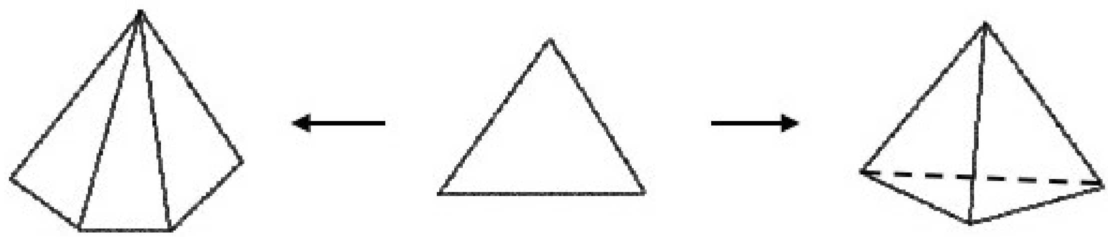
由三角形到三角錐

一、動機及序言：

（一）：在上學期高二數學第三冊中提到球面的幾何性質與圓周的幾何性質可以類比，如圓冪定理與球冪定理、過圓或球外一點求切線段長的公式等，之前也學過空間的圖形如四面體（三角錐）、球等；因此我們想：三角錐的幾何性質與三角形的幾何性質應該也可以類比才對。在老師提供的波利亞（*G.Polya*）著的《數學與猜想》（*Mathematics and Plausible Reasoning*）一書中，看到如圖（一），使我們更加確定此推論。



可類比的　　　　　　　　　　　　可類比的

圖（一）

其理由波利亞說：「在平面上，至少要三條直線才能圍成有限的圖形——三角形；而在空間中，至少要四張平面才能圍成有限的區域——三角錐。就兩者以數目最少的簡單分界為元素所圍成這一點來說，三角形與平面的關係同三角錐與空間的關係是一樣的。」現在我們換一個角度闡明三角形與三角錐的關係如下：

三角形區域是在平面直角座標下不等式組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 \geq 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 \geq 0 \\ a_3x+b_3y+c_3 \geq 0 \end{cases}$ 的解集合

拉高一度

三角錐區域是在空間直角座標下不等式組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1 \geq 0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2 \geq 0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3 \geq 0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4 \geq 0 \end{cases}$ 的解集合

（二）：如同圓與球，三角形的類比是三角錐，其類似的性質我們叫做「類推」。本作品的目標就是從三角形的諸多性質，類推出三角錐的性質。這其中也許有一些顯而易見，有一些則是一般人疏忽或不易察覺的。我們查遍圖書館及請教師長，發現沒有人對此做過有系統的研究、發現、整理。自去年下半年開始，經過我們長期的努力，才彙編出這本成果。

（三）：在類推的推理過程中，波利亞於序言中提到，可稱之為「猜想」或「合情的推理」；我們採用「猜想」一詞。以下每次由三角形的性質猜想出三角錐的性質時，都要論證其成立與否。這其中偶爾會有失敗、不成立的情況，亦需找反例或證明以確定其不成立，例如：「海馬猜想」；成立的情況中比較突出的，我們稱之為公式或定理，例如：「空間畢氏定理」及「海虎公式」等。（容後說明）

※（四）：由於本作品是要建立完整的體系，故內容探討盡量做到滴水不漏，以至於其中難免

略嫌瑣碎、冗長，若各位專家們欲在最短的時間中看出其精華，可優先注意如猜想 9 空間畢氏定理、猜想 14 三角錐重心體積推廣定理、猜想 22 三角錐立體多面角定理及其推廣。但是讓我們絞盡腦汁，也最令我們引以為傲的，應是猜想 23 海馬猜想、猜想 24 海虎公式，以及最後一個猜想 25 海虎不等式。

二、內容與過程（先提特殊三角形，再提一般三角形）

(一)：正三角形類比正四面體

猜想 1：正三角形的內心、外心、重心三點合一，類推出正四面體的內心、外心、重心三點合一。

易證成立

定義 1：n **角錐** $O-A_1A_2\cdots A_n$**，由** $\angle A_1OA_2$**、**$\angle A_2OA_3$**、…、**$\angle A_nOA_1$ **此** n **個角所圍成的角我們稱之為立體多面角** $\angle O-A_1A_2\cdots A_n$**，簡記為** $\angle O-A_1A_2\cdots A_n$**。**

定義 2：兩三角錐的立體多面角 $\angle O-A_1A_2A_3$ **與** $\angle O'-A_1'A_2'A_3'$**，若** $\angle A_1OA_2=\angle A_1'O'A_2'$**，**$\angle A_2OA_3=\angle A_2'O'A_3'$**，**$\angle A_3OA_1=\angle A_3'O'A_1'$**，則** $\angle O-A_1A_2A_3$ **=** $\angle O'-A_1'A_2'A_3'$ **（全等）。**

定義 3： $m\angle O-A_1A_2A_3=\angle A_1OA_2+\angle A_2OA_3+\angle A_3OA_1$**。**

（兩三角錐的立體多面角全等度量一定相等，但度量相等兩角不一定全等）

猜想 2：正三角形三邊等長、三內角全等，類推出正四面體六稜等長、四面全等、四立體多面角全等。

易證成立

（二）等腰三角形類比正三角錐

定義 4：三角錐 $O-ABC$ **，在?** ABC **所在平面上，恰有一點** D **滿足立體多面角**

$m\angle O-ABD=m\angle O-BCD=m\angle O-CAD$**，則稱** $\overline{OD}$ **為立體多面角** $\angle O-ABC$ **的分角線。**

猜想 3：等腰三角形頂角分角線和底邊高合一，類推出正三角錐頂立體多面角之分角線和底面高合一。

易證成立

（三）直角三角形類比直角三角錐

定義 5：三角錐 $O-ABC$ **，若** $\overline{OA}$**、**$\overline{OB}$**、**$\overline{OC}$ **兩兩垂直，則稱之為直角三角錐;而** $\angle O-ABC$ **稱之為直角頂。**

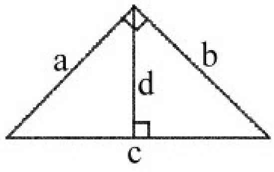
猜想 4：直角三角形為長方形切割一角；直角三角錐為長方體切割一角。

易證成立

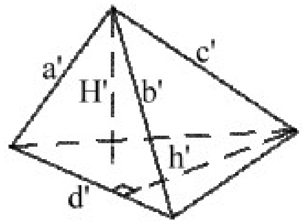
猜想 5：直角三角形面積為 $\frac{1}{2!}ab$ **（**a**、**b **為兩股長），類推出直角三角錐體積為** $\frac{1}{3!}abc$ **（** a**、**b**、**c **為兩兩垂直之三稜長 ）。**

易證成立

猜想 6：直角三角形 $ab=cd$**，如圖（二），類推出直角三角錐** $a'b'c'=h'H'd'$**，如圖（三）。**



圖（二）



圖（三）

易證成立

猜想 7：直角三角形直角外另兩角和 $90°$，類推出直角三角錐直角頂外另三立體多面角度量和為 $450°$（參照定義三）。

易證成立

猜想 8：半圓含直角三角形（直角三角形的外接圓以斜邊為直徑），類推出半球含直角三角錐（直角三角錐的外接球以與直角頂相對之面為半球分割面，即球心所在面）。論證得此猜想是不成立的，見下面證明：

令直角三角錐 $O-ABC$，$O(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$

若外接球球心在平面 ABC 上，則球心亦為 ΔABC 之外心

令 ΔABC 外心 $D(x,y,z)$，外接圓半徑 r

平面 ABC ：$bcx+cay+abz-abc=0$

$$由\begin{cases}(x-a)^2+y^2+z^2=x^2+(y-b)^2+z^2\\(x-a)^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(z-c)^2\\bcx+cay+abz-abc=0\end{cases}$$

解得 $D\left(\dfrac{a^3(b^2+c^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)},\dfrac{b^3(c^2+a^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)},\dfrac{c^3(a^2+b^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}\right)$

則 $r^2=\dfrac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}+\dfrac{\left[a^6(b^2+c^2)^2+b^6(c^2+a^2)^2+c^6(a^2+b^2)^2\right]}{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2}$

若 D 為球心，則 r 亦為外接球半徑，$\overline{OD}=r$

但 $\overline{OD}^2=\dfrac{\left[a^6(b^2+c^2)^2+b^6(c^2+a^2)^2+c^6(a^2+b^2)^2\right]}{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2}\neq r^2$

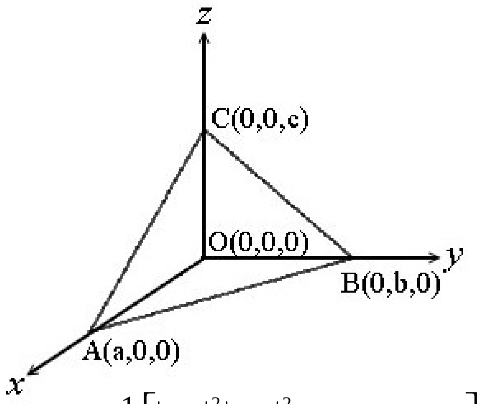
$\Rightarrow D$ 為? ABC 外心，但不為直角三角錐 $O-ABC$ 之球心

故不成立

猜想 9：直角三角形三邊邊長關係類推出直角三角錐四面面積關係。

（1）說明：直角三角形 ABC（$\angle C$ 為直角）三邊邊長關係即為畢氏定理 $a^2+b^2=c^2$；而直角三角錐 $O-ABC$（$\angle O-ABC$ 是直角頂）四面面積關係為 $(a\Delta OAB)^2+(a\Delta OBC)^2+(a\Delta OCA)^2=(a\Delta ABC)^2$，我們把後者稱為空間畢氏定理。

(2) 證明：令直角三角錐 $O-ABC$，如圖 (四)，$O(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$，$\overrightarrow{AB}=(-a,b,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,0,c)$



圖（四）

則 $(a?\ ABC)^2=\dfrac{1}{4}\left[\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2\right]=\dfrac{1}{4}\left[(a^2+b^2)(a^2+c^2)-(a^2)^2\right]$

$$=\frac{1}{4}a^2b^2+\frac{1}{4}b^2c^2+\frac{1}{4}c^2a^2$$

$$=(a\Delta OAB)^2+(a\Delta OBC)^2+(a\Delta OCA)^2$$

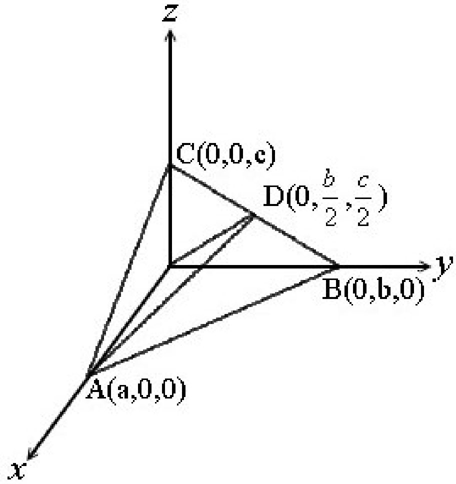
故成立

定義 6**：三角錐** $O-ABC$ **，** $\overline{BC}$ **中點** D **，則** ΔOAD **平分三角錐** $O-ABC$ **之體積，即** $V(OABD)=V(OACD)$ **（**$V(OABD)$**指三角錐** $O-ABD$ **之體積），稱** ΔOAD **為此三角錐之「中面」（中面之稱呼由來是因其類比於三角形之中線，在一般三角形會再提）。**

定義 7：直角三角錐 $O-ABC$ **（**$\angle O-ABC$ **是直角頂），由猜想** 9 **可得** ΔOAB**、**ΔOBC **、** ΔOCA **此三面類比於直角三角形之兩股，稱之為「股面」；而** ΔABC **則類比於直角三角形之斜邊，稱之為「斜面」。**

猜想 10：直角三角形斜邊中線長平方的四倍恰為兩股平方和，類推出直角三角錐過直角頂的任意中面面積平方的四倍恰為三個股面中兩個股面面積平方和。

證明：令直角三角錐 $O-ABC$ **，如圖（五），** $O(0,0,0)$ **，** $A(a,0,0)$ **，** $B(0,b,0)$ **，** $C(0,0,c)$**，**$\overline{BC}$ **中點** $D(0,\dfrac{b}{2},\dfrac{c}{2})$**，**$\Delta OAD$ **為其中面** $\overrightarrow{OA}=(a,0,0)$**，**$\overrightarrow{OD}=(0,\dfrac{b}{2},\dfrac{c}{2})$



圖（五）

則 $(a\Delta OAD)^2=\dfrac{1}{4}\left[\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OD}\right|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD})^2\right]$

$$=\frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(a\Delta OAB)^2+\frac{1}{4}(a\Delta OAC)^2$$

即 $4(a\Delta OAD)^2=(a\Delta OAB)^2+(a\Delta OAC)^2$

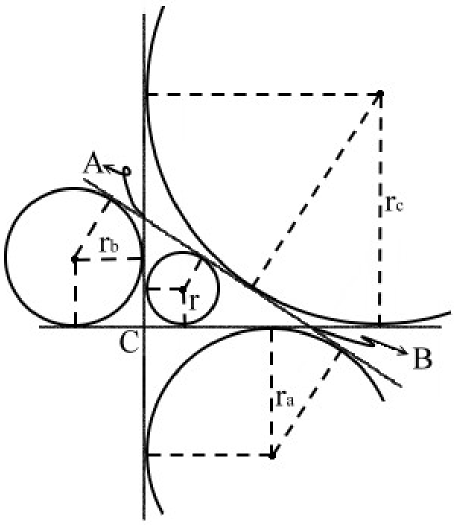
故成立

※此稱為直角三角錐斜面中面定理。因此猜想 10 亦可說是直角三角形斜邊中線定理類推出直角三角錐斜面中面定理。

猜想 11：直角三角形內切圓與傍切圓半徑可由三邊邊長表示，類推出直角三角錐內切球與傍切球半徑可由四面面積表示。

說明：(1) **直角三角形** ABC **，如圖（六），內切圓半徑** r **，切** $\overline{BC}$ **、** $\overline{CA}$ **、** $\overline{AB}$ **的傍切圓（與三角形其中一邊和另兩邊之延伸線相切的圓）半徑分別為** r_a,r_b,r_c **，則** $r=\frac{a+b-c}{2}$ **，** $r_a=\frac{a+c-b}{2}$ **，** $r_b=\frac{b+c-a}{2}$ **，** $r_c=\frac{a+b+c}{2}$

（a **，**b **，**c **表** A **，**B **，**C **對邊邊長）**



圖（六）

易證成立

(2) 直角三角錐 $O-DEF$ **，內切球半徑** R **，切** ΔOEF **、** ΔOFD **、** ΔODE **、** ΔDEF **的傍切球（與三角錐其中一面和另三面之延伸面相切的球）半徑分別為**

R_d **，**R_e **，**R_f **，**R_o **，則** $R=\frac{A_d+A_e+A_f-A_o}{d+e+f}$ **，** $R_d=\frac{A_d+A_o-A_e-A_f}{e+f-d}$ **，**

$R_e=\frac{A_e+A_o-A_f-A_d}{f+d-e}$ **，** $R_f=\frac{A_f+A_o-A_d-A_e}{d+e-f}$ **，** $R_o=\frac{A_d+A_e+A_f+A_o}{d+e+f}$

（d **，**e **，**f **表** $\overline{OD}$ **，**$\overline{OE}$ **，**$\overline{OF}$ **之邊長，** A_d **，**A_e **，**A_f **，**A_o **表** D **，**E **，**F **，**O **對面面積）；證明如下：**

令 $O(0,0,0)$ **，** $D(d,0,0)$ **，** $E(0,e,0)$ **，** $F(0,0,f)$ **，內切球球心** Q **，切** ΔOEF **、**

ΔOFD、ΔODE、ΔDEF **的傍切球球心分別為** Q_d，Q_e，Q_f，Q_o

平面 ODE ：$z=0$，**平面** OEF ：$x=0$，**平面** OFD ：$y=0$
平面 DEF ：$dex+efy+fdz-def=0$

令 $Q(R,R,R)$，$Q_d(-R_d,R_d,R_d)$，$Q_e(R_e,-R_e,R_e)$，$Q_f(R_f,R_f,-R_f)$，

$Q_o(R_o,R_o,R_o)$

由 $\dfrac{|efR+fdR+deR-def|}{\sqrt{d^2e^2+e^2f^2+f^2d^2}}=|R|$ **平方化簡**

$2def(d+e+f)R^2-2def(de+ef+fd)R+d^2e^2f^2=0$ **同除** def $(def\neq 0)$
得 $2(d+e+f)R^2-2(de+ef+fd)R+def=0$

$$R=\frac{(\frac{de}{2}+\frac{ef}{2}+\frac{fd}{2})\pm\sqrt{\frac{1}{4}(d^2e^2+e^2f^2+f^2d^2)}}{d+e+f}=\frac{A_d+A_e+A_f\pm A_o}{d+e+f}$$ **(取負)**

因 R_o **之列式與** R **相同，故取正即為** R_o **之解，** $R_o=\dfrac{A_d+A_e+A_f+A_o}{d+e+f}$

同理可求得 $R_d=\dfrac{A_d+A_o-A_e-A_f}{e+f-d}$，$R_e=\dfrac{A_e+A_o-A_f-A_d}{f+d-e}$，

$R_f=\dfrac{A_f+A_o-A_d-A_e}{d+e-f}$

故成立

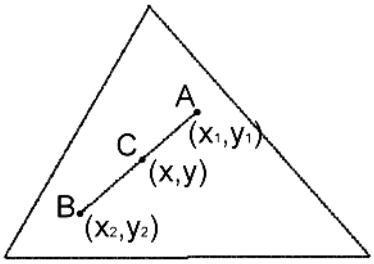
(四) 三角形類比三角錐

定義 8**：設** S **為點集合，若滿足** $A\in S$，$B\in S\Rightarrow\overline{AB}\in S$，**則** S **為凸集合 (*convex set*)。**

猜想 12**：三角形區域是凸集合類推出三角錐區域是凸集合。**

證明 (1**)：令三角形** $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1\geq 0\\ a_2x+b_2y+c_2\geq 0\\ a_3x+b_3y+c_3\geq 0\end{cases}$，**如圖(七)，內有兩點**

$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，$C(x,y)$ **在** $\overline{AB}$ **上，** $\overline{AC}:\overline{CB}=r:1$



圖(七)

則 $x=\dfrac{x_1+rx_2}{1+r}$，$y=\dfrac{y_1+ry_2}{1+r}$

$\because\begin{cases}a_1x_1+b_1y_1+c_1\geq 0\\ a_1x_2+b_1y_2+c_1\geq 0\end{cases}$

$\therefore a_1x+b_1y+c_1=a_1\dfrac{x_1+rx_2}{1+r}+b_1\dfrac{y_1+ry_2}{1+r}+c_1$

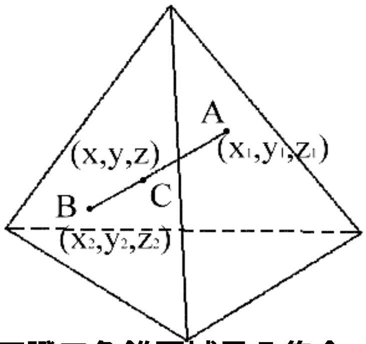
$$=\frac{1}{1+r}(a_1x_1+b_1y_1+c_1)+\frac{r}{1+r}(a_1x_2+b_1y_2+c_1)\ge 0$$

同理可證 $a_2x+b_2y+c_2\ge 0$ **，** $a_3x+b_3y+c_3\ge 0$

$\Rightarrow C$ **在三角形內部**

$\Rightarrow$ **三角形區域是凸集合**

證明（2）：拉高一度，如圖（八）



圖（八）

同理可證三角錐區域是凸集合。

故成立

猜想 13：三角形重心面積定理類推出三角錐重心體積定理。

說明（1）：三角形 ABC **重心** G**，即** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ **則**

$a\Delta GAB=a\Delta GBC=a\Delta GCA$ **，稱之為三角形重心面積定理。**

證明： $\because \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GB}$ **，** $\left|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}\right|^2=\left|\overrightarrow{GB}\right|^2$

$$\therefore \overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GC}=\frac{\left|\overrightarrow{GB}\right|^2-\left|\overrightarrow{GA}\right|^2-\left|\overrightarrow{GC}\right|^2}{2}$$

$$\Rightarrow a\Delta GCA=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{GA}\right|^2\left|\overrightarrow{GC}\right|^2-\left(\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GC}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{GA}\right|^2\left|\overrightarrow{GC}\right|^2-\left(\frac{\left|\overrightarrow{GB}\right|^2-\left|\overrightarrow{GC}\right|^2-\left|\overrightarrow{GA}\right|^2}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left|\overrightarrow{GA}\right|^4+\left|\overrightarrow{GB}\right|^4+\left|\overrightarrow{GC}\right|^4+2\left|\overrightarrow{GA}\right|^2\left|\overrightarrow{GB}\right|^2+2\left|\overrightarrow{GB}\right|^2\left|\overrightarrow{GC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{GC}\right|^2\left|\overrightarrow{GA}\right|^2}$$

同理可證 $a?\ GAB$ **、** $a\Delta GBC$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left|\overrightarrow{GA}\right|^4+\left|\overrightarrow{GB}\right|^4+\left|\overrightarrow{GC}\right|^4+2\left|\overrightarrow{GA}\right|^2\left|\overrightarrow{GB}\right|^2+2\left|\overrightarrow{GB}\right|^2\left|\overrightarrow{GC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{GC}\right|^2\left|\overrightarrow{GA}\right|^2}$$

故 $a\Delta GAB=a\Delta GBC=a\Delta GCA$

說明（2）：三角錐 $O-ABC$ **重心** G**，即** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GO}=\vec{0}$ **，則**

$V(GABC)=V(GOAB)=V(GOBC)=V(GOCA)$**，稱之為三角錐重心體積定理。**

證明：令 $A(a_1,a_2,a_3),B(b_1,b_2,b_3),C(c_1,c_2,c_3),O(0,0,0)$

$$V(GABC)=\begin{Vmatrix} \frac{a_1+b_1+c_1}{4} & \frac{a_2+b_2+c_2}{4} & \frac{a_3+b_3+c_3}{4} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$=\begin{Vmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \frac{1}{4} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \frac{1}{4} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \frac{1}{4} \end{Vmatrix}$$

$$=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \frac{1}{4} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \frac{1}{4} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \frac{1}{4} \end{Vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}$$

$$V(OGAB)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a_1+b_1+c_1}{4} & \frac{a_2+b_2+c_2}{4} & \frac{a_3+b_3+c_3}{4} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}$$

同理可證$V(GOBC)=V(GOCA)=\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}$

故$V(GABC)=V(GOAB)=V(GOBC)=V(GOCA)$

故成立

猜想 14**：三角形重心面積推廣定理類推出三角錐重心體積推廣定理。**

說明（1**）：**ΔABC**，若**$\ell\overrightarrow{GA}+m\overrightarrow{GB}+n\overrightarrow{GC}=0$ **（**$\ell,m,n>0$**）則**

$\frac{a\triangle GBC}{\ell}=\frac{a\triangle GCA}{m}=\frac{a\triangle GAB}{n}$**稱之為三角形重心面積推廣定理。**

易證成立

說明（2**）：三角錐**$O-ABC$**，若**$\ell\overrightarrow{GA}+m\overrightarrow{GB}+n\overrightarrow{GC}+q\overrightarrow{GO}=\vec{0}$ **（**$\ell,m,n,q>$ 0**）則**$\frac{V(GOBC)}{\ell}=\frac{V(GOCA)}{m}=\frac{V(GOAB)}{n}=\frac{V(GABC)}{q}$**，稱之為三角錐重心體積推廣定理。**

證明：令$O(0,0,0)$**，**$A(a_1,a_2,a_3)$**，**$B(b_1,b_2,b_3)$**，**$C(c_1,c_2,c_3)$

$\because \ell\overrightarrow{GA}+m\overrightarrow{GB}+n\overrightarrow{GC}+q\overrightarrow{GO}=\vec{0}$

$$\therefore G\left(\frac{\ell a_1+mb_1+nc_1}{\ell+m+n+q},\frac{\ell a_2+mb_2+nc_2}{\ell+m+n+q},\frac{\ell a_3+mb_3+nc_3}{\ell+m+n+q}\right)$$

$$V(GOAB)=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}0&0&0&1\\a_1&a_2&a_3&1\\b_1&b_2&b_3&1\\\frac{\ell a_1+mb_1+nc_1}{\ell+m+n+q}&\frac{\ell a_2+mb_2+nc_2}{\ell+m+n+q}&\frac{\ell a_3+mb_3+nc_3}{\ell+m+n+q}&1\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{6(\ell+m+n+q)}\left\|\begin{matrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\\ell a_1+mb_1+nc_1&\ell a_2+mb_2+nc_2&\ell a_3+mb_3+nc_3\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{6(\ell+m+n+q)}\left\|\begin{matrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\nc_1&nc_2&nc_3\end{matrix}\right\|=\frac{n}{6(\ell+m+n+q)}V(OABC)$$

其他同理可證 $\frac{V(GOBC)}{\ell}=\frac{V(GOCA)}{m}=\frac{V(GOAB)}{n}=\frac{V(GABC)}{q}$

$$=\frac{1}{6(\ell+m+n+q)}V(OABC)$$

故成立

猜想 15：三角形行列式面積公式類推出三角錐行列式體積公式。

說明（1）：ΔABC，$A(a_1,a_2)$，$B(b_1,b_2)$，$C(c_1,c_2)$**則**

$$a\Delta ABC=\frac{1}{2!}\left\|\begin{matrix}a_1&a_2&1\\b_1&b_2&1\\c_1&c_2&1\end{matrix}\right\|$$ **稱之為三角形行列式面積公式。**

易證成立

說明（2）：三角錐 $A-BCD$，$A(a_1,a_2,a_3)$ $B(b_1,b_2,b_3)$ $C(c_1,c_2,c_3)$

$D(d_1,d_2,d_3)$，**則** $V(ABCD)=\frac{1}{3!}\left\|\begin{matrix}a_1&a_2&a_3&1\\b_1&b_2&b_3&1\\c_1&c_2&c_3&1\\d_1&d_2&d_3&1\end{matrix}\right\|$ **稱之為三角錐行列式體積公式**

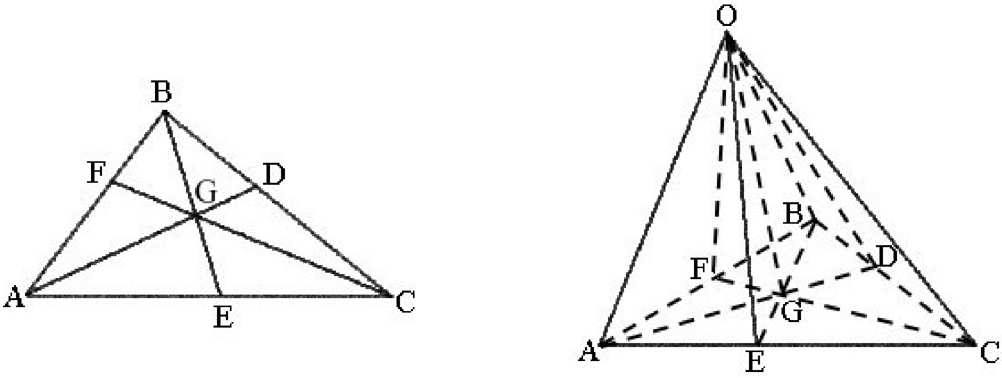
證明： $$\frac{1}{3!}\left\|\begin{matrix}a_1&a_2&a_3&1\\b_1&b_2&b_3&1\\c_1&c_2&c_3&1\\d_1&d_2&d_3&1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{3!}\left\|\begin{matrix}a_1&a_2&a_3&1\\b_1-a_1&b_2-a_2&b_3-a_3&0\\c_1-a_1&c_2-a_2&c_3-a_3&0\\d_1-a_1&d_2-a_2&d_3-a_3&0\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{3!}\left\|\begin{matrix}b_1-a_1&b_2-a_2&b_3-a_3\\c_1-a_1&c_2-a_2&c_3-a_3\\d_1-a_1&d_2-a_2&d_3-a_3\end{matrix}\right\|=V(ABCD)$$

故成立

猜想 16：三角形三中線共點類推出三角錐三中面共線。

易證成立，如圖（九）



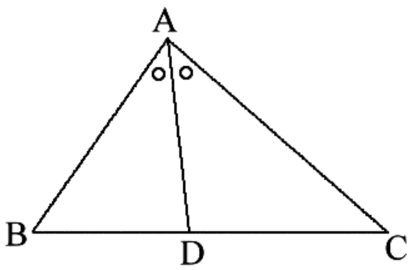
G 為? ABC 重心，三中面共線 $\overleftrightarrow{OG}$

圖（九）

猜想 17：三角形之內分比定理類推出三角錐底邊之內分比定理。

說明：如圖（十），? ABC 中，$\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 之分角線，則 $\frac{a\Delta ABD}{a\Delta ACD}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

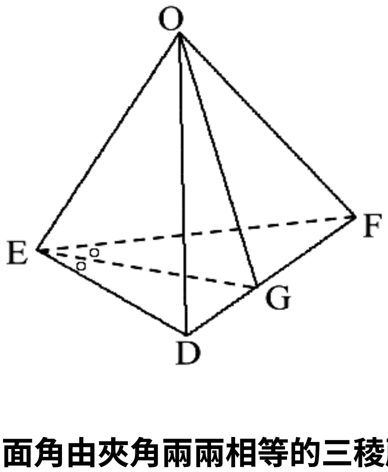
此乃眾皆知之三角形內分比定理



圖（十）

如圖（十一），三角錐 $O-DEF$ 中，$\overline{EG}$ 為 $\angle DEF$ 分角線，

則 $\frac{V(ODGE)}{V(OFGE)}=\frac{a\Delta DGE}{a\Delta FGE}=\frac{\overline{DG}}{\overline{FG}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{FE}}$ **稱之為三角錐底邊之內分比定理**



圖（十一）

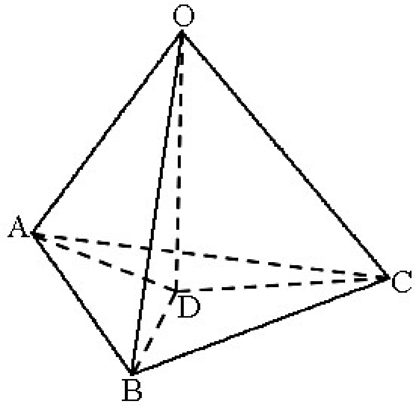
故成立

定義 9：其中一立體多面角由夾角兩兩相等的三稜所構成的三角錐稱之為等面角三角錐，而此立體多面角稱之為等面角。

猜想 18：三角形之內分比定理類推出等面角三角錐三稜之內分比定理。

（1）說明：令等面角三角錐 $O-ABC$，其中 $\angle O-ABC$ 為等面角，即

$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$，$\overline{OD}$ 為 $\angle O-ABC$ **的分角線，如圖（十二）**



圖（十二）

則$\frac{a\Delta ODA}{\overline{OA}}=\frac{a\Delta ODB}{\overline{OB}}=\frac{a\Delta ODC}{\overline{OC}}$，稱之為等面角三角錐三稜之內分比定理。

（2）證明：ㄅ.由前面（定義四）對分角線的定義知$\overline{OD}$滿足

$$\angle AOB+\angle AOD+\angle BOD=\angle BOC+\angle BOD+\angle COD$$
$$=\angle COA+\angle COD+\angle AOD$$
$$\because \angle AOB=\angle BOC=\angle COA$$
$$\therefore \begin{cases}\angle AOD+\angle BOD=\angle BOD+\angle COD\\ \angle BOD+\angle COD=\angle COD+\angle AOD\\ \angle COD+\angle AOD=\angle AOD+\angle BOD\end{cases}$$
$$\Rightarrow \angle AOD=\angle BOD=\angle COD$$

反之亦成立

故等面角三角錐中，$\overline{OD}$使$\angle AOD=\angle BOD=\angle COD\Leftrightarrow\overline{OD}$為其分角線

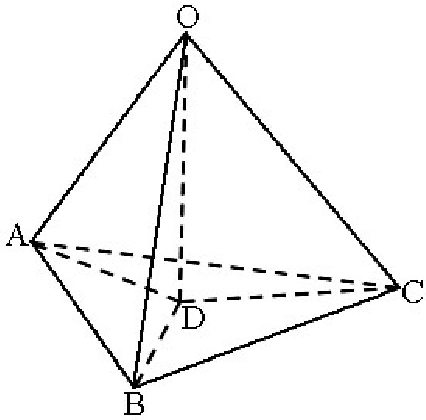
ㄆ.則$\frac{a\Delta ODA}{\overline{OA}}=\frac{1}{2}\overline{OD}\sin\angle AOD$

$$\frac{a\Delta ODB}{\overline{OB}}=\frac{1}{2}\overline{OD}\sin\angle BOD$$
$$\frac{a\Delta ODC}{\overline{OC}}=\frac{1}{2}\overline{OD}\sin\angle COD$$
$$\Rightarrow\frac{a\Delta ODA}{\overline{OA}}=\frac{a\Delta ODB}{\overline{OB}}=\frac{a\Delta ODC}{\overline{OC}}$$

故成立

猜想 19、三角形之內分比定理類推出等面角三角錐之內分比定理

（1）說明：令等面角三角錐$O-ABC$，其中$\angle O-ABC$為等面角，即$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$，$\overline{OD}$為$\angle O-ABC$的分角線，如圖（十三）



圖（十三）

則$\dfrac{a?\ OAB}{a?\ DAB}=\dfrac{a?\ OBC}{a?\ DBC}=\dfrac{a?\ OCA}{a?\ DCA}$，稱之為等面角三角錐之內分比定理。

(2) 證明：ㄅ.令$O(0,0,0)$，而$A(\sqrt{3}ar,-ar,r)$，$B(0,2as,s)$，$C(-\sqrt{3}at,-at,t)$

（r,s,t,a>0）分別在直線L,M,N上，其中

$$\begin{cases} L:\dfrac{x}{\sqrt{3}a}=\dfrac{y}{-a}=\dfrac{z}{1} \\ M:\dfrac{y}{2a}=\dfrac{z}{1},x=0 \\ N:\dfrac{x}{-\sqrt{3}a}=\dfrac{y}{-a}=\dfrac{z}{1} \end{cases}$$ 直線L,M,N分別有方向向量

$\vec{\ell}(\sqrt{3}a,-a,1),\vec{m}(0,2a,1)$,$\vec{n}(-\sqrt{3}a,-a,1)$，且皆過$O(0,0,0)$，令$\vec{\ell}$ 與

$\vec{m}$，$\vec{m}$與$\vec{n}$，$\vec{n}$與$\vec{\ell}$的夾角分別為q_1,q_2,q_3 （$0<q_1,q_2,q_3<p$）

$\because \cos q_1=\cos q_2=\cos q_3=\dfrac{-2a^2+1}{4a^2+1}$

$\therefore q_1=q_2=q_3$（cos在0　p之間為一對一）

令$\cos q=\dfrac{-2a^2+1}{4a^2+1}$（$0<q<p$），$a=\sqrt{\dfrac{1-\cos q}{4\cos q+2}}$

$\Rightarrow q$ 需滿足$-\dfrac{1}{2}<\cos q<1$ 即 $0<q<\dfrac{2}{3}p$ 時a才有解

但由n角錐立體多面角和定理（參照猜想 22 之推廣 II）知欲組成立體多面角，必$q_1+q_2+q_3<2p$ ，又$q_1=q_2=q_3$，則

$q_1,q_2,q_3<\dfrac{2}{3}p$ 故任一等面角三角錐皆可如是表示之

ㄆ.令直線$P:x=0,y=0$（即z軸），有方向向量 $\vec{p}=(0,0,1)$ $\vec{p}$與

$\vec{\ell}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$夾角分別為f_1，f_2，f_3（$0<f_1,f_2,f_3<p$）

$\because \cos f_1 = \cos f_2 = \cos f_3 = \dfrac{1}{\sqrt{4a^2+1}}$

$\therefore f_1 = f_2 = f_3$ **（**$\cos$**在**$0 \quad p$**之間為一對一），**P **與** L,M,N **之夾角相等由猜想 18 之證明ㄅ.知** P **為** $\angle O-ABC$**之分角線 令** D **為** P **與平面** ABC **的交點**

平面 ABC **：** $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \sqrt{3}ar & -ar & r & 1 \\ 0 & 2as & s & 1 \\ -\sqrt{3}at & -at & t & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$ax \cdot \begin{vmatrix} 0 & r & 1 \\ 3s & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} -\sqrt{3}a & 0 & 1 \\ 0 & s & 1 \\ \sqrt{3}a & 2t & 1 \end{vmatrix} + az \begin{vmatrix} \sqrt{3}ar & 0 & 1 \\ 0 & 2s & 1 \\ -\sqrt{3}at & -2t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= arst \begin{vmatrix} \sqrt{3}a & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$3as(r-t)x + \sqrt{3}a(2tr-rs-st)y + 2\sqrt{3}a^2(rs+st+tr)z = 6\sqrt{3}a^2 rst$$

$x=0, y=0$**代入，解得** $D(0,0,\dfrac{3rst}{rs+st+tr})$

ㄇ.$\because$ $a?\ OAB : a?\ OBC : a?\ OCA$

$= \sqrt{3}ars\sqrt{a^2+1} : \sqrt{3}ast\sqrt{a^2+1} : \sqrt{3}atr\sqrt{a^2+1}$

$a?\ DAB : a?\ DBC : a?\ DCA$

$= \sqrt{3}ars\sqrt{a^2+1-3\dfrac{rst(r+s+t)}{(rs+st+tr)^2}} : \sqrt{3}ast\sqrt{a^2+1-3\dfrac{rst(r+s+t)}{(rs+st+tr)^2}}$

$: \sqrt{3}atr\sqrt{a^2+1-3\dfrac{rst(r+s+t)}{(rs+st+tr)^2}}$

$\therefore a?\ OAB : a?\ OBC : a?\ OCA = a?\ DAB : a?\ DBC : a?\ DCA$

$= rs : st : tr$

故成立

猜想 20**：** ΔABC **（**$\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$**），邊** $\overline{BC}$ **上的高** h_a **滿足**

(1) $\dfrac{1}{2}a \cdot h_a = a\Delta ABC$

(2) $h_a = f(a,b,c) = \dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$**，** $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

類推出三角錐$O-A'B'C'$ $(\overline{OA}=a',\overline{OB}=b',\overline{OC}=c',\overline{AB}=\ell',\overline{BC}=m'$

$,\overline{CA}=n')$**，底面**$A'B'C'$**之高**H_0**滿足**

（1）$\frac{1}{3}a?\ A'B'C'\cdot H_0=V(OA'B'C')$

（2）$H_0=f(a',b',c',\ell',m',n')=\dfrac{3F(a',b',c',\ell',m',n')}{\sqrt{t(t-a')(t-b')(t-c')}}$**，**$t=\dfrac{a'+b'+c'}{2}$

※$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$、$\sqrt{t(t-a')(t-b')(t-c')}$**為海龍公式。**

※$F(a',b',c',\ell',m',n')$**為將提出之海虎公式。**

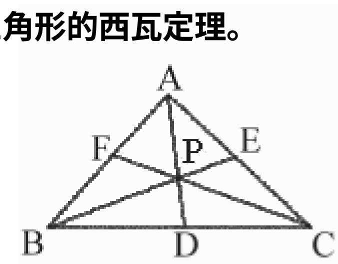
猜想 21**：（1）三角形的西瓦定理類推出三角錐的平面西瓦定理。**

（2）三角形的西瓦定理類推出三角錐的立體西瓦定理。

說明：如圖（十四），ΔABC**三邊之內分點為**D、E、F**，且**$\overline{AD}$、

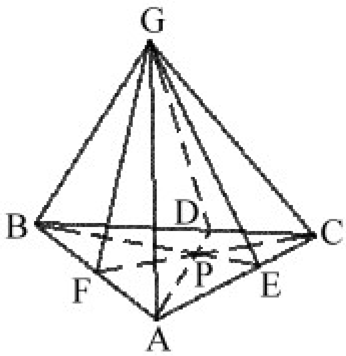
$\overline{BE}$、$\overline{CF}$**三線段共點於**P**，則**$\overline{AE}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{BF}=\overline{EC}\cdot\overline{DB}\cdot\overline{FA}$**稱**

為三角形的西瓦定理。



圖（十四）

上圖擺進空間再找一點G**，如圖（十五）**



圖（十五）

$\because \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{a\Delta GAE}{a\Delta GCE}$**其他同理**

$\therefore a\Delta GAE\cdot a\Delta GCD\cdot a\Delta GBF=a\Delta GEC\cdot a\Delta GDB\cdot a\Delta GFA$

我們稱之為「平面西瓦定理」。

$\because \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{a?\ AEB}{a?\ ECB}=\dfrac{V(GAEB)}{V(GECB)}$

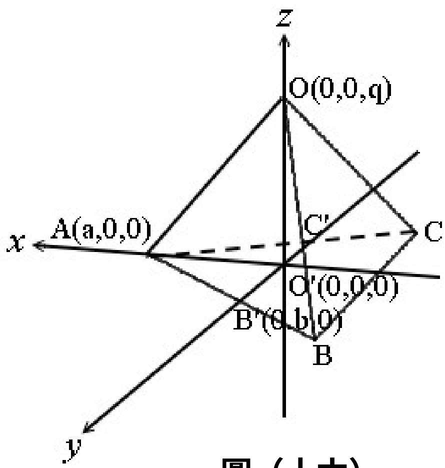
$\therefore V(GAEB)\cdot V(GCDA)\cdot V(GBFC)=V(GECB)\cdot V(GDBA)\cdot V(GFAC)$

我們稱之為「立體西瓦定理」。

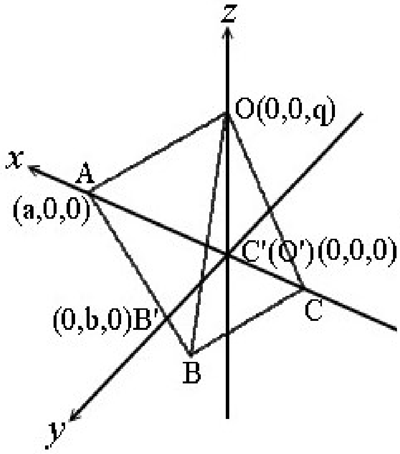
故成立

猜想 22：三角形兩邊和大於第三邊類推出三角錐立體多面角之三個平面角其中任兩角和大於第三角，我們特稱之為三角錐立體多面角定理。

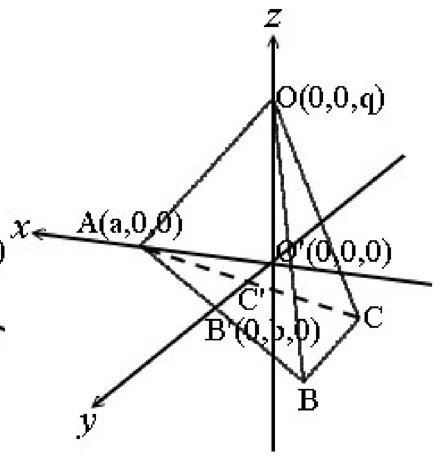
證明(1)：任一立體多面角 $\angle A-OBC$**，現設法將其放置到立體座標上，**O **在平面** ABC **的投影點** O'**，連** $\overline{O'A}$**，過** O' **作交** $\overleftrightarrow{AB}$**、**$\overleftrightarrow{AC}$ **於** B'**、**C'**，則** $\overleftrightarrow{O'A'}$**、**$\overleftrightarrow{O'B'}$**、**$\overleftrightarrow{O'O}$ **為兩兩垂直之線。令** $O'(0,0,0)$**，**$\overleftrightarrow{O'A}$**、**$\overleftrightarrow{O'?}$**、**$\overleftrightarrow{O'O}$ **分別為** x **軸、**y **軸、**z **軸正向，**$A(a,0,0)$**，**$B(0,b,0)$**，**$O(0,0,q)$**，如圖（十六)、（十七)、（十八）**



圖（十六）



圖（十七）



圖（十八）

則 $\angle B'AO$ **、**$\angle C'AO$ **在** xy **平面的投影分別為** $\angle B'AO'$**、**$\angle C'AO'$

$$\cos\angle B'AO = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB'}}{\left|\overrightarrow{AO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB'}\right|} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+q^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\angle B'AO' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{a\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\because \sqrt{a^2+q^2} > a \qquad \therefore \cos\angle B'AO < \cos\angle B'AO'$$

$\Rightarrow \angle B'AO > \angle B'AO'$**，同理可證** $\angle C'AO > \angle C'AO'$

ㄅ.若 B'**、**C' **分別在** y **軸兩側，如圖（十六)，**

則 $\angle B'AO + \angle C'AO > \angle B'AO' + \angle C'AO' = \angle B'AC'$

ㄆ.若 B'**、**C' **其中一點在** y **軸上（即與** O' **重合)，如圖（十七)，**

則 $\angle B'AO + \angle C'AO > \angle B'AO'($**或**$\angle C'AO') = \angle B'AC'$

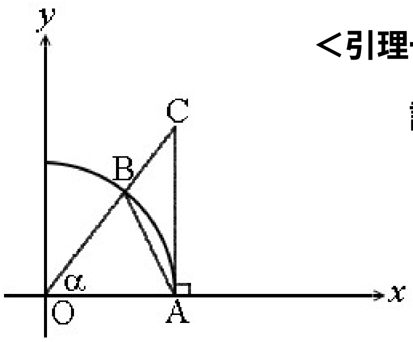
ㄇ.若 B'**、**C' **在** y **軸同側，如圖（十八)，**

則 $\angle B'AO + \angle C'AO > \angle B'AO' + \angle C'AO' > \angle B'AC'$

證明(2)：我們從南一書局數學教科書第三冊教師手冊中查到球面上兩點的最短距離的相關資料，抄錄如下：

球面上，通過 A、B 兩點的許多路徑中，以球面距離為最短。

通過球面上兩點 A、B 的大圓（即平面 OAB 的截面圓，O 為球心）在 A、B 間的一段劣弧弧長叫做 A、B 的球面距離，我們將證明：



圖（十九）

<引理一>：設 $0 < a < \frac{p}{2}$ **，則** $\sin a < a < \tan a$

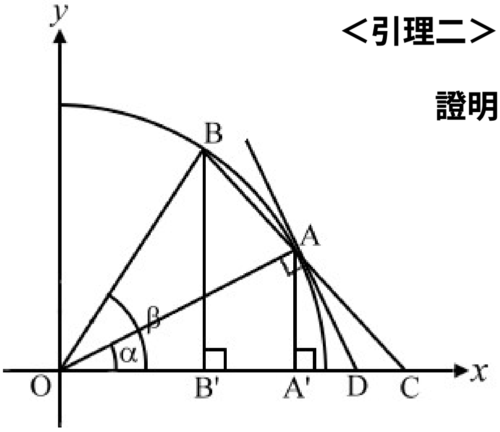
證明：如圖（十九）， $A = (1,0)$**。** B **點在單位圓上且** $\angle AOB = a$ **，**

C **點是過** A **點的切線與** $\overleftrightarrow{OB}$ **的交點**

$\because a\Delta OAB < a$ **扇形** $OAB < a\Delta OAC$

$\therefore \frac{1}{2}\sin a < \frac{1}{2}a < \frac{1}{2}\tan a$ **（半徑** $\overline{OA} = 1$**）**

$\Rightarrow \sin a < a < \tan a$



圖（二十）

<引理二>：若 $0 < a < b < \frac{p}{2}$ **，則** $\frac{\sin b}{b} < \frac{\sin a}{a}$

證明：如圖（二十）， A、B **為單位圓上兩點，** $\angle XOA = a$ **，**

$\angle XOB = b$ **，** $\overleftrightarrow{AB}$ **與** x **軸交於** C **點，過** A **點切線與** x **軸交於** D **點，** A'、B' **分別是** A、B **在** x **軸上的正射影**

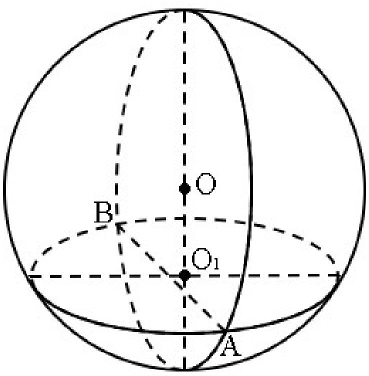
$\because \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = 1 + \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$

又 $\overline{BA} <$ **弧** $BA = b - a$ **，** $\overline{AC} >$ **弧** $AE = .\alpha$

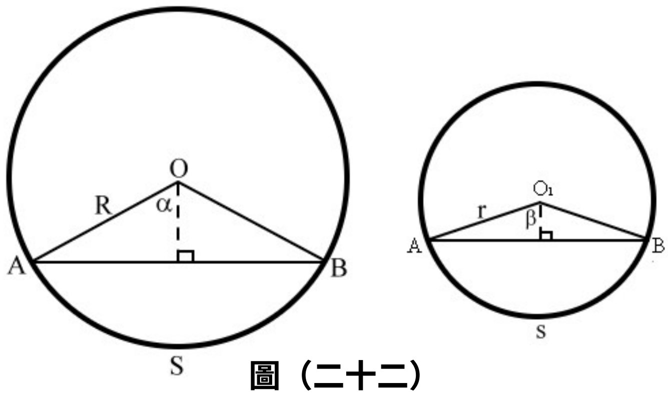
$\therefore \frac{\sin b}{\sin a} = 1 + \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} < 1 + \frac{\text{弧}BA}{\overline{AC}} < 1 + \frac{b-a}{a} = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow \frac{\sin b}{\sin a} < \frac{b}{a}$ **即** $\frac{\sin b}{b} = \frac{\sin a}{a}$

如圖（二十一），過球面上兩點 A、B **之大圓⊙** O **的劣弧長記作** S **，過** A、B **之小圓⊙** O_1 **的劣弧長記作** S_1**，令** $R = \overline{OA} = \overline{OB}$ **（球的半徑，亦為大圓的半徑），** $r = \overline{O_1A} = \overline{O_1B}$ **（小圓的半徑** $r < R$**），** $\angle AOB = 2a$ **，** $\angle AO_1B = 2b$



圖（二十一）



圖（二十二）

由圖（二十二）得 $R\sin a = \frac{1}{2}\overline{AB} = r\sin b$ ，

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{R}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \boxed{1.}$$

由 $R > r$ 、$\boxed{1.}$得 $\sin b > \sin a$ ， $0 < a < b < \frac{p}{2}$ （弧 AB 為劣弧）

又由＜引理二＞知 $\frac{\sin b}{\sin a} < \frac{b}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \boxed{2.}$

由 $\boxed{1.}$、$\boxed{2.}$得 $\frac{R}{r} < \frac{b}{a}$ ， $R \cdot 2a < b \cdot 2r \Rightarrow S < S_1$

有了以上工具，我們現於單位球 O 球面上任取三相異點 A、B、C（A、B、C 不在同一大圓上），則形成立體多面角 $\angle O - ABC$

$\because$ A、B 間距離以弧 AB 為最短

$\therefore$ 弧 BC+弧 CA >弧 AB，得 $\angle BOC + \angle COA > \angle AOB$

同理可證 $\angle AOB + \angle BOC > \angle COA$ ， $\angle COA + \angle AOB > \angle BOC$ 即任兩角和大於第三角

故成立

※Ⅰ.由三角錐立體多面角定理推廣出 n 角錐立體多面角定理

（1）說明：n 角錐 $O - A_1 \cdots A_n$ ，設 $Max(\angle A_i OA_{i+1}, 1 \le i \le n-1; \angle A_n OA_1) = \angle A_n OA_1$ ，

則 $\sum_{i=1}^{n-1} \angle A_i OA_1 > \angle A_n OA_1$ ，此稱為 n 角錐立體多面角定理。

（2）證明：$\boxed{1.}$ $n = 3$ 於猜想（二十二）中已證成立

$\boxed{2.}$設 $n = k$ 時定理成立

設 k+1 角錐 $O - A_1 \cdots A_{k+1}$ ， $Max(\angle A_i OA_{i+1}, 1 \le i \le k; \angle A_{k+1} OA_1) = \angle A_{k+1} OA_1$

在 k 角錐 $O - A_1 \cdots A_k$ 中，已知 $\sum_{i=1}^{k-1} \angle A_i OA_{i+1} > \angle A_k OA_1$

又在三角錐 $O - A_1 A_k A_{k+1}$ 中， $\angle A_k OA_1 + \angle A_k OA_{k+1} > \angle A_{k+1} OA_1$

由上兩式知 $\sum_{i=1}^{k} \angle A_i OA_{i+1} > \angle A_{k+1} OA_1$

$\Rightarrow n = k+1$ 時定理亦成立

$\Rightarrow \forall n \in N, n \ge 3, n$角錐立體多面角定理成立

※Ⅱ.由三角錐立體多面角定理又推廣出 n 角錐立體多面角和定理

（1）說明：n 角錐 $O - A_1 \cdots A_n$中，$\angle O - A_1 \cdots A_n$之$n$個平面角和不超過$2p$ ，即

$$\sum_{i=1}^{n-1} \angle A_i OA_{i+1} + \angle A_n OA_1 < 2p$$

（2）證明：設 n 角錐 $O - A_1 \cdots A_n$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\angle A_i OA_{i+1} + \angle OA_i A_{i+1} + \angle OA_{i+1} A_i) + \angle A_n OA_1 + \angle OA_n A_1 + \angle OA_1 A_n = np \cdot\cdot \boxed{1.}$$

由三角錐立體多面角定理 $\angle OA_1 A_2 + \angle OA_1 A_n > \angle A_n A_1 A_2$ ， $\angle OA_2 A_3 + \angle OA_2 A_1 > \angle A_1 A_2 A_3 \cdots \angle OA_n A_1 + \angle OA_n A_{n+1} > \angle A_{n-1} A_n A_1$ ，相加得

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\angle OA_iA_{i+1}+\angle OA_{i+1}A_i)+\angle OA_nA_1+\angle OA_1A_n>\sum_{i=1}^{n-2}\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}+\angle A_{n-1}A_nA_1$$

$$+\angle A_nA_1A_2=(n-2)p \cdots\cdots \boxed{2.}$$

$\boxed{2.}$左右加 $\sum_{i=1}^{n-1}\angle A_iOA_{i+1}+\angle A_nOA_1$

得 $\sum_{i=1}^{n-1}(\angle A_iOA_{i+1}+\angle OA_iA_{i+1}+\angle OA_{i+1}A_i)+\angle A_nOA_1+\angle OA_nA_1+\angle OA_1A_n>$

$\sum_{i=1}^{n-1}\angle A_iOA_{i+1}+\angle A_nOA_1+2p$

由 $\boxed{1.}$將上式左半代換為 np **，得** $np>\sum_{i=1}^{n-1}\angle A_iOA_{i+1}+\angle A_nOA_1+2p$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n-1}\angle A_iOA_{i+1}+\angle A_nOA_1<2p$

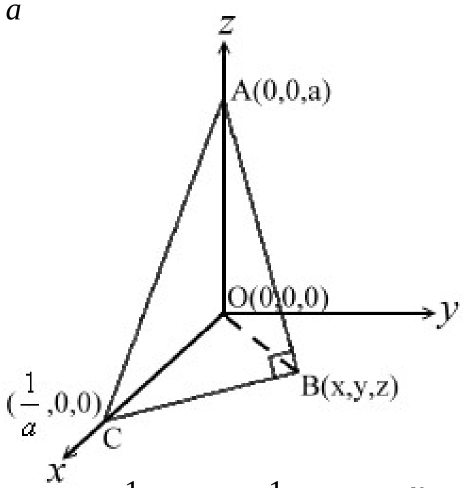
故成立

猜想 23**：三角形的面積可用三邊長表示，一般稱之為海龍公式，也就是** $a\Delta ABC$ $=f(a,b,c)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ **，** $s=\dfrac{a+b+c}{2}$**。類推出三角錐的體積可以用四面面積表示，也就是**$V(OABC)=H(a\Delta OAB,a\Delta OBC,a\Delta OCA,a\Delta ABC)$**，此稱之為海馬猜想。**

說明：很長一段時間我們沒有辦法確定體積確實是四個面積的函數，更不用說找出 H **，後來費了九牛二虎之力才找到一個反例，確定此猜想失敗，這個反例主要是找到四個表面積確定但體積卻不固定的例子，敘述如下：**

令三角錐 $O-ABC$ **，** $O(0,0,0)$ **，** $A(0,0,a)$ **，** $C(\frac{1}{a},0,0)$ **，** $B(x,y,z)$ **，且滿足**

$\overline{AB}=\frac{1}{a}$ **，** $\overline{BC}=a$ **，** $\angle ABC=90°$ **，** $\angle OAB=\angle OCB=60°$ **，如圖（二十三）**



圖（二十三）

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CO}=(x-\frac{1}{a},y,z)\cdot(-\frac{1}{a},0,0)=-\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}=a\cdot\frac{1}{a}\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}$

得 $x=\frac{1}{a}-\frac{a}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=(x,y,z-a)\cdot(0,0,-a)=-az+a^2=a\cdot\frac{1}{a}\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}$

得 $z=-\frac{1}{2a}+a$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-x,-y,a-z)\cdot(\frac{1}{a}-x,-y,-z)=-x(\frac{1}{a}-x)-z(a-z)+y^2$

$=-(\frac{1}{a}-\frac{a}{2})\frac{a}{2}-(-\frac{1}{2a}+a)\frac{1}{2a}+y^2=y^2-1+\frac{1}{4a^2}+\frac{a^2}{4}=0$

得 $y=\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}-\frac{a^2}{4}}$

則 $B(\frac{1}{a}-\frac{a}{2},\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}-\frac{a^2}{4}},-\frac{1}{2a}+a)$

現已知 $a\Delta AOC=a\Delta ABC=\frac{1}{2}$ **，** $a\Delta OAB=a\Delta OCB=\frac{\sqrt{3}}{4}$ **均為定值，但**

$V(OABC)=\frac{1}{3}a?\ AOC\cdot d(B,?\ AOC)=\frac{1}{6}\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}-\frac{a^2}{4}}$ **並不固定；若三角錐的體積為其四個表面積之函數，由上述例子可知，四個表面積相等之三角錐體積未必相等，此與函數性質矛盾。故此函數不存在，猜想失敗。**

猜想 24**：三角形之海龍公式類推出三角錐之海虎公式。**

說明：三角形面積既然可以用三邊長來表示，很容易推想出三角錐的體積可以用六稜長表示。

證明：設三角錐 $O-ABC$ **，** $O(0,0,0)$ **，** $A(a_1,a_2,a_3)$ **，** $B(b_1,b_2,b_3)$ **，**

$C(0,0,c)$ **，其中** $\overline{OA}=a$ **，** $\overline{OB}=b$ **，** $\overline{OC}=c$ **，** $\overline{AB}=\ell$ **，**

$\overline{BC}=m$ **，** $\overline{CA}=n$ **，由三角錐行列式體積公式**

$$\textbf{得}\,V(OABC)=\frac{1}{3!}\left\|\begin{matrix}0&0&0&1\\0&0&c&1\\a_1&a_2&a_3&1\\b_1&b_2&b_3&1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}0&0&c\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{c}{6}\left\|\begin{matrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{matrix}\right\|=\frac{c}{6}(a_1b_2-a_2b_1)$$

現設法將 $a_1b_2-b_1a_2$ **以** a,b,c,ℓ,m,n **表示即可**

$\because a_1^2+a_2^2+a_3^2=a^2$ **，** $b_1^2+b_2^2+b_3^2=b^2$

$$\therefore\begin{cases}n^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2-2a_3c+c^2=c^2+a^2-2a_3c\\m^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2-2b_3c+c^2=b^2+c^2-2b_3c\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_3=\frac{c^2+a^2-n^2}{2c}\text{，}\ b_3=\frac{b^2+c^2-m^2}{2c}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1^2+a_2^2=a^2-\left(\dfrac{c^2+a^2-n^2}{2c}\right)^2\\ b_1^2+b_2^2=b^2-\left(\dfrac{b^2+c^2-m^2}{2c}\right)^2\end{cases}$$

$$\because \ell^2=(a_1^2-2a_1b_1+b_1^2)+(a_2^2-2a_2b_2+b_2^2)+(a_3^2-2a_3b_3+b_3^2)$$

$$=a^2+b^2-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$$\therefore \ell^2=a^2+b^2-2\left(a_1b_1+a_2b_2+\frac{c^2+a^2-n^2}{2c}\cdot\frac{b^2+c^2-m^2}{2c}\right)$$

$$\Rightarrow a_1b_1+a_2b_2=\frac{a^2+b^2-\ell^2}{2}-\frac{(c^2+a^2-n^2)(b^2+c^2-m^2)}{4c^2}$$

$$\because (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$\therefore a_1b_2-a_2b_1=\sqrt{\left[a^2-\frac{(c^2+a^2-n^2)^2}{4c^2}\right]\left[b^2-\frac{(b^2+c^2-m^2)^2}{4c^2}\right]-\left[\frac{a^2+b^2-\ell^2}{2}-\frac{(c^2+a^2-n^2)(b^2+c^2-m^2)}{4c^2}\right]^2}$$

$$=\sqrt{a^2b^2-\frac{a^2(b^2+c^2-m^2)^2}{4c^2}-\frac{b^2(c^2+a^2-n^2)^2}{4c^2}-\frac{(a^2+b^2-\ell^2)^2}{4}+\frac{(a^2+b^2-\ell^2)(b^2+c^2-m^2)(c^2+a^2-n^2)}{4c^2}}$$

$$=\frac{1}{2c}\sqrt{4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-m^2)^2-b^2(c^2+a^2-n^2)^2-c^2(a^2+b^2-\ell^2)^2+(a^2+b^2-\ell^2)(b^2+c^2-m^2)(c^2+a^2-n^2)}$$

$$\Rightarrow V(OABC)=\frac{c}{6}(a_1b_2+a_2b_1)=\frac{1}{12}\sqrt{4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-m^2)^2-b^2(c^2+a^2-n^2)^2-c^2(a^2+b^2-\ell^2)^2+(a^2+b^2-\ell^2)(b^2+c^2-m^2)(c^2+a^2-n^2)}=F(a,b,c,\ell,m,n)$$

※海虎公式之應用

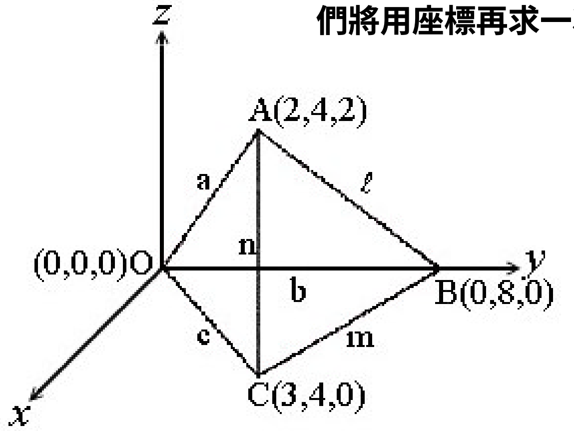
例：三角錐$O-ABC$**，六稜長為**$\overline{OA}=a=\sqrt{24}$**，**$\overline{OB}=b=8$**，**

$\overline{OC}=c=5$**，**$\overline{AB}=\ell=\sqrt{24}$**，**$\overline{BC}=m=5$**，**$\overline{CA}=n=\sqrt{5}$**，求其體積=？**

解：代入海虎公式

$$F(\sqrt{24},8,5,\sqrt{24},5,\sqrt{5})=\frac{1}{12}\sqrt{121880+51080-82864-80880}=\frac{1}{12}\sqrt{9216}=8$$

另解：因六稜長是先找點座標作才得到的，為了印證海虎公式的正確，我們將用座標再求一次體積如圖（二十四）

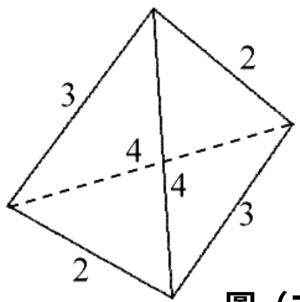


$$V(OABC)=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}2&4&2\\0&8&0\\3&4&0\end{vmatrix}\right\|=8$$ **與公式解得之答案相同**

圖（二十四）

猜想 25：三角形存在的（充要）條件為$2Max(a,b,c)<a+b+c$ **（**a,b,c **為三角形之三邊長），簡稱為海龍不等式，類推出三角錐的存在條件——海虎不等式。**

動機：我們之所以想到這問題，原因是發現海虎公式後曾舉一例如圖（二十五）

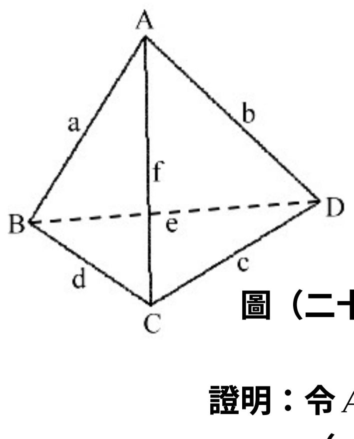


求出體積$V=\dfrac{\sqrt{-1386}}{12}$**，矛盾**

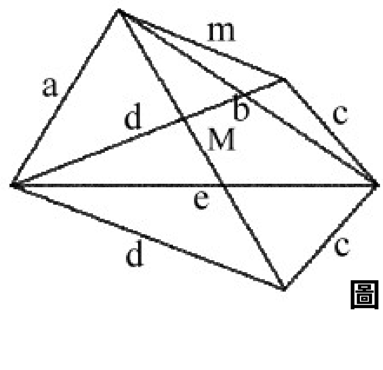
則此三角錐不存在，可見其六稜長除了要滿足基本的三角形兩邊和大於第三邊外，必然還要滿足其他某些條件，才引發了猜想（二十五）。

圖（二十五）

說明：三角錐如圖（二十六），六稜長分別為a,b,c,d,e,f **則以稜長**f**為例，要滿足**$m<f<M$ **，而**m**與**M**產生於當四點共面時如圖（二十七）**



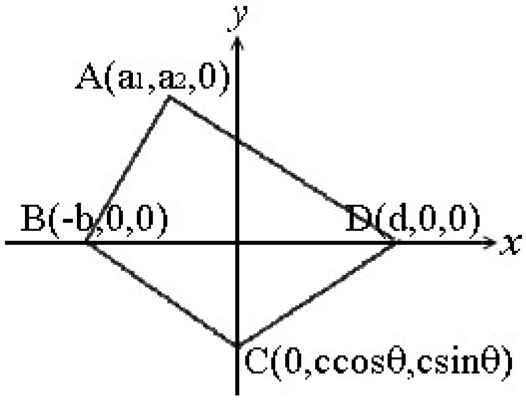
圖（二十六）



圖（二十七）

證明：令$A(a_1,a_2,0)$**，**$B(-b,0,0)$**，**$C(0,c\cos q,c\sin q)$**，**$D(d,0,0)$

（$0<q<p$ **），如圖（二十八）**



圖（二十八）

$\because\ f=\overline{AC}=\sqrt{a_1{}^2+(a_2-c\cos q)^2+c^2\sin^2 q}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+c^2-2a_2c\cos q}$

$\therefore m=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+c^2-2a_2c}<f<\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+c^2+2a_2c}=M$

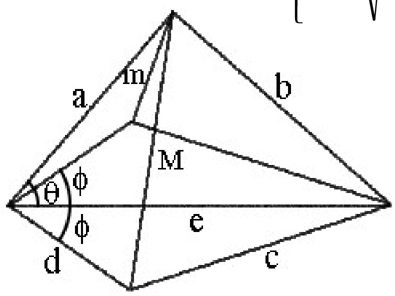
$\Rightarrow$ f **之最大值** M **與最小值** m **發生於**$q=p$**與**$q=0$**時，即** C **與** A,B,D **共面時**

但 f **的** M **與** m **還要用其他邊長** a,b,c,d,e **來表示才算完整找法如下：如圖（二十九）**

$$\because\begin{cases}\cos q=\dfrac{a^2+e^2-b^2}{2ae},\cos f=\dfrac{d^2+e^2-c^2}{2de}\\ \sin q=\dfrac{2?\,(abe)}{ae},\sin f=\dfrac{2?\,(cde)}{de}\end{cases}$$

$(?\,(abe)$**指以**a,b,e**為三邊之三角形面積**

$$\therefore\begin{cases}M=\sqrt{a^2+d^2-\dfrac{(a^2+e^2-b^2)(d^2+e^2-c^2)}{2e^2}+\dfrac{8?\,(abe)?\,(cde)}{e^2}}=H(a,b,c,d,e)\\ m=\sqrt{a^2+d^2-\dfrac{(a^2+e^2-b^2)(d^2+e^2-c^2)}{2e^2}-\dfrac{8?\,(abe)?\,(cde)}{e^2}}=h(a,b,c,d,e)\end{cases}$$



$\Rightarrow h(a,b,c,d,e)=m<f<M=H(a,b,c,d,e)$

故三角錐存在之條件為（以 f **稜為例，其它稜亦同）：**

$$\begin{cases}2Max(a,b,e)<a+b+e\\ 2Max(c,d,e)<c+d+e\\ h(a,b,c,d,e)<f<H(a,b,c,d,e)\end{cases}$$

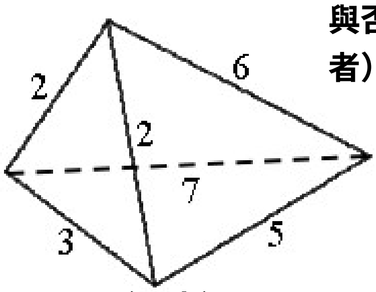
此稱之為海虎不等式

圖（二十九）

例子（1）：三角錐六稜長為 2,2,3,5,6,7 **（可任意組合），試驗證其存在與否？首先能滿足海龍不等式者（即能讓三角錐之四面三角形皆存在者）只有** 1 **種組合，如圖（三十）**

其中 $a=2,b=6,c=5,d=3,e=7,f=2$

而 $h(2,6,5,3,7)\quad 1.1736<f<3.6396\quad H(2,6,5,3,7)$

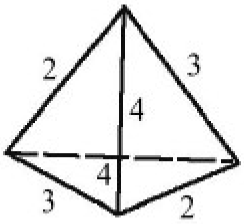


故此三角錐存在

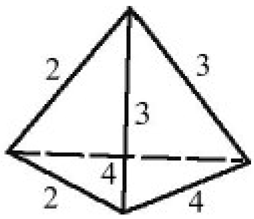
圖（三十）

例子（2）：六根火柴棒長分別為 2,2,3,3,4,4 **，可連接成幾種三角錐？**

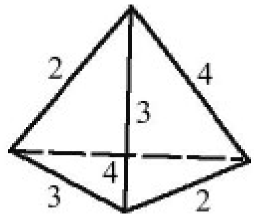
通過海龍不等式的有下列四種組合，如圖（三十一）、（三十二）、（三十三）、（三十四）



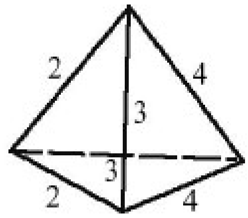
圖（三十一）



圖（三十二）



圖（三十三）



圖（三十四）

其中第一種三角錐由海虎不等式檢驗之發現其不存在
故可構成三種三角錐

三、心得：

（一）本著科學的精神所在──類推之原則，我們從三角形出發找到了三角錐的一堆性質，使我們了解類推的重要性，本作品也對此作了極佳的詮釋，波利亞（*G.Polya*）所著的《數學與猜想》（*Mathematics and Plausible Reasoning*）第一集取名為《*Induction and Analogy in Mathematics*》其意義即類似加上歸納推理就是類推。

（二）我們發現在數學範圍內有時愈是基本的單元，只要深入，往往愈有探討的空間，也證實了幾何特有的多元性；欣賞到數學上協調一致性的優美。而打破砂鍋追究到底，雖然辛苦地流了不少汗水，也往往皇天不負苦心人，終究有代價地得到滿意的結果。

（三）我們在處理幾何問題時所用的工具，除了幾何本身外，其他如向量、座標、行列式、三角函數幾乎都用到了，獨獨用不上複數。我們了解是因複數是對應到兩度空間平面，故它只能應用到平面幾何；而三角錐是立體的圖形，所以八竿子打不著。除非有人發現或創造對應到三度空間的新數，而那時在幾何上從三角形類推到三角錐說不定好比從複數類推到此新數。

四、參考資料：

（一）高級中學數學第三冊/九十年八月/南一書局

（二）高級中學數學第三冊教師手冊/九十年八月/南一書局

（三）數學與猜想（*Mathematics and Plausible Reasoning*）/波利亞（*G.Polya*）著/八十七年十一月/九章出版社