一、研究題目神秘的星

二、研究動機

數學老師在上課時，介紹「GSP 動態幾何系統」，是一套不錯的電腦繪圖軟體，可仿照傳統的尺規作圖，並有方便的動態功能，在上課之餘，試著學習用此軟體畫出一些一筆畫星形，發現此圖形似乎有些奧妙的幾何性質可探討，想好好研究一番。

三、研究目的

探討平面星形的種類、一筆劃問題及幾何性質，並運用此概念推廣到三度空間中的星體。（我們將一筆劃定義為：由多角星的頂點連到頂點的一筆劃。）

四、研究過程方法及結果

（一）星形的探討

在我所畫出來的各種一筆劃正多角星之中，發現到：有的角數可以畫出不只一種的一筆劃正多角星。那到底有那些角數可以畫出一筆劃正多角星，而那些又可以有不只一種的一筆劃正多角星呢?他們有什麼特性呢?這是本文探討的關鍵處。為了較完整的探索，我先定義一筆劃的正 n 角星。（之後所指的正 n 角星，均指可一筆劃的正 n 角星）

1.

定義:

圓上 n 個等分點，若從其中一點出發，依順時鐘或逆時鐘方向，每隔 x 點，以線段連接，逐一以折線段結合起來，最後剛好回到起始點，則此線段所形成的圖形，稱為一個 n 角星，並以 n (x)表示。我稱圓上的 n 個等分點為 n 角星的頂點，而 n 角星中，連接兩頂點的線段稱為此星形的邊，共頂點和兩邊所形成的角為頂角。

定理：一筆劃正 n 角星存在的充要條件是 x 與 n 互質。

說明：

以起始點當 0，依序順時針每點標為 1,2,...,n-1，因此每間隔 x 格連線的點依次為 $0 \to x \to 2x \to 3x \to \cdots\cdots$ 接的點為{kx (mod n)|

k=0,1,2,3,...}，如果這個集合是完全剩餘集，則{kx (mod n)| k=0,1,2,3,...}＝{0,1,2,...,n-1}，也就表示每一點都會被連到。當 n,x 互質時，此集合為完全剩餘集，因此每點都會被連到。

例如：n=8,x=3:0 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 6 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 7 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ 0(可一筆劃)

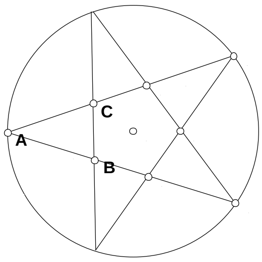
例如：n=6,x=2:0 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 0(不可一筆劃)

推論：

角數為 n 的正 n 角星個數為(m - 1)/2。其中 m 為小於 n 並與 n 互質的數之總數(尤拉函數)。而在 n 小於等於 6 時，(m - 1)/2=0，沒辦法劃出一筆劃正多角星。因此，能以一筆劃所畫出的正多角星有很多，只要角數大於 6 或等於 5，就可以劃出一筆劃正多角星。若將角數固定(角數必大於 6 或等於 5)，種數 = (m - 1)/2。m 為尤拉函數。(尤拉函數和種數已寫有電腦程式可輕易算出，見後面程式碼)

2.頂角角度

每一個星形的頂角（圖一的$\angle CAB$）角度，為 1/2 所對的弧。因為沒有被此角所對應到的弧，為兩邊對稱，所以頂角所對的弧數為（n-2x），其所對弧的弧度為 $2p(n-2x)/n$，頂角角度為$p(n-2x)/n$，星形之頂角角度和為$p(n-2x)$。

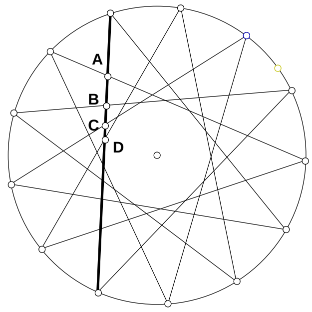


圖一

3.R 與 r 的通式

（1） 任一圓內的正多邊形個數

任一圓內的正多邊形個數，完全導因於一條圓內的直線，可被截出幾個不同的角度。不論 x 為奇數或偶數，(圖二以 x = 5 為例)一條在 n（x）圖形上的直線，共有 x 個單位弧被其所截，而其上共有（x- 1）個圖形頂點，共可截出（x - 1）個不同的角度，（圖中 A、B、C、D 四點）故可造出 x 個 n 邊形（加上最外圍的一筆劃多角星），但最內層為一正 n 邊形，而其餘均為正 n 角星（不一定一筆劃），所以總共有 x 個 n 邊形(一個正 n 邊形，（x-1）個正 n 角星。)



圖二

（2）x 在一個圓內的層次變化

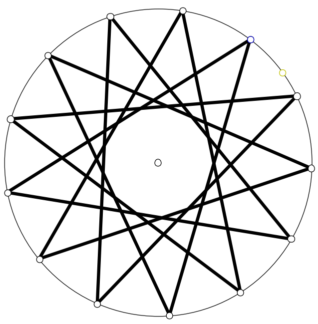
設圓中第一個圖形為 s，往內層之第二圖形為 s1，再往內層的第三圖形為 s2，以此類推，且 s 為 n（x）形式之圖形。則 s 圖形上，一條直線所截範圍內共有（x-1）個頂點，且每個頂點延伸之星形邊的交點，即為 s1 之一直線內的頂點個數，為（x-1-1）=x-2，所以 s1 為一個 n（x-1）的星形。(不一定一筆劃)，以此類推。

也就是說 n（x）中的 x 表多少層，正 n 多角星中的交點個數（包含頂點）為 n ×x。

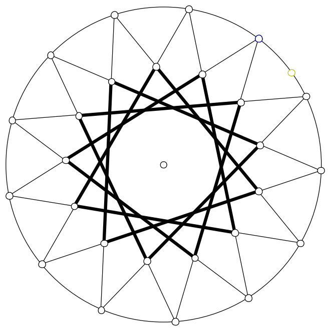
※例：13（5）

交點數為 13×5=65

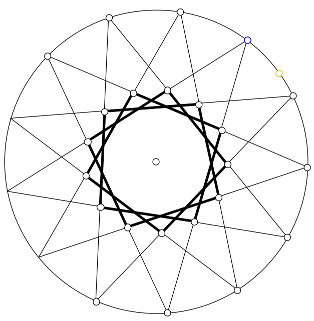
s



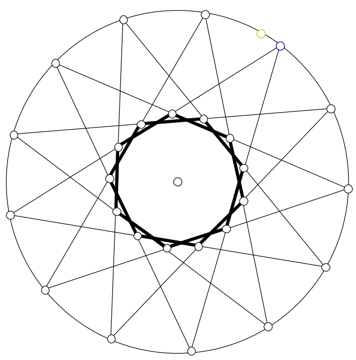
s1



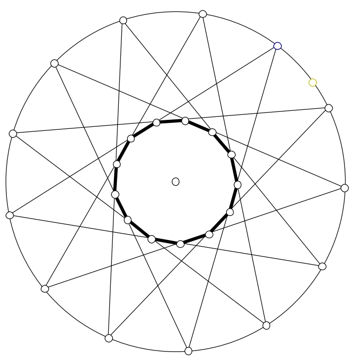
s2



s3



s4



（3） R 與 r 的層層堆疊

設 s 之外接圓半徑為 R，內層正多邊形外接圓半徑為 r，s1 之外接圓半徑為 r1，以此類推。

則取任一圖為輔佐可得：

$$\frac{R}{r_1}=\frac{Sin(\text{內層星形角度之半})}{Sin(\text{外層星形角度之半})}=\frac{Sin\left[\frac{p\,(n-2x+2)}{2n}\right]}{Sin\frac{(n-2x)p}{2n}}=\frac{Cos\frac{(x-1)p}{n}}{Cos\frac{xp}{n}}$$,

同理，以此類推，可得

$$\frac{R}{r}=\frac{R}{r_1}\times\frac{r_1}{r_2}\times\frac{r_2}{r_3}\times\frac{r_3}{r_4}\times\ldots\ldots\times\frac{r_{x-2}}{r}$$

$$=\frac{Cos\frac{p\,(x-1)}{n}}{Cos\frac{xp}{n}}\times\frac{Cos\frac{(x-2)p}{n}}{Cos\frac{(x-1)p}{n}}\times\ldots\ldots.\times\frac{Cos\frac{p}{n}}{Cos\frac{2p}{n}}=\frac{Cos\frac{p}{n}}{Cos\frac{xp}{n}}$$

（共（x-1）項）

又由此可推得 R 與各層之 r 的關係：(k 表向內推第幾層)

$$R=\frac{Cos\frac{p\,(x-1)}{n}}{Cos\frac{xp}{n}}\times r_1$$

$$r_1=\frac{Cos\frac{p\,(x-2)}{n}}{Cos\frac{p\,(x-1)}{n}}\times r_2$$

$$r_2=\frac{Cos\frac{p\,(x-3)}{n}}{Cos\frac{p\,(x-2)}{n}}\times r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{k-1}=\frac{Cos\frac{p\,(x-k)}{n}}{Cos\frac{p\,(x-k+1)}{n}}\times r_k$$

×

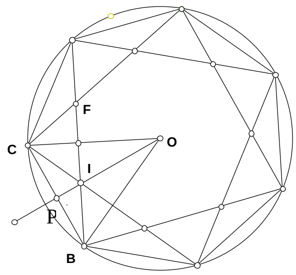
$$R=\frac{Cos\frac{p\,(x-k)}{n}}{Cos\frac{xp}{n}}\times r_k$$

5.星形的外圍長(如圖三的 $\overline{CI}$)

圖三，在 ΔBOC，令 $t=\frac{1}{2}\overline{BC}$，$\angle ICF=\frac{p\left(n-2x\right)}{n}$，正多邊形一內角 $=\frac{p\left(n-2\right)}{n}$

$$\angle BCI=\frac{\frac{p\left(n-2\right)}{n}-\frac{p\left(n-2x\right)}{n}}{2}=\frac{xp}{n}-\frac{p}{n},\quad \angle BOP=\frac{2p}{2n}=\frac{p}{n}$$

$$Sin\angle BOP=\frac{t}{R}\rightarrow t=R\times Sin\frac{p}{n},\qquad Cos\angle PCI=\frac{t}{\text{邊長}}\rightarrow$$

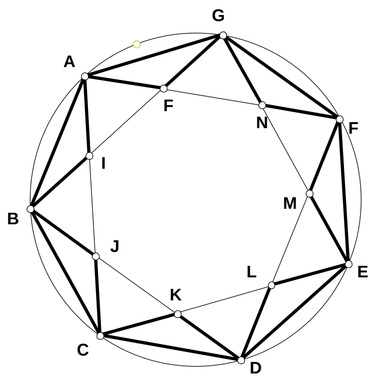


圖三

$$\text{邊長}=\frac{R\times Sin\frac{p}{n}}{Cos\angle PCI}=\frac{R\times Sin\frac{p}{n}}{Cos\frac{p}{n}\left(x-1\right)}$$

6.正多角星的面積

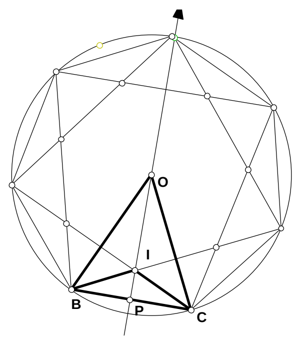
多角星面積，等於頂點相連所構成的封閉正多邊形面積，扣除多角星下凹處所構成的小三角形面積，如圖四。正七角星 AIBJCKDLEMFNGF 的面積為，正七邊形 ABCEDFG 之面積，扣除七個 Δ AIB 之面積。



圖四

連圓心與任意兩相鄰頂點，可得其中一個 Δ CBO，如圖五，則

$$\frac{\Delta CBO-\Delta IBC}{\Delta CBO}=\frac{\text{正多角星面積}}{\text{正多邊形面積}}=\frac{\overline{OI}}{\overline{OP}}=$$



圖五

$$\frac{r_1}{\overline{OP}}=\frac{r_1}{R\times Cos\frac{p}{n}}=\frac{r_1}{r_1\times\frac{Cos\frac{p\left(x-1\right)}{n}}{Cos\frac{xp}{n}}\times Cos\frac{p}{n}}=\frac{Cos\frac{xp}{n}}{Cos\frac{p}{n}\,Cos\frac{p\left(x-1\right)}{n}}$$

(r_1 為正多角星第二層交點所形成圓的半徑。作 $\overleftrightarrow{OI}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P 點，P 為 $\overleftrightarrow{BC}$ 之垂直平分線)

（由之前證明可知：$\dfrac{R}{r_1}=\dfrac{Cos\dfrac{p(x-1)}{n}}{Cos\dfrac{xp}{n}}$），又正多邊形面積

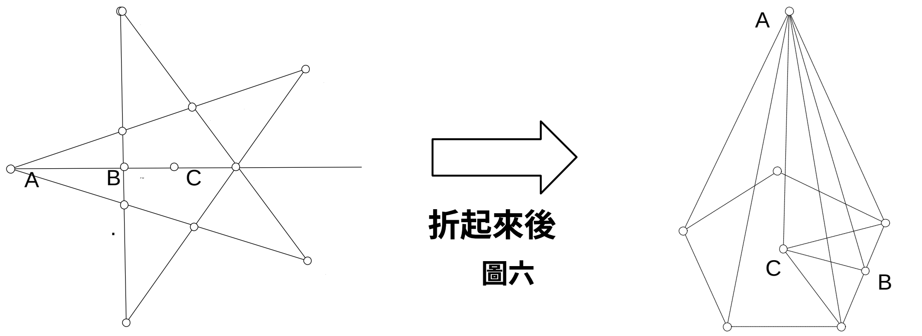
$$= n \times \triangle OBC = \frac{n}{2}R^2 Sin\frac{2p}{n}$$

$$\Rightarrow \text{正多角星面積} = \frac{Cos\dfrac{xp}{n}}{Cos\dfrac{p}{n}\times Cos\dfrac{(x-1)p}{n}}\times \text{正}n\text{邊形面積}$$

$$=\frac{\dfrac{n}{2}\times R^2 Sin\dfrac{2p}{n}Cos\dfrac{xp}{n}}{Cos\dfrac{p}{n}\times Cos\dfrac{(x-1)p}{n}} = nR^2 Sin\frac{p}{n}Cos\frac{xp}{n}Sec\frac{(x-1)p}{n}$$

7.正多角星所折成的角錐體積

先假設手邊的星形能構成角錐，並繪其展開圖及角錐示意圖，如圖六



圖六

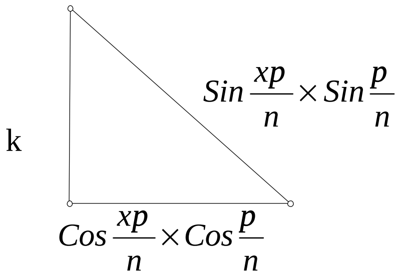
則其兩面角之 $Cos q = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ ($q=\angle ABC$，為了表達方便，設之後的 $r = r_1$)

$$Cos q = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{rSin(\dfrac{p-\dfrac{2p}{n}}{2})}{R-rSin(\dfrac{p-\dfrac{2p}{n}}{2})} = \frac{rCos\dfrac{p}{n}}{R-Cos\dfrac{p}{n}} \qquad \text{又} \quad R = r\frac{Cos\dfrac{p(x-1)}{n}}{Cos\dfrac{xp}{n}} \text{所以,}$$

$$Cosq = \frac{r\times Cos\dfrac{p}{n}}{r(\dfrac{Cos\dfrac{p(x-1)}{n}}{Cos\dfrac{xp}{n}}-Cos\dfrac{p}{n})} = \frac{Cos\dfrac{p}{n}}{\dfrac{Cos\dfrac{p(x-1)}{n}-Cos\dfrac{xp}{n}\times Cos\dfrac{p}{n}}{Cos\dfrac{xp}{n}}} = \frac{Cos\dfrac{p}{n}}{\dfrac{Sin\dfrac{xp}{n}\times Sin\dfrac{p}{n}}{Cos\dfrac{xp}{n}}}$$

$$=\frac{Cos\frac{xp}{n}\times Cos\frac{p}{n}}{Sin\frac{xp}{n}\times Sin\frac{p}{n}}=Cot\frac{p}{n}\times Cot\frac{xp}{n}$$ **得出 Cos$q$ 之值後，我可進一步再求出 Sin$q$ 之值。**

首先，嘗試將此值還原至直角三角形內。



$$k^2=Sin^2\frac{xp}{n}\times Sin^2\frac{p}{n}-Cos^2\frac{xp}{n}\times Cos^2\frac{p}{n}$$
$$=(Sin\frac{p}{n}\times Sin\frac{xp}{n}-Cos\frac{xp}{n}\times Cos\frac{p}{n})\times(Sin\frac{p}{n}\times Sin\frac{xp}{n}+Cos\frac{xp}{n}\times Cos\frac{p}{n})$$
$$=-Cos\frac{(x+1)p}{n}\times Cos\frac{(x-1)p}{n}$$

此式中，Cos$\frac{(x-1)p}{n}$ 恆正，(因為 x $<\frac{n}{2}$)。

因為此式必正，此星形才有機會形成角錐，所以 $Cos\frac{(x+1)p}{n}$ 必為負，才可以形成星形。此時，$\frac{(x+1)p}{n}>\frac{p}{2}\Rightarrow\frac{x+1}{n}>\frac{1}{2}\Rightarrow 2(x+1)>n$。此可視為能否形成角錐的之判別式。(簡稱角錐判別式)又，當 n 為偶數時，因 x 的最大為 $\left(\frac{n}{2}-1\right)$，不可以成立，當 n 為奇數時，x 的最大為 $\left(\frac{n+1}{2}\right)$，才可以成立。所以只有 n 為奇數，才可折成角錐，且只有一種情況(x 為最大時)。

$$\because\ Sinq=\frac{k}{Sin\frac{xp}{n}\times Sin\frac{p}{n}}=\frac{\sqrt{-Cos\frac{(x+1)p}{n}\times Cos\frac{(x-1)p}{n}}}{Sin\frac{xp}{n}\times Sin\frac{p}{n}}$$

由此可求出角錐之高

$$=r\times\frac{Sin\frac{xp}{n}\times Sin\frac{p}{n}}{Cos\frac{xp}{n}}\times Sinq=r\times\frac{Sin\frac{xp}{n}\times Sin\frac{p}{n}}{Cos\frac{xp}{n}}\times\frac{\sqrt{-Cos\frac{(x+1)p}{n}\times Cos\frac{(x-1)p}{n}}}{Sin\frac{xp}{n}\times Sin\frac{p}{n}}$$

$$=\frac{r\times\sqrt{-Cos\frac{(x+1)p}{n}\times Cos\frac{(x-1)p}{n}}}{Cos\frac{xp}{n}}$$

又底面積 $=nR^2Sin\frac{p}{n}\times Cos\frac{p}{n}$

所以角錐體積 $=\frac{1}{3}$ **底面積** $\times$ **高** $=\frac{1}{3}nR^2Sin\frac{p}{n}\times Cos\frac{p}{n}\times\frac{\sqrt{-Cos\frac{(x+1)p}{n}\times Cos\frac{(x-1)p}{n}}}{Cos\frac{xp}{n}}\times r$

$$=\frac{n}{3}R^2rSin\frac{p}{n}\times\sqrt{-Cos\frac{(x+1)p}{n}\times Cos\frac{(x-1)p}{n}}\times\frac{Cos\frac{p}{n}}{Cos\frac{xp}{n}}$$

$$=\frac{1}{3}nr^3\frac{Cos^2\frac{p}{n}(x-1)}{Cos^2\frac{xp}{n}}\times Sin\frac{p}{n}\times\sqrt{-Cos\frac{(x+1)p}{n}\times Cos\frac{(x-1)p}{n}}\times\frac{Cos\frac{p}{n}}{Cos\frac{xp}{n}}$$

$$=\frac{nr^3}{3}\times\sqrt{\frac{-Cos^5\frac{(x-1)p}{n}\times Cos\frac{(x+1)p}{n}\times Sin^2\frac{p}{n}\times Cos^2\frac{p}{n}}{Cos^6\frac{xp}{n}}}$$

又， $x=\frac{n-1}{2}$

$$=\frac{nr^3}{3}\times\sqrt{\frac{-Cos^5\frac{(\frac{n-3}{2})p}{n}\times Cos\frac{(\frac{n+1}{2})p}{n}\times Sin^2\frac{p}{n}\times Cos^2\frac{p}{n}}{Cos^6\frac{(\frac{n-1}{2})p}{n}}}$$

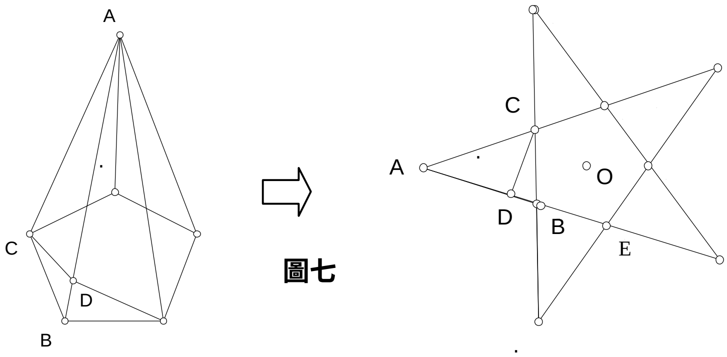
$$=\frac{nr^{3}}{3}\times\sqrt{\frac{-Cos^{5}\frac{(n-3)p}{2n}\times Cos\frac{(n+1)p}{2n}\times Sin^{2}\frac{2p}{n}}{4Cos^{6}\frac{(n-1)p}{2n}}}$$

$$=\frac{nr^{3}}{3}\times\sqrt{\frac{-Sin^{5}\frac{3p}{2n}\times Sin\frac{(-1)p}{2n}\times Sin^{2}\frac{2p}{n}}{4Sin^{6}\frac{p}{2n}}}=\frac{nr^{3}}{3}\times\sqrt{\frac{Sin^{5}\frac{3p}{2n}\times Sin\frac{p}{2n}\times Sin^{2}\frac{2p}{n}}{4Sin^{6}\frac{p}{2n}}}$$

$$=\frac{nr^{3}}{6}\times\sqrt{\frac{Sin^{5}\frac{3p}{2n}\times Sin\frac{p}{2n}\times Sin^{2}\frac{2p}{n}}{Sin^{6}\frac{p}{2n}}}$$

（1）角錐的相鄰側面的二面角

令相鄰側面的二面角為q



圖七

$$\text{Cos}q=\frac{2\overline{CD}^{2}-\overline{CE}^{2}}{2\overline{CD}^{2}}$$

如圖七$\overline{CD}=Sin\frac{p(n-2x)}{n}\times\overline{AB}$**，** $\overline{CB}=Sin\frac{p(n-2x)}{2n}\times 2\overline{AB}$

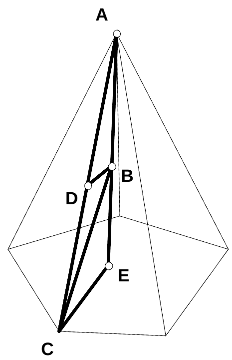
$$\overline{CE}^{2}=2\overline{BC}^{2}-2\overline{BC}^{2}Cos\frac{p(n-2)}{n}=2\overline{CB}^{2}\left[1-Cos\left(p-\frac{2p}{n}\right)\right]=2\overline{CB}^{2}\left(1+Cos\frac{2p}{n}\right)$$

又$\overline{CD}=\overline{CB}\times Cos\frac{p(n-2x)}{2n}=\overline{CB}\times Sin\frac{xp}{n}$

$$\therefore Cosq=\frac{2Sin^{2}\frac{xp}{n}-2Cos\frac{2p}{n}-2}{2Sin^{2}\frac{xp}{n}}=1-\frac{Cos\frac{2p}{n}+1}{2Sin^{2}\frac{xp}{n}}$$

（2）星形折成角錐後的外接球

圖八，$\overline{AE}$**為角錐之高，因角錐之底面為正多邊形，球心 B 必落在**$\overline{AE}$**之上，且**$\overline{AB}=\overline{BC}$**，此為外接球的基本定義，過 B 作**$\overline{AC}$**之垂線交**$\overline{AC}$**於 D 點，可知**



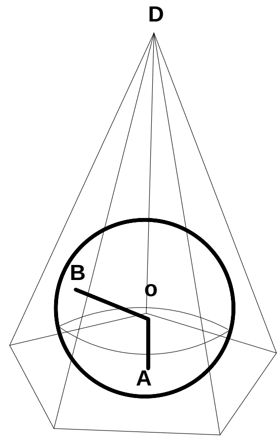
圖八

$\Delta ABD \sim \Delta ACE, \because \angle CAE = \angle BAD, \angle ADB = \angle AEC = \frac{p}{2}$，**所以**

（外接球之半徑）$\overline{AB} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AC}^2}{\overline{AE}}$。**外接球體積=**$\frac{4p}{3} \times \overline{AB}^3 = \frac{\overline{AC}^6 p}{6\overline{AE}^3}$

（3）星形折成角錐後的內切球

內切球之半徑（圖九中的$\overline{AO}$），即為球心到切面的最短距離。角錐體積（V）=1/3 ×高（$\overline{AD}$）×角錐底面積 = 1/3 ×內切球半徑 ×角錐側表面積（Area），所以內切半徑=（高 ×角錐底面積）/Area = 3 ×$\frac{V}{Area}$**，內切球體積=**$\frac{36pV^3}{Area}$



圖九

而 Area=$\left[R - rSin\left(\frac{p - \frac{2p}{n}}{2}\right)\right] \times \left[rSin\left(\frac{p - \frac{2p}{n}}{2}\right) \times \tan\left(\frac{p}{n}\right)\right] \times \frac{1}{3}$

$= \left[R - rCos\frac{p}{n}\right] \times \left[rCos\frac{p}{n} \times \tan\frac{p}{n}\right] \times \frac{1}{3}$

（因外接球及內接球之計算繁雜，只用公式表達）

（二）星體的探討

討論完平面中星形的性質後，我要開始探討立體星體。延續平面正多角星形的概念，正立體星形是將正多面體的各個面延伸形成角錐，而構成的立體圖形。然而正多面體只有四、六、八、十二、二十面體，五種。因為正四面體與正六面體的兩面角為小於或等於九十度，所以不能沿伸形成星體。因此，我就八、十二及二十面體延伸所形成的星體，進行討論。

1. 星體種論

我定義正八、正十二和正二十角星體，均分別由其所屬之正多面體的面延伸而來。其實正多角星體的種數及其角錐所屬之原始平面，在多面體上即可一目了然。判別法如下：

（1）基準面的概念

基準面被定義為，原始正多面體（或正多角星）被角錐錐底所覆蓋的平面。可以是一個或一個以上。

（2）錐面的原始形態

星體角錐之錐面(除了底面外的平面)，在延伸前即為所有與基準面相鄰的平面。又，我討論的為正多角星體，(「正」可簡單定義為：把角錐的錐頂放置成平行水平面，將由錐頂作垂線下來，恰可落在錐體底面重心的星體)。故延伸前，可觀察各面相對於基準面而言，是否處於對稱的「地位」，(即各面的所在位置可以互相旋轉或調換調整)，以作為判斷的依據。

（3）錐面與錐底

一個正多面體可以延伸發展出多種不同的星體。在模型的作法上，第一層即以原始多面體的各個面為基準面，將其鄰面延伸形成角錐而得，延伸出來的圖形，將會是數個角錐所組合而成的星體。第二層則以第一層角錐與角錐相接，凹陷的面為基準面延伸而成角錐。但並不是每個星體都有第二層，也不是每個星體所延伸出的第二層都是「正」的立體星體。這一點，和上述的「對稱」概念有密切的相關性。

第一層的星體，可用簡單的公式，表達其性質（因不是每一種星體都可延伸第二層，其性質另外探討）：

設有正 t 多面體，每一個面是正 s 邊形

（1） 面數= t ×s。

（2） 體積 ＝ 一個正 t 多面體體積 + t 個延伸出的角錐體積

（3） 此星體為凹多面體，沒有內切球存在，只有內接球，接點為星體內部正 t 面體之交點，其半徑為正 t 面體的外接球半徑。

（4） 外接球半徑= 正 t 面體內切球半徑+角錐的高。

正立體星體是否能一筆劃，完全決定於，延伸後的角錐型態。角錐的頂點（立起來時的最高點）必為偶點（與該點相鄰的邊有偶數個），才有可能一筆劃，可用反證法證明之：

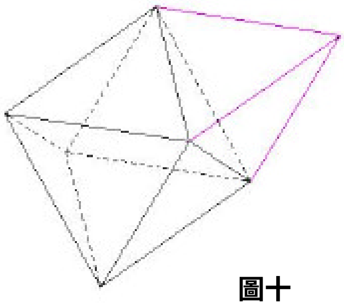
設頂點為奇點之角錐，所組成的星體可一筆劃。則一筆畫至頂點 A 再由頂點 A 畫離，共用去兩條途徑，如此畫下去，必有一次剩下一

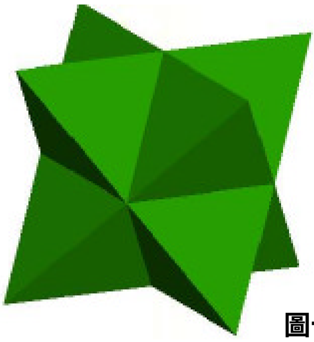
條途徑，除非 A 是一筆劃的終點或起點，否則不可能劃到，而又不可能每一個頂點都是終點或起點，矛盾，所以不可能將之一筆劃。

2. 正八角星體

圖十紫色部分，是正八角星體第一層之一角，圖十一是所有面延伸後的完整正八角星體。

在高中數學充實教材第三冊中，已經很完整的算出正多面體的性質，可知正八面體的二面角$=2Tan^{-1}\sqrt{2}$，正四面體的二面角$=2Tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，為互補，所以正八面體所延伸出的角錐恰為正四面體。因第一層延伸是正四面體所組合而成，也就是二個正四面體[卡]在一起，所以不可能有第二層之延伸。

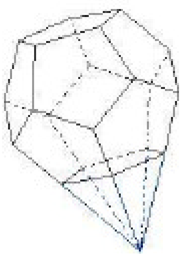

圖十

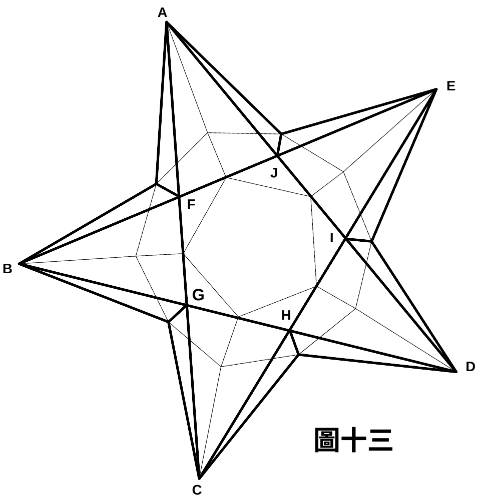

圖十一

3. 正十二角星體

圖十二為正十二角星之一角，圖十三是正十二角星其中的五個角。

如圖十三，A、B、C、D、E 五點在同一個平面上，因為是同一平面所延伸（平面 FGHIJ），很明顯可形成一個一筆劃的正五角星 AFBGCHDIEJ，也就是正十二角星體角錐的錐面，為基準面所延伸出的正五角星所組成, 故所延伸出的角錐，為正五角星所折成的角錐。


圖十二



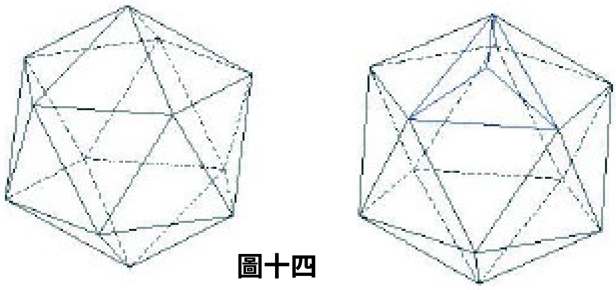
圖十三

所延伸出來的第一層，已經把所有相鄰可延伸的面都延伸了，所以沒有第二層的正十二角星體。

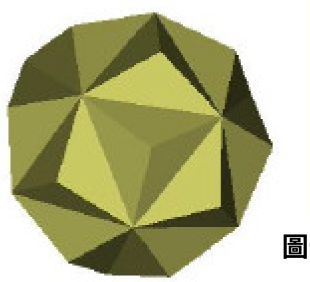
4.正二十角星體

（1）第一層星體

圖十四藍色部分，是正二十角星體第一層延伸之一角，若將其全部延伸完整，則為圖十五。



圖十四



圖十五

現在我嘗試算出：延伸出去的「扁三角錐」的相鄰側面之二面角，也就是算出延伸面所夾的二面角，如圖十六箭頭所指面。

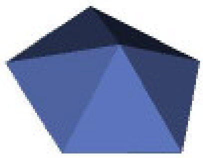
先取出正二十面體的「一頂帽子」（由五個正三角形組成）如圖十七，

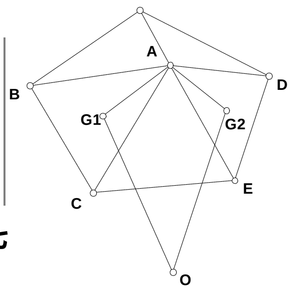
G1 為三角形 ABC 之重心，

G2 為三角形 ADE 之重心，

O 為正二十面體內切球球

圖十六



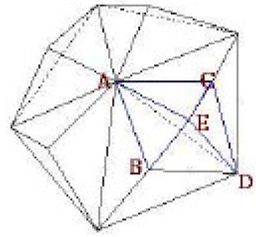


圖十七

心，$\overline{G_1O}=$內切球半徑 r，查資料可知$r=\dfrac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}e$ **（e 為正二十面體之一邊長，以後將其設為 1）。令三角形 ABC 和三角形 ADE 的兩面角為**q，**即**$\overline{G_1O}$**和**$\overline{G_2O}$**的補角。**

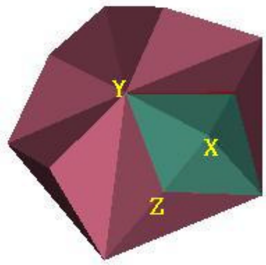
$Cos\angle G_1OG_2=\dfrac{\overline{G_1O}^2+\overline{G_2O}^2-\overline{G_1G_2}^2}{2\times\overline{G_1O}\times\overline{G_2O}}$ **設此式子為 1 式。求出**$\overline{G_1G_2}$，**利用重心所為成的整五邊形**$\overline{G_1G_2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{6}$

代回 1 式可得 $Cos\angle G_1OG_2 = \dfrac{2\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{6}\right)^2}{2\times\left(\dfrac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}\right)^2} = -\dfrac{1}{3}$，再



用反三角函數即可求得其二面角，此二面角恰與正八面體相同。

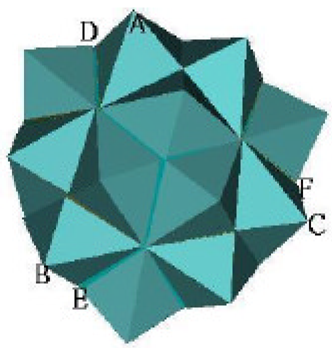
(2) 第二層星體



圖十八

a. 圖十八是取五個第一層的三角錐，綠色部分為延伸一個第二層。因 ABCD 四點根本不共平面，無法定義從 E 點所做的垂線落於何處，此層在我的定義而言，就不為正多角星體，但因其有些特殊的幾何形質，我還是探討它。

此層因為是在第一層凹陷處「放上」第二層，第一層原有 60 個面，每兩個面，產生一個錐體，每個錐體有四個面，所以共有 60 ÷2 ×4 = 120 個面。角數也變成 30 個。

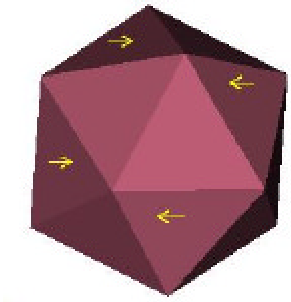


圖十九

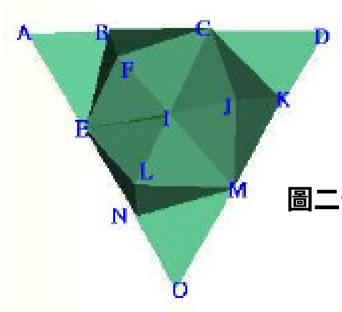
b. 頂點為偶點，可以一筆劃，以下為畫法

ㄅ、圖十九為第二層的一部份。A、B、C 三點為同一個平面延伸，所以在同一個平面上。以後把 ABC 三點所組成的三角形，設為一平面的單位。以 A 點為起點 →B→C 再回到 A，再從 A→D 轉往另一個平面回到 B，再由 B→E 另一個平面→C，再由 C→F 到另一個平面，設該平面為 ACT 三點所組成（T 點非 B 點）但不能回到 A 點，而是以 T 點，轉向另一平面畫過去。也就是每一個轉折點的地方，都先畫長邊（圖十八的 $\overline{XY}$），畫完再轉向到短邊（圖十八的 $\overline{YZ}$）。如此畫法，將可以把第二層的「三角形平面」畫完，且不重複。一個「三角形平面」中包含了 15 個平面，然而二十角星的第二層有 120 個平面，所以共有 8 個「三角形平面」。下一步驟，是如何將一「三角形平面」裡的邊一筆劃。

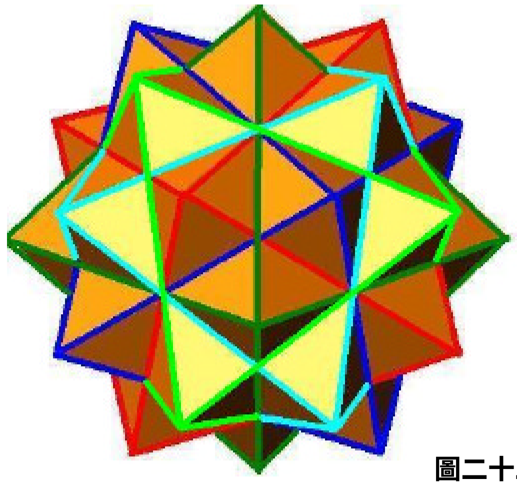
ㄆ、取下一「三角形平面」，圖二十，以 A 為起點，
A→B→C→I→L→N→M→L→E→I→M→J→C→K→J→I→F→B→E→F→C→D→K→M→O→N→E→A。再配合ㄅ步驟即可完成一筆劃。



圖二十一



圖二十

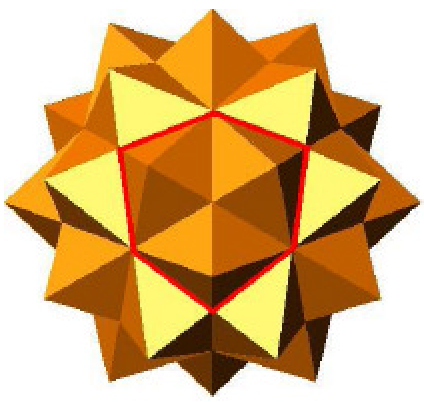


圖二十二

c.第二層的二面角：我將其還原成，原始延伸面的二面角，可知是由圖二十一，箭頭所指的面所延伸出來的，可很清楚看出，其所夾二面角，必與第一層相同。第二層的星體是由 5 個正八面體所構成。如圖二十二所框，一種顏色表一個正八面體。

（3）第三層星體

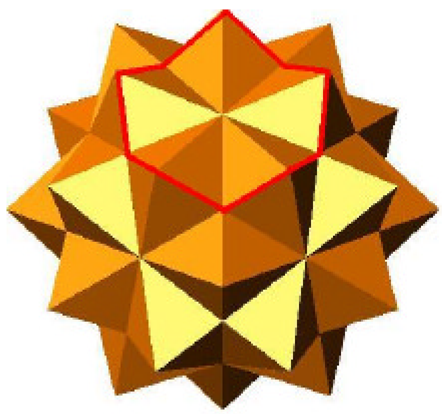
第二層延伸的星體已經不是正多角星體，若再繼續面延伸，必定不能得到我所要的星體。我換一個角度來看，第二層延伸到第三層，不要以「一個角錐和角錐凹陷處」為單位，以多個為單位，且要符合對稱的要求。可以三個或五個為一單位。如圖二十三。



圖二十三

<三個為一組

五個為一組>



a. 五個為一組

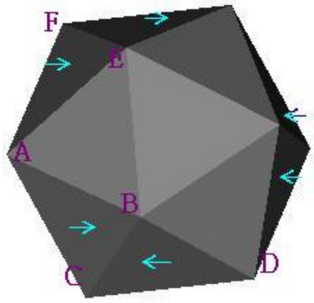
五個為一組的延伸，就是圖二十四箭頭所指的五個面延伸。每一

組共有十個面，120 ÷10 = 12，最後所剩的角錐數為 12 個。

b. 三個為一組

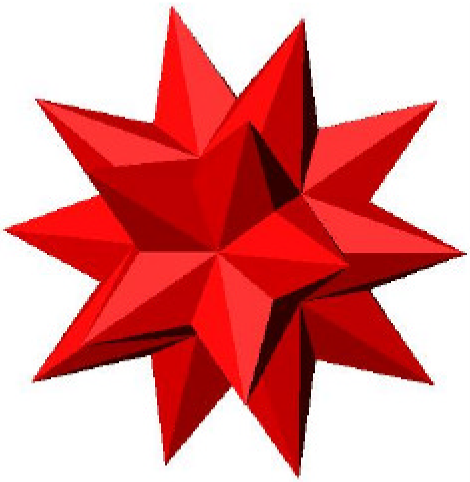
三個為一組的延伸，就是圖二十五箭頭所指的六個面延伸。每一組共有六個面，120 ÷6 = 20，最後所剩的角錐數為 20 個。

圖二十四



圖二十五

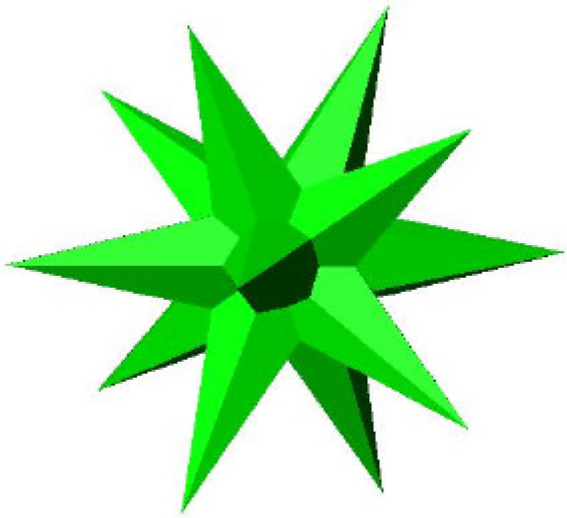
上述兩種方式延伸的星體，都符合我正的定義。「五個為一組」的二面都一樣，且和第一、二層的延伸相等，（理由同前）。「三個為一組」的有兩組二面角，一組為與前述相等，如圖二十五中的平面 AFE 與平面 ABC 的延伸，另一組直接為正二十面體的二面角，圖中的平面 ABC 與平面 CBD 延伸。



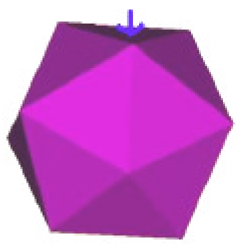
圖二十六

<五個為一組的完整延伸

三個為一組>的完整延伸



（4）我將正二十面體「平放」在一桌面上，可知，除了貼近桌面的面外，最上面還有一個面與其平行，如圖二十七所指的面。以此面為基準，以該面相鄰的有 3 個面，再與此 3 面相鄰的有 6 個面，以此類推，正二十面體為，$1\rightarrow3\rightarrow6\rightarrow6\rightarrow3\rightarrow1$ 正三角形數組成的。所以第三層「三個為一組」的延伸已經為最大延伸，不可能再有其他延伸。



圖二十七

五、結論與展望

學會電腦繪圖後，就對此方面非常的熱愛，想要將之運用在學術

上，與科學結合，於是選定了星形作為題材來研究一番。先從平面幾何開始著手起，且定義了我所謂的一筆劃正多角星來探討，用完全剩餘系解釋之。並設計一個 Visual Basic 的程式，使之輸入兩個變數，即可畫出圖形。並發現，星形之中有層層堆疊的現象，且與他們的邊數及畫法有相當之密切關聯。進而再算出他們的邊長、面積、及體積，並列出了一個函數，代入此函數即可檢查是否有體積的存在。

接下來我把這平面的概念，推廣到空間幾何中。三度空間的觀察抽象，不易解釋，無法再由一筆劃之觀念來探討，於是我換了一個角度，從正多面體著手。由平面的觀察可知，星形是由正多邊形之邊長延伸而成。然而正多面體只有四、八、六、十二和二十，五種，將其面延伸，即為我所找的正多角星體，再配合模型上的製作與 3D 電腦繪圖，使得研究過程方便許多。同樣地探討其層層堆疊問題，二面角、內接外切球，及不同多面體延伸出的星體之間的關係。

最後，我希望再將之延伸到一些由多種正多邊形組成的多面體上，如：C_{60} 的結構或其他柏拉圖多面體，所延伸出的星體。從之前延伸正二十面體可知，要探討一個多面體可延伸多少層的星體，只要把正多面體分割成不同各數組合的面，即可求知。(正二十面體為 $1\rightarrow3\rightarrow6\rightarrow6\rightarrow3\rightarrow1$)此種方式可以用在柏拉圖多面體上，在有模型的情況下，就可推得。

我的星形與星體，仍然沒完結，還有許多有趣及迷人的幾何性質可討論，我很期待這個問題日後的發展和推演，也希望這個美麗圖形中的秘密，能夠成為眾所皆知的幾何性質。

六、參考資料

邱顯義（國立台灣師範大學附屬高級中學編輯委員），正多面體的進一部探討，「數學充實教材第三冊」，1990 年 7 月第一版，1992 年 10 月再版。

七、附錄

（一）程式碼

1. 尤拉函數（Visual Basic）。

例:輸入 36 時，執行結果為:

n=36 與其互質的數有: 5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35，尤拉函數為 11,可畫出 5 種星形

```
Dim n, x, n1, x1, d, countx As Integer
Private Sub Form_Activate()
n = InputBox("Number", "Number")
Text1 = "n=" & n & " 與其互質的數有: "
n1 = n
For x1 = 2 To n1 - 1
  n = n1
  x = x1
  project
  If x = 1 Then
  'Print x1
  Text1 = Text1 & x1 & ","
  countx = countx + 1
  End If
Next x1
Text1 = Text1 & " 尤拉函數為" & countx & ","
Text1 = Text1 & "可畫出" & (countx - 1) / 2 & " 種星形"
'Print countx
End Sub
Private Sub project()
d = n Mod x
If d <> 0 Then
  n = x: x = d
  project
End If
End Sub
```

2.輸入 n 與 x 判別是否有星形存在，若有則繪出圖形，並可存成圖檔（Visual Basic）。

```
Dim fname As String
Dim n, x, n1, x1, d, a As Integer
Const pi = 3.14159265359
Private Sub Command1_Click()
  If Pic1.AutoRedraw = True Then
    SavePicture Pic1.Image, fname
  End If
End Sub
Private Sub Form_Activate()
DrawStar.Visible = False
MsgBox "輸入 n 與 x 值,且符合下列條件:(1) n 大於 x 且均為正整數 (2) n,x 要互質", 6, "請注意"
inputnum
project
fname = "c:\windows\desktop\x,n=" & n1 & ", " & x1 & ".jpg"
If x = 1 Then
DrawStar.Visible = True
Print "( n, x )=("; n1; ","; x1; ")"
  For a = 0 To n1 - 1
    Pic1.Scale (-60, 60)-(60, -60)
    DrawWidth = 1
    Pic1.Circle (0, 0), 40, RGB(225, 0, 0)
    ScaleMode = 0
    Pic1.Line (40 * Cos(2 * pi * x1 * (a + 1) / n1), 53.5 * Sin(2 * pi * x1 * (a + 1) / n1))-(40 * Cos(2 * pi * x1
* (a + 2) / n1), 53.5 * Sin(2 * pi * x1 * (a + 2) / n1)), QBColor(3)
  Next a
End If
End Sub
Private Sub project()
```

```
d = n Mod x
If d <> 0 Then
  n = x: x = d
  project
End If
If x <> 1 Then
  MsgBox "此兩數值不可能有星形", 6, "輸入不合"
End If
End Sub
Private Sub inputnum()
n = Val(InputBox("n=(必為正整數)", "n 值"))
x = Val(InputBox("x=(必為正整數)", "x 值"))
n1 = n
x1 = x
If n * x = 0 Then
  MsgBox "數值不能等於 0,重新輸入", 6, "輸入不合"
  inputnum
End If
End Sub
```