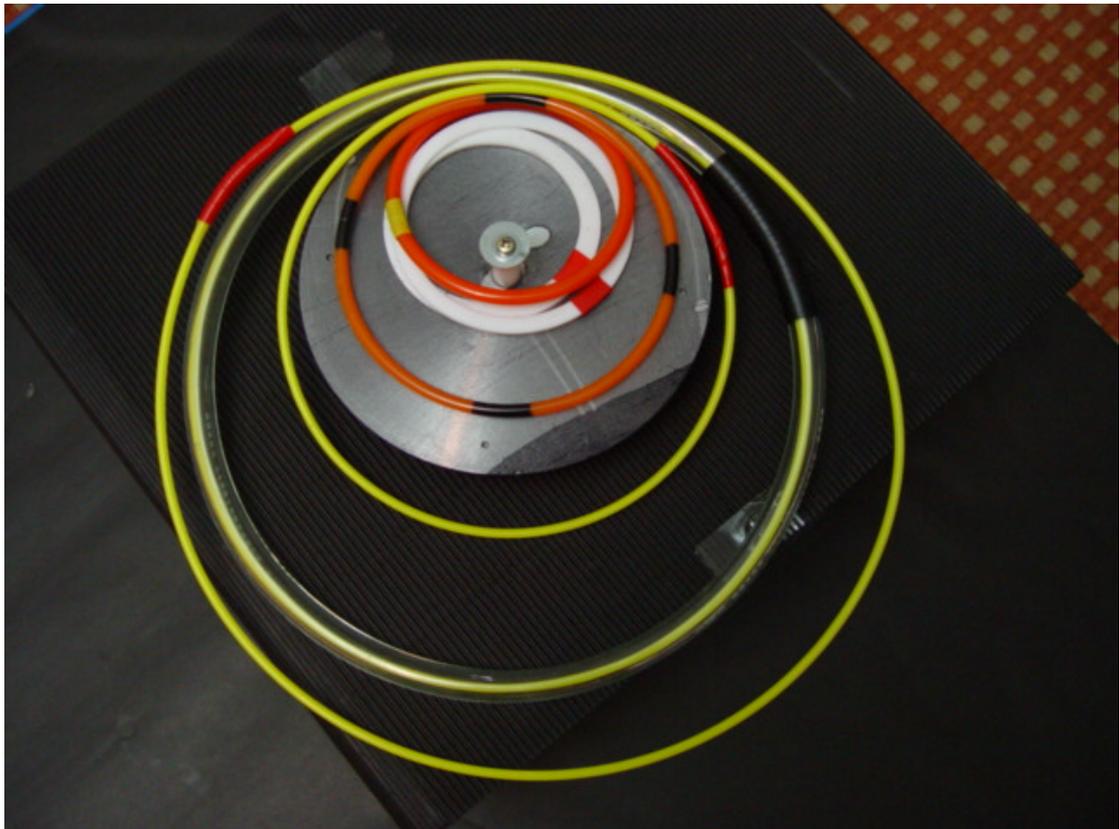


第一屆 旺宏科學獎

從呼拉圈穩定搖擺的律動
看圓形駐波模式



SA-136

新竹科學園區實驗高級中學 張瀚

指導老師：林智遠

研究動機

玩過呼拉圈的人就知道拼命前後用力甚至試圖隨著呼拉圈圓周運動的方向施力,不在一個穩定的情況下是無法達到平衡.而達到平衡之後而用力方式便可以規律化,甚至只要前後擺動就可以維持其轉動.其人與圈的律動呼應了物理之美.

研究目的

1. 人的搖擺律動、與呼拉圈的轉動此兩者一定要恰到好處才能行成穩定擺動。以觀察紀錄的方式尋找兩者之間的關係。
2. 呼拉圈的搖擺方式為線性的簡諧運動、等速率的圓周運動、或長橢圓運動。設法求得其運動模型，並設計電動模型進行多元的探討。
3. 利用動態幾何軟體(GSP)探討呼拉圈質心轉動及自旋軌跡。

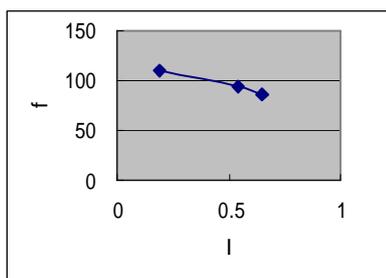
研究方法

一.穩定呼拉圈律動的探討

探討人穩定搖擺與呼拉圈轉動的頻率

r：人搖擺半徑=12cm

| 呼拉圈 | A | B | C |
|-----------------------|------|------|------|
| R：半徑 (cm) | 42 | 53 | 52 |
| M：重量 (kg) | 0.7 | 1.2 | 1.5 |
| 轉動慣量 | 0.19 | 0.54 | 0.65 |
| $M R^2 + M (R - r)^2$ | | | |
| f_m | 106 | 95 | 88 |
| | 113 | 93 | 85 |
| | 113 | 92 | 83 |
| 平均 f_m | 111 | 93 | 85 |



定義

f_m ：人的搖擺最低頻率

f_o ：呼拉圈的質心旋轉頻率

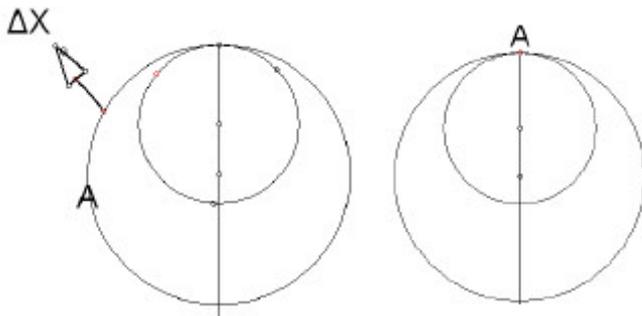
f_s ：呼拉圈的自旋頻率

ω ：呼拉圈質心旋轉角速度

$$\omega = 2\pi f_o$$

討論

1. 以半徑大小，管徑粗細，輕重不同的呼拉圈，控制在最小轉速下最輕鬆的轉動，此時 $f_m = f_0$
2. 突然以較 f_0 大之 f_m 搖擺，則呼拉圈之穩定擺動立即受破壞，隨之落下
3. 由 $F_{\text{向心力}} = MR^2$ ，可知呼拉圈越大， R 大， f_0 小，意即呼拉圈越大，所需的角速度越小，也就是越容易轉起來
4. 呼拉圈越重，若在 f_0 ， R 不變條件下，則手所施的力要加大。若想要施力不變，則可以使 f_0 ，或 R 來達到平衡。即呼拉圈重，可以以較低的角速度或旋轉半徑來達到平衡。
5. 呼拉圈的平移旋轉頻率 f_0 與呼拉圈的自旋頻率 f_s 的關係



若呼拉圈與身體之間為無滑動之純轉動，則

與身體接觸之弧長 $X =$ 身體之周長 $2r$

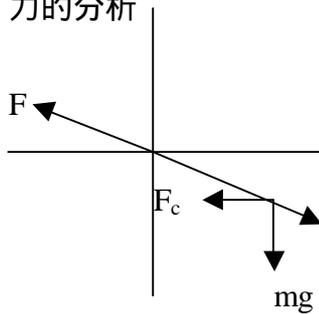
設偏差角度為 θ ，則

$$R = 2r, \quad \theta = 2(r/R)$$

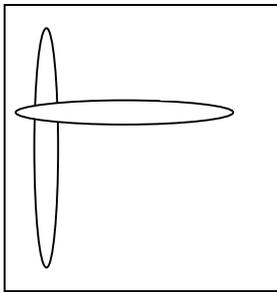
故實際轉過角度為 $2 - \theta = 2(R-r)/R$ ，角速度比為 $1: (R-r)/R = R:R-r$

二.動力學的分析

1. 力的分析



2. 功能原理



呼拉圈之轉動慣量 $I = mR^2 + m(R-r)^2 = m(2R^2 - 2Rr + r^2)$

若 $r \ll R$ 則 $I = 2mR(R-r)$

人搖擺推力對於呼拉圈作功，平均力為 F ，擺幅 r ，

每作功 $F \cdot r \cdot f = (m \cdot (R \cdot \dot{\theta})^2) / 2 + (I \cdot \dot{\theta}^2) / 2$

$$= [(mR^2) / 2 + 2mR(R-r) / 2] \dot{\theta}^2$$

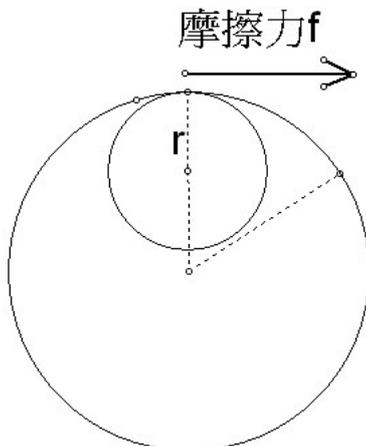
$$= (3/2 \cdot m R^2 - 2mRr) \dot{\theta}^2$$

以維持穩定搖擺

3. 人的搖擺形式

- 線性簡諧運動
- 等速率圓週運動
- 簡諧運動+圓周合成的長橢圓振盪

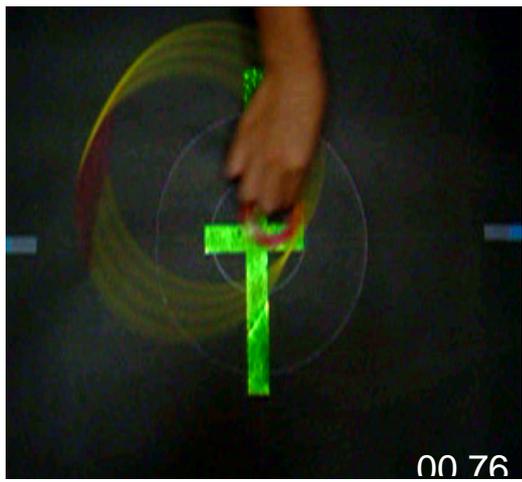
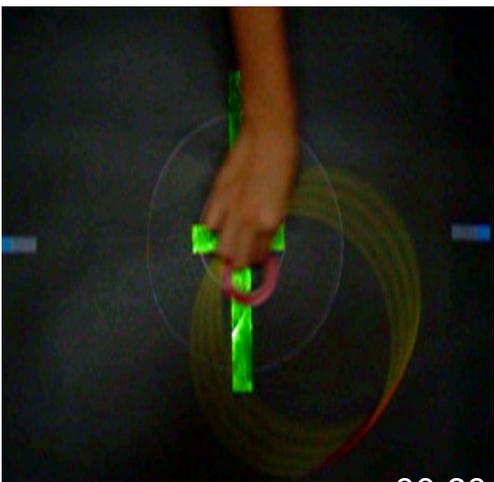
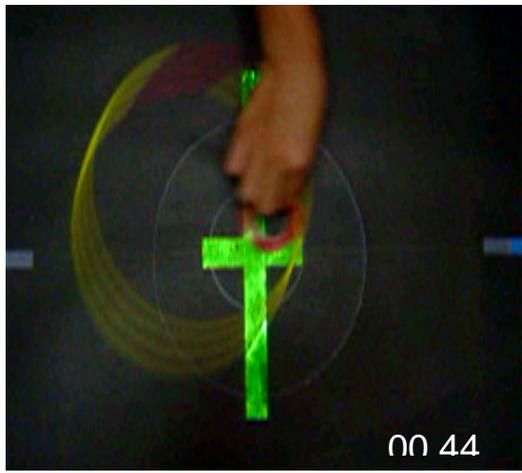
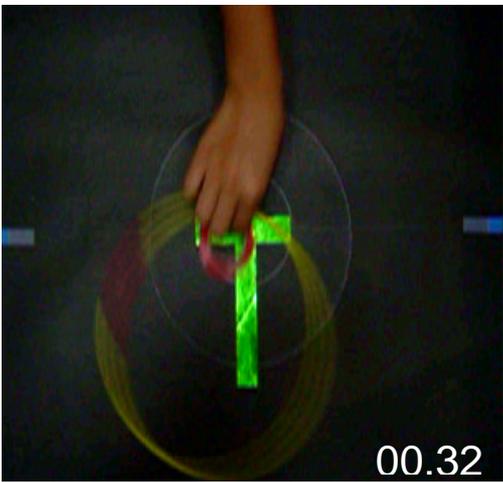
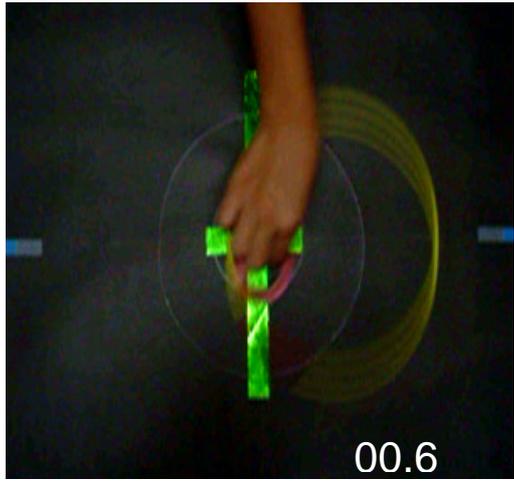
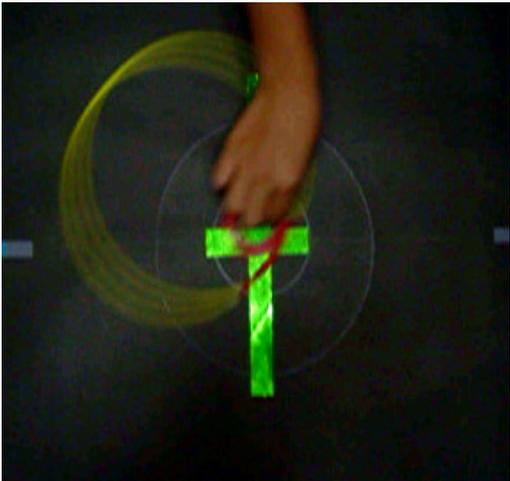
以上三種形式，皆以人正前方身體的方向施推力 F 作功，為主要的動力來源



$$F = \mu \cdot F_c = \mu \cdot mR$$

$$\text{力矩} = f \cdot R = I \cdot \dot{\theta}^2$$

用以維持等速率穩定轉動， f 為定值，而不是做等角加速使用



三.自製電動的呼拉圈搖擺，探討更大轉速下的模型

馬達模型的設計

原先的構想是以可變電阻控制馬達轉速，以馬達帶動圓盤，在圓盤上固定轉動軸心(相當於人的腰部)以達到轉動的效果。為了計算馬達轉動的頻率，便在圓盤的周圍每隔一個固定角度切割出一道道狹縫，藉由垂直盤面的雷射光間歇性的穿過狹縫，投射在具有光敏電阻的計頻器上，以計算馬達轉動的頻率。

然而，經過嘗試各種不同的馬達轉動頻率，轉動的半徑 r ，呼拉圈的半徑 R ，以及轉軸及呼拉圈的各種材質，呼拉圈的公轉與自旋頻率始終是相等的，也就是呼拉圈和轉軸的接觸點始終都是同一點。這和實際上的狀況並不相同。

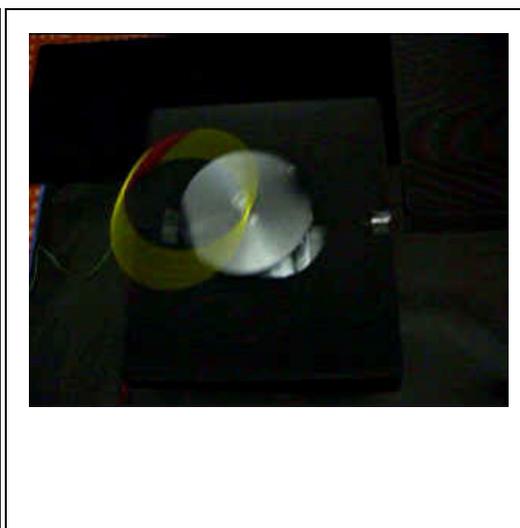
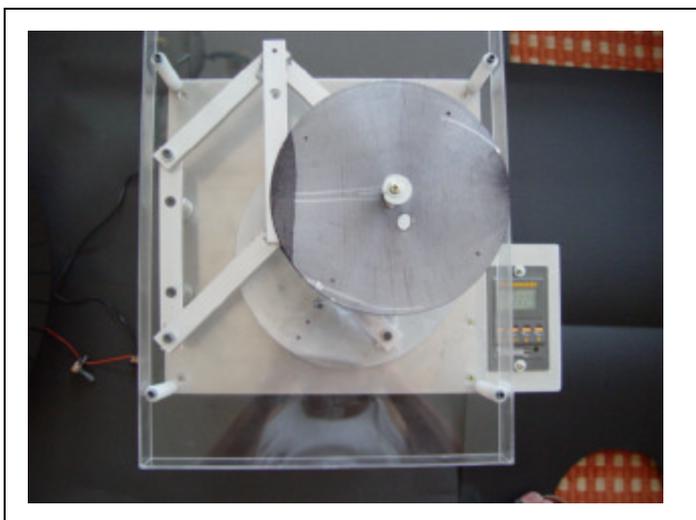


因此實際模型和真實狀況最後的差距，便在於在轉盤上的轉軸並不是平移轉動，而是有自旋的轉動。為了修正這個情況，原先的設計是在轉盤上的轉軸和轉盤的圓心之間安置偶數個齒輪組，位於圓心的齒輪被固定住而沒有轉動(因此相對於圓盤及其上的其他齒輪的轉動就是逆向的)，將此逆向的轉動用偶數個齒輪組傳動到末端的轉軸上，便可將轉軸原先的自旋抵銷，造成平移轉動的效果。

在實際製作後才發現有相當多的問題等待克服。例如齒輪如何在轉盤上固定又能自由轉動(使用的齒輪是四驅車的小塑膠齒輪)，齒輪與齒輪之間，馬達和圓盤之間，齒輪和轉軸之間的摩擦。而加上林林總總裝置之後，馬達也無法負擔如此多的功率，使轉動達不到可以帶動呼拉圈的速率。因此這一部分的裝置也沒有成功。

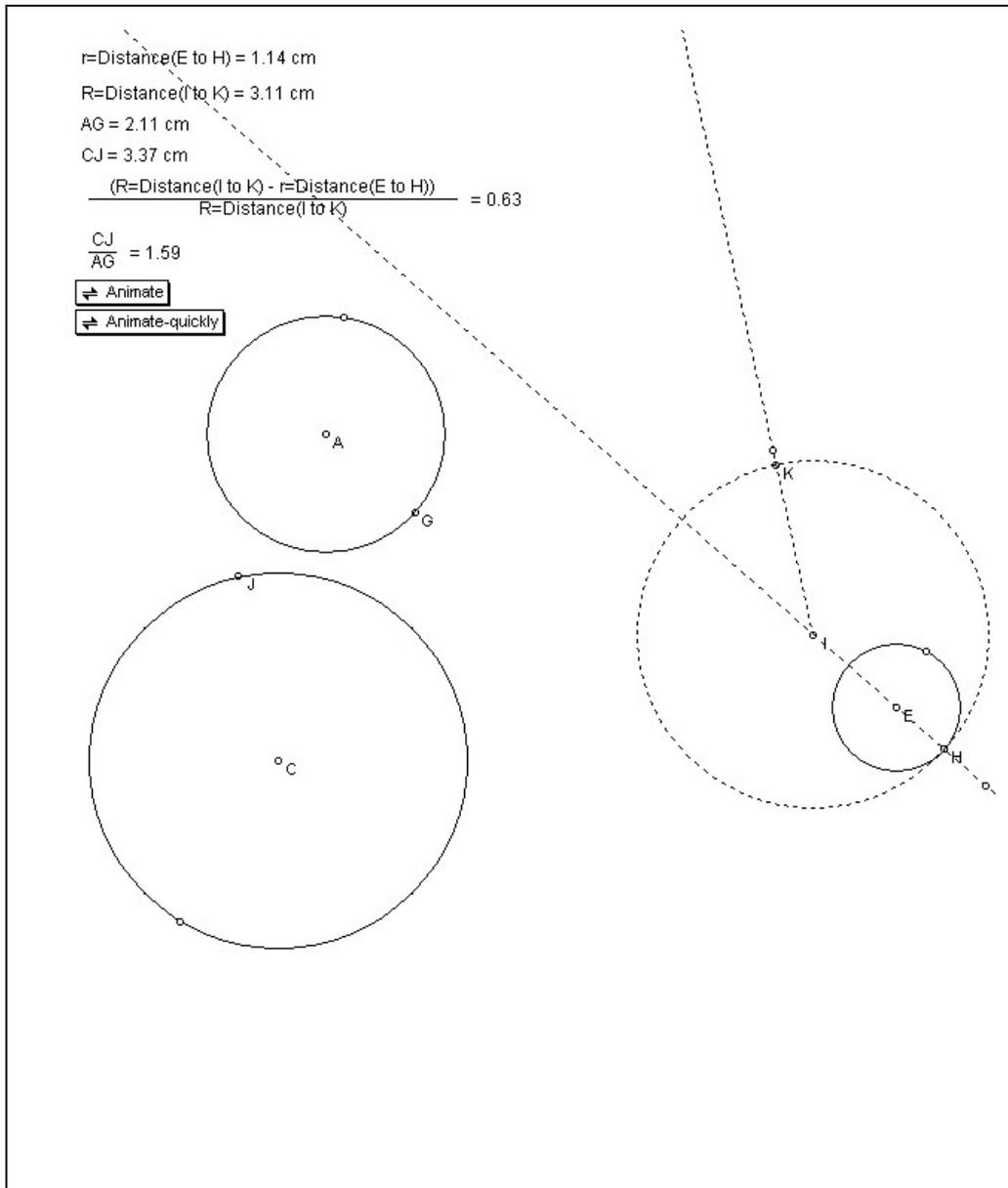
完美的搖擺模型

最後的裝置是利用連桿的原理，藉由連桿間數個關節處角度的改變，使得帶動轉軸的最後一跟連桿之方向始終與固定端保持平行，以維持轉軸質心轉動無自旋的效果。



四．以 GSP 動態幾何模擬呼拉圈的轉動情形

由於呼拉圈之圓心繞轉軸轉動之頻率 f_o ，及呼拉圈上之各點繞圓心之自旋頻率 f_s ，若在呼拉圈對軸心的運動只是轉動而沒有滑動，則有如上述 $f_o : f_s = 1 : (R-r)/R$ 的關係。因此建立如下模擬：



點 H 對圓 E 繞轉，為圓 I 對圓 E 的切點。也相當於轉呼拉圈時，身體對呼拉圈的切點。圓 E 則是身體切點的軌跡(而非身體本身)。

左邊向量 A->G 的方向設定為=向量 E->H，因此當點 G 在圓 A 上轉動時，會控制點 H 在圓 E 上以同樣的角度轉動，這便是呼拉圈圓心繞人體的轉動。

而同理，點 J 在圓 C 上轉動時，便會使得右邊的點 K 在呼拉圈 I 上轉動，這便是呼拉圈的自旋。

由於 GSP 中一點在某一軌跡上運行的速度，為一固定的線速度 v ，因此為了控制 $f_o : f_s$ 的比值，由於 $f_o : f_s = \omega_o : \omega_s = v/R_A : v/R_C = R_A : R_C$ ，因此控制左邊兩圓的半徑比便可控制呼拉圈 $f_o : f_s$ 的比值。

如上述， $f_o : f_s = 1 : (R-r)/R$ 的關係，因此

$$\frac{(R = \text{Distance}(I \text{ to } K) - r = \text{Distance}(E \text{ to } H))}{R = \text{Distance}(I \text{ to } K)}$$

便是 $f_o : f_s$ 的比值。而

$$\frac{CJ}{AG}$$

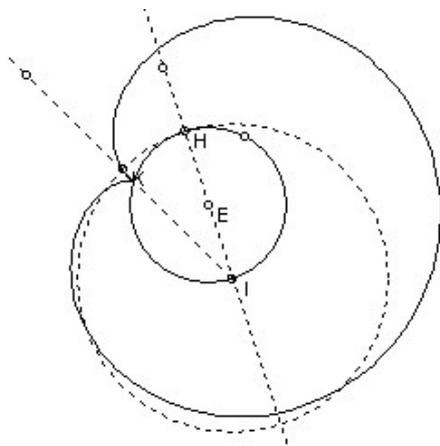
是 $R_C : R_A$ 的比值，在理想呼拉圈繞轉的模型中會是 $f_o : f_s$ 比值的倒數。

理想狀態下的呼拉圈軌跡

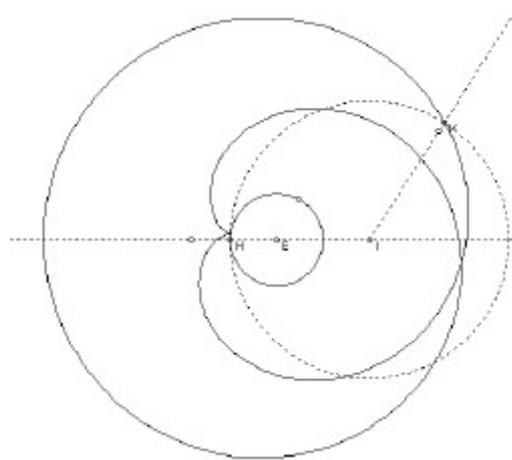
取下列 R 與 r 的關係，描繪呼拉圈的軌跡

| 半徑比 | 角速度比 |
|-----|---------|
| R:r | R : R-r |
| 2:1 | 2:1 |
| 3:1 | 3:2 |
| 4:1 | 4:3 |
| 5:1 | 5:4 |

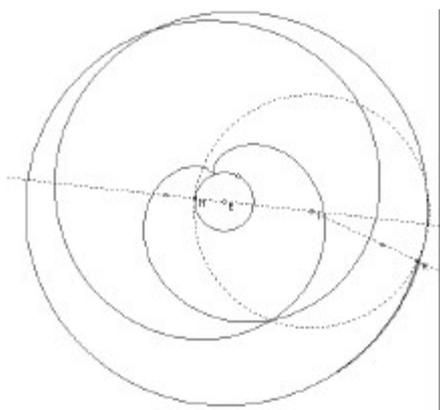
2:1



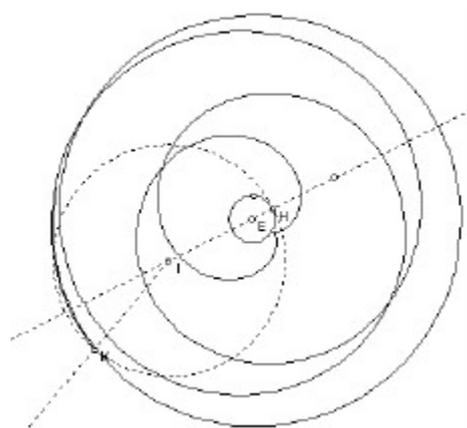
3:1



4:1



5:1



呼拉圈上一點與轉軸接觸點的位置

圖中呼拉圈上定點與身體接觸點都只有一點，如果一開始時質心繞轉和自旋的旋轉角度都為零，則每當兩者之角度差又為零時(即圖中之兩條虛線相重合時)，定點與轉軸接觸。

T_0 :呼拉圈質心繞轉一週之週期

T_s :呼拉圈自旋一周之週期

若經過時間 t 之後，兩者之角度差為：

$$2\pi (t/T_0) - 2\pi (t/T_s) = 2\pi t(1/T_0 - 1/T_s) = 2\pi t(f_0 - f_s)$$

當偏差角度為 2π 之整數倍時，定點與轉軸接觸：

$$2\pi t(f_0 - f_s) = 2\pi n, t(f_0 - f_s) = n \dots \dots \dots (1)$$

在理想的狀況之中

帶入之前的結論 $f_s = f_0 (R-r)/R$

$$f_0 - f_s = f_0 (r/R)$$

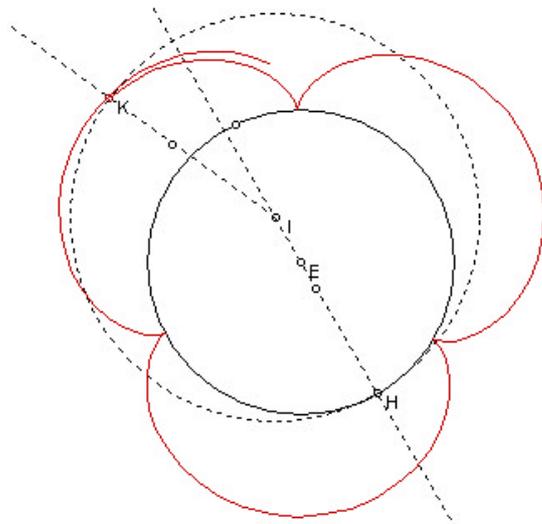
$$t * f_0 (r/R) = n, t = n(R/r) / f_0 = n(R/r) T_0$$

故 $t = n(R/r)$ 個 T_0 時重合，重合點位於 $n(R/r) * 2\pi$ 處

接觸點之間自旋造成的外圍圈數

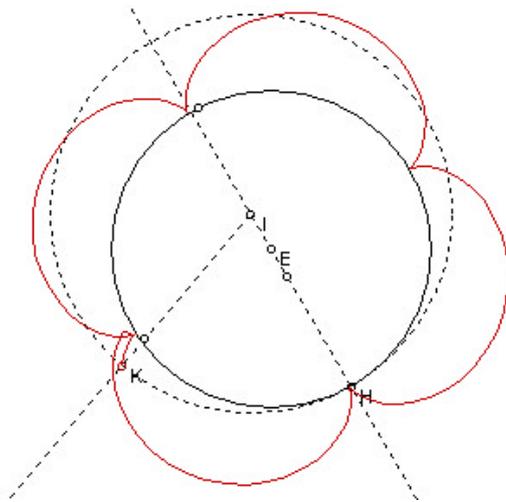
在此情況中隨著 $R/r=2,3,4,5$ ， t 即等於 $2n,3n,4n,5n$ 個質心繞轉週期，而重合處在之處，因此重合點都只有同一點。

而四種情況分別要自旋繞過 $(R-r)/R * (質心繞過的圈數)$ 圈，也就是 $(R-r)/R * R/r = (R-r)/r$ 圈後，便回到原點，並開始新的循環，因此整個圖形外圍的圈數便為 $(R-r)/r$ 圈，也和圖中的 1,2,3,4 圈吻合。



上圖是 $R:r=4:3$ 及 $5:4$ 的例子

$4:3$ 的重合點位於 $(\frac{4}{3})n^2 = (\frac{1}{3})n^2$, 自旋每一個瓣形部分繞了 $(\frac{4-3}{3})=1/3$ 圈
 總共只繞一圈, 因此沒有如上圖在外圍畫弧的情形。

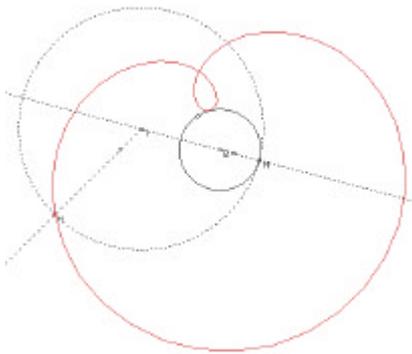
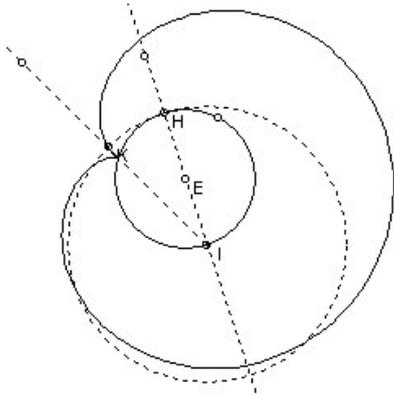


$5:4$ 的重合點位於 $(\frac{5}{4})n^2 = (\frac{1}{4})n^2$, 自旋每一個瓣形部分繞了 $(\frac{5-4}{4})=1/4$ 圈。

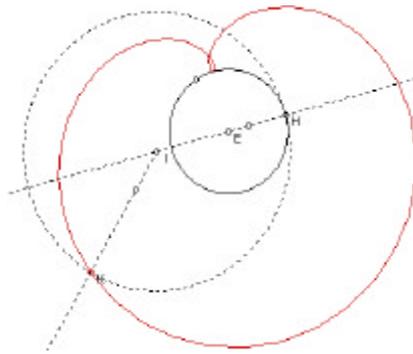
非理想的轉動模型

以上討論的前提都是假設呼拉圈與轉軸之間的相對運動是純滾動而無滑動，也就是遵循 $f_o : f_s = 1 : (R-r)/R$ 的關係。然而在非理想的狀況中，也有可能由於摩擦力的干擾，或是轉軸的運行不是完美的等速率圓周運動，而造成 $f_o : f_s$ 的比值比預期大或小的狀況。因此藉由調節圖 A,C 的半徑比，使得 $f_o : f_s$ 不等於 $(R-r)/R$ ，以進行以下的模擬。

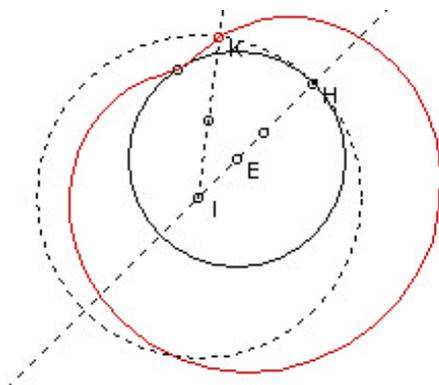
左圖是前述理想的模擬，
 $R:r=2:1$, 頻率 $f_o : f_s = 1 : (R-r)/R = 1/2$



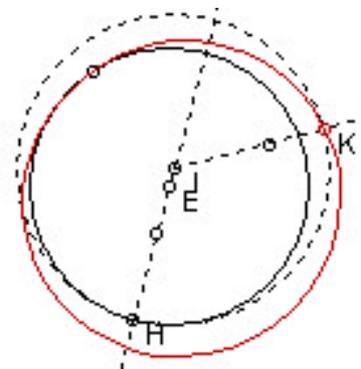
$R:r=3$, $f_o : f_s$ 仍是 $1/2$



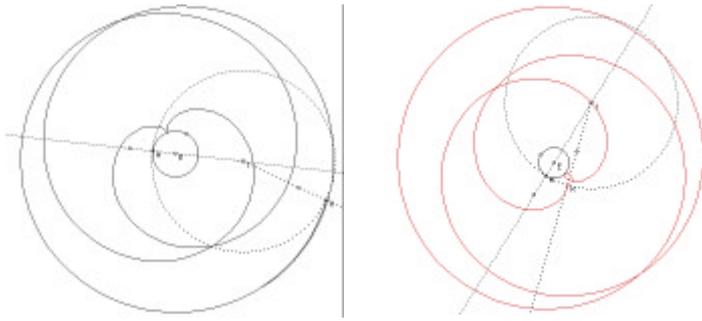
$R:r=2.26$, $f_o : f_s$ 仍是 $1/2$



$R:r=1.51$, 已經看得出來有退化的跡象



$R:r=1.13$, 幾乎要變成圓了



兩個圖的 $f_o : f_s$ 都是 3:4，而半徑比的不同，只造成接觸點附近的差異。

由上面幾個例子可知，轉動軌跡的模式取決於 $f_o : f_s$ 比值的改變。回頭看看前面討論理想情況時的(1)式：

$$2 \pi n / (f_o - f_s) = 2 \pi n / (f_o - f_s), t = n / (f_o - f_s), \text{接觸點位於 } 2 \pi n / (f_o - f_s) (T_o) = (2 \pi n / f_o) / [(1 - f_o / f_s) * T_o] = 2 \pi n / (1 - f_o / f_s)$$

由於接處點的位置決定的圖形的模式，故轉動軌跡的模式僅取決於 $f_o : f_s$ 比值的改變。

結論

1. 人的搖擺頻率與呼拉圈質心的繞轉頻率比恰為 1:1 時，能達到最低轉速輕鬆的擺動。
2. 藉由分析手搖呼拉圈的數據顯示，呼拉圈越重，半徑越大，搖擺的最低頻率也會越小
3. 用手搖取代呼拉圈再桌面上的搖擺可以完美呈現人搖擺的律動，方便觀察及探討，使得本實驗的模擬進入了可靠的依據
4. 利用可控制頻率之電動呼拉圈模型進行多元的探討，可直接控制穩定的頻率，搖擺不同的呼拉圈，可清楚的紀錄動點的自旋軌跡。
5. 以 GSP 模擬呼拉圈的轉動軌跡，發現有如下特性：
 - 理想的轉動狀況下，呼拉圈的軌跡取決於兩項數值：
 - 軌跡與轉動軸心之重合點位於 $n(R/r) \cdot 2$ ， $n=1,2,3,4 \dots$
 - 接觸點之間自旋造成的外圍圈數： $(R-r)/r$
 - 在非理想的轉動狀況，呼拉圈的軌跡模式也僅與兩個轉動頻率 $f_o : f_s$ 的比值有關。
6. 用 GSP 探討簡易的運動現象，可深入並寬廣多元的探討。它的優點是易於操作、控制，方便觀察，詳實紀錄，並提供了數學上的自由度，完美呈現生活物理中的樂趣。

感想

要輕鬆的搖動呼拉圈必須要使身體和呼拉圈的搖擺，有一個切合的搭配，是一件很容易體會的事情。然而在實地觀察呼拉圈的擺動之後，才發覺簡單的運動現象，其中也是相當複雜的。由於呼拉圈全憑著對身體的正向力產生的摩擦力以維持不墜，而力的測量要應用的裝置也就複雜許多，而力的改變又會直接影響頻率和振幅，因此這方面也就難以著手。偶然間用手搖擺呼拉圈，發現其中有許多漂亮的現象，才讓我看清楚他的真面目。

另外這次實驗過程中，花了最多時間的，也就在馬達模擬裝置上面。一開始呼拉圈會和轉軸呈一點黏住的狀態而轉動令人相當疑惑，一開始是試圖加快轉動的頻率，而沒有效果。或是考慮到轉軸對呼拉圈施予的摩擦力和呼拉圈形變後正向力的改變，以及這兩個力分配在自旋和質心繞轉所造成的結果，而改變轉軸和呼拉圈的材質，依然也是徒勞無功。

等到猜測這或許和轉軸的自旋有關之後，已經是一個多月後的事情了。而接下來包含齒輪的設計雖然看似很簡單，做起來才知道成功的機會是很微渺的。這個經驗使我體會到實做上的困難。

而當 GSP 的模擬提供自由度較多的變化之後，呼拉圈的軌跡才有辦法能夠呈現。然而運用攝影以觀察分格的變化，或是簡單的運用手搖其實都可以看出一些端倪。不同的觀察目的，配合的方法可以是多變的，這是我在此次實驗中最大的收穫。