m}$$

$$\Rightarrow L_{n,m,1} - L_{n,m,2} = 0$$

$$\Rightarrow -C^m_1 r^{m-1} u \times C_1 + C^m_2 r^{m-2} u^2 \times C_2 - C^m_3 r^{m-3} u^3 \times C_3 + C^m_4 r^{m-4} u^4 \times C_4 + \cdots$$
$$+ (-1)^q C^m_q r^{m-q} u^q \times C_q + \cdots + (-1)^{m-1} C^m_{m-1} r u^{m-1} \times C_{m-1} + (-1)^m C^m_m u^m \times C_m = 0$$

，其中 $u = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\dfrac{(n-2)\times 180^\circ}{n} - 90^\circ \right)}{\sin\left(180^\circ - \dfrac{(n-2)\times 180^\circ}{n} - \theta \right) \times \sin\theta}$ ，

$\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \cdots = \overline{P_{2n-2}P_{2n-1}} = \overline{P_{2n-1}P_{2n}} = \overline{P_{2n}P_1} = r$ ，且 C_q 如上述步驟(i)中之定義，C_q 之值依 q 之值分別為 $q = 4t+1$ 、 $q = 4t+2$ 、 $q = 4t+3$ 、 $q = 4t$ 分成四大類，其中 t 是正整數或零，如下所示：

(1) 當 $n = 2k+1$ 時，我們有如下之結果：

①. 當 $q = 4t+1$ 時，其中 t 是正整數或 0，則

$$C_q=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\};$$

②. 當 $q=4t+2$ 時，其中 t 是正整數或 0，則

$$C_q=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)+2}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\};$$

③. 當 $q=4t+3$ 時，其中 t 是正整數或 0，則

$$C_q=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\};$$

④. 當 $q=4t$ 時，其中 t 是正整數，則

$$C_q=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}}C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}。$$

我們發現如下結果：

(1-1). 考慮角度

當『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{180^\circ}{n}\times t_1\right)$, 其中 t_1 是整數 或 $\theta=\dfrac{180^\circ}{n}+\dfrac{360^\circ}{n}\times t_2$, 其中 t_2 是整數

且 $\theta\neq\dfrac{360^\circ}{n}+180^\circ\times t_3$, 其中 t_3 是整數，$\theta\neq180^\circ\times t_4$, 其中 t_4 是整數』時，$C_q=0$。

理由如下：

$$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1\right)\Rightarrow\frac{b}{a}=\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1\right)\Rightarrow\tan\alpha=\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{180^\circ}{n} \times t_1 + 180^\circ \times t_2$$，其中t_2是整數，

推知

①. $\sin\left[(2nv-n)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right] = \sin\left[(2nv-n)\left(\left(\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1+180^\circ\times t_2\right)-\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$$= \sin\left[(2nv-n)\left(\frac{180^\circ}{n}\times t_1+180^\circ\times t_2\right)\right] = \sin\left[(2v-1)(t_1+nt_2)\times 180^\circ\right] = 0$$

②. $\sin\left[(2nv-2n)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right] = \sin\left[(2nv-2n)\left(\left(\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1+180^\circ\times t_2\right)-\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$$= \sin\left[(2nv-2n)\left(\frac{180^\circ}{n}\times t_1+180^\circ\times t_2\right)\right] = \sin\left[(2v-2)(t_1+nt_2)\times 180^\circ\right] = 0$$

(1-2). 當$1\le q\le n-1=2k$時，我們再依q之值分成四大類討論如下：

①. 當$q=4t+1$時，其中t是正整數或 0，則

$$\left\lceil \frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rceil \ge \left\lceil \frac{-2k+(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{2(2k+1)} \right\rceil = 1$$

$$\left\lfloor \frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{2k+(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4k+1}{4k+2} \right\rfloor = 0$$

$$\Rightarrow C_q = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2k+1}{2^{q-1}} \sum_{v=1}^{0} (-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2}{2}} C^q_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}} \\ \left\{ \sin\left[(2(2k+1)v-(2k+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right) \right] \times \cos\left[(2(2k+1)v-(2k+1))\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \end{array} \right\} = 0$$

②. 當$q=4t+2$時，其中t是正整數或 0，則

$$\left\lceil \frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rceil \ge \left\lceil \frac{-2k+2(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rceil = \left\lceil \frac{2k+2}{2(2k+1)} \right\rceil = 1$$

$$\left\lfloor \frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{2k+2(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6k+2}{4k+2} \right\rfloor = 1$$

$$\Rightarrow C_q = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{2k+1}{2^{q-1}} \sum_{v=1}^{1} (-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)+2}{2}} C^q_{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}} \\ \left\{ \sin\left[(2(2k+1)v-2(2k+1))\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right) \right] \times \sin\left[(2(2k+1)v-2(2k+1))\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \end{array} \right\}$$

$$=-\frac{2k+1}{2^{q-1}}\times(-1)^{\frac{q+2}{2}}C_{\frac{q}{2}}^{q}\left\{\sin\left[0\times\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[0\times\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}=0$$

③. 當 $q=4t+3$ 時，其中 t 是正整數或 0，則

$$\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil\geq\left\lceil\frac{-2k+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil=\left\lceil\frac{1}{2(2k+1)}\right\rceil=1$$

$$\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{2k+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{4k+1}{4k+2}\right\rfloor=0$$

$$\Rightarrow C_q=\left\{\begin{array}{l}\frac{2k+1}{2^{q-1}}\sum_{v=1}^{0}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}C_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}^{q}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}=0$$

④. 當 $q=4t$ 時，其中 t 是正整數，則

$$\left\lceil\frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil\geq\left\lceil\frac{-2k+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil=\left\lceil\frac{2k+2}{2(2k+1)}\right\rceil=1$$

$$\left\lfloor\frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{2k+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{6k+2}{4k+2}\right\rfloor=1$$

$$\Rightarrow C_q=\left\{\begin{array}{l}-\frac{2k+1}{2^{q-1}}\sum_{v=1}^{1}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}}C_{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}}^{q}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=-\frac{2k+1}{2^{q-1}}\times(-1)^{\frac{q}{2}}C_{\frac{q}{2}}^{q}\left\{\sin\left[0\times\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[0\times\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}=0$$

(1-3). 當 $q\geq n=2k+1$ 時，我們再依 q 之值分成四大類討論如下：

①. 當 $q=4t+1$ 時，其中 t 是正整數或 0，則

$$\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil\leq\left\lceil\frac{-(2k+1)+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil=\left\lceil\frac{0}{2(2k+1)}\right\rceil=0$$

$$\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor\geq\left\lfloor\frac{(2k+1)+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{4k+2}{4k+2}\right\rfloor=1$$

$$\Rightarrow C_q = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2k+1}{2^{q-1}} \displaystyle\sum_{v=\left\lceil \frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rfloor} (-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)+2}{2}} C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}} \\ \left\{ \sin\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right) \right] \times \cos\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{2k+1}{2^{q-1}} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\frac{q-(2k+1)+2}{2}} C^{q}_{\frac{q-(2k+1)}{2}} \left\{ \sin\left[\left(-(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right) \right] \times \cos\left[\left(-(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \\ +(-1)^{\frac{q+(2k+1)+2}{2}} C^{q}_{\frac{q+(2k+1)}{2}} \sin\left[(2k+1)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right) \right] \times \cos\left[(2k+1)\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \right] + \cdots \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow C_q$ 不保證恆等於零 。

②. 當 $q = 4t+2$ 時，其中 t 是正整數或 0，則

$$\left\lceil \frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rceil \le \left\lceil \frac{-(2k+1)+2(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1$$

$$\left\lfloor \frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rfloor \ge \left\lfloor \frac{(2k+1)+2(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1$$

$$\Rightarrow C_q = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{2k+1}{2^{q-1}} \displaystyle\sum_{v=\left\lceil \frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rfloor} (-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)+2}{2}} C^{q}_{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}} \\ \left\{ \sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right) \right] \times \sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{2k+1}{2^{q-1}} (-1)^{\frac{q+2}{2}} C^{q}_{\frac{q}{2}} \left\{ \sin\left[0 \times \left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right) \right] \times \sin\left[0 \times \left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} + \cdots = 0 + \cdots$$

$\Rightarrow C_q$ 不保證恆等於零 。

③. 當 $q = 4t+3$ 時，其中 t 是正整數或 0，則

$$\left\lceil \frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rceil \le \left\lceil \frac{-(2k+1)+(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rceil = \left\lceil \frac{0}{2(2k+1)} \right\rceil = 0$$

$$\left\lfloor \frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rfloor \ge \left\lfloor \frac{(2k+1)+(2k+1)}{2(2k+1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4k+2}{4k+2} \right\rfloor = 1$$

$$\Rightarrow C_q=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}C^q_{\frac{q+2(2k+1)v-(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(2(2k+1)v-(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{2k+1}{2^{q-1}}\left\{\begin{array}{l}(-1)^{\frac{q-(2k+1)}{2}}C^q_{\frac{q-(2k+1)}{2}}\left\{\sin\left[\left(-(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[\left(-(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\\ +(-1)^{\frac{q+(2k+1)}{2}}C^q_{\frac{q+(2k+1)}{2}}\sin\left[(2k+1)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\cos\left[(2k+1)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]+\cdots\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow C_q$ 不保證恆等於零。

④. 當 $q=4t$ 時，其中 t 是正整數，則

$$\left\lceil\frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil\leq\left\lceil\frac{-(2k+1)+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil=\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil=1$$

$$\left\lfloor\frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor\geq\left\lfloor\frac{(2k+1)+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor=1$$

$$\Rightarrow C_q=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{2k+1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2(2k+1)}{2(2k+1)}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}}C^q_{\frac{q+2(2k+1)v-2(2k+1)}{2}}\\ \left\{\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\alpha-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[\left(2(2k+1)v-2(2k+1)\right)\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\end{array}\right\}$$

$$=-\frac{2k+1}{2^{q-1}}\times(-1)^{\frac{q}{2}}C^q_{\frac{q}{2}}\left\{\sin\left[0\times\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[0\times\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}+\cdots=0+\cdots$$

$\Rightarrow C_q$ 不保證恆等於零。

(2) 當 $n=2k$ 時，我們有如下之結果：

①. 當 $q=4t+1$ 時，其中 t 是正整數或 0，則 $C_q=0$;

②. 當 $q=4t+2$ 時，其中 t 是正整數或 0，則

$$C_q=-\frac{k}{2^{q-2}}\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2k}{4k}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2k}{4k}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+4kv-2k+2}{2}}C^q_{\frac{q+4kv-2k}{2}}\left\{\sin\left[(4kv-2k)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[(4kv-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\};$$

③. 當 $q=4t+3$ 時，其中 t 是正整數或 0，則 $C_q=0$;

④. 當 $q=4t$ 時，其中 t 是正整數，則

$$C_q=-\frac{k}{2^{q-2}}\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2k}{4k}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2k}{4k}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+4kv-2k}{2}}C^q_{\frac{q+4kv-2k}{2}}\left\{\sin\left[(4kv-2k)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[(4kv-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}。$$

我們發現如下結果：

(2-1). 考慮角度

當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1\right)$, 其中$t_1$是整數 或 $\theta=\frac{180^\circ}{n}+\frac{360^\circ}{n}\times t_2$, 其中$t_2$是整數

且$\theta\neq\frac{360^\circ}{n}+180^\circ\times t_3$, 其中$t_3$是整數，$\theta\neq180^\circ\times t_4$, 其中$t_4$是整數』時，$C_q=0$。

理由如下：

$$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1\right)\Rightarrow\frac{b}{a}=\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1\right)\Rightarrow\tan\alpha=\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1\right)$$

$\Rightarrow\alpha=\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1+180^\circ\times t_2$，其中$t_2$是整數，

推知

$$\sin\left[(2nv-2n)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]=\sin\left[(2nv-2n)\left(\left(\frac{\theta}{2}+\frac{180^\circ}{n}\times t_1+180^\circ\times t_2\right)-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=\sin\left[(2nv-2n)\left(\frac{180^\circ}{n}\times t_1+180^\circ\times t_2\right)\right]=\sin\left[(2v-2)(t_1+nt_2)\times180^\circ\right]=0$$

(2-2). 當$1\le q\le n-1=2k-1$時，我們再依q之值分成四大類討論如下：

①. 當$q=4t+1$時，其中t是正整數或 0，則$C_q=0$。

②. 當$q=4t+2$，其中t是正整數或 0，則

$$\left\lceil\frac{-q+2k}{4k}\right\rceil\ge\left\lceil\frac{-(2k-1)+2k}{4k}\right\rceil=\left\lceil\frac{1}{4k}\right\rceil=1$$

$$\left\lfloor\frac{q+2k}{4k}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{(2k-1)+2k}{4k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{4k-1}{4k}\right\rfloor=0$$

$$\Rightarrow C_q=-\frac{k}{2^{q-2}}\sum_{v=1}^{0}(-1)^{\frac{q+4kv-2k+2}{2}}C^q_{\frac{q+4kv-2k}{2}}\left\{\sin\left[(4kv-2k)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[(4kv-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}=0$$

③. 當$q=4t+3$時，其中t是正整數或 0，則$C_q=0$。

④. 當$q=4t$，其中t是正整數，則

$$\left\lceil\frac{-q+2k}{4k}\right\rceil\geq\left\lceil\frac{-(2k-1)+2k}{4k}\right\rceil=\left\lceil\frac{1}{4k}\right\rceil=1$$

$$\left\lfloor\frac{q+2k}{4k}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{(2k-1)+2k}{4k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{4k-1}{4k}\right\rfloor=0$$

$$\Rightarrow C_q=-\frac{k}{2^{q-2}}\sum_{v=1}^{0}(-1)^{\frac{q+4kv-2k}{2}}C^q_{\frac{q+4kv-2k}{2}}\left\{\sin\left[(4kv-2k)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[(4kv-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}=0$$

(2-3). 當 $q\geq n=2k$ 時，我們再依 q 之值分成四大類討論如下：

①. 當 $q=4t+1$ 時，其中 t 是正整數或 0，則 $C_q=0$。

②. 當 $q=4t+2$，其中 t 是正整數或 0，則

$$\left\lceil\frac{-q+2k}{4k}\right\rceil\leq\left\lceil\frac{-2k+2k}{4k}\right\rceil=\left\lceil\frac{0}{4k}\right\rceil=0$$

$$\left\lfloor\frac{q+2k}{4k}\right\rfloor\geq\left\lfloor\frac{2k+2k}{4k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{4k}{4k}\right\rfloor=1$$

$$\Rightarrow C_q=-\frac{k}{2^{q-2}}\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2k}{4k}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2k}{4k}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+4kv-2k+2}{2}}C^q_{\frac{q+4kv-2k}{2}}\left\{\sin\left[(4kv-2k)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[(4kv-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

$$=-\frac{k}{2^{q-2}}\left\{\begin{array}{l}(-1)^{\frac{q-2k+2}{2}}C^q_{\frac{q-2k}{2}}\left\{\sin\left[(-2k)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[(-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\\+(-1)^{\frac{q+2k+2}{2}}C^q_{\frac{q+2k}{2}}\left\{\sin\left[2k\times\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[2k\times\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}+\cdots\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow C_q$ 不保證恆等於零。

③. 當 $q=4t+3$ 時，其中 t 是正整數或 0，則 $C_q=0$。

④. 當 $q=4t$，其中 t 是正整數，則

$$\left\lceil\frac{-q+2k}{4k}\right\rceil\leq\left\lceil\frac{-2k+2k}{4k}\right\rceil=\left\lceil\frac{0}{4k}\right\rceil=0$$

$$\left\lfloor\frac{q+2k}{4k}\right\rfloor\geq\left\lfloor\frac{2k+2k}{4k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{4k}{4k}\right\rfloor=1$$

$$\Rightarrow C_q=-\frac{k}{2^{q-2}}\sum_{v=\left\lceil\frac{-q+2k}{4k}\right\rceil}^{\left\lfloor\frac{q+2k}{4k}\right\rfloor}(-1)^{\frac{q+4kv-2k}{2}}C^q_{\frac{q+4kv-2k}{2}}\left\{\sin\left[(4kv-2k)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[(4kv-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

$$=-\frac{k}{2^{q-2}}\left\{\begin{array}{l}(-1)^{\frac{q-2k}{2}}C^{q}_{\frac{q-2k}{2}}\left\{\sin\left[(-2k)\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[(-2k)\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}\\+(-1)^{\frac{q+2k}{2}}C^{q}_{\frac{q+2k}{2}}\left\{\sin\left[2k\times\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)\right]\times\sin\left[2k\times\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}+\cdots\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow C_q$ 不保證恆等於零。

綜合上述步驟(i)、(ii)與(iii)之結果，得證原命題成立。 □

經使用 Geogebra 軟體測試之後，我們發現『引理 1』中，當六邊形 $PQRSTU$ 有部分落在兩個正三角形外部時，則交錯邊之一次方和不再總是相等，但是經過適當地調整各邊長的『正』與『負』，我們發現如下的結果，詳述如下之『**定理 10**』。

定理 10 之證明

承『**引理 1**』之前提描述，當六邊形 $PQRSTU$ 有落在正三角形 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 的外部時，則

(1) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，如下圖 T10-1-1 所示，則 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}+\overline{ST}-\overline{UP}$ 。

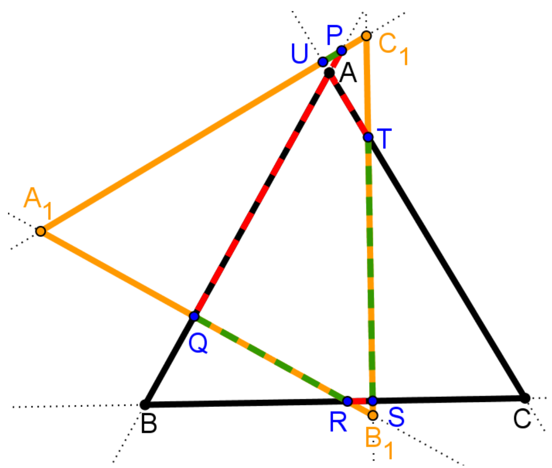


圖 T10-1-1

證明：

(i) $\because \angle UAP=\angle PA_1Q$ 且 $\angle APU=\angle A_1PQ$ ，$\therefore \Delta APU\sim\Delta A_1PQ$ (AA相似)；

同理可得 $\Delta A_1PQ\sim\Delta BRQ$，$\Delta BRQ\sim\Delta B_1RS$，$\Delta B_1RS\sim\Delta CTS$，$\Delta CTS\sim\Delta C_1TU$，$\Delta C_1TU\sim\Delta APU$

，故 $\Delta APU \sim \Delta A_1PQ \sim \Delta BRQ \sim \Delta B_1RS \sim \Delta CTS \sim \Delta C_1TU$ 。

(ii) 為了方便起見，我們分別以 l_1、l_1'、l_2、l_2'、l_3、l_3' 表示 ΔAPU 、ΔA_1PQ 、ΔBRQ 、ΔB_1RS 、ΔCTS 、ΔC_1TU 等六個三角形的周長，則 $\frac{l_1'}{l_1}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{UP}}$ ，$\frac{l_2'}{l_1}=\frac{\overline{RS}}{\overline{UP}}$ ，$\frac{l_3'}{l_1}=\frac{\overline{TU}}{\overline{UP}}$ ，三式相加得

$$\frac{l_1'+l_2'+l_3'}{l_1}=\frac{\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}}{\overline{UP}} \Rightarrow \frac{l_1}{l_1'+l_2'+l_3'}=\frac{\overline{UP}}{\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}} \quad \cdots\cdots ①；$$

同理可得，$\frac{l_2}{l_1'+l_2'+l_3'}=\frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}} \quad \cdots\cdots ②$；

$$\frac{l_3}{l_1'+l_2'+l_3'}=\frac{\overline{ST}}{\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}} \quad \cdots\cdots ③；$$

由－①＋②＋③得

$$-\frac{l_1}{l_1'+l_2'+l_3'}+\frac{l_2}{l_1'+l_2'+l_3'}+\frac{l_3}{l_1'+l_2'+l_3'}=-\frac{\overline{UP}}{\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}}+\frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}}+\frac{\overline{ST}}{\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}}$$

$$\Rightarrow \frac{-l_1+l_2+l_3}{l_1'+l_2'+l_3'}=\frac{-\overline{UP}+\overline{QR}+\overline{ST}}{\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}}$$

(iii)令 $\overline{QR}+\overline{ST}-\overline{UP}=m$，$\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=m'$，且假設 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 之周長分別為 L 與 L' ，

則由上圖 T10-1-1 可知 $-l_1+l_2+l_3=L+m-m'$ ，$l_1'+l_2'+l_3'=L'+m'-m$

再由上述步驟(ii)知 $\frac{-\overline{UP}+\overline{QR}+\overline{ST}}{\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}}=\frac{-l_1+l_2+l_3}{l_1'+l_2'+l_3'} \Rightarrow \frac{m}{m'}=\frac{L+m-m'}{L'+m'-m}$

又 $\because L=L'$ ，$\therefore \frac{m}{m'}=\frac{L+m-m'}{L+m'-m}$

$$\Rightarrow mL+mm'-m^2=m'L+mm'-m'^2$$

$$\Rightarrow mL-m^2-m'L+m'^2=0$$

$$\Rightarrow L(m-m')-(m^2-m'^2)=0$$

$$\Rightarrow L(m-m')-(m+m')(m-m')=0$$

$$\Rightarrow (m-m')(L-m-m')=0$$

$$\Rightarrow m=m' \text{ or } L=m+m'$$

(iv)我們想證明 $L>m+m'$

在 ΔA_1PQ 中，$\overline{A_1P}+\overline{A_1Q}>\overline{PQ}\cdots\cdots ④$

在 ΔB_1RS 中，$\overline{B_1R}+\overline{B_1S}>\overline{RS}\cdots\cdots$⑤

在 ΔC_1TU 中，$\overline{C_1T}+\overline{C_1U}>\overline{TU}\cdots\cdots$⑥

由④＋⑤＋⑥得

$\overline{A_1P}+\overline{A_1Q}+\overline{B_1R}+\overline{B_1S}+\overline{C_1T}+\overline{C_1U}>\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}$

$\Rightarrow \overline{PA_1}+\overline{A_1Q}+\overline{QR}+\overline{RB_1}+\overline{B_1S}+\overline{ST}+\overline{TC_1}+\overline{C_1U}-\overline{UP}>\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}+\overline{QR}+\overline{ST}-\overline{UP}$

$\Rightarrow L>m+m'$

，故得證原命題成立。 □

(2) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-2-1 所示，則 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

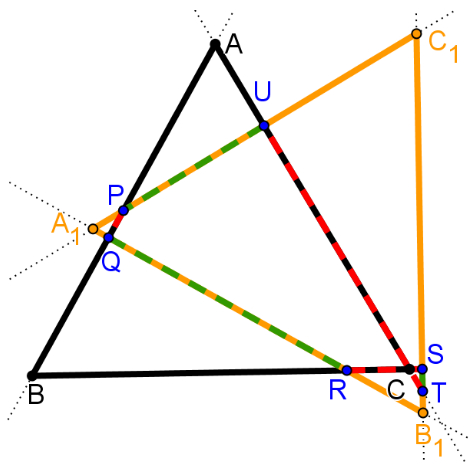


圖 T10-2-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(3) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 反方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-3-1 所示，則 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}+\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

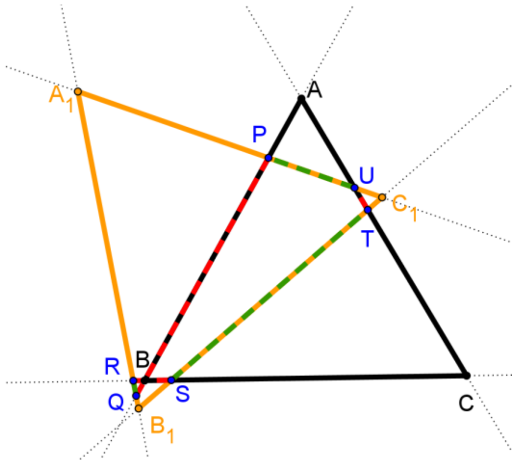


圖 T10-3-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(4) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 反方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-4-1 所示，則 $\overline{PQ}+\overline{RS}-\overline{TU}=\overline{QR}+\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

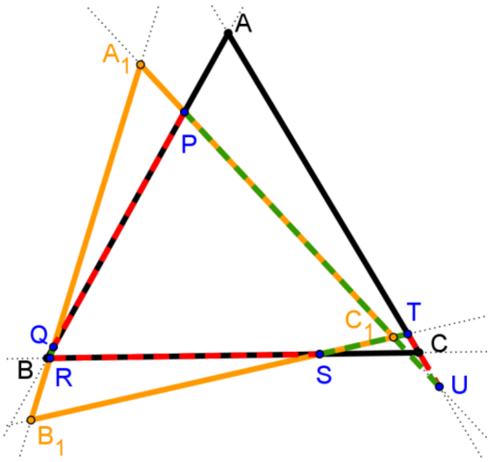


圖 T10-4-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(5) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 反方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-5-1 所示，則 $\overline{PQ}-\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}+\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

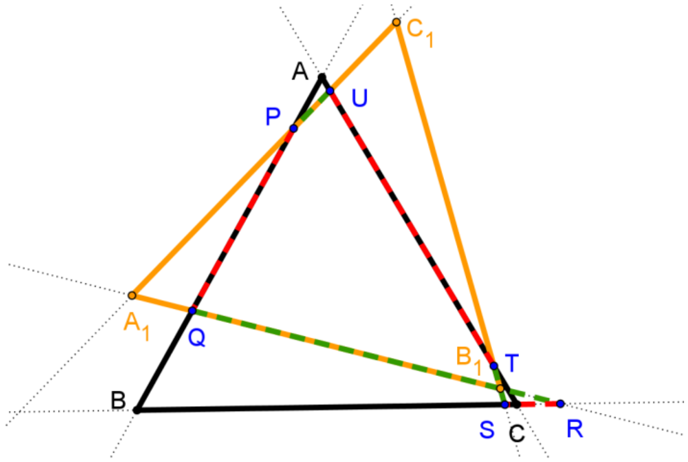


圖 T10-5-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(6) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-6-1 所示，則 $-\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}+\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

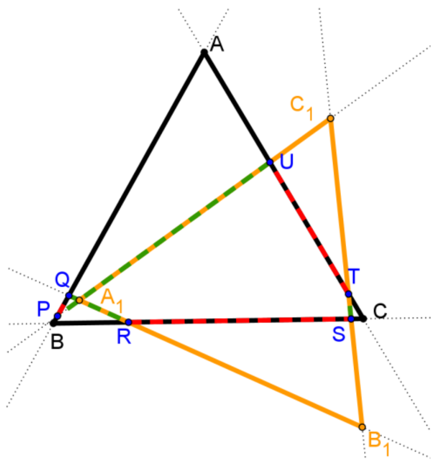


圖 T10-6-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(7) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，則**此圖形不存在**，亦即 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}-\overline{UP}$ **不成立**。(因為若此圖形存在，則我們可以仿照前述(1)與(2)之論證方式去證明等式 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}-\overline{UP}$ 成立，但是我們將證明等式 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}-\overline{UP}$ 是不可能成立的，詳見下述之證明。)

證明：

(i) 假設 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}-\overline{UP}$，則移項可得 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}+\overline{ST}+\overline{UP}=\overline{QR}$，調整一下線段的點序與等號左邊五個線段的順序可得 $\overline{QP}+\overline{PU}+\overline{UT}+\overline{TS}+\overline{SR}=\overline{QR}$，我們將證明此等式不可能成立。

(ii)

① 若 P、Q、R、S、T、U 未落在同一條線上時，則此時 $\overline{QP}+\overline{PU}+\overline{UT}+\overline{TS}+\overline{SR}>\overline{QR}$。

② 若 P、Q、R、S、T、U 落在同一條線上時，則此種情形之圖形不可能存在，理由如下：

因為 P與Q需落在 $\overleftrightarrow{AB}$、R與S 需落在 $\overleftrightarrow{BC}$、T與U 需落在 $\overleftrightarrow{CA}$、Q與R 需落在 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$S$與$T$ 需落在 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$U$與$P$ 需落在 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$，所以即使有部分的點重合，也不可能出現此類情形的圖形，故此時等式 $\overline{QP}+\overline{PU}+\overline{UT}+\overline{TS}+\overline{SR}=\overline{QR}$ 亦不可能成立。

(iii)綜合上述(i)與(ii)之結果，故得證原命題成立。 □

(8) 當 $\overrightharpoon{PQ}$ 與 $\overrightharpoon{AB}$ 同方向、$\overrightharpoon{QR}$ 與 $\overrightharpoon{A_1B_1}$ 反方向、$\overrightharpoon{RS}$ 與 $\overrightharpoon{BC}$ 同方向、$\overrightharpoon{ST}$ 與 $\overrightharpoon{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightharpoon{TU}$ 與 $\overrightharpoon{CA}$ 同方向、$\overrightharpoon{UP}$ 與 $\overrightharpoon{C_1A_1}$ 同方向時，則**此圖形不存在**，亦即 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}-\overline{ST}+\overline{UP}$ **不成立**。

證明：仿照(7)之證明方式可證明原命題成立。 □

(9) 當 $\overrightharpoon{PQ}$ 與 $\overrightharpoon{AB}$ 同方向、$\overrightharpoon{QR}$ 與 $\overrightharpoon{A_1B_1}$ 反方向、$\overrightharpoon{RS}$ 與 $\overrightharpoon{BC}$ 同方向、$\overrightharpoon{ST}$ 與 $\overrightharpoon{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightharpoon{TU}$ 與 $\overrightharpoon{CA}$ 同方向、$\overrightharpoon{UP}$ 與 $\overrightharpoon{C_1A_1}$ 反方向時，則**此圖形不存在**，亦即 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}+\overline{ST}-\overline{UP}$ **不成立**。

證明：仿照(7)之證明方式可證明原命題成立。 □

(10) 當 $\overrightharpoon{PQ}$ 與 $\overrightharpoon{AB}$ 同方向、$\overrightharpoon{QR}$ 與 $\overrightharpoon{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightharpoon{RS}$ 與 $\overrightharpoon{BC}$ 反方向、$\overrightharpoon{ST}$ 與 $\overrightharpoon{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightharpoon{TU}$ 與 $\overrightharpoon{CA}$ 反方向、$\overrightharpoon{UP}$ 與 $\overrightharpoon{C_1A_1}$ 同方向時，則**此圖形不存在**，亦即 $\overline{PQ}-\overline{RS}-\overline{TU}=\overline{QR}+\overline{ST}+\overline{UP}$ **不成立**。

證明：仿照(7)之證明方式可證明原命題成立。 □

(11) 當 $\overrightharpoon{PQ}$ 與 $\overrightharpoon{AB}$ 反方向、$\overrightharpoon{QR}$ 與 $\overrightharpoon{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightharpoon{RS}$ 與 $\overrightharpoon{BC}$ 反方向、$\overrightharpoon{ST}$ 與 $\overrightharpoon{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightharpoon{TU}$ 與 $\overrightharpoon{CA}$ 同方向、$\overrightharpoon{UP}$ 與 $\overrightharpoon{C_1A_1}$ 同方向時，則**此圖形不存在**，亦即 $-\overline{PQ}-\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}+\overline{ST}+\overline{UP}$ **不成立**。

證明：仿照(7)之證明方式可證明原命題成立。 □

(12) 當 $\overrightharpoon{PQ}$ 與 $\overrightharpoon{AB}$ 反方向、$\overrightharpoon{QR}$ 與 $\overrightharpoon{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightharpoon{RS}$ 與 $\overrightharpoon{BC}$ 同方向、$\overrightharpoon{ST}$ 與 $\overrightharpoon{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightharpoon{TU}$

與 $\overrightarrow{CA}$ 反方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，則**此圖形不存在**，亦即 $-\overline{PQ}+\overline{RS}-\overline{TU}=\overline{QR}+\overline{ST}+\overline{UP}$ **不成立**。

證明：仿照(7)之證明方式可證明原命題成立。 □

(13) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 反方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，如下圖 T10-13-1 所示，則 $\overline{PQ}+\overline{RS}-\overline{TU}=\overline{QR}+\overline{ST}-\overline{UP}$ 。

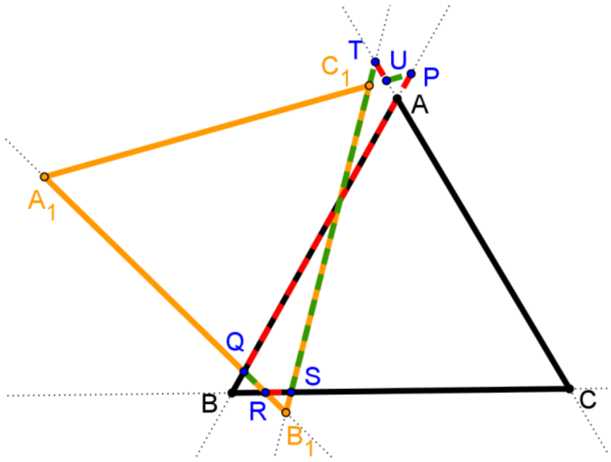


圖 T10-13-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(14) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 反方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，如下圖 T10-14-1 所示，則 $\overline{PQ}-\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}+\overline{ST}-\overline{UP}$ 。

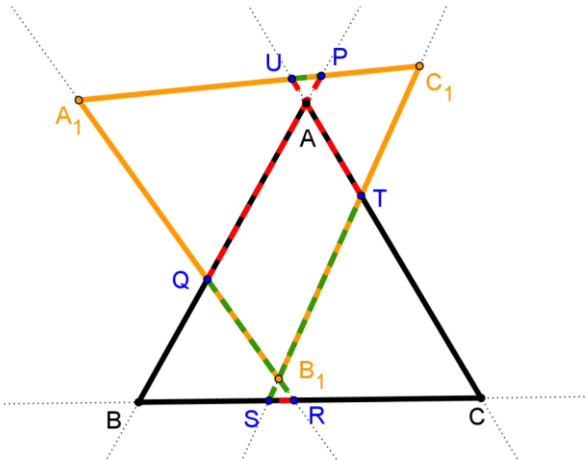


圖 T10-14-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(15) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，如下圖 T10-15-1 所示，則 $-\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}+\overline{ST}-\overline{UP}$ 。

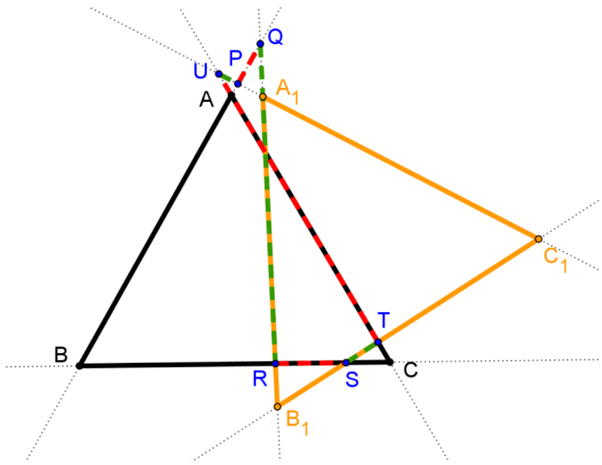


圖 T10-15-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(16) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 反方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-16-1 所示，則 $\overline{PQ}+\overline{RS}-\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

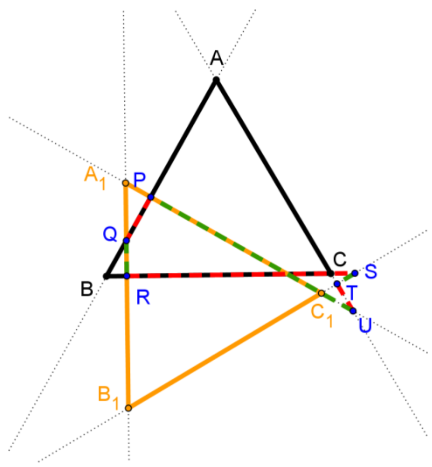


圖 T10-16-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(17) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 反方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-17-1 所示，則

$\overline{PQ}-\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

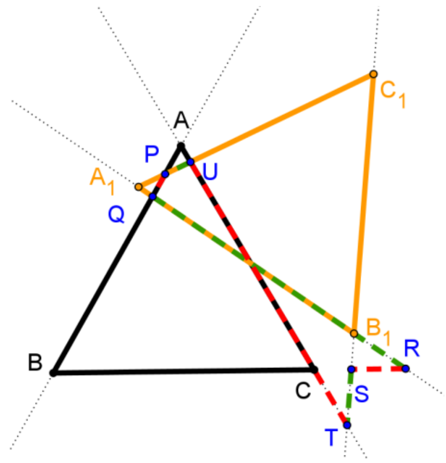


圖 T10-17-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(18) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-18-1 所示，則

$-\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

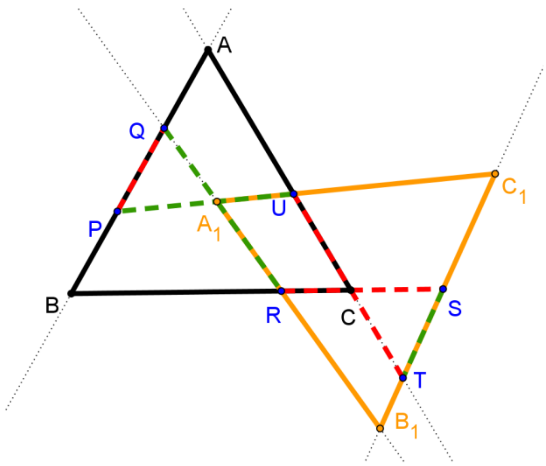


圖 T10-18-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(19) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 反方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 反方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-19-1 所示，則
$\overline{PQ}+\overline{RS}-\overline{TU}=-\overline{QR}+\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

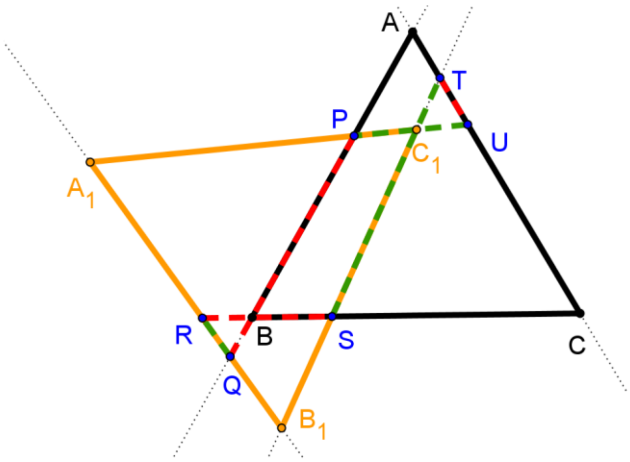


圖 T10-19-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(20) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 反方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 反方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-20-1 所示，則
$\overline{PQ}-\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}+\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

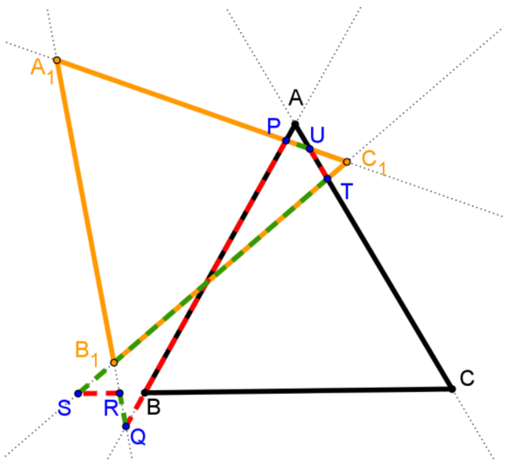


圖 T10-20-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(21) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 反方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$

與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-21-1 所示，則
$-\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}+\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

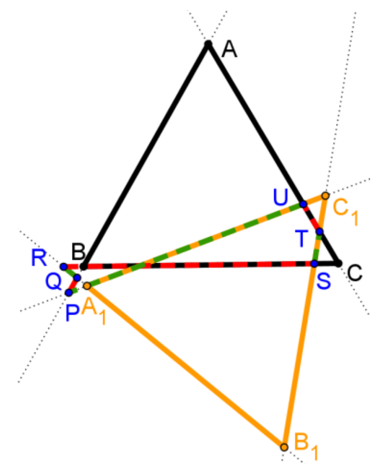


圖 T10-21-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(22) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、 $\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、 $\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$

與 $\overrightarrow{CA}$ 反方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，如下圖 T10-22-1 所示，則
$\overline{PQ}+\overline{RS}-\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}-\overline{UP}$ 。

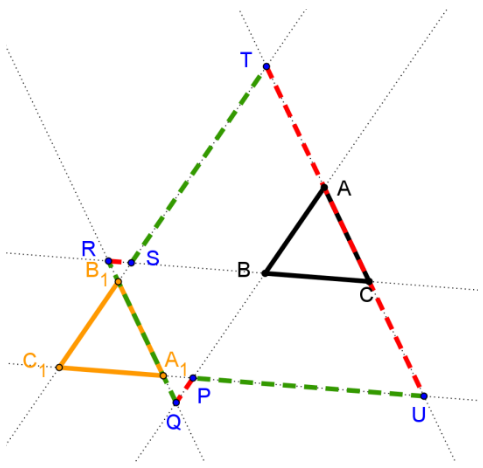


圖 T10-22-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(23) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、 $\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 反方向、 $\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$

與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，如下圖 T10-23-1 所示，則

$\overline{PQ}-\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}-\overline{UP}$ 。

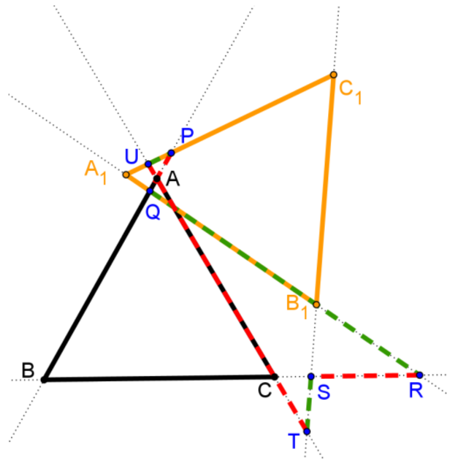


圖 T10-23-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(24) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 同方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，如下圖 T10-24-1 所示，則 $-\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=\overline{QR}-\overline{ST}-\overline{UP}$ 。

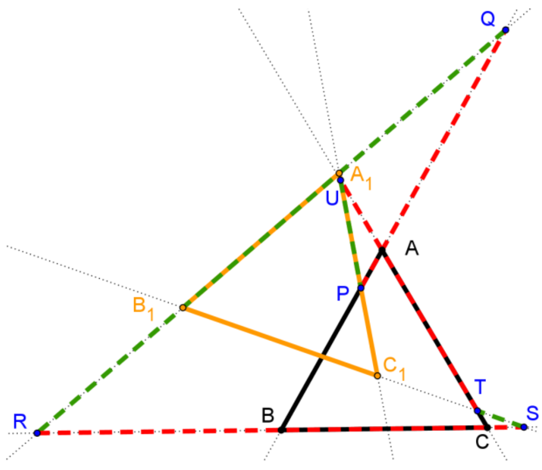


圖 T10-24-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(25) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 反方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 反方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-25-1 所示，則 $\overline{PQ}+\overline{RS}-\overline{TU}=-\overline{QR}-\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

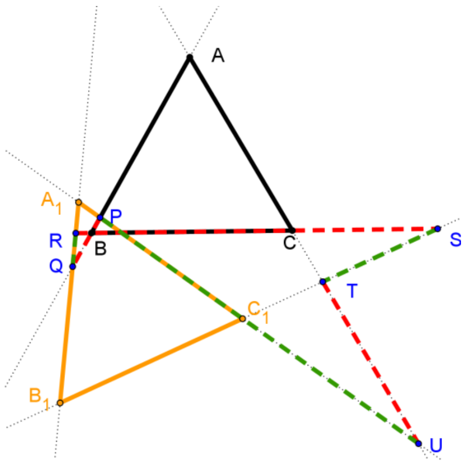


圖 T10-25-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(26) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 反方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 反方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-26-1 所示，則

$\overline{PQ}-\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}-\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

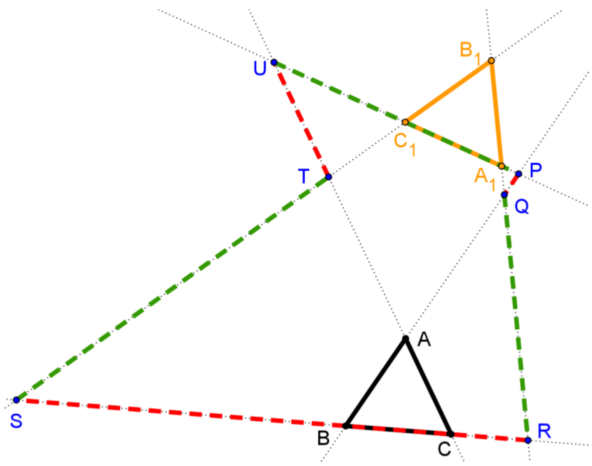


圖 T10-26-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(27) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 反方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 同方向時，如下圖 T10-27-1 所示，則

$-\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}-\overline{ST}+\overline{UP}$ 。

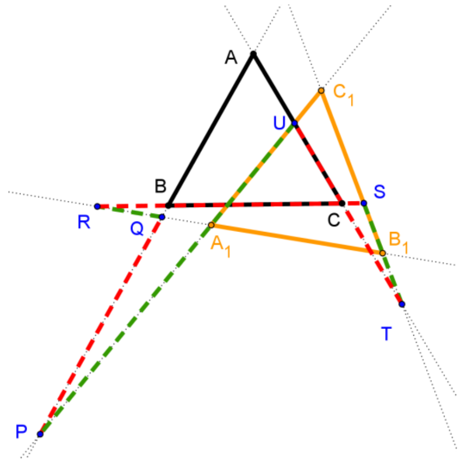


圖 T10-27-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(28) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 反方向、 $\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、 $\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 反方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，如下圖 T10-28-1 所示，則 $\overline{PQ}+\overline{RS}-\overline{TU}=-\overline{QR}+\overline{ST}-\overline{UP}$ 。

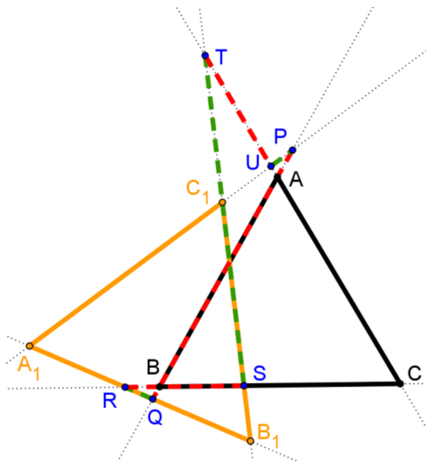


圖 T10-28-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(29) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 反方向、 $\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 反方向、 $\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，如下圖 T10-29-1 所示，則 $\overline{PQ}-\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}+\overline{ST}-\overline{UP}$ 。

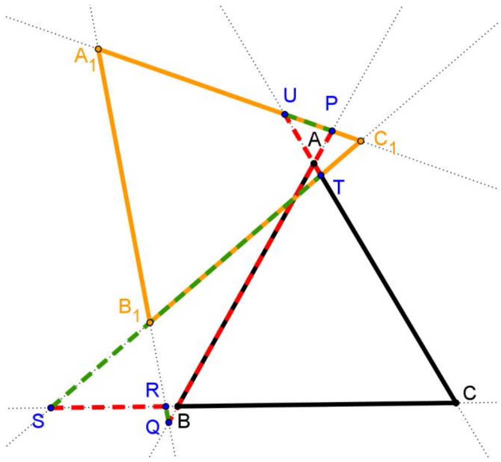


圖 T10-29-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(30) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 反方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 同方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，如下圖 T10-30-1 所示，則 $-\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}+\overline{ST}-\overline{UP}$ 。

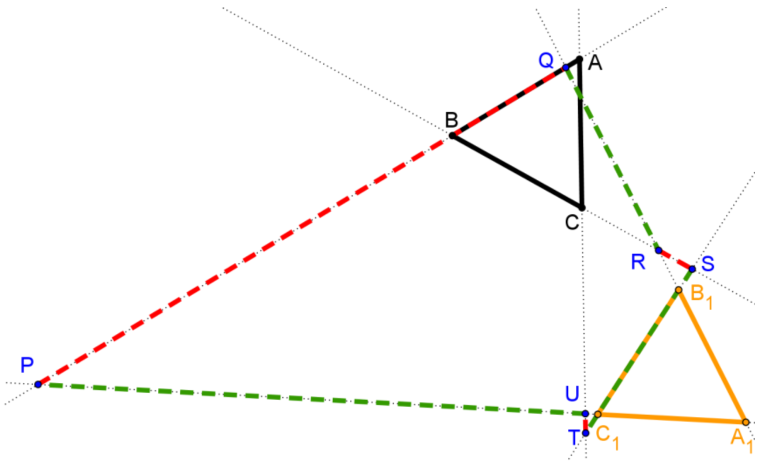


圖 T10-30-1

證明：仿照(1)之證明方式可證明原命題成立。 □

(31) 當 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向、$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 反方向、$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向、$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 反方向、$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 同方向、 $\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 反方向時，則 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}-\overline{ST}-\overline{UP}$ 不成立。

證明：因為 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}\geq 0$，$-\overline{QR}-\overline{ST}-\overline{UP}\leq 0$，若等式 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}-\overline{ST}-\overline{UP}$ 要成立，唯一的可能性為 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=0$ 且 $\overline{QR}+\overline{ST}+\overline{UP}=0$，由此推知 $\overline{PQ}=\overline{RS}=\overline{TU}=0$ 且 $\overline{QR}=\overline{ST}=\overline{UP}=0$ ，再推得 P 、Q 、R 、S 、T 、U 等六個點要共點，這是不可能的，

理由由如下：

因為 P 與 Q 需落在 $\overleftrightarrow{AB}$ 、R 與 S 需落在 $\overleftrightarrow{BC}$ 、T 與 U 需落在 $\overleftrightarrow{CA}$ 、Q 與 R 需落在 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ 、S 與 T 需落在 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ 、U 與 P 需落在 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$，所以即使有部分的點重合，也不可能出現此類情形的圖形，因此此時等式 $\overline{PQ}+\overline{RS}+\overline{TU}=-\overline{QR}-\overline{ST}-\overline{UP}$ 不可能成立，故得證原命題成立。 □

我們發現『**定理 10**』中的 31 類情形與『**定理 2**』其實可以歸併為一個統一的結果，詳述如下之『**定理 11**』，值得注意的是這 32 類情形中只有 26 類的等式會成立，有 6 類情形之圖形不存在。

定理 11 之證明

已知平面上 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 為兩個全等的正三角形，且 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$ 分別相交於 P 、Q 、R 、S 、T 、U 等六點，則

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{AB}}+\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{BC}}+\frac{\overrightarrow{TU}}{\overrightarrow{CA}}=\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{A_1B_1}}+\frac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{B_1C_1}}+\frac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}}\text{。}$$

證明：由『**定義 1**』及利用『**定理 2**』與『**定理 10**』之結果可得證原命題成立。 □

接下來我們將『**定理 11**』推廣到 m 次方和的情形，其中 m 是非負整數，詳述如下之『**定理 12**』。

定理 12 之證明

已知平面上 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 為兩個全等的正三角形，且 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1A_1}$ 分別相交於 P 、Q 、R 、S 、T 、U 等六點，又 m 是非負整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正 $\Delta A_1B_1C_1$ 乃由正 ΔABC 平移向量 (a,b) （a 與 b 為實數)再繞著重心 G 點逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $0\le m\le 2$ 時，『$\left(\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{AB}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{BC}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{TU}}{\overrightarrow{CA}}\right)^m$ **與** $\left(\dfrac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{A_1B_1}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{B_1C_1}}\right)^m+\left(\dfrac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}}\right)^m$ **維持恆等**』。

(3) 當 $m\geq 3$時，『$\left(\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{AB}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{BC}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{TU}}{\overrightarrow{CA}}\right)^m$ 與 $\left(\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{A_1B_1}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{B_1C_1}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}}\right)^m$ **不再維持恆等**』。

(4) 當 $m\geq 3$時，則

當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+60^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\neq 120^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 300^\circ$』 或 『$\theta=60^\circ$』時，

『$\left(\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{AB}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{BC}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{TU}}{\overrightarrow{CA}}\right)^m$ 與 $\left(\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{A_1B_1}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{B_1C_1}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}}\right)^m$ **仍會相等**』。

證明：我們僅證明『**定理 10**』中(1)的情形，其他情形證明過程類似。

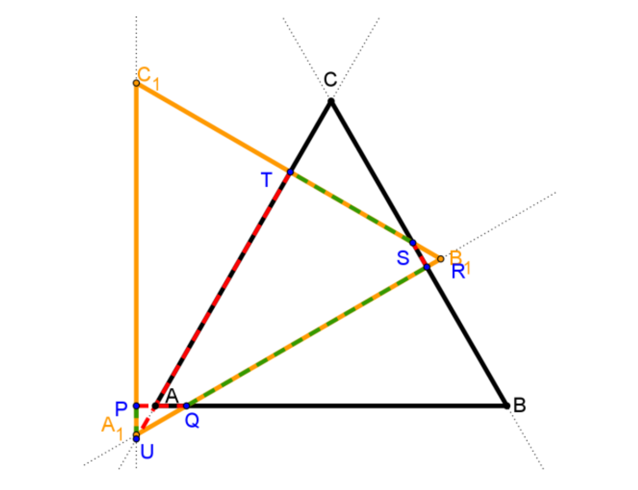


圖 T12-1

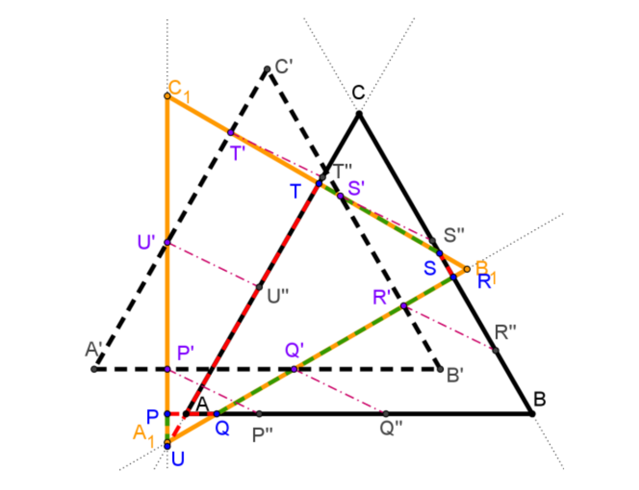


圖 T12-2

如圖 T12-2，仿定理 3 的證明步驟(iv)可得 $\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}$，為了方便起見，我們令 $\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'S'}=\overline{S'T'}=\overline{T'U'}=\overline{U'P'}=r$；另外，為了後續書寫方便，我們再令 $u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}$，則仿照定理 3 之證明步驟(v)可得

$\overline{PQ}=r-u\times\sin\alpha$，$\overline{QR}=r+u\times\sin(\alpha-\theta)$，$\overline{RS}=r+\sin\left(60^\circ+\alpha\right)$，$\overline{ST}=r-u\times\sin(60^\circ+\alpha-\theta)$，$\overline{TU}=r-\sin\left(120^\circ+\alpha\right)$，$\overline{UP}=-r+u\times\sin(120^\circ+\alpha-\theta)$ (註：在後文中，我們將實際地考慮$\overline{UP}$與$\overline{U'P'}$之關係。)

接下來我們依 m 為奇數或偶數分兩類情形討論如下：

(1) 當 m 為奇數時，則

(i) $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 是同方向⇒$\left(\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{AB}}\right)^m=\left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\alpha}{\overline{AB}}\right)^m$

$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 是同方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{BC}}\right)^m = \left(\dfrac{\overline{RS}}{\overline{BC}}\right)^m = \left(\dfrac{r+\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}{\overline{BC}}\right)^m$

$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 是同方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{TU}}{\overrightarrow{CA}}\right)^m = \left(\dfrac{\overline{TU}}{\overline{CA}}\right)^m = \left(\dfrac{r-\sin\left(120^\circ+\alpha\right)}{\overline{CA}}\right)^m$

$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 是同方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{A_1B_1}}\right)^m = \left(\dfrac{\overline{QR}}{\overline{A_1B_1}}\right)^m = \left(\dfrac{r+u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{A_1B_1}}\right)^m$

$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 是同方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{B_1C_1}}\right)^m = \left(\dfrac{\overline{ST}}{\overline{B_1C_1}}\right)^m = \left(\dfrac{r-u\times\sin(60^\circ+\alpha-\theta)}{\overline{B_1C_1}}\right)^m$

$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 是反方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}}\right)^m = \left(-\dfrac{\overline{UP}}{\overline{C_1A_1}}\right)^m = (-1)^m\times\left(\dfrac{\overline{UP}}{\overline{C_1A_1}}\right)^m$

考慮 $\overline{UP}$ 與 $\overline{U'P'}$ 之關係：

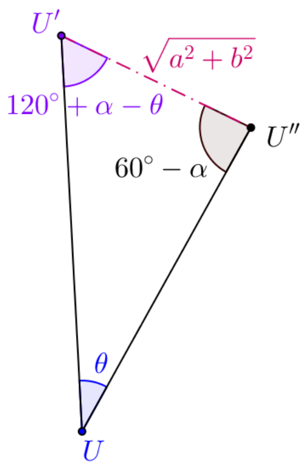


圖 T12-2-1

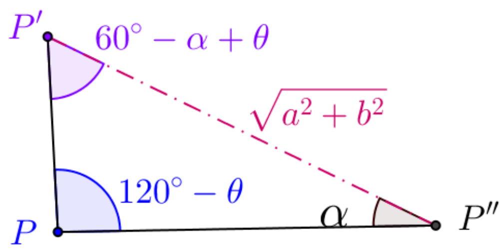


圖 T12-2-2

① 如上圖 T12-2-1 所示，在 $\Delta UU'U''$ 中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{UU'}}{\sin(60^\circ-\alpha)} = \frac{\overline{U'U''}}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{\overline{UU'}}{\sin(60^\circ-\alpha)} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\theta} \Rightarrow \overline{UU'} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin\theta}$$

② 如上圖 T12-2-2 所示，在 $\Delta PP'P''$ 中，由正弦定理得知

$$\frac{\overline{PP'}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{P'P''}}{\sin(120^\circ-\theta)} \Rightarrow \frac{\overline{PP'}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin(120^\circ-\theta)} \Rightarrow \overline{PP'} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha}{\sin(120^\circ-\theta)}$$

③ 由上圖 T12-2，我們可得

$$\overline{UP}=-\overline{U'P'}+\overline{UU'}+\overline{PP'}$$

$$=-\overline{U'P'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin\theta}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha}{\sin(120^\circ-\theta)}$$

$$=-\overline{U'P'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\theta\times\sin\left(120^\circ-\theta\right)}\left\{\sin(60^\circ-\alpha)\times\sin(120^\circ-\theta)+\sin\alpha\times\sin\theta\right\}$$

$$=-\overline{U'P'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\left[\cos\left(180^\circ-\alpha-\theta\right)-\cos\left(-60^\circ-\alpha+\theta\right)\right]\\-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\theta\right)-\cos\left(\alpha-\theta\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=-\overline{U'P'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\left[-\cos\left(\alpha+\theta\right)-\cos\left(-60^\circ-\alpha+\theta\right)\right]\\-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\theta\right)-\cos\left(\alpha-\theta\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$=-\overline{U'P'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\frac{1}{2}\left[\cos\left(-60^\circ-\alpha+\theta\right)+\cos\left(\alpha-\theta\right)\right]\right\}$$

$$=-\overline{U'P'}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\left\{\frac{1}{2}\left[2\cos\left(30^\circ+\alpha-\theta\right)\times\cos 30^\circ\right]\right\}$$ (利用和差化積公式)

$$=-\overline{U'P'}+\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\right]\times\sin\left(60^\circ-\alpha+\theta\right)$$

$$=-\overline{U'P'}+\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\right]\times\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)$$

又 $u=\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 30^\circ}{\sin\left(120^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}\right]$，所以 $\overline{UP}=-\overline{U'P'}+u\times\sin\left(120^\circ+\alpha-\theta\right)$

$$\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}}\right)^m=\left(-\frac{\overline{UP}}{\overline{C_1A_1}}\right)^m=(-1)^m\times\left(\frac{\overline{UP}}{\overline{C_1A_1}}\right)^m=-\left(\frac{-r+u\times\sin(120^\circ+\alpha-\theta)}{\overline{C_1A_1}}\right)^m$$

$$=-(-1)^m\times\left(\frac{r-u\times\sin(120^\circ+\alpha-\theta)}{\overline{C_1A_1}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin(120^\circ+\alpha-\theta)}{\overline{C_1A_1}}\right)^m$$

(ii) 承(i)，欲證明 $\left(\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{AB}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{BC}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{TU}}{\overrightarrow{CA}}\right)^m=\left(\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{A_1B_1}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{B_1C_1}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}}\right)^m$ 等價於去證明

$$\left(\frac{r-u\times\sin\alpha}{\overline{AB}}\right)^m+\left(\frac{r+\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}{\overline{BC}}\right)^m+\left(\frac{r-\sin\left(120^\circ+\alpha\right)}{\overline{CA}}\right)^m$$

$$=\left(\frac{r+u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{A_1B_1}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin(60^\circ+\alpha-\theta)}{\overline{B_1C_1}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin(120^\circ+\alpha-\theta)}{\overline{C_1A_1}}\right)^m$$

又 ΔABC 與 $\Delta A_1B_1C_1$ 為兩個全等的正三角形，所以 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=\overline{A_1B_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{C_1A_1}$ ，

因此又等價於去證明

$$\left(r-u\times\sin\alpha\right)^m+\left(r+u\times\sin\left(60^\circ+\alpha\right)\right)^m+\left(r-u\times\sin\left(120^\circ+\alpha\right)\right)^m$$

$$=\left(r+u\times\sin(\alpha-\theta)\right)^m+\left(r-u\times\sin(60^\circ+\alpha-\theta)\right)^m+\left(r+u\times\sin(120^\circ+\alpha-\theta)\right)^m$$

接下來，仿照『**定理 3**』之證明過程可證明原命題成立。

(2) 當 m 為偶數時，則

(i) $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{AB}}\right)^m=\left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\alpha}{\overline{AB}}\right)^m$

$\overrightarrow{RS}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{BC}}\right)^m=\left(\frac{\overline{RS}}{\overline{BC}}\right)^m=\left(\frac{r+\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}{\overline{BC}}\right)^m$

$\overrightarrow{TU}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{TU}}{\overrightarrow{CA}}\right)^m=\left(\frac{\overline{TU}}{\overline{CA}}\right)^m=\left(\frac{r-\sin\left(120^\circ+\alpha\right)}{\overline{CA}}\right)^m$

$\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{A_1B_1}}\right)^m=\left(\frac{\overline{QR}}{\overline{A_1B_1}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{A_1B_1}}\right)^m$

$\overrightarrow{ST}$ 與 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{ST}}{\overrightarrow{B_1C_1}}\right)^m=\left(\frac{\overline{ST}}{\overline{B_1C_1}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin(60^\circ+\alpha-\theta)}{\overline{B_1C_1}}\right)^m$

$\overrightarrow{UP}$ 與 $\overrightarrow{C_1A_1}$ 是反方向

$$\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{UP}}{\overrightarrow{C_1A_1}}\right)^m=\left(-\frac{\overline{UP}}{\overline{C_1A_1}}\right)^m=(-1)^m\times\left(\frac{\overline{UP}}{\overline{C_1A_1}}\right)^m=\left(\frac{-r+u\times\sin(120^\circ+\alpha-\theta)}{\overline{C_1A_1}}\right)^m$$

$$=(-1)^m\times\left(\frac{r-u\times\sin(120^\circ+\alpha-\theta)}{\overline{C_1A_1}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin(120^\circ+\alpha-\theta)}{\overline{C_1A_1}}\right)^m$$

(ii) 接下來，仿照上述(1)情形之證明步驟(ii)可證明原命題成立。 □

接下來我們將『**定理 11**』推廣到兩個全等的正方形的 m 次方和情形，看看是否也有類似的結果，其中 m 是非負整數，詳述如下之『**定理 13**』。

定理 13 之證明

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 為兩個全等的正方形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_4B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$與$\overleftrightarrow{B_4B_1}$分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8 等八點，又 m 是非負整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 乃由正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 平移向量 (a,b)（a 與 b 為實數)再繞著中心點 O 逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $0\le m\le 3$ 時，『$\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_1}}\right)^m$ **與** $\left(\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_8P_1}}{\overrightarrow{B_4B_1}}\right)^m$ **維持恆等』**。

(3) 當 $m\ge 4$ 時，『$\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_1}}\right)^m$ **與** $\left(\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_8P_1}}{\overrightarrow{B_4B_1}}\right)^m$ **不再維持恆等』**。

(4) 當 $m\ge 4$ 時，則

當『$b=a\tan\left(\frac{\theta}{2}+45^\circ\times t_1\right)$，其中 t_1 是整數且 $\theta\neq 90^\circ$，$\theta\neq 180^\circ$，$\theta\neq 270^\circ$』時，

『$\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_1}}\right)^m$ **與** $\left(\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_8P_1}}{\overrightarrow{B_4B_1}}\right)^m$ **仍會相等』**。

證明：我們僅證明其中的 1 類情形，如下圖 T13-1，其他情形證明過程類似。

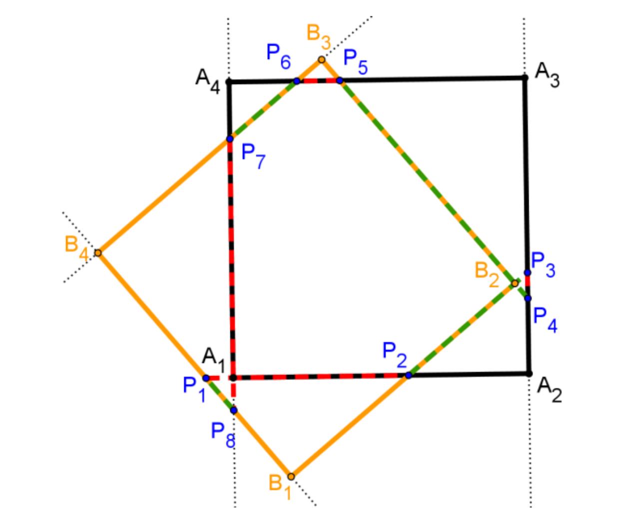


圖 T13-1

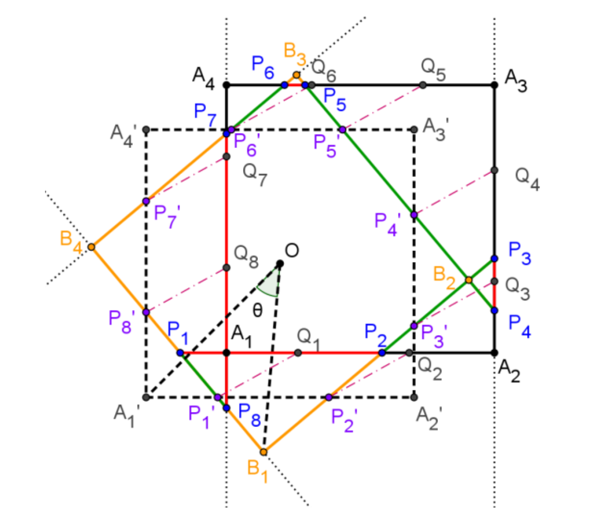


圖 T13-2

如圖 T13-2，仿定理 3 的證明步驟(iv)可得 $\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_2'P_3'}=\overline{P_3'P_4'}=\overline{P_4'P_5'}=\overline{P_5'P_6'}=\overline{P_6'P_7'}=\overline{P_7'P_8'}=\overline{P_8'P_1'}$ ，為了方便起見，我們令 $\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_2'P_3'}=\overline{P_3'P_4'}=\overline{P_4'P_5'}=\overline{P_5'P_6'}=\overline{P_6'P_7'}=\overline{P_7'P_8'}=\overline{P_8'P_1'}=r$ ；另外，為了後續書寫方便，我們再令 $u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos 0^\circ}{\sin\left(90^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}$ ，則仿照定理 3 之證明步驟(v)可得

$\overline{P_1P_2}=r+u\times\sin\alpha$ 、 $\overline{P_2P_3}=r-u\times\sin\left(\alpha-\theta\right)$ 、 $\overline{P_3P_4}=-r+u\times\sin(90^\circ-\alpha)$ 、
$\overline{P_4P_5}=r+u\times\sin(90^\circ-\alpha+\theta)$ 、 $\overline{P_5P_6}=r-u\times\sin(180^\circ-\alpha)$ 、 $\overline{P_6P_7}=r+u\times\sin(180^\circ-\alpha+\theta)$ 、
$\overline{P_7P_8}=r-u\times\sin(270^\circ-\alpha)$ 、 $\overline{P_8P_1}=-r-u\times\sin(270^\circ-\alpha+\theta)$ (註：在後文中，我們將實際地考慮 $\overline{P_3P_4}$ 與 $\overline{P_3'P_4'}$ 之關係及 $\overline{P_8P_1}$ 與 $\overline{P_8'P_1'}$ 之關係。)

接下來我們依 m 為奇數或偶數分兩類情形討論如下：

(1) 當 m 為奇數時，則

(i) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 與 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m=\left(\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\overline{A_1A_2}}\right)^m=\left(\dfrac{r+u\times\sin\alpha}{\overline{A_1A_2}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_3P_4}$ 與 $\overrightarrow{A_2A_3}$ 是反方向

$$\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m=\left(-\frac{\overline{P_3P_4}}{\overline{A_2A_3}}\right)^m=(-1)^m\times\left(\frac{\overline{P_3P_4}}{\overline{A_2A_3}}\right)^m=-\left(\frac{-r+u\times\sin(90^\circ-\alpha)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m$$

$$=-(-1)^m\times\left(\frac{r-u\times\sin(90^\circ-\alpha)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin(90^\circ-\alpha)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m$$

$\overrightarrow{P_5P_6}$ 與 $\overrightarrow{A_3A_4}$ 是同方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m = \left(\dfrac{\overline{P_5P_6}}{\overline{A_3A_4}}\right)^m = \left(\dfrac{r-u\times\sin(180^\circ-\alpha)}{\overline{A_3A_4}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_7P_8}$ 與 $\overrightarrow{A_4A_1}$ 是同方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_1}}\right)^m = \left(\dfrac{\overline{P_7P_8}}{\overline{A_4A_1}}\right)^m = \left(\dfrac{r-u\times\sin(270^\circ-\alpha)}{\overline{A_4A_1}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_2P_3}$ 與 $\overrightarrow{B_1B_2}$ 是同方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m = \left(\dfrac{\overline{P_2P_3}}{\overline{B_1B_2}}\right)^m = \left(\dfrac{r-u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{B_1B_2}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_4P_5}$ 與 $\overrightarrow{B_2B_3}$ 是同方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m = \left(\dfrac{\overline{P_4P_5}}{\overline{B_2B_3}}\right)^m = \left(\dfrac{r+u\times\sin(90^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_2B_3}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_6P_7}$ 與 $\overrightarrow{B_3B_4}$ 是同方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m = \left(\dfrac{\overline{P_6P_7}}{\overline{B_3B_4}}\right)^m = \left(\dfrac{r+u\times\sin(180^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_3B_4}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_8P_1}$ 與 $\overrightarrow{B_4B_1}$ 是反方向

$$\Rightarrow \left(\frac{\overrightarrow{P_8P_1}}{\overrightarrow{B_4B_1}}\right)^m = \left(-\frac{\overline{P_8P_1}}{\overline{B_4B_1}}\right)^m = (-1)^m\times\left(\frac{\overline{P_8P_1}}{\overline{B_4B_1}}\right)^m = -\left(\frac{-r-u\times\sin(270^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_4B_1}}\right)^m$$

$$= -(-1)^m\times\left(\frac{r+u\times\sin(270^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_4B_1}}\right)^m = \left(\frac{r+u\times\sin(270^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_4B_1}}\right)^m$$

(ii) 承(i)，欲證明

$$\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_1}}\right)^m=\left(\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_8P_1}}{\overrightarrow{B_4B_1}}\right)^m$$

等價於去證明

$$\left(\frac{r+u\times\sin\alpha}{\overline{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin(90^\circ-\alpha)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin(180^\circ-\alpha)}{\overline{A_3A_4}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin(270^\circ-\alpha)}{\overline{A_4A_1}}\right)^m$$

$$=\left(\frac{r-u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{r+u\times\sin(90^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_2B_3}}\right)^m+\left(\frac{r+u\times\sin(180^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_3B_4}}\right)^m$$

$$+\left(\frac{r+u\times\sin(270^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_4B_1}}\right)^m$$

，又因為 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $B_1B_2B_3B_4$ 為兩個全等的正方形，所以

$\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}=\overline{A_4A_1}=\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\overline{B_3B_4}=\overline{B_4B_1}$，因此又等價於去證明

$$\left(r+u\times\sin\alpha\right)^m+\left(r-u\times\sin\left(90^\circ-\alpha\right)\right)^m+\left(r-u\times\sin\left(180^\circ-\alpha\right)\right)^m+\left(r-u\times\sin\left(270^\circ-\alpha\right)\right)^m$$

$$=\left(r-u\times\sin(\alpha-\theta)\right)^m+\left(r+u\times\sin(90^\circ-\alpha+\theta)\right)^m+\left(r+u\times\sin(180^\circ-\alpha+\theta)\right)^m+\left(r+u\times\sin(270^\circ-\alpha+\theta)\right)^m$$

接下來，仿照『**定理 3**』之證明過程可證明原命題成立。

(2) 當 m 為偶數時，則

(i) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 與 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m=\left(\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\overline{A_1A_2}}\right)^m=\left(\dfrac{r+u\times\sin\alpha}{\overline{A_1A_2}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_3P_4}$ 與 $\overrightarrow{A_2A_3}$ 是反方向

$$\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m=\left(-\frac{\overline{P_3P_4}}{\overline{A_2A_3}}\right)^m=(-1)^m\times\left(\frac{\overline{P_3P_4}}{\overline{A_2A_3}}\right)^m=\left(\frac{-r+u\times\sin(90^\circ-\alpha)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m$$

$$=(-1)^m\times\left(\frac{r-u\times\sin(90^\circ-\alpha)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin(90^\circ-\alpha)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m$$

$\overrightarrow{P_5P_6}$ 與 $\overrightarrow{A_3A_4}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\dfrac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m=\left(\dfrac{\overline{P_5P_6}}{\overline{A_3A_4}}\right)^m=\left(\dfrac{r-u\times\sin(180^\circ-\alpha)}{\overline{A_3A_4}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_7P_8}$ 與 $\overrightarrow{A_4A_1}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\dfrac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_1}}\right)^m=\left(\dfrac{\overline{P_7P_8}}{\overline{A_4A_1}}\right)^m=\left(\dfrac{r-u\times\sin(270^\circ-\alpha)}{\overline{A_4A_1}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_2P_3}$ 與 $\overrightarrow{B_1B_2}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\dfrac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m=\left(\dfrac{\overline{P_2P_3}}{\overline{B_1B_2}}\right)^m=\left(\dfrac{r-u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{B_1B_2}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_4P_5}$ 與 $\overrightarrow{B_2B_3}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\dfrac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m=\left(\dfrac{\overline{P_4P_5}}{\overline{B_2B_3}}\right)^m=\left(\dfrac{r+u\times\sin(90^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_2B_3}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_6P_7}$ 與 $\overrightarrow{B_3B_4}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\dfrac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m=\left(\dfrac{\overline{P_6P_7}}{\overline{B_3B_4}}\right)^m=\left(\dfrac{r+u\times\sin(180^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_3B_4}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_8P_1}$ 與 $\overrightarrow{B_4B_1}$ 是反方向

$$\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{P_8P_1}}{\overrightarrow{B_4B_1}}\right)^m=\left(-\frac{\overline{P_8P_1}}{\overline{B_4B_1}}\right)^m=(-1)^m\times\left(\frac{\overline{P_8P_1}}{\overline{B_4B_1}}\right)^m=\left(\frac{-r-u\times\sin(270^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_4B_1}}\right)^m$$

$$=(-1)^m\times\left(\frac{r+u\times\sin(270^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_4B_1}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin(270^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_4B_1}}\right)^m$$

(ii) 接下來，仿照上述(1)情形之證明步驟(ii)可證明原命題成立。 □

接下來我們將『**定理 11**』推廣到兩個全等的正五邊形的 m 次方和情形，看看是否也有類似的結果，其中 m 是非負整數，詳述如下之『**定理 14**』。

定理 14 之證明

已知平面上 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 為兩個全等的正五邊形，且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_5B_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$與$\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$與$\overleftrightarrow{B_4B_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$與$\overleftrightarrow{B_5B_1}$分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8、P_9、P_{10} 等十點，又 m 是非負整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 乃由正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 平移向量 (a,b)（a 與 b 為實數)再繞著中心點 O 逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $0\le m\le 4$ 時，『$\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_5}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_9P_{10}}}{\overrightarrow{A_5A_1}}\right)^m$ 與 $\left(\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_8P_9}}{\overrightarrow{B_4B_5}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_{10}P_1}}{\overrightarrow{B_5B_1}}\right)^m$ **維持恆等』**。

(3) 當 $m\ge 5$ 時，『$\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_5}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_9P_{10}}}{\overrightarrow{A_5A_1}}\right)^m$ 與 $\left(\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_8P_9}}{\overrightarrow{B_4B_5}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_{10}P_1}}{\overrightarrow{B_5B_1}}\right)^m$ **不再維持恆等』**。

(4) 當 $m\ge 5$ 時，則當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+36^\circ\times t_1\right)$，其中$t_1$是整數且$\theta\ne 72^\circ$，$\theta\ne 180^\circ$，$\theta\ne 252^\circ$』 或『$\theta=36^\circ$』或『$\theta=108^\circ$』

時，『$\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_5}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_9P_{10}}}{\overrightarrow{A_5A_1}}\right)^m$ 與

$\left(\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_8P_9}}{\overrightarrow{B_4B_5}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_{10}P_1}}{\overrightarrow{B_5B_1}}\right)^m$ **仍會相等』**。

證明：我們僅證明其中的 1 類情形，如下圖 T14-1，其他情形證明過程類似。

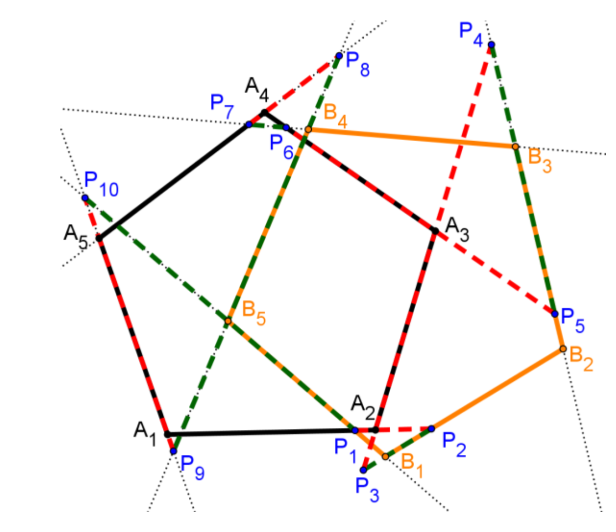


圖 T14-1

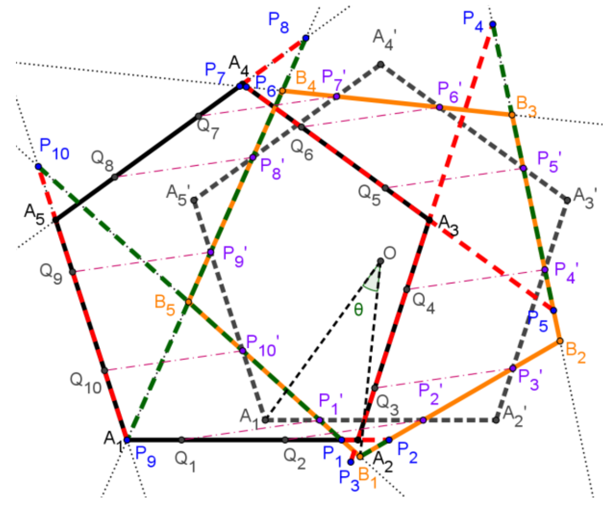


圖 T14-2

如圖 T14-2，仿定理 3 的證明步驟(iv)可得 $\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_2'P_3'}=\overline{P_3'P_4'}=\overline{P_4'P_5'}=\overline{P_5'P_6'}=\overline{P_6'P_7'}=\overline{P_7'P_8'}=\overline{P_8'P_9'}$ $=\overline{P_9'P_{10}'}=\overline{P_{10}'P_1'}$，為了方便，令 $\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_2'P_3'}=\overline{P_3'P_4'}=\overline{P_4'P_5'}=\overline{P_5'P_6'}=\overline{P_6'P_7'}=\overline{P_7'P_8'}=\overline{P_8'P_9'}=\overline{P_9'P_{10}'}=\overline{P_{10}'P_1'}=r$ ；另外，為了後續書寫方便，我們再令 $u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cos18^\circ}{\sin\left(72^\circ-\theta\right)\times\sin\theta}$，則仿照定理 3 之證明步驟(v)可

得 $\overrightarrow{P_1P_2}=r-u\times\sin\alpha$，$\overrightarrow{P_2P_3}=-r-u\times\sin(\alpha-\theta)$，$\overrightarrow{P_3P_4}=r+u\times\sin(72^\circ-\alpha)$，
$\overrightarrow{P_4P_5}=-r+u\times\sin(72^\circ-\alpha+\theta)$，$\overrightarrow{P_5P_6}=r+u\times\sin(144^\circ-\alpha)$，$\overrightarrow{P_6P_7}=r-u\times\sin(144^\circ-\alpha+\theta)$，
$\overrightarrow{P_7P_8}=-r-u\times\sin(216^\circ-\alpha)$，$\overrightarrow{P_8P_9}=r-u\times\sin(216^\circ-\alpha+\theta)$，$\overrightarrow{P_9P_{10}}=-r-u\times\sin(288^\circ-\alpha)$，
$\overrightarrow{P_{10}P_1}=r-u\times\sin(288^\circ-\alpha+\theta)$

接下來我們依 m 為奇數或偶數分兩類情形討論如下：

(1) 當 m 為奇數時，則

(i) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 與 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m=\left(\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{A_1A_2}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\alpha}{\overline{A_1A_2}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_3P_4}$ 與 $\overrightarrow{A_2A_3}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m=\left(\frac{\overline{P_3P_4}}{\overline{A_2A_3}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin(72^\circ-\alpha)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_5P_6}$ 與 $\overrightarrow{A_3A_4}$ 是同方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m = \left(\dfrac{\overline{P_5P_6}}{\overline{A_3A_4}}\right)^m = \left(\dfrac{r+u\times\sin(144^\circ-\alpha)}{\overline{A_3A_4}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_7P_8}$ 與 $\overrightarrow{A_4A_5}$ 是反方向

$$\Rightarrow \left(\frac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_5}}\right)^m = \left(-\frac{\overline{P_7P_8}}{\overline{A_4A_5}}\right)^m = (-1)^m\times\left(\frac{\overline{P_7P_8}}{\overline{A_4A_5}}\right)^m = -\left(\frac{-r-u\times\sin(216^\circ-\alpha)}{\overline{A_4A_5}}\right)^m$$

$$=-(-1)^m\left(\frac{r+u\times\sin(216^\circ-\alpha)}{\overline{A_4A_5}}\right)^m = \left(\frac{r+u\times\sin(216^\circ-\alpha)}{\overline{A_4A_5}}\right)^m$$

$\overrightarrow{P_9P_{10}}$ 與 $\overrightarrow{A_5A_1}$ 是反方向

$$\Rightarrow \left(\frac{\overrightarrow{P_9P_{10}}}{\overrightarrow{A_5A_1}}\right)^m = \left(-\frac{\overline{P_9P_{10}}}{\overline{A_5A_1}}\right)^m = (-1)^m\times\left(\frac{\overline{P_9P_{10}}}{\overline{A_5A_1}}\right)^m = -\left(\frac{-r-u\times\sin(288^\circ-\alpha)}{\overline{A_5A_1}}\right)^m$$

$$=-(-1)^m\left(\frac{r+u\times\sin(288^\circ-\alpha)}{\overline{A_5A_1}}\right)^m = \left(\frac{r+u\times\sin(288^\circ-\alpha)}{\overline{A_5A_1}}\right)^m$$

$\overrightarrow{P_2P_3}$ 與 $\overrightarrow{B_1B_2}$ 是反方向

$$\Rightarrow \left(\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m = \left(-\frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{B_1B_2}}\right)^m = (-1)^m\times\left(\frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{B_1B_2}}\right)^m = -\left(\frac{-r-u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{B_1B_2}}\right)^m$$

$$=-(-1)^m\times\left(\frac{r+u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{B_1B_2}}\right)^m = \left(\frac{r+u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{B_1B_2}}\right)^m$$

$\overrightarrow{P_4P_5}$ 與 $\overrightarrow{B_2B_3}$ 是反方向

$$\Rightarrow \left(\frac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m = \left(-\frac{\overline{P_4P_5}}{\overline{B_2B_3}}\right)^m = (-1)^m\times\left(\frac{\overline{P_4P_5}}{\overline{B_2B_3}}\right)^m = -\left(\frac{-r+u\times\sin(72^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_2B_3}}\right)^m$$

$$=-(-1)^m\times\left(\frac{r-u\times\sin(72^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_2B_3}}\right)^m = \left(\frac{r-u\times\sin(72^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_2B_3}}\right)^m$$

$\overrightarrow{P_6P_7}$ 與 $\overrightarrow{B_3B_4}$ 是同方向 $\Rightarrow \left(\dfrac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m = \left(\dfrac{\overline{P_6P_7}}{\overline{B_3B_4}}\right)^m = \left(\dfrac{r-u\times\sin(144^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_3B_4}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_8P_9}$ 與 $\overrightarrow{B_4B_5}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\dfrac{\overrightarrow{P_8P_9}}{\overrightarrow{B_4B_5}}\right)^m=\left(\dfrac{\overline{P_8P_9}}{\overline{B_4B_5}}\right)^m=\left(\dfrac{r-u\times\sin(216^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_4B_5}}\right)^m$

$\overrightarrow{P_{10}P_1}$ 與 $\overrightarrow{B_5B_1}$ 是同方向 $\Rightarrow\left(\dfrac{\overrightarrow{P_{10}P_1}}{\overrightarrow{B_5B_1}}\right)^m=\left(\dfrac{\overline{P_{10}P_1}}{\overline{B_5B_1}}\right)^m=\left(\dfrac{r-u\times\sin(288^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_5B_1}}\right)^m$

(ii) 承(i)，欲證明

$$\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_7P_8}}{\overrightarrow{A_4A_5}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_9P_{10}}}{\overrightarrow{A_5A_1}}\right)^m$$

$$=\left(\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_8P_9}}{\overrightarrow{B_4B_5}}\right)^m+\left(\frac{\overrightarrow{P_{10}P_1}}{\overrightarrow{B_5B_1}}\right)^m$$

等價於去證明

$$\left(\frac{r-u\times\sin\alpha}{\overline{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{r+u\times\sin(72^\circ-\alpha)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{r+u\times\sin(144^\circ-\alpha)}{\overline{A_3A_4}}\right)^m+\left(\frac{r+u\times\sin(216^\circ-\alpha)}{\overline{A_4A_5}}\right)^m$$

$$+\left(\frac{r+u\times\sin(288^\circ-\alpha)}{\overline{A_5A_1}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin(72^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_2B_3}}\right)^m$$

$$+\left(\frac{r-u\times\sin(144^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_3B_4}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin(216^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_4B_5}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin(288^\circ-\alpha+\theta)}{\overline{B_5B_1}}\right)^m$$

，又因為 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 與 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 為兩個全等的正五邊形，所以 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}=\overline{A_4A_5}=\overline{A_5A_1}=\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\overline{B_3B_4}=\overline{B_4B_5}=\overline{B_5B_1}$ ，因此又等價於去證明

$$(r-u\times\sin\alpha)^m+(r+u\times\sin(72^\circ-\alpha))^m+(r+u\times\sin(144^\circ-\alpha))^m+(r+u\times\sin(216^\circ-\alpha))^m$$

$$+(r+u\times\sin(288^\circ-\alpha))^m$$

$$=(r+u\times\sin(\alpha-\theta))^m+(r-u\times\sin(72^\circ-\alpha+\theta))^m+(r-u\times\sin(144^\circ-\alpha+\theta))^m+(r-u\times\sin(216^\circ-\alpha+\theta))^m$$

$$+(r-u\times\sin(288^\circ-\alpha+\theta))^m$$

接下來，仿照『**定理 3**』之證明過程可證明原命題成立。

(2) 當 m 為偶數時，則仿照『定理 12』證明中之(2)的證明方法可得證原命題成立。 □

由『**定義 1**』及利用『**定理 10**』、『『**定理 11**』、『**定理 12**』、『**定理 13**』與『**定理 14**』之結果從，我們發現一些規律，並且找到了『**引理 1**』在有向線段比值的 m 次方和上之一般化推論，如下『**定理 15**』所示。

定理 15 之證明

已知平面上 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 為兩個全等的正 $n(n\geq 3)$ 邊形，且 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、…、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_{n-1}B_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$ 分別相交於 P_1、P_2、P_3、P_4、…、P_{2n-1}、P_{2n} 等 $2n$ 點；又若 m 是非負整數，則

(1) 在不失一般性下，我們可以假設正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 乃由正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 平移向量 (a,b) (a 與 b 為實數)再繞著中心點 O 逆時針旋轉角度 $\theta\left(0^\circ<\theta<360^\circ\right)$ 而得，為了方便起見，我們令 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$，亦即 $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

(2) 當 $0\leq m\leq n-1$ 時，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}{\overline{A_kA_{k+1}}}\right)^m=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overline{P_{2k}P_{2k+1}}}{\overline{B_kB_{k+1}}}\right)^m$ (於此，視 $A_{n+1}=A_1$、$B_{n+1}=B_1$、$P_{2n+1}=P_1$)。

(3) 當 $m\geq n$ 時，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}{\overline{A_kA_{k+1}}}\right)^m$ **與** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overline{P_{2k}P_{2k+1}}}{\overline{B_kB_{k+1}}}\right)^m$ **不再維持恆等**。

(4) 當 $m\geq n$ 時，則當

『$b=a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{180^\circ}{n}\times t_1\right)$, 其中 t_1 是整數 或 $\theta=\dfrac{180^\circ}{n}+\dfrac{360^\circ}{n}\times t_2$, 其中 t_2 是整數

且 $\theta\neq\dfrac{360^\circ}{n}+180^\circ\times t_3$, 其中 t_3 是整數，$\theta\neq 180^\circ\times t_4$, 其中 t_4 是整數』

時，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overline{P_{2k-1}P_{2k}}}{\overline{A_kA_{k+1}}}\right)^m$ **與** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overline{P_{2k}P_{2k+1}}}{\overline{B_kB_{k+1}}}\right)^m$ **仍會相等**。

證明：

假設正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 平移向量 (a,b) (a 與 b 為實數)後可得正 n 邊形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$，且正 n 邊形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 與正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 之各邊所在直線相交情形如下：

$\overleftrightarrow{A_1'A_2'}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$、$\overleftrightarrow{A_1'A_2'}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2'A_3'}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2'A_3'}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$、…、$\overleftrightarrow{A_n'A_1'}$ 與 $\overleftrightarrow{B_{n-1}B_n}$、$\overleftrightarrow{A_n'A_1'}$ 與 $\overleftrightarrow{B_nB_1}$ 分別相交於 P_1'、P_2'、…、P_{2n}' 等 $2n$ 點。仿定理 3 的證明步驟(iv)可得

$\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_3'P_4'}=\overline{P_5'P_6'}=\cdots=\overline{P_{2n-2}'P_{2n-1}'}=\overline{P_{2n-1}'P_1'}$

，為了方便起見，令 $\overline{P_1'P_2'}=\overline{P_3'P_4'}=\overline{P_5'P_6'}=\cdots=\overline{P_{2n\text{-}2}'P_{2n-1}'}=\overline{P_{2n\text{-}1}'P_1'}=r$；另外，為了後續書寫方便，再令 $u=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\times\cos\left(\frac{(n-2)\times180^\circ}{n}-90^\circ\right)}{\sin\left(180^\circ-\frac{(n-2)\times180^\circ}{n}-\theta\right)\sin\theta}$，我們依 m 為奇數或偶數分兩類情形討論如下：

(1) 當 m 為奇數時，則

仿照『**定理 12**』、『**定理 13**』、『**定理 14**』之步驟(i)可得兩類有向線段相除的轉換：

① 第一類情形：

(i)

$$\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\alpha}{\overline{A_1A_2}}\right)^m、\left(\frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\overrightarrow{A_2A_3}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m、$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{P_5P_6}}{\overrightarrow{A_3A_4}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times2}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_3A_4}}\right)^m、\cdots、\left(\frac{\overrightarrow{P_{2n-3}P_{2n-2}}}{\overrightarrow{A_{n-1}A_n}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_{n-1}A_n}}\right)^m、$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n}}}{\overrightarrow{A_nA_1}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_nA_1}}\right)^m；$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{B_1B_2}}\right)^m、\left(\frac{\overrightarrow{P_4P_5}}{\overrightarrow{B_2B_3}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_2B_3}}\right)^m、$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{P_6P_7}}{\overrightarrow{B_3B_4}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times2}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_3B_4}}\right)^m、\cdots、\left(\frac{\overrightarrow{P_{2n-2}P_{2n-3}}}{\overrightarrow{B_{n-1}B_n}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_{n-1}B_n}}\right)^m、$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{P_{2n}P_1}}{\overrightarrow{B_nB_1}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_nB_1}}\right)^m。$$

(ii) 承(i)，欲證明 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}}{\overrightarrow{A_kA_{k+1}}}\right)^m=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}}{\overrightarrow{B_kB_{k+1}}}\right)^m$ 等價於去證明

$$\left(\frac{r-u\times\sin\alpha}{\overline{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times2}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_3A_4}}\right)^m$$

$$+\cdots+\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_{n-1}A_n}}\right)^m+\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_nA_1}}\right)^m$$

$$=\left(\frac{r+u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_2B_3}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_3B_4}}\right)^m$$

$$+\cdots+\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_{n-1}B_n}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_nB_1}}\right)^m$$

，又因為 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 為兩個全等的正 $n(n\geq 3)$ 邊形，所以 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\cdots=\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_nA_1}=\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\cdots=\overline{B_{n-1}B_n}=\overline{B_nB_1}$，因此又等價於去證明 $\left(r-u\times\sin\alpha\right)^m+\left(r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha\right)\right)^m+\left(r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha\right)\right)^m$

$$+\cdots+\left(r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)\right)^m+\left(r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)\right)^m$$

$$=\left(r+u\times\sin(\alpha-\theta)\right)^m+\left(r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right)\right)^m+\left(r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha+\theta\right)\right)^m$$

$$+\cdots+\left(r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)\right)^m+\left(r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)\right)^m$$

接下來，仿照『**定理 3**』之證明過程可證明原命題成立。

② 第二類情形：

(i) $\left(\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{A_1A_2}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin\alpha}{\overline{A_1A_2}}\right)^m$、$\left(\frac{\overline{P_3P_4}}{\overline{A_2A_3}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m$、

$\left(\frac{\overline{P_5P_6}}{\overline{A_3A_4}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_3A_4}}\right)^m$、…、$\left(\frac{\overline{P_{2n-3}P_{2n-2}}}{\overline{A_{n-1}A_n}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_{n-1}A_n}}\right)^m$、

$\left(\frac{\overline{P_{2n-1}P_{2n}}}{\overline{A_nA_1}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_nA_1}}\right)^m$；

$\left(\frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{B_1B_2}}\right)^m=\left(\frac{r-u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{B_1B_2}}\right)^m$、$\left(\frac{\overline{P_4P_5}}{\overline{B_2B_3}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_2B_3}}\right)^m$、

$\left(\frac{\overline{P_6P_7}}{\overline{B_3B_4}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times 2}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_3B_4}}\right)^m$、…、$\left(\frac{\overline{P_{2n-2}P_{2n-3}}}{\overline{B_{n-1}B_n}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_{n-1}B_n}}\right)^m$、

$\left(\frac{\overline{P_{2n}P_1}}{\overline{B_nB_1}}\right)^m=\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_nB_1}}\right)^m$。

(ii) 承(i)，欲證明 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}}{\overrightarrow{A_kA_{k+1}}}\right)^m=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}}{\overrightarrow{B_kB_{k+1}}}\right)^m$ 等價於去證明

$$\left(\frac{r+u\times\sin\alpha}{\overline{A_1A_2}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_2A_3}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times2}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_3A_4}}\right)^m$$

$$+\cdots+\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_{n-1}A_n}}\right)^m+\left(\frac{r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)}{\overline{A_nA_1}}\right)^m$$

$$=\left(\frac{r-u\times\sin(\alpha-\theta)}{\overline{B_1B_2}}\right)^m+\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_2B_3}}\right)^m+\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times2}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_3B_4}}\right)^m$$

$$+\cdots+\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_{n-1}B_n}}\right)^m+\left(\frac{r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)}{\overline{B_nB_1}}\right)^m$$

，又因為 $A_1A_2\cdots A_n$ 與 $B_1B_2\cdots B_n$ 為兩個全等的正 $n(n\geq3)$ 邊形，所以 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\cdots=\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_nA_1}=\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\cdots=\overline{B_{n-1}B_n}=\overline{B_nB_1}$，因此又等價於去證明 $(r+u\times\sin\alpha)^m+\left(r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha\right)\right)^m+\left(r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times2}{n}-\alpha\right)\right)^m$

$$+\cdots+\left(r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha\right)\right)^m+\left(r-u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha\right)\right)^m$$

$$=(r-u\times\sin(\alpha-\theta))^m+\left(r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\alpha+\theta\right)\right)^m+\left(r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times2}{n}-\alpha+\theta\right)\right)^m$$

$$+\cdots+\left(r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-2)}{n}-\alpha+\theta\right)\right)^m+\left(r+u\times\sin\left(\frac{360^\circ\times(n-1)}{n}-\alpha+\theta\right)\right)^m$$

接下來，仿照『**定理 3**』之證明過程可證明原命題成立。

(2) 當 m 為偶數時，則

類似上述(1)證明過程可得證原命題成立。 □