

第十九屆旺宏科學獎

作品說明書

參賽編號：SA19-542 _abstract.pdf

作品名稱：散射光強度與液體折射率之探討

姓名：黃詩穎

關鍵字：米氏散射、折射率、氣懸膠

摘要

本研究利用米氏散射原理，配合數種波長雷射之多對波長消光法，測量雷射光通過介質前後的光強度變化，並設計一套程式以計算出介質的折射率、平均粒徑大小的最優解及誤差值。

利用實驗結果搭配程式分析後得到最佳解之水霧的折射率落在 1.1~1.37，而各濃度食鹽水之折射率與理論折射率誤差不超過 0.15。平均粒徑大小則是藉顯微鏡觀測結果和程式計算推得水霧的平均粒徑大小約介於 4.9~7.3 μm 之間，食鹽水的平均粒徑大小範圍約介於 4.9~8.6 μm 。

本研究也進一步討論平均粒徑大小與折射率關係，以及實驗誤差導致雷射光波長的消光係數比值曲線抖動而造成的毛刺效應，因而產生與理論不合之誤差原因，並推論可藉由大量重複實驗以消除毛刺效應帶來的誤差影響。

壹、研究動機

某次在網路上看到民間空氣盒子計畫的相關新聞時，便對它感到十分好奇。在查詢測定原理後，發現它是利用雷射光照射微粒後產生散射，進而得知空氣中微粒濃度。這和我想像中的高昂精密的器材測定空汙濃度時的方法大有不同，在好奇之下，便開始查閱相關書籍並自己動手實驗。

貳、研究目的

- 一、利用米氏散射測量並計算出水的折射率
- 二、利用米氏散射測量並計算出不同濃度鹽水的折射率

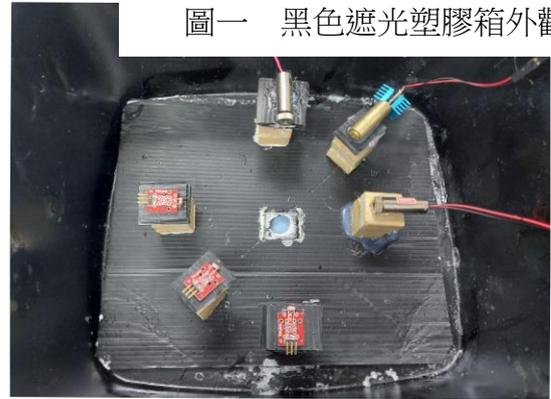
參、研究設備及器材

一、主要裝置之製作

(一) 在一有蓋塑膠箱的底部和上蓋中央各挖一直徑 1.7 公分之圓孔，並以黑色噴漆將塑膠箱噴至全黑以防外界光源的干擾。(圖一)



(二) 將三個光敏電阻和紅光雷射、綠光雷射、藍光雷射架設於一黑色底板上不同位置(底板中央亦有一直徑 2.2 公分之圓孔)，調整各雷射與光敏電阻皆與圓心相距 6.5 公分且都在同一水平面上。(圖二)



圖一 黑色遮光塑膠箱外觀

圖二 三組光敏電阻與雷射筆

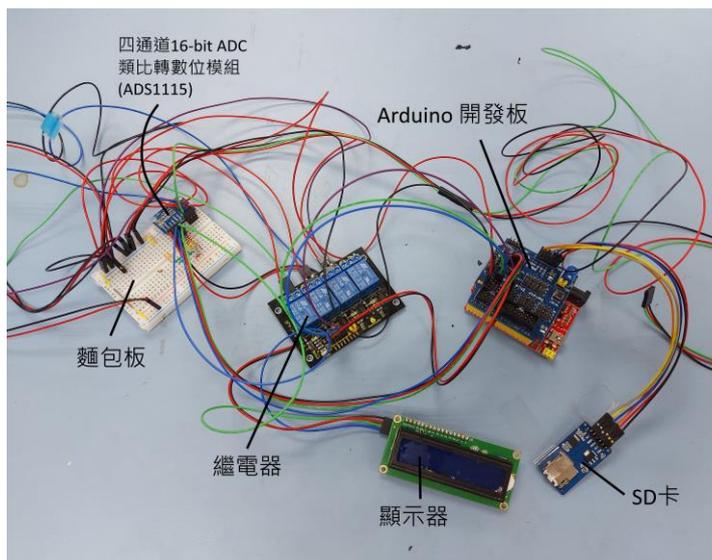
(三) 安裝一小風扇於上蓋上的圓孔內側，並於下方黏黑色塑膠板遮光。(圖三)



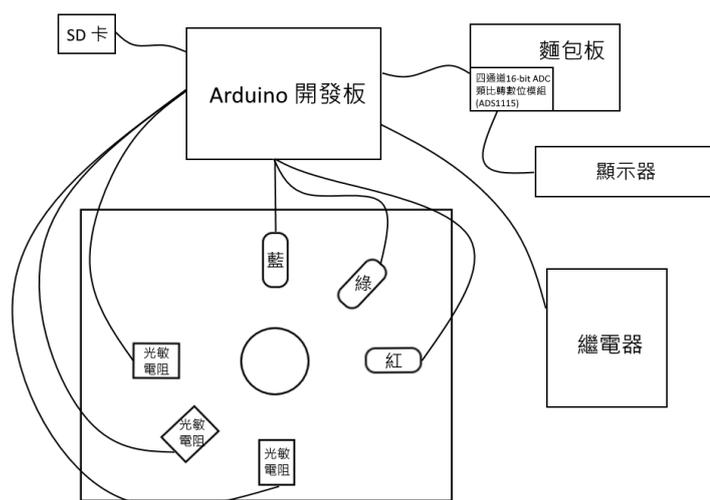
圖三 小風扇及黑色塑膠板

二、研究器材

(一) 麵包板、SD 卡、顯示器、繼電器、四通道 16-bit ADC 類比轉數位模組(ADS1115)、Arduino 開發板 (圖四、圖五)



圖四 實驗裝置(Arduino 部分)



圖五 裝置設計示意圖

(二) 鎢絲燈泡、霧化器、光敏電阻、磁攪拌器(圖六)



圖六 實驗裝置

肆、研究過程及方法

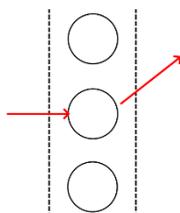
一、文獻探討

(一) 散射與折射

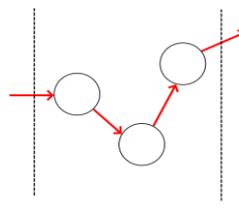
當光通過的介質是不均勻的狀態時，部分光線的前進方向會改變，這個現象稱為散射。反之，當光通過均勻介質時，則會發生折射。

而一個介質的折射率 m 是光在真空中的速度與介質中的速度之比例， m 可表示成一複數： $m = n + \eta i$ 。若是光束在通過介質時被吸收，則此介質稱為耗散介質，其虛部不為 0；相反的，如果不吸收則稱作非耗散介質，虛部為 0，也就表示折射率為一實數。

根據比爾·朗伯定律： $I = I_0 e^{-\tau l}$ (I 為透射光強度， I_0 為入射光強度， τ 為介質之濁度， l 是光波通過介質之距離)，若定義光學厚度 $T = \tau \cdot l$ ，當 T 小於 0.1 時，雷射光穿過的介質視為僅由一層顆粒所組成，因此只發生一次散射，這個現象稱為單散射(圖七)。



圖七 單散射



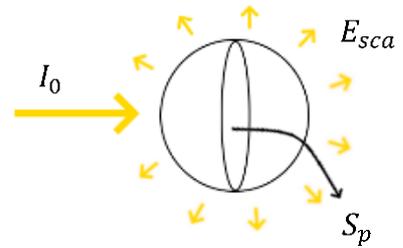
圖八 複散射

若是 T 達到 0.3 以上時，光束通過有數層顆粒厚度的介質導致了多次散射的結果，也就是複散射(圖八)。

(二) 係數說明

於顆粒粒度測量技術及應用中提及光的散射現象裡，散射、吸收和消光截面與係數等物理量佔了極大的比例。散射係數 k_{sca} 等於一個顆粒在單位時間內散射的全部光能量 E_{sca} 與投射到散射體上 S_p 的全部光能量 I_0 之比 (圖九)：

$$k_{sca} = \frac{E_{sca}}{I_0 S_p}$$



圖九

同理可得吸收係數 k_{abs} 、消光係數 k_{ext} 的關係式：

$$k_{abs} = \frac{E_{abs}}{I_0 S_p} \quad k_{ext} = \frac{E_{ext}}{I_0 S_p}$$

再根據能量守恆定律可以得到以下關係式：

$$k_{ext} = k_{sca} + k_{abs}$$

(三) 公式整理及推導

在翻閱文獻後，發現折射率 m 可以藉由以下的方程式求得。根據比爾·朗伯定律： $I = I_0 e^{-\tau l}$ 和 $\tau = N k_{ext} \frac{\pi d^2}{4}$ 可推出：

$$\ln(I/I_0) = -\frac{\pi}{4} N d^2 k_{ext} \quad (N: \text{顆粒數、} d: \text{顆粒粒徑大小})$$

由兩不同的波長所求的 $\ln(I/I_0)$ 相除以消去顆粒數 N ，因為 d 為已知，便可得出此函數：

$$\frac{\ln(I/I_0)_i}{\ln(I/I_0)_j} = \frac{k_{ext_i}}{k_{ext_j}}$$

其中 k_{ext} 的求法為：

$$k_{ext} = \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{Re}(a_n + b_n)$$

Re 表示取實部。這對研究影響極大，因為若是 k_{ext} 為一實數，也就代表在整個實驗中，由 k_{ext} 推出的折射率也是實數。所以 $m = n + \eta i$ ，只取實部 n 的部分來做計算。

其中 α 為一無因次參量，表達成：

$$\alpha = \frac{m_1 \pi d}{\lambda} \quad (m_1 \text{ 為周圍環境之折射率，} \lambda \text{ 為入射光之波長})$$

由於本實驗的 m_1 為空氣的折射率，所以可以改寫為：

$$\alpha = \frac{\pi d}{\lambda}$$

而 a_n 和 b_n 在 Mie 散射計算中的原始函數表達形式也於期刊（朱震 et al，1999）中提及：

藉由 Aden 推出的公式： $D_n(d) = \frac{J'_n(d)}{J_n(d)}$ ，以及 Bessel 函數遞推關係式：

$$a_n = \frac{J_n(\alpha)J'_n(m\alpha) - mJ'_n(\alpha)J_n(m\alpha)}{J_n(\alpha)J'_n(m\alpha) - mJ'_n(\alpha)J_n(m\alpha)} \quad b_n = \frac{mJ_n(\alpha)J'_n(m\alpha) - J'_n(\alpha)J_n(m\alpha)}{mY_n(\alpha)J'_n(m\alpha) - Y'_n(\alpha)J_n(m\alpha)}$$

$$J'_n(\alpha) = J_{n-1}(\alpha) - \frac{nJ_n(\alpha)}{\alpha} \quad \text{和} \quad Y'_n(\alpha) = Y_{n-1}(\alpha) - \frac{nY_n(\alpha)}{\alpha}$$

可將 a_n 和 b_n 轉化為：

$$a_n = \frac{[D_n^{(1)}(m\alpha)/m + n/\alpha] J_n(\alpha) - J_{n-1}(\alpha)}{[D_n^{(1)}(m\alpha)/m + n/\alpha] Y_n(\alpha) - Y_{n-1}(\alpha)} \quad b_n = \frac{[mD_n^{(1)}(m\alpha) + n/\alpha] J_n(\alpha) - J_{n-1}(\alpha)}{[mD_n^{(1)}(m\alpha) + n/\alpha] Y_n(\alpha) - Y_{n-1}(\alpha)}$$

計算 $D_n(m\alpha)$ 的部分，前推公式是過往所採用的計算法：

$$D_n(m\alpha) = -\frac{n}{m\alpha} + \frac{1}{[n/m\alpha - D_{n-1}(m\alpha)]}$$

然而此方法的穩定性低，且當 α 極小時所求得解並不精確。因此為了提升準確度，

計算 $D_n(m\alpha)$ 時改用 Lentz 連分式的運算方法（朱震 et al，1999）：

$$D_n^{(1)}(m\alpha) = -\frac{n}{m\alpha} + \frac{j_{n-1}(m\alpha)}{j_n(m\alpha)}$$

於另一篇由 William J. Lentz(1976)所發表的文獻中提及 $\frac{j_{n-1}(m\alpha)}{j_n(m\alpha)}$ 同樣可以藉 Lentz 連

分式改良為：

$$\frac{j_{n-1}(m\alpha)}{j_n(m\alpha)} = \frac{[a_1][a_2 a_1] \dots [a_k \dots a_1]}{[a_1] \dots [a_k \dots a_2]}$$

a_k 與 $[a_k, a_{k-1} \dots a_1]$ 的計算方法分別是：

$$a_k = (-1)^{k+1} 2(n+k-1) \quad [a_k, a_{k-1} \dots a_1] = a_k + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_{k-2} + \frac{1}{a_{k-3} + \dots}}}$$

最後 a_n 和 b_n 解法裡的 $J_n(\alpha)$ 與 $Y_n(\alpha)$ 則是由下列關係式解得：

$$J_n(\alpha) = \alpha j_n(\alpha) \quad Y_n(\alpha) = \alpha j_n(\alpha) + \alpha y_n(\alpha) i$$

依據 Bessel 差積公式可得知：

$$y_n(\alpha) = \frac{y_{n-1}(\alpha)}{C_n(\alpha)} - \frac{\alpha^{-2}}{j_{n-1}(\alpha)} \quad j_n(\alpha) = \frac{j_{n-1}(\alpha)}{C_n} = \frac{\alpha^2 + j_{n-1}(\alpha)y_n(\alpha)}{y_{n-1}(\alpha)}$$

$$j_0 = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad y_0 = -\frac{\cos \alpha}{\alpha} \quad j_1(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos \alpha}{\alpha} \quad y_1(\alpha) = -\frac{\cos \alpha}{\alpha^2} - \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$(C_n = \frac{j_{n-1}(\alpha)}{j_n(\alpha)})$$

綜合上方各算式，可將兩個 k_{ext} 分別以 m 的形式表示，最後將等號兩邊交叉相乘後即可解得折射率 m 。

(四) 平均粒徑計算

於「顆粒粒度測量技術及應用」一書中提及，可以用消光法來測得平均粒徑 D_{32} ：

$$D_{32} = \frac{\int N(D)D^3 dD}{\int N(D)D^2 dD} \quad N(D) : \text{粒徑分布函數}$$

且在此方法中平均消光係數 k_m 的計算法為：

$$k_m = \frac{\int k_{ext} N D^2 dD}{\int N D^2 dD}$$

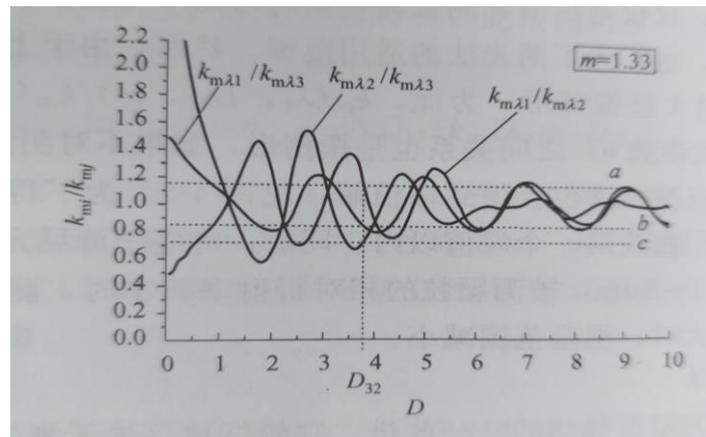
但若是 $\alpha \leq 30$ ，由 D_{32} 推得的 k_{ext} 可以取代與之相差甚小的 k_m 。因此可將前述

$\ln(I/I_0) = -\frac{\pi}{4} N d^2 k_{ext}$ 算式以 D_{32} 和 k_m 代入：

$$\ln(I/I_0) = -\frac{\pi}{4} l N D_{32}^2 k_m(\lambda, m, D_{32})$$

此處採用多波長消光法，以粒徑 D_{32} 為 x 軸， $\frac{k_{mi}}{k_{mj}}$ 為 y 軸。先取實驗測得的其中兩波長之 k_{mi} 、 k_{mj} 相除為基準，再將由所有 k_{mi} 、 k_{mj} 之比值構成的曲線繪出並找出兩者之交點。最終當每組資料中的其中一交點皆位在同一鉛直線上時，其對應 x 軸的值

即是 D_{32} ，如圖十所示：



圖十 多波長法測量原理

與 k_{ext} 相同，將兩不同波長的 $\ln(I/I_0)$ 相除：

$$\frac{\ln(I/I_0)_i}{\ln(I/I_0)_j} = \frac{k_m(\lambda_i, D_{32}, m)}{k_m(\lambda_j, D_{32}, m)}$$

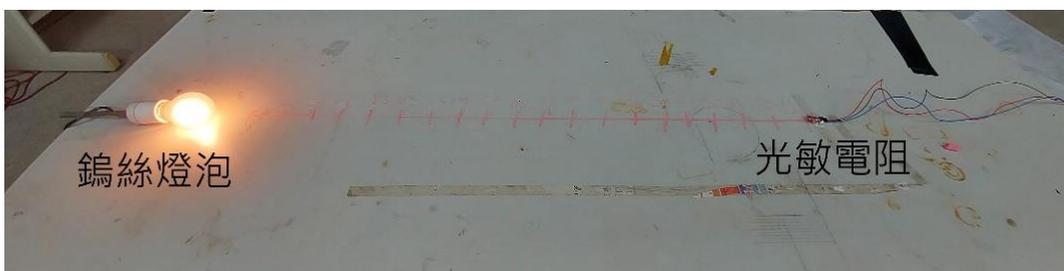
然而因誤差的影響，上式可以改寫為：

$$\min = \sum \left| \frac{\ln(I/I_0)_i}{\ln(I/I_0)_j} - \frac{k_m(\lambda_i, D_{32}, m)}{k_m(\lambda_j, D_{32}, m)} \right|$$

由此最佳優化法找出最小誤差值 \min ，就可以得到平均粒徑 D_{32} 。

二、實驗一：電壓與光強度關係

- (一)將鎢絲燈泡及光敏電阻放於一接近完全黑暗房間，並依序將光敏電阻置於距離鎢絲燈泡 5 cm ~ 100 cm 處(每 5 cm 為一單位)，測量其電壓值（圖十一）。



圖十一 鎢絲燈泡與光敏電阻

(二)將 100 cm 處之光強度定為 1 光強度(單位：S)，再根據光強度與距離平方成反比之關係得到其餘距離之光強度（表一）。

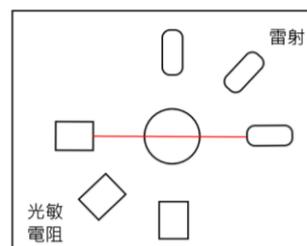
表一 光強度與距離關係

距離(cm)	光強度(S)	距離(cm)	光強度(S)	距離(cm)	光強度(S)
5	400	40	6.25	75	1.777778
10	100	45	4.938272	80	1.5625
15	44.44444	50	4	85	1.384083
20	25	55	3.305785	90	1.234568
25	16	60	2.777778	95	1.108033
30	11.11111	65	2.366864	100	1
35	8.163265	70	2.040816		

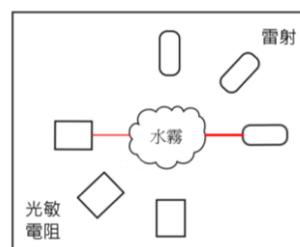
二、實驗二：測量水霧光強度變化

(一) 實驗過程

1. 利用光譜儀測定各雷射光之波長
2. 蓋上遮光黑箱以達到完全黑暗環境（圖一）。
3. 打開雷射，使紅、綠、藍雷射光以頻率 0.17 秒依序閃爍打向各自正對的光敏電阻，測量其入射電壓（圖十二）後，關掉雷射。
4. 將霧化器放入 400 ml 的水中，打開霧化器及小風扇，等待一段時間後打開雷射，使紅、綠、藍雷射光以頻率 0.17 秒依序閃爍打向各自正對的光敏電阻，測量其透射電壓（圖十三）。



圖十二 入射雷射光



圖十三 透射雷射光

(二) excel 分析

1. 把所得的原始電壓值做平均和標準差，接著將超出平均值一個正負標準差的數據刪掉，最後把剩下的數據再做一次平均。

2. 將電壓平均值改為電阻，透過電阻與光強度關係轉換為光強度（表二）。

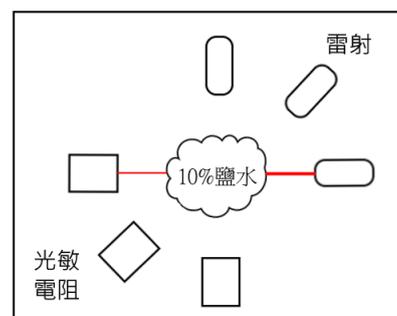
表二 水霧入射電壓轉光強度

		入射電壓 (mV)	光強度 (S)			入射電壓 (mV)	光強度 (S)
水霧 第一次	紅光	63.412	678.647	水霧 第五次	紅光	68.752	586.909
	藍光	266.276	49.527		藍光	2952.058	0.158
	綠光	185.0943	97.243		綠光	184.484	97.836
水霧 第二次	紅光	57.5010	808.877	水霧 第六次	紅光	65.105	647.280
	藍光	278.954	45.391		藍光	2781.959	0.202
	綠光	181.776	100.535		綠光	190.030	92.643
水霧 第三次	紅光	52.251	960.281	水霧 第七次	紅光	53.751	912.806
	藍光	410.158	21.804		藍光	3389.072	0.081
	綠光	192.787	90.217		綠光	263.4035	50.542
水霧 第四次	紅光	48.626	1092.214	水霧 第八次	紅光	55.376	865.364
	藍光	2540.627	0.285		藍光	169.737	114.021
	綠光	197.581	86.220		綠光	239.965	60.143
水霧 第九次	紅光	46.813	1169.041	水霧 第十次	紅光	537.3596	12.852
	藍光	157.254	131.1506		藍光	192.7133	90.280
	綠光	198.756	85.282		綠光	414.3714	21.378

實驗三：測量鹽水

(一) 實驗過程

1. 調配不同重量百分濃度 10%、15%、20%、25% 之 400 g 鹽水。
2. 蓋上遮光黑箱之蓋子以達到完全黑暗環境。
3. 打開雷射，使紅、綠、藍雷射光以頻率 0.17 秒依序閃爍打向各自正對的光敏電阻，測量其入射電壓（圖十二）後，關掉雷射。
4. 將霧化器放入 400 ml 的 10% 鹽水中，打開霧化器及小風扇，等待一段時間後打開雷射，紅、綠、藍雷射光以頻率 0.17 秒依序閃爍打向各自正對的光敏電阻，測量其透射電壓（圖十四）。
5. 更換不同濃度鹽水，重複步驟 2~4。



圖十四 雷射透射電壓

(二) Excel 分析

1. 把所得的原始電壓值做平均和標準差，接著將超出平均值一個正負標準差的數據刪掉，最後把剩下的數據再做一次平均。
2. 將得到電壓平均值利用分壓定律改為電阻，再透過電阻與光強度關係轉為光強度。

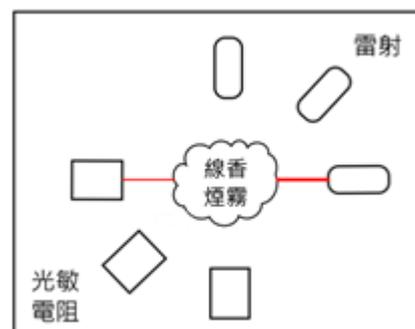
度。表三 鹽水入射電壓與光強度

		入射電壓 (mV)	入射光強 (S)			入射電壓 (mV)	入射光強 (S)
鹽水 10% 第一次	紅光	52.126	964.409	鹽水 15% 第二次	紅光	53.251	928.218
	藍光	3893.065	0.032		藍光	3634.438	0.053
	綠光	275.058	46.605		綠光	203.834	81.310
鹽水 10% 第二次	紅光	82.913	418.982	鹽水 20% 第一次	紅光	54.876	879.546
	藍光	3923.898	0.030		藍光	3330.310	0.089
	綠光	258.216	52.457		綠光	178.755	103.681
鹽水 10% 第三次	紅光	49.001	1077.298	鹽水 20% 第二次	紅光	126.628	194.696
	藍光	158.817	128.799		藍光	3956.912	0.028
	綠光	193.130	89.921		綠光	302.134	39.060
鹽水 10% 第四次	紅光	44.126	1299.4421	鹽水 25% 第一次	紅光	54.626	886.773
	藍光	157.404	130.92195		藍光	3344.836	0.087
	綠光	194.53625	88.72615		綠光	240.361	59.959
鹽水 15% 第一次	紅光	54.751	883.148	鹽水 25% 第二次	紅光	79.981	447.057
	藍光	3409.242	0.078		藍光	3916.400	0.0309
	綠光	193.380	89.707		綠光	250.007	55.719

實驗四：測量線香

(一) 實驗過程

1. 分別將 A 牌與 B 牌線香各分為前、中、後三段。
2. 蓋上遮光黑箱以達到完全黑暗環境。
3. 打開雷射，使紅、綠、藍雷射光以頻率 0.17 秒依序閃爍打向各自正對的光敏電阻，測量其入射電壓後，關掉雷射。
4. 取三根 A 牌前段線香點燃並打開小風扇，等待一段時間後打開雷射，使紅、綠、藍雷射以頻率



圖十五 雷射透射電壓

0.17 秒依序閃爍打向各自正對光敏電阻，測量透射電壓。

5. 更換不同品牌以及位置的線香，重複步驟 2~4。

(三) Excel 分析

1. 把所得的原始電壓值做平均和標準差，接著將超出平均值一個正負標準差的數據刪掉，最後把剩下的數據再做一次平均。
2. 將得到電壓平均值利用分壓定律改為電阻，再透過電阻與光強度關係轉為光強度。

表四 線香入射電壓與光強度

		入射電壓 (mV)	入射光強 (S)			入射電壓 (mV)	入射光強 (S)
A 牌 前段	紅光	43.959	1308.265	B 牌 前段	紅光	45.605	1225.031
	藍光	2034.012	0.589		藍光	2424.511	0.336
	綠光	168.130	116.028		綠光	653.519	8.670
A 牌 中段	紅光	40.751	1498.060	B 牌 中段	紅光	44.251	1292.886
	藍光	2017.968	0.603		藍光	2029.937	0.592
	綠光	194.547	88.717		綠光	442.669	18.808
A 牌 後段	紅光	44.814	1233.080	B 牌 後段	紅光	44.126	1299.442
	藍光	2100.188	0.432		藍光	2598.516	0.262
	綠光	548.191	11.114		綠光	642.603	8.973

伍、研究結果

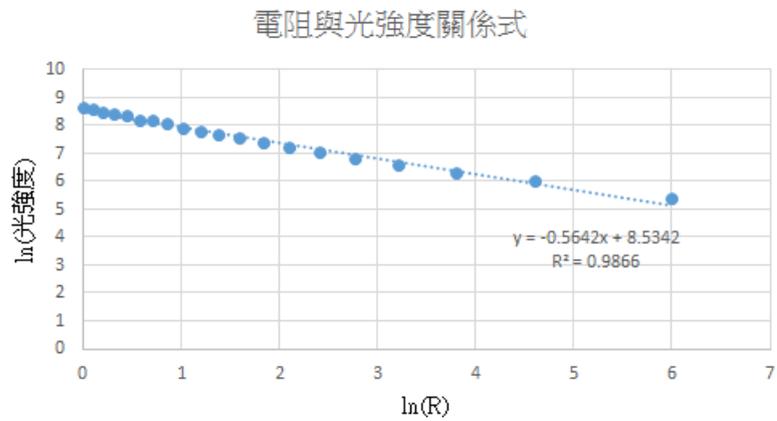
一、推導光強度與電壓換算公式

(一)將顯示器所得到電壓值改為電壓變化量，再利用分壓定律轉電阻值後，取自然對數。(表五)

表五 不同距離電壓值換算光強度

距離 (cm)	光強度 (S)	平均電壓 (mV)	R (Ω)	距離 (cm)	光強度 (S)	平均電壓 (mV)	R (Ω)
5	400	107.011	218.702	55	3.306	978.385	2432.817
10	100	203.997	425.349	60	2.778	1076.823	2744.772
15	44.444	267.911	566.158	65	2.367	1227.092	3252.377
20	25	341.198	732.372	70	2.041	1311.049	3553.990
25	16	413.758	902.172	75	1.778	1359.164	3733.109
30	11.111	516.480	1151.953	80	1.563	1482.017	4212.688
35	8.163	603.660	1373.098	85	1.384	1589.454	4660.409
40	6.25	710.206	1655.572	90	1.235	1658.150	4961.771
45	4.938	805.199	1919.517	95	1.108	1756.553	5415.698
50	4	897.520	2187.751	100	1	1794.183	5596.647

(二)將我自定之各距離光強度取自然對數後，以其為 X 軸，上述電阻值為 Y 軸，作圖。得到一次函數式 $y = -0.5642x + 8.5342$ ，且相關係數達到 0.9866。



圖十六 電阻與光強度公式

二、雷射光波長

光譜儀測得之各雷射光波長，下表六所示：

表六 雷射光波長

	紅光	藍光	綠光
波長(nm)	652	403	531

三、水霧折射率

將得到之入射電壓及透射電壓轉為光強度後，輸入程式，得到可能平均粒徑與相對應折射率及誤差值 min（表七）。

$$\min = \sum \left| \frac{\ln(I/I_0)_i}{\ln(I/I_0)_j} - \frac{k_m(\lambda_i, D_{32}, m)}{k_m(\lambda_j, D_{32}, m)} \right|$$

表七 水霧程式最佳解

	平均粒徑 (μm)	折射率	誤差		平均粒徑 (μm)	折射率	誤差
第 1 組	4.8	1.21	0.092	第 5 組	3.6	1.10	0.020
第 2 組	6.8	1.32	0.027	第 6 組	8.0	1.24	0.011
第 3 組	5.7	1.38	0.034	第 7 組	6.0	1.22	0.012
第 4 組	6.1	1.37	0.022	第 8 組	7.6	1.23	0.167
第 9 組	7.6	1.40	0.041	第 10 組	7.8	1.34	0.003

四、鹽水折射率

將得到之入射電壓及透射電壓經由公式轉為光強度後，輸入程式，得到可能平均粒徑與相對應折射率及誤差值 min（表八）。

$$\min = \sum \left| \frac{\ln(I/I_0)_i}{\ln(I/I_0)_j} - \frac{k_m(\lambda_i, D_{32}, m)}{k_m(\lambda_j, D_{32}, m)} \right|$$

表八 鹽水程式最佳解

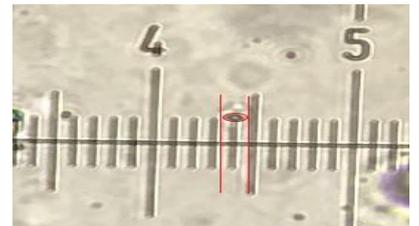
濃度%	平均粒徑 (μm)	折射率	理論折射率	誤差
10%	8.9	1.44	1.326	0.103
10%	4.8	1.43	1.326	0.005
10%	8.9	1.10	1.326	0.009
10%	8.0	1.26	1.326	0.008
15%	8.1	1.33	1.334	0.010
15%	8.1	1.34	1.334	0.052
20%	8.0	1.19	1.346	0.045
20%	3.6	1.31	1.346	0.019
25%	6.1	1.10	1.354	0.077
25%	6.1	1.13	1.354	0.023

五、實驗二：利用顯微鏡確認顆粒粒徑大小

(一) 確認顯微鏡目鏡中刻度尺與校正標準刻度片之長度比例關係為 9 : 22。

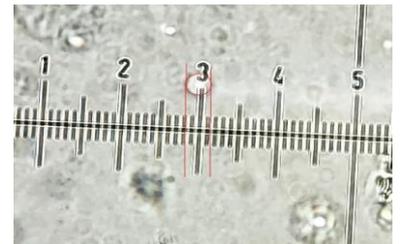
(二) 水霧粒徑

1. 視野範圍內之最小粒徑為 2 格目鏡刻度尺，大約為 $4.9 \mu\text{m}$ (圖十七)。



圖十七 水霧視野範圍內最小粒徑

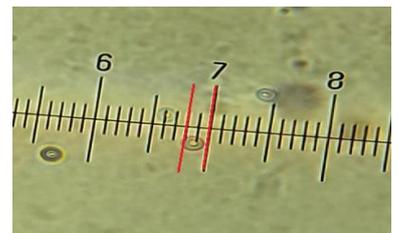
2. 視野範圍內之最大粒徑為 3 格目鏡刻度尺，大約為 $7.3 \mu\text{m}$ (圖十八)。



圖十八 水霧視野範圍內最大粒徑

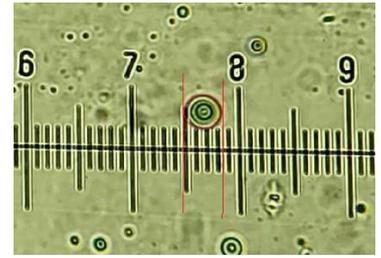
(三) 鹽水粒徑

1. 視野範圍內之最小粒徑為 2 格目鏡刻度尺，大約為 $4.9 \mu\text{m}$ (圖十九)。



圖十九 鹽水視野範圍內最小粒徑

2. 視野範圍內之最大粒徑為 3.5 格目鏡刻度尺，大約為 8.6 μm (圖二十)。



圖二十 鹽水視野範圍內最大粒徑

六、線香折射率

將得到之入射電壓及透射電壓轉為光強度後，輸入程式，得到可能平均粒徑與相對應折射率及誤差值 min (表九)。

$$\min = \sum \left| \frac{\ln(I/I_0)_i}{\ln(I/I_0)_j} - \frac{k_m(\lambda_i, D_{32}, m)}{k_m(\lambda_j, D_{32}, m)} \right|$$

表九 線香程式解出最佳解

	平均粒徑 (μm)	折射率	誤差
A 牌線香前段	8.8	1.27	0.007
A 牌線香中段	4.7	1.43	0.014
A 牌線香後段	5.6	1.44	0.049
B 牌線香前段	4.4	1.47	0.038
B 牌線香中段	4.1	1.45	0.013
B 牌線香後段	3.5	1.31	0.027

陸、研究分析與討論

一、 確認粒徑可能範圍

在統計過全部數據資料之後，可發現不論水或鹽水在同一數量級下出現靠近理論折射率之值所對應的平均粒徑大小大多集中於 5 μm ~ 8 μm 此範圍內。透過顯微鏡觀察水霧在視野範圍內最小與最大粒徑，發現其值分別為 4.9 μm 和 7.3 μm ，略小於上述程式之值。推測這是由於霧化器噴出水霧粒徑微小，蒸發速度過快，導致顯微鏡所測得最大粒徑並非霧化器所噴出最大粒徑；鹽水在視野範圍內最小粒徑與最大粒徑之值則為 4.9 μm

及 $8.6\mu\text{m}$ ，則是符合在程式中出現的可能平均粒徑大小。

二、尋找非程式解出最佳解之可能解

(二) 在水霧和食鹽水全部的實驗數據中，經由程式而求出的最小誤差之折射率與平均粒徑大小多數皆不是靠近理論之值，只有少部分最佳解即靠近理論值。於是，改為尋找與最佳解誤差值在同一數量級且折射率及平均粒徑大小合理的數據，並再比對程式最佳解數值。並以綠色醒目標示標記較佳之結果(表十)。理論上，水的折射率是 1.33，此方法得出的結果如下表所示：

表十 水霧程式最佳解與尋找解比較

	折射率	平均粒徑 (μm)	誤差	理論折射率
第 1 組程式最佳解	1.21	4.8	0.092	1.33
第 1 組尋找解	1.21	4.8	0.092	1.33
第 2 組程式最佳解	1.32	6.8	0.027	1.33
第 2 組尋找解	1.32	6.8	0.027	1.33
第 3 組程式最佳解	1.38	5.7	0.034	1.33
第 3 組尋找解	1.3	4.1	0.007	1.33
第 4 組程式最佳解	1.37	6.1	0.022	1.33
第 4 組尋找解	1.34	6.1	0.098	1.33
第 5 組程式最佳解	1.1	3.6	0.020	1.33
第 5 組尋找解	1.35	4.2	0.066	1.33
第 6 組程式最佳解	1.24	8.0	0.011	1.33
第 6 組尋找解	1.32	8.0	0.017	1.33
第 7 組程式最佳解	1.22	6.0	0.012	1.33
第 7 組尋找解	1.33	8.8	0.068	1.33

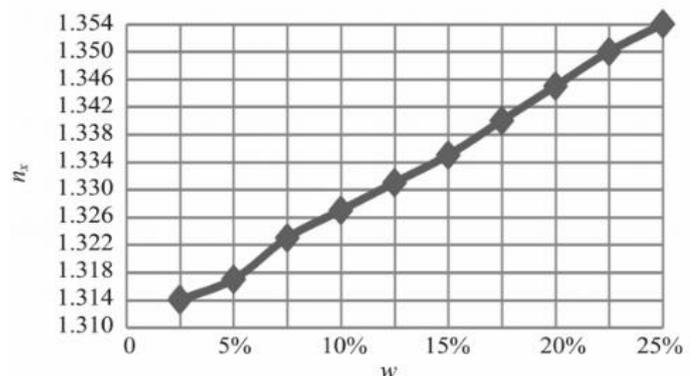
	折射率	平均粒徑 (μ m)	誤差	理論折射率
第 8 組程式最佳解	7.6	1.23	0.167	1.33
第 8 組尋找解	6.52	1.39	0.069	1.33
第 9 組程式最佳解	7.6	1.4	0.041	1.33
第 9 組尋找解	7.644	1.35	0.057	1.33
第 10 組程式最佳解	7.807	1.34	0.003	1.33
第 10 組尋找解	7.807	1.34	0.003	1.33

(三)鹽水理論值

根據許釋文等(2018)的研究，在室溫底下所測之各種濃度鹽水折射率如表十一：

表十一 不同濃度鹽水折射率

濃度	折射率
10%	1.326
15%	1.334
20%	1.346
25%	1.354



圖二十一 不同濃度鹽水折射率

三、誤差原因分析

分析數據後發現幾個問題，第一是在同一折射率底下，可能有著多組不同的粒徑大小，如下表十二；第二是某一折射率與理論解相差甚大，然而兩者的粒徑大小相減後的值卻小於 0.1，如下表十三。猜測可能原因是在使用多波長消光法計算平均粒徑大小時，因為許多誤差造成的影響，最終所得的曲線出現毛刺效應。這也間接造成在兩曲線準備相交時會因為毛刺效應產生多餘交點，也就是導致上述兩個現象的因素。

表十二 鹽水程式解與尋找解比較

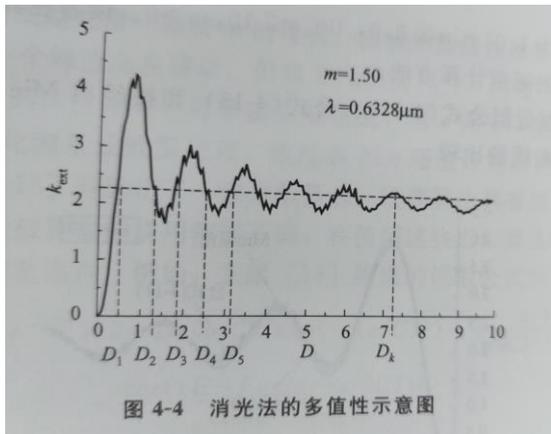
	折 射 率	平均 粒徑 (μm)	誤 差	理 論 折 射 率		折 射 率	平均 粒徑 (μm)	誤 差	理 論 折 射 率
10%第 1 次 程式最佳解	1.44	8.9	0.103	1.326	15%第 2 次 程式最佳解	1.35	8.1	0.052	1.334
10%第 1 次 尋找解	1.32	5.6	0.166	1.326	15%第 2 次 尋找解	1.35	8.1	0.052	1.334
10%第 2 次 程式最佳解	1.43	4.8	0.005	1.326	20%第 1 次 程式最佳解	1.19	8.0	0.045	1.346
10%第 2 次 尋找解	1.43	4.8	0.005	1.326	20%第 1 次 尋找解	1.34	7.6	0.062	1.346
10%第 3 次 程式最佳解	1.1	8.9	0.009	1.326	20%第 2 次 程式最佳解	1.31	3.6	0.019	1.346
10%第 3 次 尋找解	1.48	3.7	0.010	1.326	20%第 2 次 尋找解	1.35	7.6	0.053	1.346
10%第 4 次 程式最佳解	1.26	8.0	0.008	1.326	25%第 1 次 程式最佳解	1.1	6.1	0.077	1.354
10%第 4 次 尋找解	1.26	8.0	0.008	1.326	25%第 1 次 尋找解	1.46	6.2	0.099	1.354
15%第 1 次 程式最佳解	1.33	8.1	0.009	1.334	25%第 2 次 程式最佳解	1.13	6.1	0.023	1.354
15%第 1 次 尋找解	1.33	8.1	0.009	1.334	25%第 2 次 尋找解	1.34	8.2	0.087	1.354

表十三 粒徑相似，折射率相差甚多

	平均粒徑 (μm)	折射率
水霧第六組	4.1	1.22
	4.2	1.35
水霧第七組	4.8	1.19
	4.8	1.32
	4.8	1.19
	4.8	1.32
	4.8	1.32
	4.8	1.19
	8.0	1.24
	8.0	1.32

表十四 粒徑不同，折射率相似

	平均粒徑 (μm)	折射率
鹽水 15% 第二次	4.3	1.35
	8.1	1.35
鹽水 25% 第二次	3.0	1.34
	8.2	1.34



圖二十二 毛刺效應

四、 程式算出之折射率並非全部合理

第一點所提到的問題，程式求出的折射率解穩定性不高。在查閱相關文獻後，發現陳剛(2007)的研究提及使用多波長消光法計算粒徑大小時， I/I_0 應該要在 0.4~0.9 之間。在我的數據中，發現當 I/I_0 大於 0.9 的幾筆資料中，有些的折射率與理論折射率相差不多，

但另一部分卻差距頗大（表十五、表十六），推測所若是 I/I_0 大於 0.9，超出越多，造成誤差範圍擴大，可能的折射率值也就變多。

表十五 水霧 I/I_0

水霧	雷射	I/I_0	折射率	理論 折射率
第二次	紅光	0.9272	1.21	1.33
	藍光	0.896204		
	綠光	0.958434		
第三次	紅光	0.924591	1.32	1.33
	藍光	0.865063		
	綠光	0.867827		
第四次	紅光	0.890834	1.38	1.33
	藍光	0.858755		
	綠光	0.946159		
第五次	紅光	0.768307	1.37	1.33
	藍光	0.781384		
	綠光	0.966993		
第六次	紅光	0.90206	1.1	1.33
	藍光	0.913451		
	綠光	0.771139		
第七次	紅光	0.858926	1.22	1.33
	藍光	0.848873		
	綠光	0.928396		
第八次	紅光	0.985334	1.23	1.33
	藍光	0.991943		
	綠光	0.998345		
第九次	紅光	0.861608	1.4	1.33
	藍光	0.836708		
	綠光	0.9749439		

表十六 鹽水 I/I_0

鹽水	雷射	I/I_0	折射率	理論 折射率
10% 第一次	紅光	0.966534	1.44	1.326
	藍光	0.77399		
	綠光	0.959428		
10% 第二次	紅光	0.930962	1.43	1.326
	藍光	0.819281		
	綠光	0.848888		
10% 第三次	紅光	0.916088	1.1	1.326
	藍光	0.891101		
	綠光	0.895193		
10% 第四次	紅光	0.9271471195	1.26	1.326
	藍光	0.9438169841		
	綠光	0.9398999055		
15% 第一次	紅光	0.938903	1.33	1.334
	藍光	0.84787		
	綠光	0.842733		
15% 第二次	紅光	0.978295	1.34	1.334
	藍光	0.76955		
	綠光	0.815769		
20% 第一次	紅光	0.95619	1.19	1.346
	藍光	0.750601		
	綠光	0.987992		
20% 第二次	紅光	0.956409	1.31	1.346
	藍光	0.897521		
	綠光	0.958781		
25% 第一次	紅光	0.867362	1.1	1.354
	藍光	0.694151		
	綠光	0.965992		
25% 第二次	紅光	0.915408	1.13	1.354
	藍光	0.9952		
	綠光	0.991842		

四、降低誤差之方法

上述所提及的因毛刺效應造成與理論值不符合的誤差或是可能折射率值過多，為降低其影響，假設每次測得的電壓值均為合理，全都透過程式計算，得到許多在同一條件下可能折射率與粒徑大小。如此一來，正確粒徑解與折射率應會不停出現，反之誤差解則不會，可由表十七、表十八的結果驗證，因此推論本誤差可通過大量實驗消去。

另可由表十七得知，利用標準差計算出來的資料裡存在數筆與理論值相近的折射率值。不過因為正確的粒徑以及折射率不斷出現於每一筆資料中，因此可以確定此組實驗中最為正確之解，也就是折射率值 1.35，粒徑 $7.6 \mu\text{m}$ 。

表十七 第九組水霧實驗未刪除極端值之結果

	平均粒徑(μm)	折射率	誤差
有標準差	3.5	1.32	0.049
	5.6	1.3	0.063
	7.6	1.35	0.057
無標準差	平均粒徑	折射率	誤差
第一筆	7.7	1.33	0.501
第二筆	7.5	1.35	0.088
第三筆	7.7	1.33	0.941
第四筆	無		

表十八 第十組水霧實驗未刪除極端值之結果

有標準差	平均粒徑(μm)	折射率	誤差
	7.9	1.34	0.003
無標準差	平均粒徑(μm)	折射率	誤差
第一筆數據	4.8	1.37	0.050

第二筆數據	未出現		
第三筆數據	4.7	1.37	0.050
第四筆數據	未出現		
第五筆數據	5.0	1.37	0.018
第六筆數據	未出現		

表十九 第三組鹽水 10%實驗未刪除極端值之結果

有標準差	平均粒徑(μm)	折射率	誤差
	3.7	1.48	0.01
8.9	1.1	0.009	
無標準差	平均粒徑(μm)	折射率	誤差
第一筆	8.1	1.35	0.045
第二筆	7.6	1.34	0.042
第三筆	8.2	1.36	0.048
第四筆	無		
第五筆	7.6	1.35	0.048

表二十 第四組鹽水 10%實驗未刪除極端值之結果

有標準差	平均粒徑(μm)	折射率	誤差
	8.04	1.26	0.008
無標準差	平均粒徑(μm)	折射率	誤差
第一筆	無		
第二筆	8.4	1.35	0.095
第三筆	無		
第四筆	無		
第五筆	無		
第六筆	7.3	1.37	0.004
第七筆	7.6	1.35	0.029
第八筆	8.0	1.36	0.095

五、討論程式算出線香折射率之問題

由於無法得知線香真實之折射率或平均粒徑大小，無法判斷程式算出之最佳解的正確與否。此處仿效排除毛刺效應的方法，也就是不刪去極端值，重複比較同次實驗的不同筆數據，藉此找尋正確解。為了考慮到實驗誤差，將找尋標準訂為平均粒徑大小相近、折射率差距 ± 0.01 。在此發現兩個現象：第一，B 牌線香(較貴)比起 A 牌線香(較便宜)，前中後三段的折射率與平均粒徑大小較為接近；第二則是發現 A 牌和 B 牌彼此之間出現了粒徑相似，但折射率卻大為不同的現象(以綠色標示)，推測這是由於不同牌子之間的成分差異頗大所導致。

表十九 線香比較

	粒徑 大小 (μm)	折射率	誤差	單次實驗 重複次數		粒徑 大小 (μm)	折射率	誤差	單次實驗 重複次數
A 牌線香 前段 第一筆	8.9	1.24	0.08	3/5	B 牌線 香前段 第二筆	8.8	1.42	0.31	4/6
A 牌線香 前段 第二筆	8.9	1.23	0.05		B 牌線 香前段 第三筆	8.8	1.41	0.08	
A 牌線香 前段 第四筆	8.8	1.22	0.88		B 牌線 香前段 第四筆	8.8	1.43	0.03	

	粒徑 大小 (μm)	折射率	誤差	單次實驗 重複次數		粒徑 大小 (μm)	折射率	誤差	單次實驗 重複次數
A 牌線香 中段 第一筆	4.2	1.25	0.08	3/5	B 牌線 香前段 第六筆	8.8	1.43	0.06	4/8
A 牌線香 中段 第二筆	4.2	1.25	0.03		B 牌線 香中段 第一筆	8.9	1.44	0.03	
A 牌線香 中段 第三筆	4.2	1.26	0.07		B 牌線 香中段 第三筆	8.9	1.44	0.03	
A 牌線香 後段 第二筆	8.2	1.45	0.03	3/7	B 牌線 香中段 第四筆	8.1	1.43	0.03	
A 牌線香 後段 第四筆	8.2	1.45	0.01		B 牌線 香中段 第五筆	8.2	1.44	0.1	
A 牌線香 後段 第七筆	8.8	1.45	0.1		B 牌線 香後段 第二筆	8.2	1.34	0.04	
					B 牌線 香後段 第三筆	8.6	1.35	0.08	

	粒徑 大小 (μm)	折射率	誤差	單次實驗 重複次數		粒徑 大小 (μm)	折射率	誤差	單次實驗 重複次數
					B 牌線 香後段 第六筆	8.4	1.35	0.09	

五、 結論

- 一、因為誤差造成的毛刺效應導致兩種情況，其一為在一個合理折射率之下，同時出現除了正確粒徑之外其他的粒徑解；其二為相近的粒徑大小算出之折射率卻相異甚大。
- 二、由於正確折射率與平均粒徑大小之解會不斷出現，因此可透過大量的重複實驗來降低毛刺效應造成之誤差。
- 三、不同牌子的線香因為成分不一，即使平均粒徑大小相似，折射率仍有可能大為不同。

捌、參考資料及其他

- 一、蔡小舒等(2010)·顆粒粒度測量技術及應用·北京：化學工業出版社
- 二、William J. Lentz (1976). Generating Bessel functions in Mie scattering calculations using continued fractions:An reprint. American Mathematical Monthly,15(3),668-671
- 三、楊穎等(2013)·偏振狀態下微粒的 Mie 散射特性研究·激光與紅外，43，1376-1380
- 四、許釋文等(2018)·自製儀器測量不同質量分數的鹽水折射率·物理實驗，38，56-59
- 五、陳剛(2007)·光散射法測量顆粒尺寸和濃度的實驗研究·西安：西安電子科技大學
- 六、朱震、叶茂、陆勇、陆永刚、胡涛、王式民 (1999) 光散射粒度测量中 Mie 理论的高精度算法。光电子·激光，2，135-138