第一屆旺宏科學獎

成果報告書

經理來了！—談一筆劃問題

參賽編號：SA-130

建國中學

楊智超

中華民國九十一年十月

Index **目錄**

第一屆旺宏科學獎成果報告書
經理來了！ — 談一筆劃問題
本說明書完全依規則製作
總字數：9550　(**含空格**)
頁數：19 **頁**
附件：13 **頁**

一、 研究動機

在數學思考〈民 84〉一書中，第 185 頁有一數學問題如下：

> 凱西的銅板
>
> 25 個銅板被排成五個五個列，有一之蒼蠅停在其中一個上，而想跳上每個銅板一次，且只能跳上同行或同列的相鄰銅板，可能嗎？

受到這個問題的啟發，我開始研究隸屬於拓僕學中類似於七橋問題的「一筆劃問題」。從 5×5 的研究結果加以一般化，試著利用高一上學過的歸納法證明，最終目標則是實用化，節省人們在走反覆路和思考最佳路徑的時間。

二、 研究目的

(一) 對正方形方陣做出下列研究：

1. 歸納出特殊點之走法。
2. 求出其一般化的結果。
3. 對結果加以證明。

(二) 延伸—對長方形做類似探討。

(三) 利用電腦程式求出缺點時的規則。

(四) 利用 Hamilton 迴路製出電腦程式。

(五) 試將結果應用於日常生活。

三、 文獻探討

(一) 拓樸學基本名詞

有點與有限條弧線（弧線也包含直線在內）組成的圖形叫做網路（Network），一條弧線的端點，兩條弧線的交點叫做網路頂點（在網路圖中用大圖點表示）。

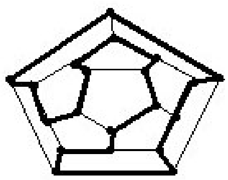
由一路的某一頂點Ａ，沿著路中的弧線走，到達另一頂點Ｂ，而不重覆走任一條弧線時，這種走法叫做由Ａ點到Ｂ點的一條路線（Path），Ａ是此

路線的始點，Ｂ是終點。

這個網路（把平面圖形看成為一網路）中，是否可設計出一條路線而這條路線用到此路中的每一條弧？這裡，我們還得介紹網路不連通（Disconnected）的概念。當我們對一個網路中的任意兩個頂Ａ與Ｂ，都可以找到一條路線以Ａ為始點，而Ｂ為終點時我們說這個網路是連通的（Connected）；反過來說，如果一個網路中的某一點，不能由路線連通到另一點時，此網路就是不連通的。

(二) The Hamiltonian Circuit Problem (漢米爾頓迴路)

西元 1859 年愛爾蘭數學家漢米爾頓(William Hamilton)設計了一種遊戲賣給玩具公司，那是一個木製的蜂巢形，如圖 3-7 所示。



【圖 3-7】 漢米爾頓設計的蜂巢形玩具

圖 3-7 中共有 20 個頂點，分別代表 20 個不同城市，這個遊戲的目的事想找出一個路徑，能夠通過每一個城市且只能通過一次。這類的路徑我們稱它為漢米爾頓路徑(Hamilton path)，定義如下：

給一圖 G=(V,E)，通過途中的每一頂點且只通過一次的路徑稱為漢米爾頓路徑;若是要求必須再回到起始頂點的迴路，則稱為漢米爾頓迴路。

由於漢米爾頓路徑及漢米爾頓迴路，到目前還沒有找到一個簡單又可快速判斷的充要條件，因此，我們只能利用這類路徑或迴路的基本特性來做判斷。首先，我們可以從下列之必要條件來判斷一個圖是否有漢米爾頓迴路：

1. 漢米爾頓迴路通過圖中除起點外之任一頂點最多一次。
2. 若一圖有漢米爾頓迴路，則該必具連通性。因為在非連通性的圖中，不可能有通過每一頂點之迴路。
3. 若一圖有漢米爾頓迴路，則圖中任一頂點之進出次數至少是 2。因為若有一頂點，其進出次數少於 2(即進出次數為 0 或 1)，即至多有一個邊連接該頂點，則要通過該頂點的任一迴路務必沿著同一邊回去才能通過其他頂點，如此一來必有一頂點重複通過，此乃不可能也。
4. 若一圖存在漢米爾頓迴路，則任一條漢米爾頓迴路必經由那些次數為 2 的頂點之兩個邊。

5. 若一頂點，其次數大於 2，在建造一條漢米爾頓迴路時，一旦路過該頂點，則其他與該頂點相連接而尚未使用過的邊都不能再考慮使用。
6. 在一個具有 n 個頂點的圖 G=(V,E)中，任一漢米爾頓路徑必恰好經過 n-1 個邊;而任一漢米爾頓迴路必恰好經過 n 個邊。

若一圖有漢米爾頓迴路存在，則只要去掉該迴路上的任一個邊，及可得到此圖的漢米爾頓路徑。

(三) Pick 定理的介紹與證明

我們觀察到格子點可分成內點(interior points)和邊界點(boundary points)兩類。假設內點與邊界點的個數分別為 i 與 b(事實上 b=2)。顯然線段之長 L 為：

L =間隔數(1) =i+1(2) =b+i-1(3) =b/2+i (4)

對於平面上格子為頂點之多邊型，其面積公式是什麼呢？在上述(1)~(4)的公式中，只有(3)與(4)比較有可能。因此，我們初步猜測多邊型的面積為 A：

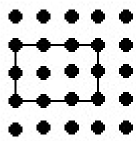
$$A = b + i - 1 \qquad (5)$$

或者

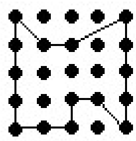
$$A = b/2 + i \qquad (6)$$

其中 b 與 i 分別表示在多邊形中，邊界點與內點之格子點個數。

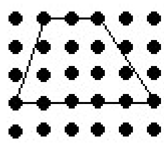
接著是用一些例子對猜測做試驗。因為多邊形有無窮多種，所以即使試驗再多的例子都成立，這都不能代表我已證明出我們的猜測。舉例而言，「凡是天鵝都是白色的」，我們觀察過再多的白色天鵝都無法得到證明，但是只要出現一隻黑天鵝就否定掉這句話了。這種證明和否證的不對稱性值得注意。



【圖 3-1】



【圖 3-2】



【圖 3-3】

現在，我們試驗圖 3-1、圖 3-2、圖 3-3 等三個例子，列表如下：

(I) b	(II) i	(III) b+i-1	(IV) b/2 + i	(V) 正確面積
10	2	11	7	6
17	5	21	13.5	12.5
9	7	16	11.5	10.5

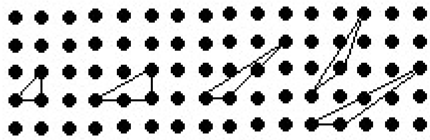
比較(III)與(V)行，(IV)與(V)行，我們發現公式(5)與(6)都不對。該如何修正呢？

我們進一步觀察到(IV)與(V)兩行有規律，即相差 1，所以我們將(6)式修正為 $A = b/2 + i - 1$ (7)

這個面積公式就是「適配」(fit)上述圖 3-1 至 3-3 的三個例子。

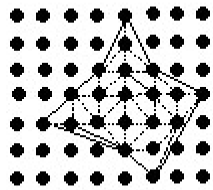
為了證明(7)式，首先讓我們分析單純多邊形：

1・最簡單的單純多邊型就是原子三角形（atomic or primitive triangles ），亦及除了三個頂點之外，三邊及內部皆不含格子之三角形，見圖 3-4，其面積皆 1/2，並且可用(7)式來計算， $3/2 + 0 - 1 = 1/2$ 。因此，對於原子三角形，上述(7)式成立。



【圖 3-4】　原子三角形

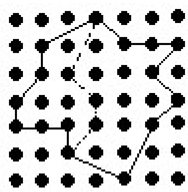
2・其次，我們觀察到，對於任意單純多邊形都可以先分割成三角形(即三角形化)，再進一步分割成原子三角形組合(這叫做原子化)，見圖 3-5。



【圖 3-5】　任意多邊形之三角形化與原子化

3・最後考慮任何單純多邊形 Γ。將他分割成兩個單純多邊形 Γ_1 與 Γ_2，見圖 14-17。設 Γ 有 b 個邊界點、i 個內點，並且 Γ_1 與 Γ_2 分別有 b_1 個與 b_2 個分界點、有 i_1 個與 i_2 個內點。再設 Γ_1 與 Γ_2 有 b_3 個共同的邊界點，則

$$b= b_1 + b_2 - 2b_3 + 2$$
$$i=i_1 + i_2 + b_3 - 2$$



【圖 3-6】　單純多邊形的分割

所以

$$b/2 + i - 1 = (b_1/2 + i_1 - 1) + (b_2/2 + i_2 - 1)$$

因此，公式(7)在分割下，具有加性(additivity)。

上述三個步驟綜合起來，我們就證明了(7)式。一但猜測有了證明，就成為定理。

定理 1 ： 設 Γ 為平上以格子點為頂點之單純多邊形，則其面積為

$$A = b/2 + i - 1$$

其中 b 為邊界上的格子點數，i 為內部的格子點數。

四、 研究器材

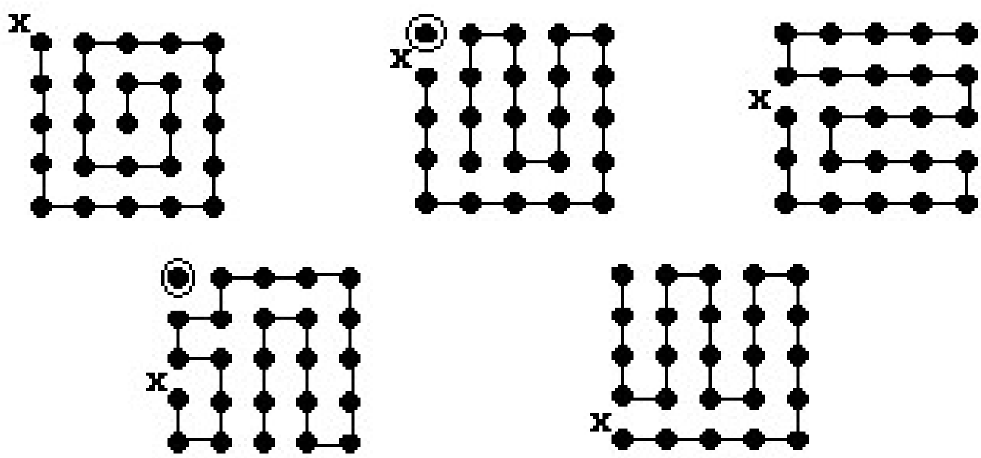
個人電腦	一台	筆記型電腦	一台
Basic 程式設計軟體	一套	勇於嘗試的心	一顆

五、 研究過程及方法

(一) 從題目下手

1. 我們先從 5×5 方陣看起, 以最原始的方式求出可以和不可以的點。

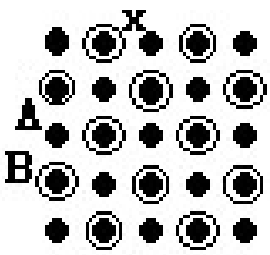
註 嘗試過程太過繁瑣，僅列出第一列之畫法。



圖中點為起始點，打圈者則為剩下的點。

2．畫完 25 個點後，我發現規則如下：

(1) 上排不可以的點介於下排不可以的點的中間，例如右圖中點 x，即位在下排兩個不可行之點的中間。



(2) 我將可畫之點假設為 A，不可畫的為 B，則有驚人的發現：A 的四週之點為 B，即 A 之下一個點為 B。

雖然得到以上之結論，但我仍無法證明 B 類的點一定不能一筆畫完，同時在下面解長方形方陣時，我才發現我在這裡少發現了一個性質，增加了我很大的麻煩。

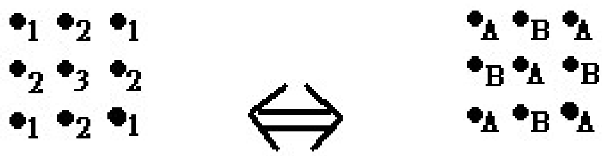
(二) 從頭開始

1．讓我們來看看 3×3 方陣：

為了討論方便，先將此圖看成是一正方形，將點歸納為：

(1)**頂點。**　　(2)**邊上的點。**　　(3)**正方形內部一點。**

如此標示 3×3 **方陣內的點如圖** 7-1。

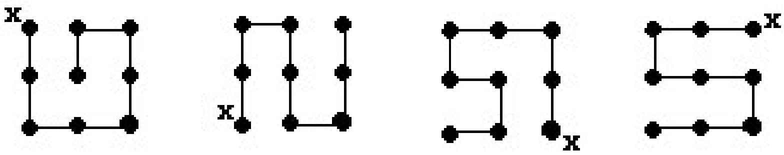


【圖 7-1】　【圖 7-2】

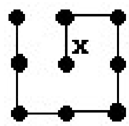
我們亦可利用之前所得的結果將點分為類 A 和類 B，已知類 1 的點可一筆畫完，我們可因此而得圖 7-2。

大膽假設類 1 和類 3 的點可一筆畫完，類 2 則否，經過一連串的作圖驗證後，結果正如預期。

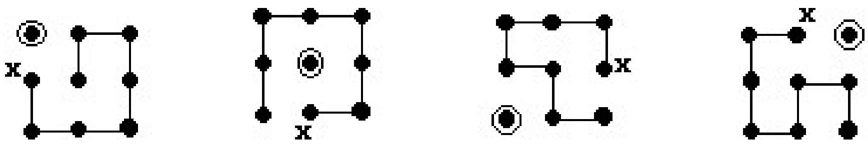
類 1



類 3

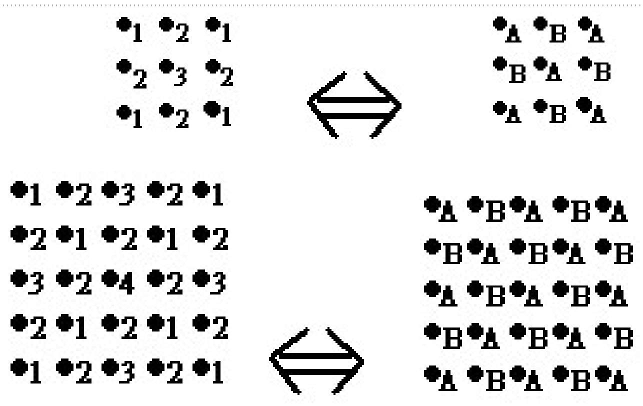


類 2



(三)　**以點作分類**

有了 3×3 **方陣的經驗，我開始懷疑** 3×3 **和** 5×5 **兩奇數方陣是否有任何關聯性，將方陣** 5×5 **以相同手法做出並和方陣** 3×3 **並列。**(**如圖** 7-3)



【圖 7-3】

經過這樣的整理後，我的思緒反而更混亂，可以看出以點來做分類企圖歸納出結果是行不通的。

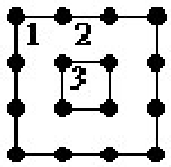
(四)　**回到偶數方陣**

分析之前結果，不難發現 4×4、6×6 的方陣中任一點均可用一筆劃畫完，因此大膽假設在 $2k\times2k$ 的方陣中，任一點均可用一筆劃完成。但我要如何證明呢？

我無法直接證明，亦無法窮舉(無限多)，但從以上三圖似乎有些微妙的關係。先看 2×2 和 4×4：

已知 4×4 中有三種點(圖 9-1)，則進行分段討論如下：

1. 大正方形上的 1 類點。(圖 10-1)



【圖 9-1】

(1) 任取一點 x 點起始，先將大正方形繞完後進入內部的小正方形的類點，重複以上動作直到完成。

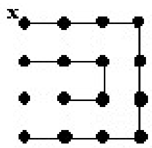
(2) 將此延伸後，可得知在任一 $2k\times2k$ 方陣之最外圍上的頂點繞完最外圈後，再進入下一個正方形的頂點，再進入下一個…，一定可以一筆完成。

2. 大正方形上的 2 類點。(圖 10-2)

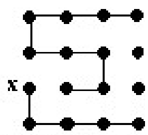
同四─(五)之 1.可得證。

3. 小正方形上的 3 類點。(圖 10-3)

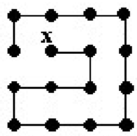
已知 2×2 內之任一點開始均可一筆完成，則多繞一圈亦無任何改變。



【圖 10-1】

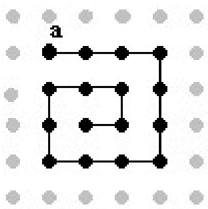


【圖 10-2】



【圖 10-3】

經過上述討論後輕輕鬆鬆解決了 4×4 中每一點的證明，但問題才剛剛開始浮現而已！當我畫出 6×6 方陣時，突然發現 a 點(圖 10-4)無法利用上述方法證出。

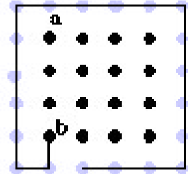


【圖 10-4】

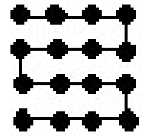
原來之證明僅在最外圈和最內圈會起作用。但對於如的點卻束手無策。換句話說，對於 6×6 方陣中『中間的正方形』我都沒辦法利用上述方法證出。

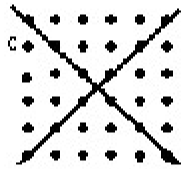
先不管其他的點，我們先來看看 a 點的走法：

1. 很明顯的，我只要想出一個方法，使它繞完內部後，仍可走到 4×4 方陣之邊線(設其為 b)，如圖 10-5，如果能這樣的話，只要在外繞一圈即可。



【圖 10-5】


【圖 10-6】



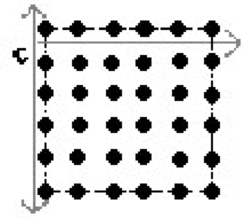
【圖 10-7】

2. 異常明顯的，畫法有千百種，其中一種如圖 10-6。相信當您看到此時，心理一定在咒罵我如此的小題大作，但請先忍耐一下，馬上就可以體會到此圖的妙處！

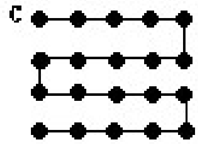
如果畫出 6×6 方陣的對角線(如圖 10-7)則可發現利用 4×4 之討論已證完對角線上的點了，那非對角線上的點(如 c)要如何證明呢？

利用上述『S』形畫法即可證出，步驟如下：

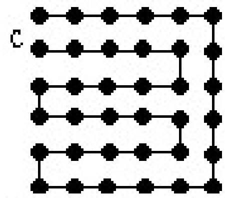
1. 首先，我們看到 c 點距離上、下、左、右邊界之點數分別是一個點、四個、零個、和五個。(圖 11-1)
2. 現在，我們取距離最短者為縮短對象(0 不算)，以 c 點為例的話則是一個單位，我們留下一單位的外圈，也就是說我只要完成 4×5 的方陣即可。



【圖 11-1】



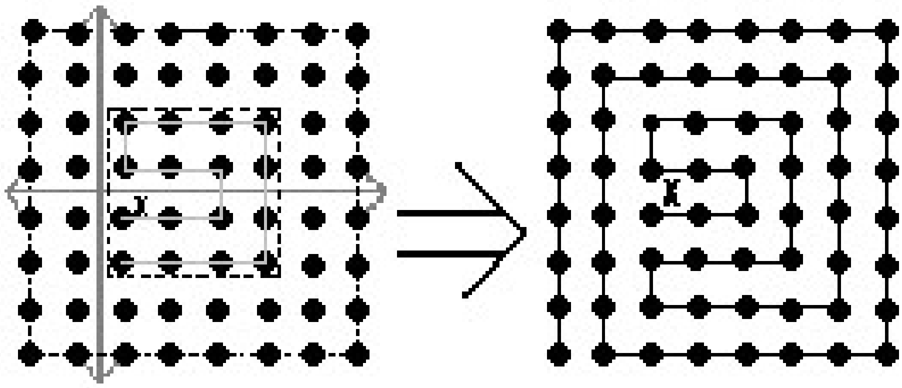
【圖 11-2】



【圖 11-3】

3. 接下來利用 S 形走法走完 5×4 的方陣，接下來再外繞一圈即可。(圖 11-2,3)

讓我們以 8×8 方陣中的一點來試試此方法的魔力！



【解析】1.縮小範圍，畫一個 4×5 的方陣。

2.再縮小，利用第二小的單位—3 單位，來做出一個 2×3 的正方形。

3.S 形繞完方陣，之後就一路畫到底了。

用以上方法可以證明偶數方陣中的任一點，因此我以解決了偶數方陣的問題，現在我們再度進入奇數正方形方陣。

(五) 奇數方陣

我們來看看 3×3、5×5 方陣，可畫與不可畫之點數如表一。

類別 / 方陣	可畫(A)	不可畫(B)
3×3	5	4
5×5	13	12

表一

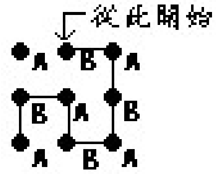
當我翻回前幾張計算紙，看到我所訂出來的 A、B 點規

則，忽然發覺答案就在我眼前！

【證明】設從 B 類點開始，而又已知 B 類點之四方皆為 A 類點，則可得右式：B→A→B→A→B→……。

任何一基數方陣之 A 類點較 B 類多一，當 B 類點用盡時還剩一 A 類點，得證。

讓我利用 3×3 方陣來說明：



路徑為 B→A→B→A→B→A→B→A

最後剩下左上角一 A 點

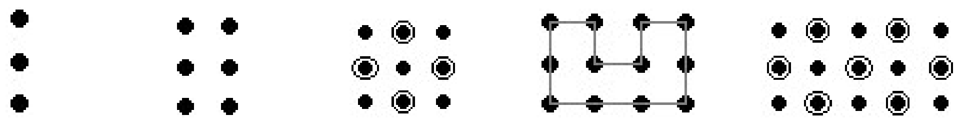
(六)　長方形方陣

解決正方形後，我們來看看長方形。先從開始 2×2 作圖：

2×1　　2×2　　2×3　　2×4 ……

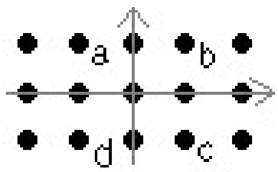
→接下來都只是往右加點而已，∴2×2k、2×2k+1 皆可。

3×1　　3×2　　3×3　　3×4　　3×5



當我畫完時，突然發覺 3×4 中有一個『凹』字型的走法可以一圖即完成所有的點，但此時我尚未明瞭此圖之意義。畫完時，我發現我遺漏了一個很重要的現象：不可畫的點(B 類點)有對稱性。也就是說，當我確定 d 點為 B 類點時，則相對的 a、b、c 三點亦為 B 類點。

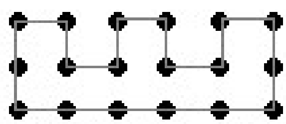
證明很簡單，可利用座標平面，亦可說是 d 點順時針旋轉 90°後就是 a 點的位置，再轉 90°則是 b 點，再轉 90°則是 c 點，再 90°則回到原來的點，



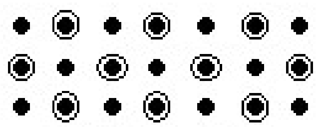
故 d=a=b=c。這個發現使我未來再研究缺點問題時省去許多時間。

我當然可以將此放於正方形一開始研究時就提到，如此可省下一段冗長的討論，但為保持原創時之思考方向，故我保留於此提起。

根據以往經驗，我大膽推論 3×6 可全部畫完圖(14-1)，3×7 則剩下十點(圖 14-2)，結果正式如此。

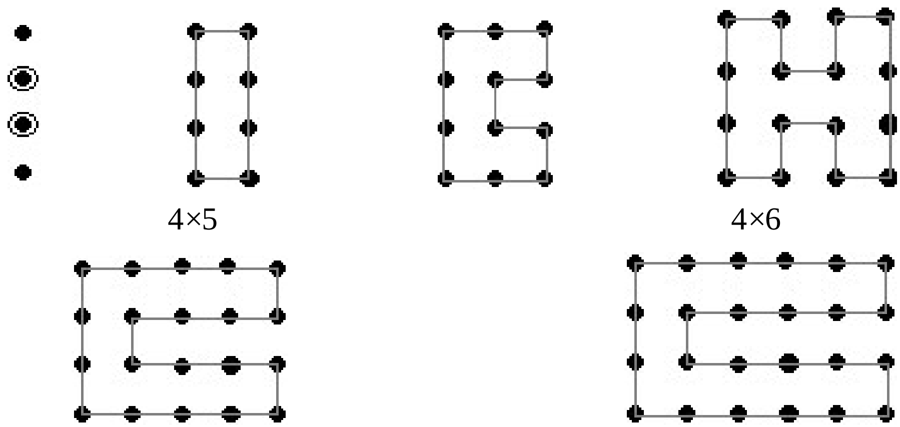


【圖14-1】



【圖14-2】

4×1　　4×2　　4×3　　4×4



接下來 4×7、4×8…皆不需在證明。因為只是ㄈ形向右延伸而已。而 4×4、4×3 亦可利用此圖解決。對於這些特殊圖形，起初還不清楚他們的用意，在後來有一次上網找文獻時才無意間發現這原來就是所謂的漢米爾頓閉路—也就是最後能回到出發點的迴路。

我們來看的 3×7 **問題。這個問題有點類似奇數正方形方陣的證明。**B **類點只要利用** ABABA… **即可解決。而** A **類點則可用** S **形來加以證明。令人興奮的是，我已在不知不覺中解決了所有問題！**

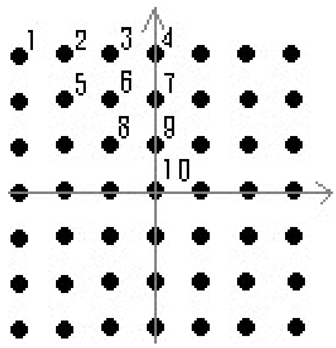
(七) 分類點之規則

在發現點的對稱性後，我可以將之前研究時用到的點分類方法簡化問題。只要找出一個象限內的點的種類，即可了解到整個圖所需證明的點的種類。我再畫出其他方陣後可得表二。

表二

方陣	點的種類數
2×2	1
3×3	3
4×4	3
5×5	6
6×6	6

由表二我可以推得 7×7 的點的種類有十種，畫圖驗證之：



以上之歸納可以使我在研究時清楚地看出有哪些點尚未證明，為一證明時極好用的輔助工具。

一筆劃無缺點的問題到這邊可算是告一個段落了。在繼續往下討論

前，特將結果全部濃縮起來重複一次：

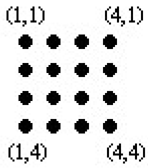
正方形　奇數方陣—有 B 類點。偶數方陣—全可。

長方形
- 2n× 2n or 2n+1　均可一筆畫完。
- 2n+1×
  - 2n—全可。
  - 2n+1—有 B 類點。

(八)　開始電腦化—四進位的解法

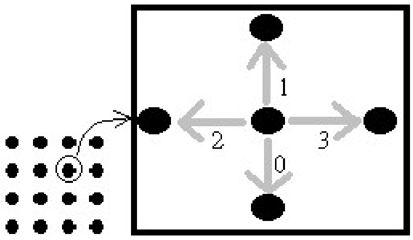
從現在開始我們進入有缺點的問題，首先我們先來了解一下這個問題用手做的困難度：光是沒有缺點的一個 4×4 方陣如果要找出所有的解便要做 4 的 15 次方。(因為一個點有上、下、左、右四種走法，而每點又需要走 15 條路徑)而缺點之後找解的困難度可想而知。之前的方陣問題皆可徒手算出，但現再利用電腦來運算是勢在必行。因此利用一套名為 YaBasic 的程式語言做出了一個可以跑缺點問題的程式。為不打斷思考思緒，故我將程式碼放於《附件 2》。

現在我以一個 4×4 的方陣上一點來解釋這個程式的基本構造。



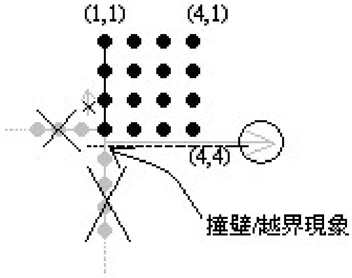
【圖 15-1】

如圖 15-1，先標記此方陣中的每一點如同平面座標，定義為(X_1,X_2)，每向右一格，X_1 即增加一單位，每往下一格，X_2 便增加一單位。如此最左上的點便定為(1,1)，以此類推。另外，我定義每兩點間所連成的線為一單位的「路徑」，譬如說，在 3×3 的方陣中，一筆劃問題則有 8 條路徑。



【圖 15-1-1】

如圖 15-1-1 所示，我假設所有尚未走過的點為 0，走過的點就變成 1，則始點為 1，缺點的位置也為 1(因為它可以看作是走過的點)。當電腦往下走時設其函數值為 0，向上其函數值為 1，向左為 2，向右則為 3。首先我們先假設其 15 段路徑皆為往下走(顯然是不可能)，此時當電腦碰到點(1,4)時即發生我所謂的撞壁(越界)的現象，此時要求電腦找尋除了往上之外的第二路徑，很快的電腦便會發覺向右走是唯一的路，之後便上下左右的一個一個去試，如此便可將所有可走完整個方陣的一筆劃路徑求出。圖解如下：



同一個問題，現在讓我試著以電腦的運算過程說明：

1. **首先電腦會將** 15 **條路徑皆設為** 0**，也就是皆往下走。**

0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0

2. **接著發覺無此路徑，便從最後一個點從** 1 **開始。**

0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　1

3. **無解後加** 1**，加到變成** 4 **時即進位從** 10 **繼續，換句話說，這是個四進位的運算，圖解如下。**.

0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0
→ 0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　1
→ 0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　2
→ 0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　3
→ 0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　1　0
→ 0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　0　1　1
→0……012 →0……013 →0……021 →0……022 →0……023→ 0……030
→ …………→ 33……3333

4. **如此便可將所有解列出，例如下列：**

0　0　0　3　1　1　1　3　0　0　0　3　1　1　1

5. **之後當跑到全部皆為** 3 **時即為完成所有的解。**

現在我將這個解題方法定義為<u>四進位法</u>。我們來看看當 3×3 **方陣中的起點為**(1,1)**，缺點為**(1,2)**時程式跑起來的介面如下圖所示：**

```
請輸入二維方陣行/列數= 3
請輸入起始點 (X1,X2)
X1= 1
X2= 1
缺點數= 1
第 1 點 X= 1
第 1 點 Y= 2

開始時間=22-05-57-3892
結束時間=22-05-57-3892
方陣行/列數=3    起始點 (1,1)  無解
Another test? (y/n)
```

利用這個程式我開始從 2×2 方陣求出所有的解，得到《附件 1》中的表三、四、五。從這三個表中我們可以清楚的看到點的對稱性等多項之前發現的規則，但很可惜的我並未能從中看出任何解數的規則，而且方陣一但擴大到 5×5 以上，除了歸納複雜外，到 6×6 時電腦更是有跑不動之虞。可見我必須教電腦去剔除掉已經不可能有解的走法，加快計算的速度。但要如何去化簡呢？

很顯然的，並沒有任何方法能化簡我的程式。只能用蠻力法(Brute force)來一個一個解決。

在無法化簡的情況下，看來我是卡在這邊了。我實在是不知道該怎麼往下走，因此我跳回去檢驗是否有任何其他發展方向的蛛絲馬跡。

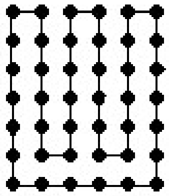
(九) 回去吧！回到 Hamilton 迴路！—方塊法發現

在前一個主題中我們可以清楚的看出運用 Brute force 的方法來解決這個問題實在不是很聰明，因為光是一個 4×4 的方陣就需要解至多 4^{16} 次，當方陣達 6×6 的大小時一個點須嘗試至多 4^{36} 次，光是做一個點的解就有可能跑上好幾個小時。在前一個主題中，我們說 4×4 方陣的嘗試次數為 4^{15}，為什麼在這個主題中變成了 4^{16} 次呢？

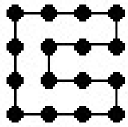
我們知道在一個 Hamilton circuit 中，終點和起點是重合的。而前一個主題並沒有限制起點和點的關係，所以在 Hamilton circuit 中由最終點到起點又增加了一條路徑，故為 4^{16} 次。

現在先把我們所討論的問題縮小，假設起點與終點皆須在同一點上，如此我們再度回到 Hamilton 迴路的問題。倘若能做出一個跑此迴路的程式，那在技術上也是一大突破。

我先畫出幾個 Hamilton 圖，試著在其中找出點蛛絲馬跡，如圖 15-2、15-3。



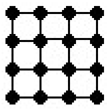
【圖 15-2】



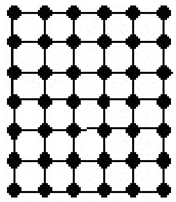
【圖 15-3】

在圖中不難看出，如果我將每個點之間的線都聯起來(如圖 15-4、15-5)的話，這個 Hamilton 迴路可看做是由許多許多小的方塊所組成。現在我把位於 Hamilton 迴路中的方塊著色，如圖 15-6、15-7，則似乎我們可以利用塗不塗色的方式來區分迴路內和迴路外的方塊，或許只要我可以教電腦去塗方塊，便可找出 Hamilton 的解。也許你會問這和 Brute force 有什麼不同呢？不是一樣利用蠻力去求得答案嗎？

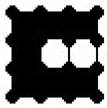
是的，這乍看之下似乎的確是種用蠻力硬算的方法，但如果我們拿個 4×4 的方陣來看的話，一點一點試必須至多試 4^{16} 次，但我如果用這種方塊法的話所需試的次數一定遠小於 16 次方。



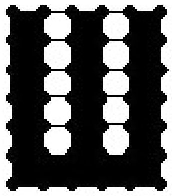
【圖 15-4】



【圖 15-5】



【圖 15-6】



【圖 15-7】

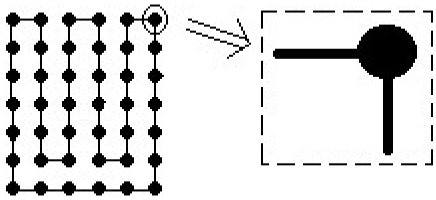
那 Hamilton circuit 有什麼樣形成的條件呢？我們從圖 15-2、15-3 來看看是否有什麼端倪。

從圖中我們可以發現在 Hamilton circuit 中所有的點似乎都在這個迴路的邊上，不會有任何點在其之中或外。由此我可以推出下列結論：

Hamilton Circuit => 一個包含所有點在邊上的多邊形(證明於討論一)

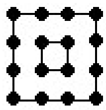
現在我已經找到第一個形成 Hamilton 迴路的前提。那在邊上的點還有一些什麼樣的條件呢？

看看圖 15-8 吧！相信你一定很快便可以了解我所想要表達的。沒錯，在一個 Hamilton 迴路上的一個點必有兩個邊通過。



【圖 15-8】

等等，相信你一定很快就找出一個反例，或許你會說：『那一大一小方形所形成的圖不一定是 Hamilton 啊！』是的，如圖 15-9 中，雖然每個點皆有兩個邊相接，但它卻不是個 Hamilton 圖！

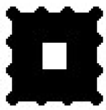


【圖 15-9】

如何解決這個問題呢？其實我只要增加第二個條件就好了：一個 Hamilton circuit 必須要是一個連續圖形，也就是說，不可分割成兩個獨立的迴路。

接著我又想到在《數學的發現趣談》一書中所提到的 Pick 定理，也就是在平面上以格子點為頂點的單純多邊形，其面積為 m×n/2-1。舉個例子來說好了，在 4×4 的方陣中，其面積為 4×4/2-1，也就是 7 單位。《單純多邊形的定義：多邊形的邊沒有交叉的情形，稱為單純多邊形(simple polygon)。Pick 定理的證明已放於文獻探討中》

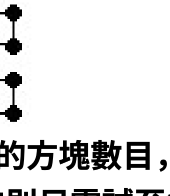
利用 Pick 定理我發現如圖 15-10 中，這個圖色的面積就是 8 而不是 7，如此也可以判定它不是一個 Hamilton 迴路。



【圖 15-10】

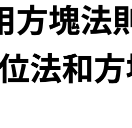
這個想法轉換到電腦上便會出現圖 16-1 的圖形，將這種塗黑的解題方法定義為方塊法。這個圖看起來非常的抽象，但我將圖 16-1 和之前的點結合，得到圖 16-2 便非常明顯的看出之間的關係。

【圖 16-1】



【圖 16-2】

那現在讓我回去看之前所討論過的 4×4 問題。



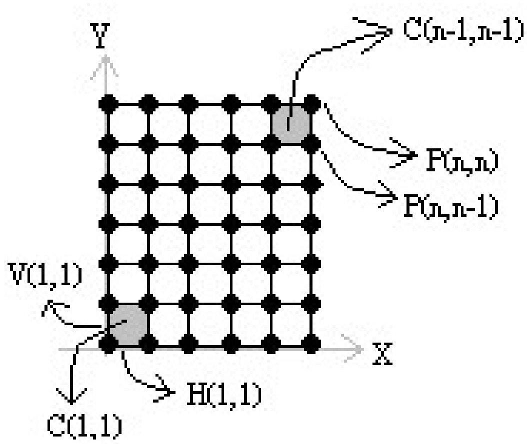
利用 Pick 定理我可以求出所需塗黑的方塊數目，也就是 7 格。而我用四進位法，則需至多試 4^{16} 次，而利用方塊法則只需試至多 C(16,7)次。

讓我們來深入探討一下四進位法和方塊法的嘗試次數之間關係：

1. **當方陣為** 4×4 **時，利用方塊法求需嘗試次數至多為** 4^{16} **次。**
   $Log4^{16}=9.632 \Rightarrow 4^{16}$ **為** 10 **位數。**
2. C(16,7)=16×15×14×13×12×11×10 / 7×6×5×4×3×2×1=11440
3. **由此可見利用方塊法所需嘗試次數遠小於四進位法。**

需特別注意的是方塊法僅適用於偶數方陣中，因為奇數方陣沒有 Hamilton **迴路。**

我要讓電腦同時去處理點、邊、面的問題，因此我必須先定義點、線、和方塊。



【圖 16-3】

如圖 16-3，將點定為 P(point)**， 鉛垂線為** V(vertical line)**，水平線為** H(horizontal line)**，方塊為** C(cubic)**。利用這些參數和之前所說的規則，我做出了一個求** Hamilton circuit **的程式。程式碼附於附件** 3**。**

六、 研究結果

再經過一連串的研究之後，我得到結論如下，於此將簡短表達，較詳細之文字敘述將於結論寫出。

(一) 正、長方形一筆劃問題之結論

正方形　**奇數方陣**—**有** B **類點。偶數方陣**—**全可。**

長方形
- 2n×　2n　or　2n+1　**均可一筆畫完。**
- 2n+1×
  - 2n—**全可。**
  - 2n+1—**有** B **類點。**

(二) **電腦化**

利用蠻力法做出一個可測試缺點的電腦程式, 不過無法簡化其測試過程，跑起來極費時。

(三) Hamilton circuit **和方塊法**

2．Hamilton Circuit **=>一個包含所有點在邊上的多邊形。**

(2) 一個包含所有點在邊上的正多邊形=>1.每點必有兩個邊通過。

3. Hamilton circuit 必須要是一個連續圖形。
4. 正多邊形的面積為 m×n/2-1。

七、 討論

(一) 之前提到利用方塊法所需嘗試的解數必遠小四進位法，這是一般化的結果嗎？還是只是小方陣的特例？

我們在研究過程中已提到 4×4 時的情況，現在再來看一下 6×6 方陣中的關係：

四進位法	方塊法
4^{36} =>$\log 4^{36}=72\log 2=21.672$=> 約為 22 位數	C(36,17)=36×35×34×33×32×31×30×29×28×27×26×25×24×23×21×20 / 17×16×15×14×13×12×11×10×9×8×7×6×5×4×3×2×1 $=30\times33\times31\times29\times2\times25\times23\times21=2.1\times10^{10}$

從 4×4 和 6×6 中我們可以看出其相差之懸殊，而且方陣越大其相差之倍數亦越大，其一般式如下：

四進位法	方塊法
$4^{(n+1)\times(n+1)}$	$C(n^2, n^2/2-1)$

(二) 在嘗試的過程中，當方陣為 n×n 時，從點(1,1)出發且無缺點，用程式求出之 Hamliton 解數和需嘗試次數是否有任何關聯？

利用討論第一題所求出的公式 $C(n^2, n^2/2-1)$可以計算出每個方陣之所需嘗試次數及其真正的 Hamilton 解數，如下表：

方陣	需嘗試次數	Hamilton 解數	方陣	需嘗試次數	Hamilton 解數	方陣	需嘗試次數	Hamilton 解數
2×2	1	1	3×4	6	2	4×4	36	6
2×3	1	1	3×6	45	4	4×5	220	14
2×4	1	1	3×8	364	8	4×6	1365	37
2×5	1	1				4×7	8568	92
						4×8	54264	236

從表中我們可以清楚看出需嘗試次數和 Hamilton 解數似乎有著一個神奇的關係，也就是√需嘗試次數 Hamilton 解數。這個關係式有什麼用處呢？到目前為止，我對於這個奇特的關係還是摸不著頭緒。

(三) 我們對於正方形方陣所做出來的那些性質及其程式，在 m×n(也就是長方形)時是否也可以使用？

其實 n×n 可視為 m×n 的特例，因為正方形本來就隸屬於長方形，所以點的奇偶性於此仍適用。根據之前所做出來的結論，若 m、n 為奇數，則

必無 Hamilton circuit 解，為什麼呢？因為若將 Pick 定理代入則得出面積不符。而當長方形為其他狀況時皆有解。所以在 m×n 方陣上，方塊為(m-1)×(n-1)，則原來對於正方形的性質皆適用。(程式附於附件 4)

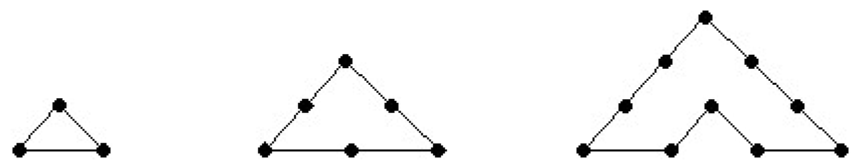
隨便拿一個 4×3 來說：它是一個 2n×2n+1 的長方形，又由 Pick 定理得知其面積為 4×3/2+1=7，所以它有 Hamilton circuit 解。

(四) **倘若方陣為三角形，它的關係是否亦像正方形一樣，是不是也可以用 Pick 定理求解？**

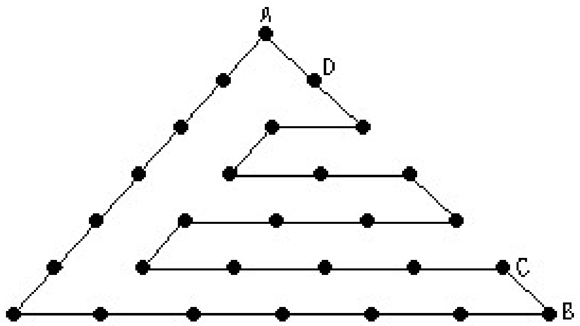
假設我們把方陣換成是三角形，其它規則均不改變，那這樣的話，所有的點皆可一筆畫完嗎？

為了解決這個問題，我們先畫幾個三角形並試驗之。

二層　　　　三層　　　　四層



我們可以發現，所有的三角形都有特殊形。那我們可不可以找出一個通則呢？拿一個七層的三角形來看好了：



【說明】1.從 A 點開始，繞三角形之最外圈至 B。

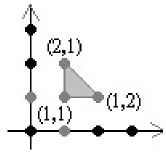
2.從 C 點開始，以類似 S 走法到 D。

3.連 AD，則為一哈密頓閉路。

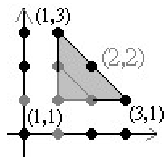
由此可知任一三角形均可做出 Hamilton circuit。

我們可利用方塊法轉變成三角塊法加速求解速度。

如 1×1×1 之三角陣，可將其三點放在(1,1)、(2,1)、(1,2)，如圖 17-1。而 2×2×2 之三角陣，則可將其六點放在(1,1)、(2,1)、(3,1)、(1,2)、(2,2)、(1,3)，如圖 17-2 所示。



【圖 17-1】



【圖 17-2】

則可將之轉化為塗色問題，即可利用 Pick 定理求出其解。

經過三、四題的探討後，我們可以清楚的得到這個結論：Hamilton circuit method 在偶數邊正、長方形和任意三角形皆適用。

(五) 今天我的方陣中若有缺點，那問題是不是也可以用我所求出的一些性質加以解決呢？

可以，但更需要電子計算機的幫忙。即使是方塊法，也只是加速求解速度，不能直接告訴我們解是否存在。但方塊法已經大大加快了求 Hamilton circuit 的速度，且使我們對格線圖和 Hamilton 圖的關係有更清楚的了解。

八、 結論

關於平面一筆劃問題的解已於之前提出，請參考【六、討論】，在此不多加敘述。

首先先看看點的解數。一個點的走法有四種，而一個 n×n 方陣中從(1,1)出發共有 15 個路徑要走，而每個點至多有四個路線，故總解法至多為 4^{15}。

我們再來看看電腦化之後做出來的結果。利用蠻力法我可以做出一個跑缺點的程式，原理是利用定義 0、1、2、3 為上下左右後先設其全部皆往下走，當電腦碰壁時即發生所謂的撞壁(越界)的現象，此時要求電腦找尋除了往上之外的第二路徑，也就是左或右。之後在不斷的上、下、左、右嘗試後即可找出一條通路。如此不斷嘗試便能求出所有的解。但當我做到 6×6 時一個點所需嘗試的次數便需 4^{35}。由此可見這並不是一個極良好的程式，用四進位法確切是解決不了問題。

接著我又回去探討 Hamilton 的問題，把原本複雜的問題簡化到起始點必須同一點。從定理中我得知一個包含所有點在邊上的多邊形必為一個 Hamilton circuit。又為了做出一個跑 Hamilton 的程式，我找出幾個點邊的關係式：1.每點必有兩個邊通過。2. Hamilton circuit 必須要是一個連續圖形。3.正多邊形的面積為 m×n/2-1。

利用自創的方塊法求解的速度遠比四進位法來的快。拿一個 4×3 方陣來說好了：用四進位法求某點之 Hamilton circuit 解必須運算 4^{12} 次，用方塊法只需塗滿 4×3/2-1 個方塊(Pick 定理)，也就是 5 個格子，即可。而四進位法需嘗試次數為 $4^{(n+1)\times(n+1)}$，而利用方塊法則為 $C(n^2, n^2/2-1)$《n 為偶數》。

又在 Hamilton 圖中，需嘗試次數和 Hamilton 解數有著約為 $x:\sqrt{x}$ 的關係。也就是說一點之 Hamilton 迴路解約為需嘗試次數的開更號。對於此性質尚未了解深入，因此無法判斷它的用途。

方塊法適用於偶數邊正、長方形方陣(奇數方陣除外)，亦適用於三角形。

結合蠻力法寫出來之第一個程式和第二個方塊法的程式便可製造出一個可實用化的程式，而當初我在創意說明書中提到的問題解決也就不再只是夢想了！

九、　參考資料、未來方向及其他

(一) 參考資料

圖書：

1. 蔡聰明。(民 89)數學的發現趣談。台北：三民。

2. 蔡義從譯。Donald W. Blackett 著。(民 61)基本拓樸學組合及代數法。Elementary Topology: A Combinatorial and Algebraic Approach。台南市：復漢。

3. 陳淳譯。W.G. Chinn, N.E. Steenrod 著。(民 59)拓樸學概論。台北市：廣文。

4. 凡異出版社編輯部。(民 75)趣味幾何。新竹市：凡異。

5. 臺北市立建國高級中學 49 屆 314 班同學合譯。John Mason, Leone Burton, Kaye Stacey 著。(民 87)數學思考。Thinking Mathematically。台北市：九章。

6. 柳賢、左太政、毛延宗等。(民 88)翰林版高中數學第一冊。台南市：翰林。

7. 徐俊明。(民 87)圖論及其應用。安徽省：中國科學技術大學出版社。

網路：

1.遠哲發現月刊第 63 期

http://www.ytlee.org.tw/ytlee2-1/ytlee2-1-63.asp

2.淡江大學數學系

http://www.math.tku.edu.tw/

3.教育資訊站數學網

http://www.edp.ust.hk/math/

4.張振興伉儷書院數學學會

http://mathsclub.hypermart.net

5.交通大學資訊科學系

http://www.cis.nctu.edu.tw/~is83039/discret/discrete6.html

(二) 未來方向

《圖論及其應用》一書中提到 Hamilton circuit 的充要條件之證明尚未完全解決，故下一個目標應為求格線圖有 Hamilton curcuit or Hamilton path 之充要條件。同時 Hamilton 問題歷時許久無法解決的最大原因乃在其計算量之龐大且規則應不容易尋找，如何簡化其尋找之過程也是一大學問。

在研究過程中我發現在 Hamilton 圖中，需嘗試次數和 Hamilton 解數有著約為 $x:\sqrt{x}$ 的關係，而這個關係是不是能繼續應用而簡化求解步驟呢？

而從二維推向三維也不是不可能，事實上已經做出了一個程式，但礙於速度只要大於 3×3×3 跑起來時間就會很久。由此看來，進一步的研究則是要交電腦將問題簡化。

這個問題向下研究發展的空間還非常大, 而實用化的目的或多或少也已達成。Hamilton **的問題非常有研究的價值，也希望我能在未來大學的日子裡求出最終的答案！**

(三）其他

僅向在這段日子裡支持、鼓勵我的人致上十二萬分的謝意—**我的家人、陳嘯虎老師、以及蔡丰喬學長。當然還有那隻陪我熬夜的狗狗**—Harry**。謝謝你們。**

附件一，利用程式所求出 2×2、3×3、4×4 的方陣各點的解數一覽表

缺點位置 \ 始點	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
無缺點	2	2	2	2
缺點				
(1,1)		1	1	
(2,1)	1			1
(1,2)	1			1
(2,2)		1	1	
加總	4	4	4	4

表三
2×2 **方陣缺點時的各點解數**

缺點位置 \ 始點	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(1,3)	(2,3)	(3,3)
無缺點	8		8		8		8		8
缺點									
(1,1)		4	3	4	2	2	3	2	4
(2,1)									
(3,1)	3	4		2	2	4	4	2	3
(1,2)									
(2,2)	2	2	2	2		2	2	2	2
(3,2)									
(1,3)	3	2	4	4	2	2		4	3
(2,3)									
(3,3)	4	2	3	2	2	4	3	4	
加總	20	14	20	14	16	14	20	14	20

表四
2×2 **方陣缺點時的各點解數**

缺點位置 \ 始點	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
無缺點	52	25	25	52	25	36	36	25
缺點								
(1,1)		26		21	26		19	

(2,1)	19		4			2		2
(3,1)		4		19	2		2	
(4,1)	21		26			19		26
(1,2)	19		2			2		1
(2,2)		5		15	5		13	
(3,2)	15		5			13		5
(4,2)		2		19	1		2	
(1,3)		2		4	4		4	
(2,3)	15		7			13		7
(3,3)		7		15	7		13	
(4,3)	4		2			4		4
(1,4)	21		10			19		10
(2,4)		1		4	2		4	
(3,4)	4		1			4		2
(4,4)		10		21	10		19	
加總	170	82	82	170	82	112	112	82

始點 / 缺點位置	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
無缺點	25	36	36	25	52	25	25	52
缺點								
(1,1)		19		10	21		10	
(2,1)	2		4			1		4
(3,1)		4		2	4		1	
(4,1)	10		19			10		21
(1,2)	4		4			2		4
(2,2)		13		7	15		7	
(3,2)	7		13			7		15
(4,2)		4		4	4		2	
(1,3)		2		1	19		2	
(2,3)	5		13			5		15
(3,3)		13		5	15		5	
(4,3)	1		2			2		19
(1,4)	26		19			26		21
(2,4)		2		2	19	4	4	
(3,4)	2		2					19
(4,4)		19		26	21		26	
加總	82	112	112	82	170	82	82	170

表五

2×2 **方陣缺點時的各點解數**

附件 2，利用蠻力法求解的程式之程式碼

```
REM 基本設定
LABEL START
 CLEAR SCREEN
 Input "請輸入二維方陣行/列數=" DD
 ? "請輸入起始點 (X1,X2)"

 Input "X1=" X1
 Input "X2=" X2
REM 缺點處理
 INPUT "缺點數= " P
 IF P>0 THEN
  DIM U(P):DIM V(P)
  FOR S=1 TO P
    PRINT "第",S,"點 X=";:INPUT U(S)
    PRINT "第",S,"點 Y=";:INPUT V(S)
  NEXT S
 FI
 TS$=TIME$:REM 起始時間記錄
REM 以 D(R)記錄步法
 DIM D(DD^2-1-P)
 FOR R=1 TO DD^2-1-P STEP 1
  D(R)=0
 NEXT R
REM 以 A(X1,X2)記錄各點狀態
 DIM A(DD,DD)

REM 將各點歸 0
LABEL MM
   FOR M1=1 TO DD
     FOR M2=1 TO DD
       A(M1,M2)=0
     NEXT M2
   NEXT M1

REM 將起始點套入
  I1=X1:I2=X2
```

```
REM 將缺點套入
   FOR S=1 TO P STEP 1
      A(U(S),V(S))=1
   NEXT S
REM 實際行走
   FOR R=1 to DD^2-1-P step 1
      A(I1,I2)=1
      IF D(R)=0 THEN I2=I2+1:FI:REM 下
      IF D(R)=1 THEN I2=I2-1:FI:REM 上
      IF D(R)=2 THEN I1=I1-1:FI:REM 左
      IF D(R)=3 THEN I1=I1+1:FI:REM 右
      IF (I1<1) or (I1>DD) THEN GOTO QQ:FI:REM 越界之處理(QQ)
      IF (I2<1) or (I2>DD) THEN GOTO QQ:FI:REM 越界之處理(QQ)
      IF A(I1,I2)=1 THEN GOTO QQ:FI:REM 碰壁之處理(QQ)
   NEXT R
REM 碰壁/越界之處理（變更步法）
LABEL QQ
   FOR S=R TO 1 STEP -1
      D(S)=D(S)+1
      IF D(1)=4 THEN GOTO EEND:FI
      IF D(S)=4 THEN D(S)=0 ELSE S=1:FI
   NEXT S
   GOTO MM
REM 變更步法
  For S=DD^2-1-P to 1 step -1
   D(S)=D(S)+1
   IF D(1)=4 THEN GOTO EEND:FI
   IF D(S)<>4 then S=1 ELSE D(S)=0:FI
  NEXT S
  GOTO MM

REM 用 K 記錄解數
  K=K+1
REM 印出答案
   ? "解  ",K,"= ";
   FOR R=1 TO DD^2-1-P STEP 1
      ? D(R);
   NEXT R
```

```
   ?
REM  印出答案並結束
LABEL EEND
  TE$=TIME$:REM  結束時間記錄
  ? "開始時間=",TS$
  ? "結束時間=",TE$
  ? "方陣行/列數=",DD,
  ? "起始點  (",X1,",",X2,")",
  if K=0 then ? "無解" ELSE ? "有",K,"解":FI
REM  問是否另做測試
  INPUT "Another test? (y/n)" A$
  If (A$="Y") or (A$="y") then
     K=0
     GOTO START
  FI
END
```

附件 3，Hamilton 方塊法程式之程式碼

```
REM 基本設定
LABEL BEGINNING
CLEAR SCREEN
DIM F(3):F(1)=1:F(2)=1:F(3)=1

INPUT "請輸入方陣行/列數" N
FOR Y=1 TO (N-1)^2
   F(1)=F(1)*Y
NEXT Y

FOR Y=1 TO ((N-2)^2)/2
   F(2)=F(2)*Y
NEXT Y

FOR Y=1 TO ((N^2)/2)-1
   F(3)=F(3)*Y
NEXT Y

G=F(1)/(F(2)*F(3)):? G

IF (((N^2)/2)-1)<>INT(((N^2)/2)-1) THEN GOTO NOANS:FI

DIM P(N+1,N+1),H(N+1,N+1),V(N+1,N+1),C(N,N),B(((N^2)/2)-1),W$(G)

FOR Y=0 TO ((N^2)/2-1)
   B(Y)=Y
NEXT Y

FOR Y=1 TO G
W$(G)=""
NEXT Y

REM 給出隨機圖形
FOR X=1 TO G

FOR Y=0 TO N
```

```
    FOR Z=O TO N
        P(Y,Z)=0:H(Y,Z)=0:V(Y,Z)=0:C(Y,Z)=0
    NEXT Z
NEXT Y

    FOR Y=1 TO ((N^2)/2-1)
        I=INT((B(Y)-1)/(N-1))+1
        R=MOD((B(Y)-1),(N-1))+1
        C(R,I)=1
    NEXT Y

REM 檢驗是否為 Hamilton Circuit

REM 給出點和線的值
    FOR Y=1 TO N-1
        FOR Z=1 TO N
            H(Y,Z)=C(Y,Z)+C(Y,(Z-1))
            V(Z,Y)=C(Z,Y)+C((Z-1),Y)
            IF H(Y,Z)=2 THEN H(Y,Z)=0:FI
            IF V(Z,Y)=2 THEN V(Z,Y)=0:FI
        NEXT Z
    NEXT Y

    FOR Y=1 TO N
        FOR Z=1 TO N
            P(Y,Z)=H(Y,Z)+H((Y-1),Z)+V(Y,Z)+V(Y,(Z-1))
            IF P(Y,Z)<>2 THEN GOTO NEWBLOCKS:FI
        NEXT Z
    NEXT Y

REM 上色
        I=INT((B(1)-1)/(N-1))+1
        R=MOD((B(1)-1),(N-1))+1
    C(R,I)=8:A=1
    LABEL COLORING:AA=0
    FOR Y=1 TO N-1
        FOR Z=1 TO N-1
            IF (C(Y,Z)=0) OR (C(Y,Z)=8) THEN GOTO NEXTBLOCK:FI
```

```
            CR=C(Y-1,Z)+C(Y,Z-1)+C(Y+1,Z)+C(Y,Z+1)
            IF CR>=8 THEN C(Y,Z)=8:A=A+1:AA=AA+1:FI
LABEL NEXTBLOCK
        NEXT Z
    NEXT Y
    IF AA<>0 THEN GOTO COLORING:FI

REM 檢驗
    IF A=((N^2)/2)-1 THEN
        S=S+1:R=S
        W$(R)=""
        FOR Y=1 TO N-1
            FOR Z=1 TO N-1
                W$(R)=W$(R)+STR$(C(Z,Y))
            NEXT Z
        NEXT Y

        GOSUB PRINTING
    FI

LABEL NEWBLOCKS
Y=((N^2)/2)-1
B(Y)=B(Y)+1
LABEL ROUND
IF B(Y)=((N^2)/2)-(2*N)+3+Y THEN
    B(Y-1)=B(Y-1)+1
    FOR Z=Y TO ((N^2)/2)-1 STEP 1
        B(Z)=B(Z-1)+1
    NEXT Z
    Y=Y-1
    IF Y=0 THEN B(Y)=-5:FI
    GOTO ROUND
FI
NEXT X
LABEL NOANS
REM 印出結果
? "共有 ",S," 個解"
LABEL RESULT
```

```
INPUT "要看哪一個解?(0=結束) " R
IF R<>0 THEN GOSUB PRINTING ELSE GOTO NEWONE:FI
GOTO RESULT

REM  結束
LABEL NEWONE
INPUT "還要再測試嗎? (y/n)" K$
IF K$="Y" OR K$="y" THEN
   S=0
   GOTO BEGINNING
FI
END

LABEL PRINTING
FOR Y=1 TO N-1
   FOR Z=1 TO N-1
   B$=MID$(W$(R),((Y-1)*(N-1)+Z),1)
   IF B$="0" THEN ? " "; ELSE ? B$;:FI
   NEXT Z
   ?
NEXT Y
?
RETURN
```

附件 4，Hamilton 長方塊法程式之程式碼

```
REM  基本設定
LABEL BEGINNING
CLEAR SCREEN
DIM F(3):F(1)=1:F(2)=1:F(3)=1

INPUT "請輸入方陣行數= " M
INPUT "請輸入方陣列數= " N
FOR Y=1 TO (M-1)*(N-1)
   F(1)=F(1)*Y
NEXT Y

FOR Y=1 TO ((M-2)*(N-2))/2
   F(2)=F(2)*Y
NEXT Y

FOR Y=1 TO ((N*M)/2)-1
   F(3)=F(3)*Y
NEXT Y

G=F(1)/(F(2)*F(3))
? "需塗",((N*M)/2)-1,"個方塊"
? "有",G,"種組合"

IF (((N*M)/2)-1)<>INT(((N*M)/2)-1) THEN GOTO NOANS:FI

H=INT(SQR(G)*1.1)
DIM P(M+1,N+1),H(M+1,N+1),V(M+1,N+1),C(M+1,N+1),B(((N*M)/2)-1),W$(H)

FOR Y=0 TO ((N*M)/2)-1
   B(Y)=Y
NEXT Y

REM  給出隨機圖形
FOR X=1 TO G

FOR Y=0 TO M+1
   FOR Z=0 TO N+1
```

```
    P(Y,Z)=0:H(Y,Z)=0:V(Y,Z)=0:C(Y,Z)=0
  NEXT Z
NEXT Y



  FOR Y=1 TO (((N*M)/2)-1)
    I=INT((B(Y)-1)/(M-1))+1
    R=MOD((B(Y)-1),(M-1))+1
    C(R,I)=1
  NEXT Y
REM  檢驗是否為  Hamilton Circuit

REM  給出點和線的值
  FOR Y=1 TO M-1
    FOR Z=1 TO N
      H(Y,Z)=C(Y,Z)+C(Y,(Z-1))
      IF H(Y,Z)=2 THEN H(Y,Z)=0:FI
    NEXT Z
  NEXT Y

  FOR Y=1 TO N-1
    FOR Z=1 TO M
      V(Z,Y)=C(Z,Y)+C((Z-1),Y)
      IF V(Z,Y)=2 THEN V(Z,Y)=0:FI
    NEXT Z
  NEXT Y

  FOR Y=1 TO M
    FOR Z=1 TO N
      P(Y,Z)=H(Y,Z)+H((Y-1),Z)+V(Y,Z)+V(Y,(Z-1))
      IF P(Y,Z)<>2 THEN GOTO NEWBLOCKS:FI
    NEXT Z
  NEXT Y

REM  上色
    I=INT((B(1)-1)/(M-1))+1
    R=MOD((B(1)-1),(M-1))+1
```

```
   C(R,I)=8:A=1
   LABEL COLORING:AA=0
   FOR Y=1 TO M-1
      FOR Z=1 TO N-1
         IF (C(Y,Z)=0) OR (C(Y,Z)=8) THEN GOTO NEXTBLOCK:FI
         CR=C(Y-1,Z)+C(Y,Z-1)+C(Y+1,Z)+C(Y,Z+1)
         IF CR>=8 THEN C(Y,Z)=8:A=A+1:AA=AA+1:FI
LABEL NEXTBLOCK
      NEXT Z
   NEXT Y
   IF AA<>0 THEN GOTO COLORING:FI

REM 檢驗
   IF A=((N*M)/2)-1 THEN
      S=S+1:R=S
      W$(R)=""
      FOR Y=1 TO N-1
         FOR Z=1 TO M-1
            W$(R)=W$(R)+STR$(C(Z,Y))
         NEXT Z
      NEXT Y

      GOSUB PRINTING
   FI

LABEL NEWBLOCKS
Y=((M*N)/2)-1
B(Y)=B(Y)+1
LABEL ROUND
IF B(Y)=((N*M)/2)-(M+N)+3+Y THEN
   B(Y-1)=B(Y-1)+1
   FOR Z=Y TO ((N*M)/2)-1 STEP 1
      B(Z)=B(Z-1)+1
   NEXT Z
   Y=Y-1
   IF Y=0 THEN B(Y)=-5:FI
   GOTO ROUND
FI
```

```
NEXT X
LABEL NOANS
REM  印出結果
? "需塗",((N*M)/2)-1,"個方塊"
? "有",G,"種組合"
? "共有  ",S,"  個解"
LABEL RESULT
INPUT "要看哪一個解?(0=結束) " R
IF R<>0 THEN GOSUB PRINTING ELSE GOTO NEWONE:FI
GOTO RESULT

REM  結束
LABEL NEWONE
INPUT "還要再測試嗎? (y/n)" K$
IF K$="Y" OR K$="y" THEN
   S=0
   GOTO BEGINNING
FI
END


LABEL PRINTING
FOR Y=1 TO N-1
   FOR Z=1 TO M-1
   B$=MID$(W$(R),((Y-1)*(M-1)+Z),1)
   IF B$="0" THEN ? " "; ELSE ? B$;:FI
   NEXT Z
   ?
NEXT Y
?
RETURN
```