

# 第二十屆旺宏科學獎

## 成果報告書

參賽編號：SA20-243

作品名稱：棒狀磁攪拌子在黏滯液體下作磁懸浮運動之  
實驗探究與數值模擬法的發展之研究

姓名：蘇睿淳

關鍵字：磁攪拌子、穩定磁懸浮、vpython 模擬動畫  
、耦合、數值模擬

# 棒狀磁攪拌子在黏滯液體下作磁懸浮運動之 實驗探究與數值模擬法的發展之研究

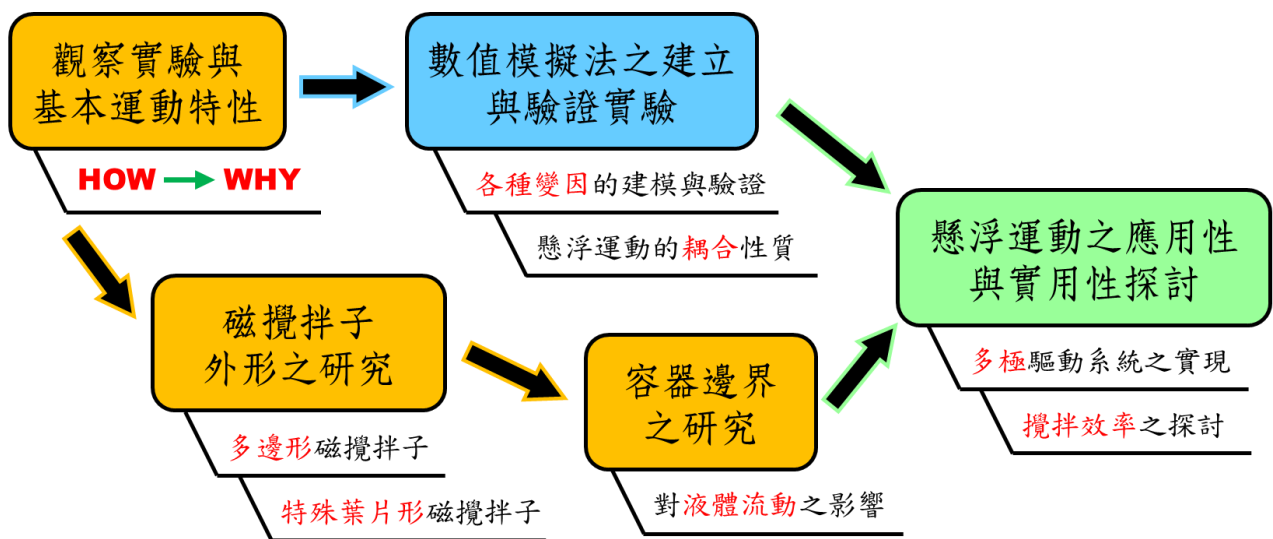
## 壹、研究動機

實驗室中常用的磁攪拌機包含馬達上的驅動磁鐵和放置於液體中的磁攪拌子，磁攪拌子受到驅動磁鐵的吸引而隨著馬達一起旋轉。當磁攪拌子在黏度高的液體中攪動時，會出現一個神奇的現象，原本在杯底的磁攪拌子竟然懸浮了，在一個高度穩定的運動。研究者發現懸浮運動是轉動與震盪的結合，形式類似簡諧運動，恰好課堂有學過轉動與簡諧運動，於是對這個現象特別好奇。想了解是什麼原因造成磁攪拌子從底部向上跳起、懸浮狀態又有什麼特性，所以展開了此研究，希望能進一步建立數學模型，對此現象更了解。

## 貳、研究目的

- 一、探討磁攪拌子向上跳起的原因與過程
- 二、探討磁攪拌子穩定懸浮的原因
- 三、建立定性與定量的理論模型
- 四、以數值模擬法開發模擬動畫
- 五、以理論模型預測各變因的影響
- 六、探討各變因對跳起與懸浮運動的影響
- 七、探討懸浮狀態的動能變化
- 八、探討磁攪拌子外形對懸浮運動的影響
- 九、探討容器邊界限制對液體流的影響
- 十、改進磁攪拌機並提出應用性

## 參、研究大綱



## 肆、研究過程與方法

### 一、實驗操作

#### (一) 觀察實驗一、磁攪拌子向上跳起過程的磁極位置之觀察

##### 1. 實驗變因：

近鄰界轉速時，磁攪拌子與驅動磁鐵的相位角隨之時間變化。

##### 2. 實驗操作：

使用蓖麻油與自製攪拌機，以便觀察驅動磁鐵之磁極。利用高速攝影俯拍磁攪拌子與驅動磁鐵，匯入 Tracker 分析兩者的旋轉軌跡。

#### (二) 觀察實驗二、磁攪拌子懸浮運動的磁極位置之觀察

##### 1. 實驗變因：

磁攪拌子穩定懸浮時，磁攪拌子與驅動磁鐵的相位角隨時間之變化。

##### 2. 實驗操作：

使用蓖麻油與自製攪拌機，以便觀察驅動磁鐵之磁極。利用高速攝影俯拍磁攪拌子與驅動磁鐵，匯入 Tracker 追蹤兩者的旋轉軌跡。架設另一台攝影機側拍磁攪拌子，匯入 Tracker 追蹤鉛直位移。

#### (三) 驗證實驗一、探討各種變因對磁攪拌子跳起的臨界轉速之影響

##### 1. 實驗變因：

(1)攪拌機轉速、(2)與驅動磁鐵的距離、(3)液體的黏度

##### 2. 各變因的研究方法：

- (1) 攪拌機轉速為應變變因，而實驗時真正改變者為攪拌機電壓，故拍攝時驅動磁鐵也需入鏡，再追蹤得其轉速。
- (2) 探討與驅動磁鐵的距離時，用高速攝影俯拍跳起過程，液體選用純蓖麻油，並改變磁攪拌子與驅動磁鐵之距離。
- (3) 探討液體的黏度時，以高速攝影俯拍跳起過程，固定磁攪拌子與驅動磁鐵之距離，選用加酒精稀釋成不同濃度的蓖麻油，並測定黏滯係數。

#### (四) 驗證實驗二、探討各種變因對磁攪拌子懸浮運動的影響

##### 1. 實驗變因：

(1)攪拌機轉速、(2)液體黏度、(3)磁攪拌子質量、(4) 磁攪拌子長度

##### 2. 各變因的研究方法：

- (1) 探討攪拌機轉速時，以高速攝影拍攝懸浮的磁攪拌子，操控不同電壓以改變驅動磁鐵的轉速，再追蹤得知確切的轉速。
- (2) 探討液體黏度時，以高速攝影拍攝懸浮的磁攪拌子，選用加酒精稀釋成不同濃度的蓖麻油，並測定黏滯係數。每組實驗都重複(1)的操作。
- (3) 探討磁攪拌子質量時，利用 3D 列印印出不同寬度的外殼改變其質量，核心放入磁攪拌子。每組實驗都重複(1)的操作。
- (4) 探討磁攪拌子長度時，利用 3D 列印印出多個等重等體積而長度不一的外殼，核心放入磁攪拌子，以高速攝影拍攝。

(五) 驗證實驗三、磁攪拌子懸浮狀態的能量變化

1. 實驗變因：

懸浮時隨時間變化的動能。

2. 實驗操作：

方法與觀察實驗二無異。由各時間的角位移與鉛直位移算出角速度與質心速度，測量取得磁攪拌子的轉動慣量與質量，而計算出動能，將轉動動能與質心動能繪製在同一張圖上比較。

(六) 實驗探究一、磁攪拌子外形對懸浮運動的影響

1. 實驗變因：

磁攪拌子的幾何外形，如：圓柱、三角形柱、四邊形柱、與五邊形柱

2. 實驗操作：

利用 3D 繪圖軟體設計等重等體積的多邊形柱外殼，核心放入磁攪拌子。

其餘操作方法與觀察實驗二無異。

(七) 實驗探究二、雙葉片外形與圓柱形磁攪拌子對液體流動之比較

1. 實驗變因：

圓柱形外殼與雙葉片外殼

2. 實驗操作：

利用 3D 列印印出帶有兩個葉片的外殼與圓柱形的外殼，如右圖。將磁攪拌子套入外殼的核心，使其在蓖麻油中作懸浮運動，在中心位置滴入染劑，使用攝影機拍攝液體流動過程。



(八) 實驗探究三、四葉片外形之順式與反式對懸浮高度之影響

1. 實驗變因：

四葉片外形的順式與反式外殼和圓柱形外殼

2. 實驗操作：

利用 3D 列印印出帶有四個葉片的外殼，研究中定義的順式與反式如右圖。將磁攪拌子套入外殼的核心，使其在蓖麻油中作懸浮運動，以高速攝影側拍。



(九) 實驗探究四、不同容器邊界限制對液體流動之比較

1. 實驗變因：

三角形、四邊形、五邊形的隔板

2. 實驗操作：

將塑膠板裁剪組合成正多邊形，套入圓形燒杯中，使磁攪拌子在蓖麻油中作懸浮運動，在邊緣位置滴入染劑，使用攝影機拍攝液體流動過程。

## (十) 實驗探究五、多磁極磁攪拌機與輕量增長磁攪拌子之可行性測試

### 1. 實驗變因：

(1) 氧化鐵與鈷鐵硼磁鐵、雙極與四極排列 (2) 使用吸管增長磁攪拌子

### 2. 實驗操作：

(1) 分別將氧化鐵與鈷鐵硼磁鐵，在新馬達上以雙極和四極方式排列，詳見實驗裝置(二)改進磁攪拌機。嘗試使磁攪拌子在蓖麻油中作懸浮運動，若成功懸浮，則使用高速攝影機俯拍及側拍。

(2) 裁減口徑剛好的吸管至所需的長度，套入磁攪拌子，使用氧化鐵的四極驅動系統，嘗試使其在蓖麻油中作懸浮運動，且觀察落下時的攪拌機轉速。

## 二、特殊方法

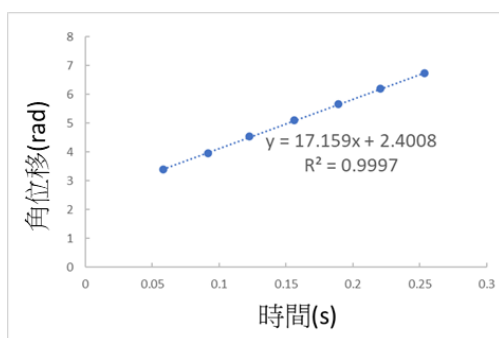
### (一) 雙視角攝影同步：

拍攝磁攪拌子時，為同時追蹤其水平轉動與鉛直運動，須以兩支手機分別俯拍及側拍。拍攝時以雷射光照射磁攪拌子，使兩支手機皆收到此信號。分析影像時，將雷射光消失的瞬間設定為時間之起始，校正雙視角的時間。

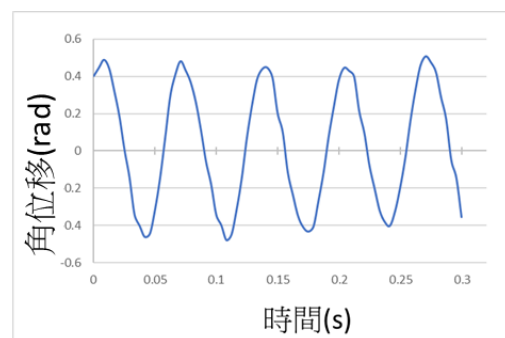
### (二) 懸浮軌跡分析：

磁攪拌子轉動軌跡中，當轉速為零時，有許多相對極值，以極值與極值間中點分析，如圖(一)，回歸直線即為平均轉動角度對時間之函數，將轉動初始資料減去此函數，便能分析擺動之運動，如圖(二)。將圖(二)的數值以正弦函數回歸，取得振幅與角頻率。正弦函數與擺動數值契合度極高，如圖(三)，因此擺動可以正弦函數表示。

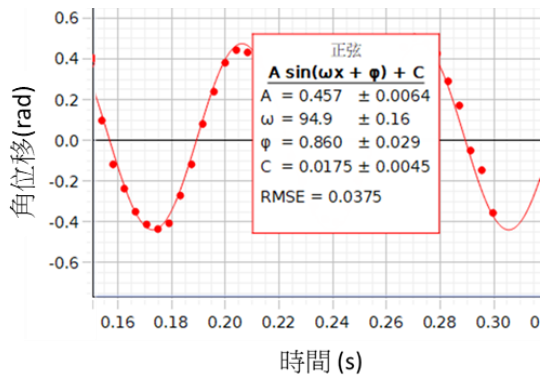
另外以鉛直震盪的位移做正弦函數分析，如圖(四)，契合度不高，所以分析時取極值，只找出平衡高度、角頻率和振幅。



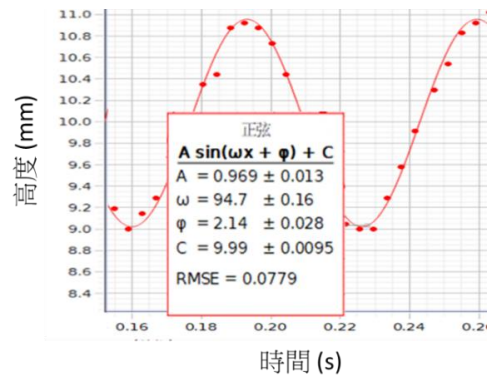
圖(一) 磁攪拌子之平均轉速



圖(二) 磁攪拌子之擺動



圖(三)擺動角度之正弦回歸函數



圖(四)鉛直位移之正弦回歸函數

### (三) 黏滯係數測量：

使用終端速度法測量黏滯係數，本研究的方法僅適用於磁攪拌子，測得的黏滯係數用以推演成黏力矩與鉛直向的黏滯力。

#### 1. 實驗原理：

達終端速度時，由兩端的力平衡可知：

- (1) 分析水和杯子:  $Mg = T$
- (2) 分析磁攪拌子:  $T - mg - B = f$

i. 由 i 與 ii 可得

- (3)  $Mg - mg - B = f = kLv$
- (4)  $B = Vdg$

$$(5) k = \frac{(M-m)+Vd}{vL} g$$

液體黏滯力正比於物體速度與長度，故  $F = kLv$ 。代入上述推導公式可求出  $k$ 。

$M(kg)$ = 水和杯子的質量和 $m(kg)$ = 磁攪拌子的質量 $T(N)$ = 細繩的張力 $f(N)$ = 黏滯力 $B(N)$ = 磁攪拌子浮力 $f = kLv$ $B = Vdg$ $k(Ns/m)$ = 黏滯係數 $v(m/s)$ = 速度 $V(l)$ = 磁攪拌子體積 $d(kg/l)$ = 液體密度
--

#### 2. 實驗步驟：

##### (1) 求基本量

- i. 用 25ml 量筒盛裝待測液體，並秤得質量，相除得液體密度。
- ii. 將天平歸零，秤量裝水的紙杯與磁攪拌子的質量。
- iii. 用排水法，測量磁攪拌子的體積。
- iv. 測量磁攪拌子長度。
- v. 測量量筒一格幾公尺，作為 Tracker 的基準長度

##### (2) 求終端速度：

- i. 將支架、滑輪和 1000ml 量筒擺置如圖(二)。
- ii. 將蓖麻油倒入 1000ml 量筒約 600ml 刻度。
- iii. 將繫上細繩的磁攪拌子放入油表面下。
- iv. 在紙杯中滴入適量的水，放開紙杯，拍攝磁攪拌子向上移動。
- v. 將影片匯入 Tracker 分析得終端速度。



(四) 磁力矩與磁鉛直力測量：

根據參考資料(三)，磁力矩與距離的三次方呈反比，磁鉛直力與距離的四次方呈反比，此性質反直覺，故實際測量驗證。

1. 力矩測量方法：

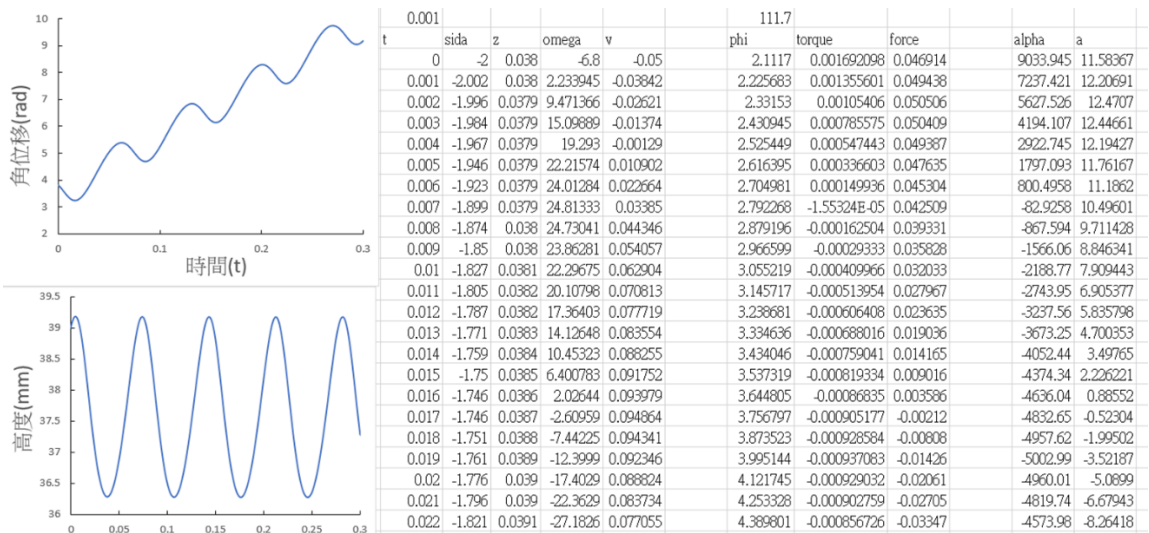
- (1) 將方格紙剪成適當大小並黏上攪拌機磁鐵。
- (2) 藉由一硬磁鐵得知並標示攪拌機磁鐵的 N、S 極。
- (3) 把量角器黏上，90 度對準 N 極。
- (4) 將磁攪拌子一端固定，一端用繩子連接拉力計。
- (5) 使磁攪拌子與攪拌機磁鐵的夾角呈 90 度。
- (6) 量測力臂。

2. 鉛直力測量方法：

- (1) 將方格紙剪成適當大小並黏上攪拌機磁鐵。
- (2) 藉由一硬磁鐵得知並標示攪拌機磁鐵之南北極。
- (3) 黏上量角器，90 度對準 N 極。
- (4) 將磁攪子固定於拉力計上(不能轉動或上下移動)。
- (5) 使磁攪拌子與攪拌機磁鐵的夾角呈 0 度。

(五) 數值分析法：

以試算表操作，如圖(五)。本研究的運動方程式中包含位置的一次與二次微分，故先令定初始的位置與速度，代入方程式計算出加速度，在令定一微小時間算得位置與速度的變化量，將變化量與初始量相加即得經過此一微小時間後的位置與速度，重複以上動作得出運動軌跡。



圖(五)數值分析作業畫面之部分截圖

### 三、實驗裝置

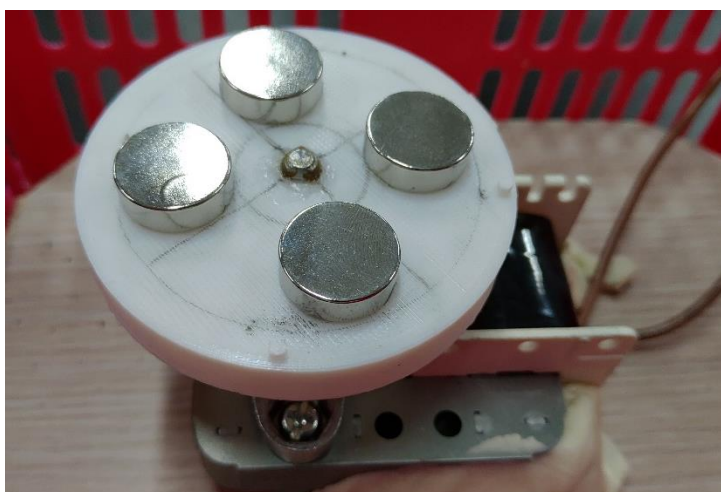
#### (一) 自製磁攪拌機：



圖(六)自製攪拌機裝置圖

實驗室中常見的磁攪拌機的轉速無法連續性的變化，也無法看見裡面驅動磁鐵如何旋轉，於是研究者嘗試自製磁攪拌機。從實驗室中報廢的磁攪拌機取得馬達與磁鐵，測試過後確認馬達還能用，與其他零件組合成磁攪拌機，包含塑膠盒、木板、黏土、電線、鱷魚夾、插頭、變壓器。在磁極上做記號，方便追蹤其旋轉，做實驗時會將玻璃板置於攪拌機上，如此一來便能取得驅動磁鐵的影像。馬達外接變壓器，透過電壓連續性的改變驅動磁鐵的轉速，能夠看到更細緻的運動變化。

#### (二) 改進磁攪拌機：



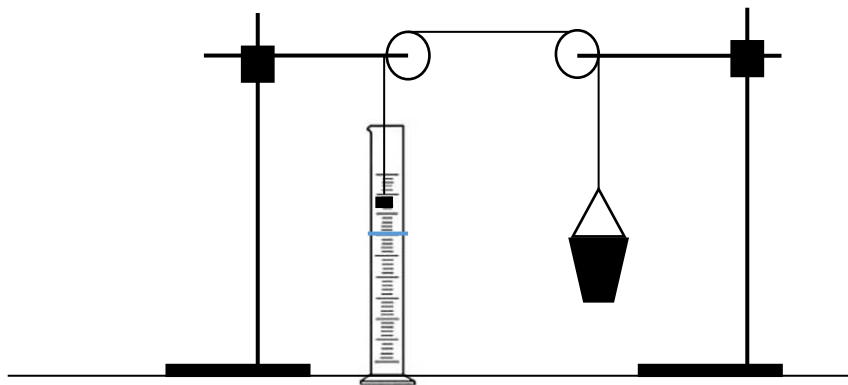
圖(七)改進磁攪拌機裝置圖

配合探究實驗(五)，為了達成多極驅動系統而進行改良。原有的磁攪拌機馬達與其圓形磁鐵連接在一起，難以拆解，因此使用新馬達。所需的材料有，蔽極式馬達、小磁鐵與連接兩者的平台。選用氧化鐵磁鐵與鈷鐵硼磁鐵，外型皆為扁平圓柱，其徑向為磁軸。使用 3D 列印製作連接馬達與磁鐵的平台，設計為圓形，中心有孔洞嵌入馬達。組合後如圖(七)。



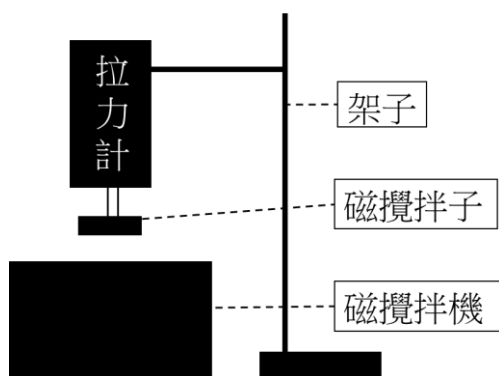
### (三) 黏滯係數測定：

實驗器材：磅秤、1000ml 量筒、紙杯、支架、細綿繩、剪刀、滴管、慢速攝影機。待測液：各濃度的蓖麻油。待測物：磁攪拌子。

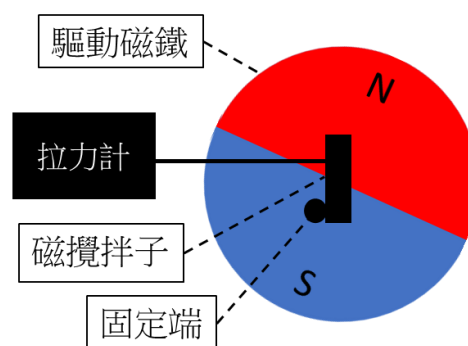


圖(八)黏滯係數測定裝置圖

### (四) 力矩與鉛直力測量



圖(九)鉛直磁力測量裝置圖



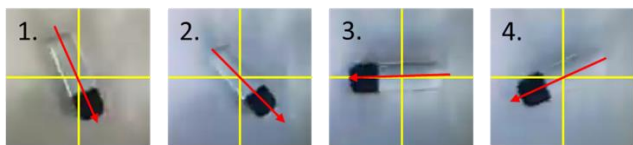
圖(十)磁力力矩測量裝置圖

## 伍、背景研究

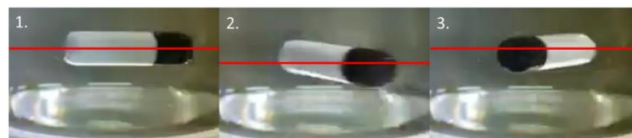
磁攪拌子在黏性高的液體中能夠有特殊的懸浮現象，這種黏性液體有很多，例如甘油、蓖麻油、聚乙二醇。在從前的研究中，研究者嘗試過甘油，但是甘油的黏度對溫度有很大的變化，且容易吸濕，使實驗條件不易掌握，故最終選擇蓖麻油。

磁攪拌子的懸浮運動能夠分成兩方面作討論，在水平面的轉動與鉛直方向的移動。轉動的情況如圖(十一)，是一個往前轉再稍微往後轉的週期性的運動，其轉動角度的擬合函數為： $\theta(t) = \omega_s t + A \sin(\omega_w t)$ ， $\omega_s$ 代表平均轉速、 $A$ 代表擺動振幅、 $\omega_w$ 代表擺動角頻率。而鉛直運動則是在一個高度的區間震盪，如圖(十二)。因為平均轉速遠低於攪拌機轉速，所以驅動磁鐵定期的超越磁攪拌子，給它週期性的施力，也就造成擺動與震盪，所以擺動與震盪的週期相同，統一以角頻率表示。懸浮的運動軌跡如圖(十三)與圖(十四)所示。

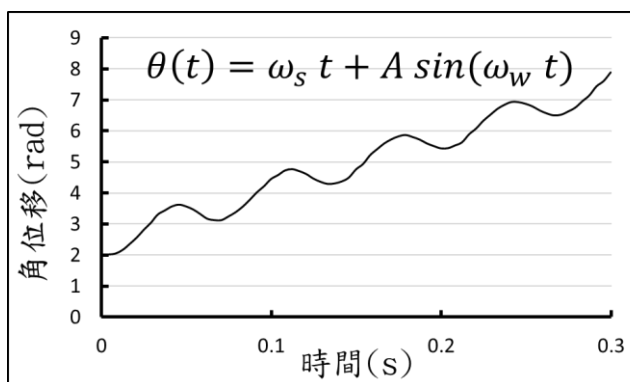
懸浮的運動參數有一個共同的關係： $\omega_d = \omega_s + \omega_w$ ， $\omega_d$ 代表攪拌機轉速。因為角頻率的定義是 $2\pi/T$ ， $T$ 是運動的週期，在懸浮運動中等於受力週期，而受力週期恰等於驅動磁鐵超越磁攪拌子的週期。當驅動磁鐵超越磁攪拌子一圈時，比它多轉了 $2\pi$ ，所以 $2\pi/T$ 也是兩者間的相對轉速，故此式成立。當討論非攪拌機轉速的變因時，若攪拌機轉速固定，可省略平均轉速或角頻率其中之一，以一個參數表示即可。



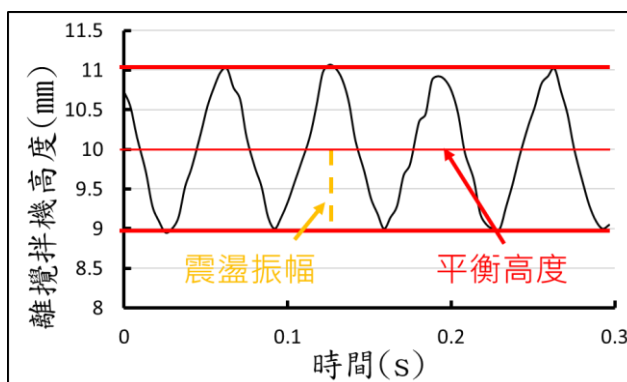
圖(十一)磁攪拌子懸浮之轉動過程



圖(十二)磁攪拌子懸浮之鉛直震盪過程



圖(十三)轉動角度對時間之關係



圖(十四)鉛直位移與時間之關係

對於懸浮磁攪拌子周圍的液體型態，研究者曾經作過一個實驗觀察。使磁攪拌子在甘油中懸浮，從中央上方滴入水，經過一段時間的流動後呈現圖(十五)。圖中有許多液層呈現不同的紋路，是因濃度梯度引發的折射，而水應該是被散布在這些液層間。根據液層的分布情況，推測是層流，且影片中的雷諾數約為 3，亦符合層流。

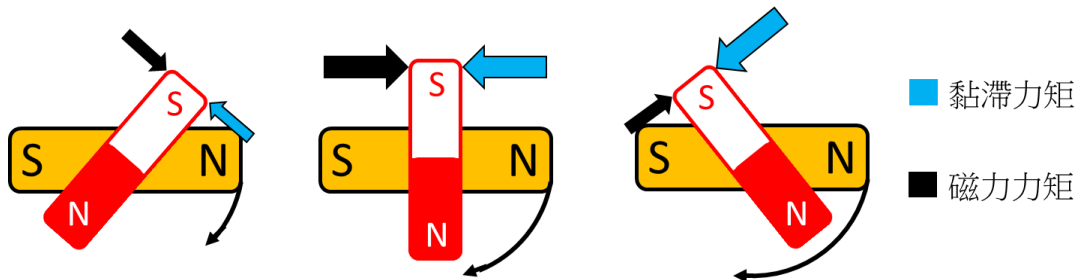


圖(十五)水加入甘油的液體流動情況

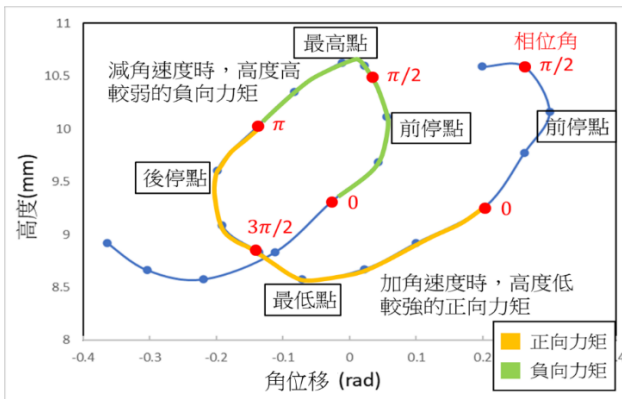
## 陸、研究結果

從觀察實驗(一)可得知，磁攪拌子跳起的運動起源於磁力矩與阻力矩的對抗。因高轉速導致阻力矩超越了驅動磁鐵與磁攪拌子間的最大磁力矩，導致磁攪拌子轉速減慢，使相同的磁極靠近產生向上的磁力而跳起。

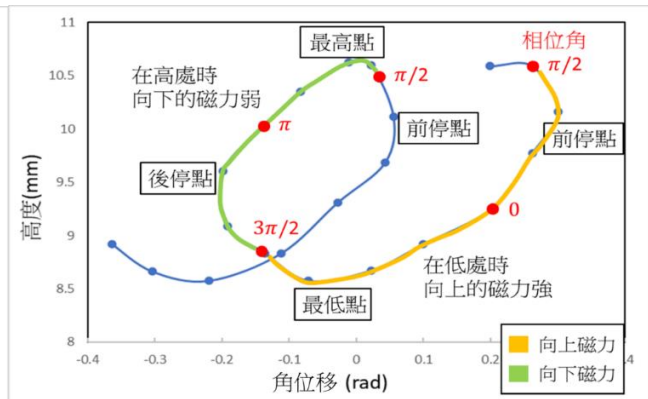
從觀察實驗(二)可得知，維持磁攪拌子穩定懸浮的關鍵是高度變化與受力周期的契合。當磁攪拌子在低處時，受到較大的上斥力；當磁攪拌子在高處時，受到較小的下吸力。在一個週期內，磁力的衝量向上，而得以抵抗重力維持懸浮。且同樣道理，在低處的磁力矩較大，所以磁攪拌子的角位移能穩定的增加。



圖(十六)磁攪拌子跳起前之相對位置與受力狀況



圖(十七)磁攪拌子懸浮軌跡、力矩方向與相位角之關係



圖(十八)磁攪拌子懸浮軌跡、鉛直磁力方向與相位角之關係

圖(十六)說明攪拌機轉速越來越大時與磁攪拌子的夾角變化和力矩的關係，分為三個階段：

1. 低轉速階段：夾角小於 90 度，黏力矩與磁力矩相同，作等角速度運動。
2. 臨界轉速階段：夾角等於 90 度，黏力矩與最大磁力矩相同，作等角速度運動。
3. 準跳起階段：夾角快速增加至 180 度，黏力矩大於磁力矩，作減角速度運動。

圖(十七)和圖(十八)說明懸浮過程中力的變化與軌跡的關係，軌跡與相位角的數據取用於觀察實驗(二)，力矩與鉛直力的方向則由實驗影片中的磁極位置得知。

對於磁攪拌子的運動有一定程度的了解後，知道懸浮運動可以分成轉動與鉛直運動討論，於是開始建立定性的數學模型。考慮磁攪拌子在黏性的液體中作鉛直轉軸的轉動和鉛直方向的移動，與受到的磁力、黏滯力、重力，以方程式表示為：

$$I\ddot{\theta}_f = \frac{M_t}{z^3} \cdot \sin(\phi(t)) - \frac{1}{12}k L^3 \dot{\theta}_f \quad (\text{式 1.})$$

$$m\ddot{z} = -m\dot{g} - \frac{M_f}{z^4} \cdot \cos(\phi(t)) - kL\dot{z} \quad (\text{式 2.})$$

$I$ 是磁攪拌子的轉動慣量。 $m$ 是磁攪拌子的質量。 $\dot{g}$ 是受浮力影響的重力加速度。 $\theta_f$ 是磁攪拌子的轉動角度。 $z$ 是磁攪拌子與驅動磁鐵的距離。相位角 $\phi(t) = \omega_d t - \theta_f$ 。 $\omega_d$ 是驅動磁鐵的轉速。 $M_t$ 是磁力矩對 $z^{-3}$ 的比例常數。 $M_f$ 是磁鉛直力對 $z^{-4}$ 的比例常數。 $L$ 是磁攪拌子的長度。 $k$ 是液體黏滯係數。 $M_t$ 、 $M_f$ 、 $k$ 由實驗測得，確認磁力矩與磁鉛直力對 $z$ 的關係正確。

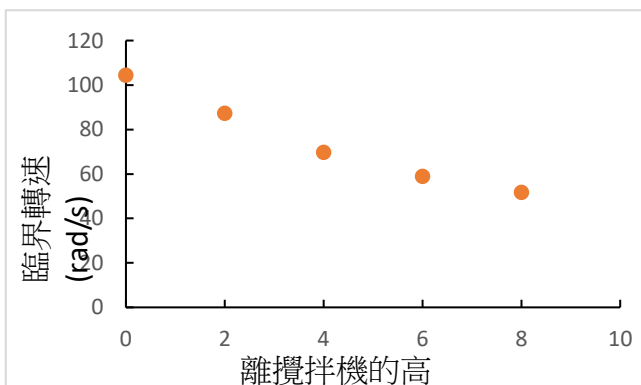
考慮磁攪拌子在跳起前的特殊條件：當兩磁鐵間的夾角為 90 度時，磁攪拌子以驅動磁鐵的轉速作等角速度運動。即： $\phi = \pi/2$ 、 $\ddot{\theta}_f = 0$ 、 $\dot{\theta}_f = \omega_d$ ，代入(式 1.)與(式 2.)整理後得(式 3.)。

$$\frac{M_t}{z^3} = \frac{1}{12}k L^3 \omega_d + \alpha m\dot{g} \quad (\text{式 3.})$$

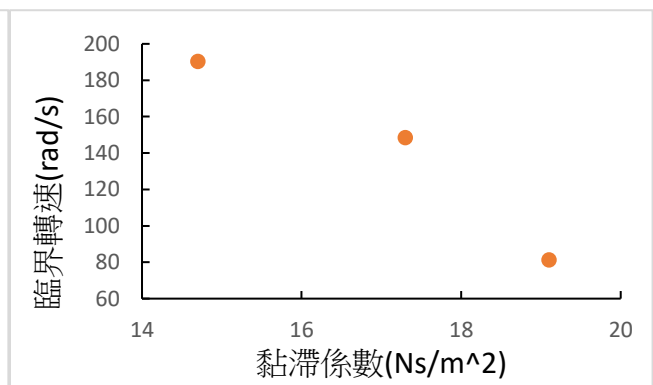
當 $\phi = \pi/2$ 時， $\sin(\phi) = 1$ 、 $\cos(\phi) = 0$ ，根據(式 1.)與(式 2.)，磁力矩達極大值，且無磁力的鉛直分量。因磁攪拌子在燒杯底部旋轉，無鉛直之移動，亦不存在鉛直向的黏滯力，所以正向力僅有 $m\dot{g}$ 。正向力造成的摩擦力矩為 $\alpha m\dot{g}$ ， $\alpha$ 是摩擦力矩常數。(式 3.)說明在臨界轉速的情況下，最大磁力矩等於黏力矩加摩擦力矩。

根據(式 3.)，臨界轉速與距離及黏滯度皆呈現負相關，於是進行驗證實驗(一)。由圖(十七)與圖(十八)可知臨界轉速與距離及黏滯度皆呈現負相關，符合理論之預期。

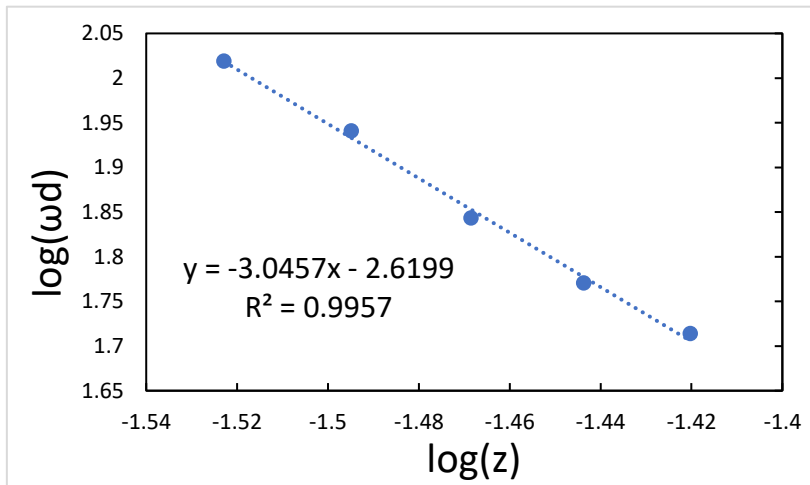
因 $\alpha m\dot{g} \ll \frac{1}{12}k L^3 \omega_d$ ，由(式 3.)推演出 $\omega_d \propto \frac{1}{z^3}$ ，由圖(十九)能夠明確地看到臨界轉速與距離三次方呈反比，符合預測的趨勢，表示本研究的理論模型有一定程度的適用性。



圖(十九) 臨界轉速與高度之關係



圖(二十) 臨界轉速與液體黏度之關係



圖(二十一)臨界轉速與距離之次方關係

圖(十九)是驗證實驗(一)的結果，隨著距離提高，臨界轉速下降。圖(二十)是驗證實驗(一)的結果，隨黏滯係數提高，臨界轉速下降。將圖(十九)取對數得圖(二十一)，作回歸直線確認次方關係，發現斜率接近-3。

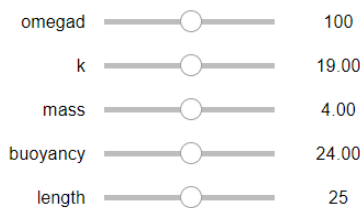
(式 1.)與(式 2.)描述了磁攪拌子的懸浮運動，理論上可以解出旋轉角度與鉛直位移對時間的函數，但是這個聯立方程組過於複雜，以數值分析法求解，並模擬出磁攪拌子的運動軌跡，其模擬結果以 vpython 動畫呈現。在 Jupyter 平台中，建立了調控方程式中各項常數的數值滑桿，能夠改變不同的參數預測懸浮運動軌跡，並透過動畫以視覺化的方式呈現。

```
dt=0.001
from ipywidgets import interact
def f(omegad,k,mass,buoyancy,length):
    buoyancy=buoyancy/1000
    mass=mass/1000
    f=-mass*9.8+buoyancy
    vistor=(-2.52001*10**-5)*k/19.2*(length/25)**3
    visfor=-0.48*k/19.2*length/25
    inertia=mass*1.87304*10**-7/0.00405
    for i in range(1,n,1):
        t[i]=0.001*i
        thidad[i]=omegad*t[i]
        alpha[i]=(magtor*math.sin(thidad[i]-thida[i-1]))/(z[i-1]**3)+vistor*omega[i-1])/inertia
        a[i]=(-magfor*math.cos(thidad[i]-thida[i-1]))/(z[i-1]**4)+visfor*v[i-1]+f)/mass

        z[i]=z[i-1]+v[i-1]*dt+a[i]*dt*dt/2
        thida[i]=thida[i-1]+omega[i-1]*dt+alpha[i]*dt*dt/2

        v[i]=v[i-1]+a[i]*dt
        omega[i]=omega[i-1]+alpha[i]*dt

interact(f,omegad=(50,150),k=(9.,29.),mass=(2.,6.),buoyancy=(12.,36.),length=(15,35))
```

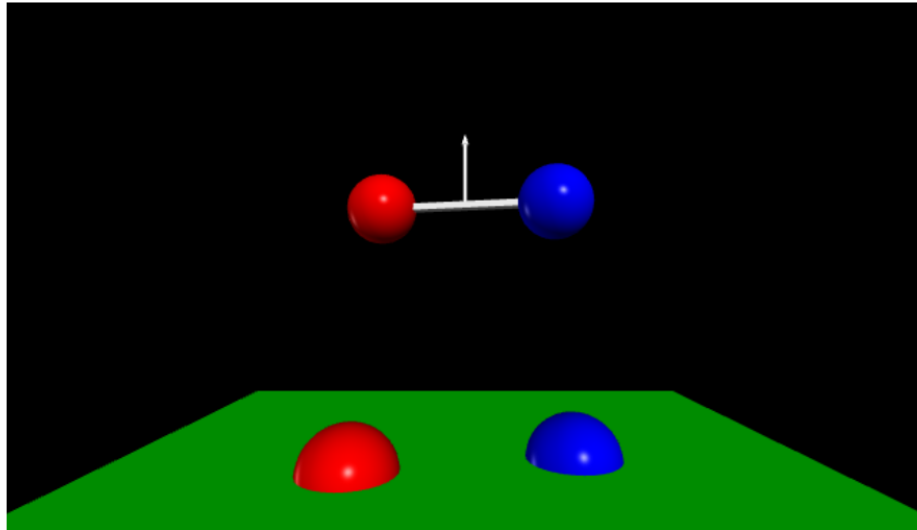


圖(二十二)Jupyter 模擬動畫界面截圖之一

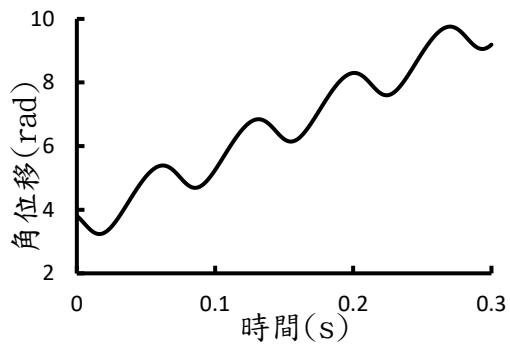
```

for i in range(1500,n,1):
    rate(50)
    balla.pos=vector(1*math.cos(thida[i]),z[i]*1000-25,1*math.sin(thida[i]))
    ballb.pos=vector(-1*math.cos(thida[i]),z[i]*1000-25,-1*math.sin(thida[i]))
    pointer.pos=vector(0,z[i]*1000-25,0)
    pointer2.pos=vector(1*math.cos(thida[i]),z[i]*1000-25,1*math.sin(thida[i]))
    pointer2.axis=vector(-2*1*math.cos(thida[i]),0,-2*1*math.sin(thida[i]))
    ballc.pos=vector(16*math.cos(thidad[i]),0-25,16*math.sin(thidad[i]))
    balld.pos=vector(-16*math.cos(thidad[i]),0-25,-16*math.sin(thidad[i]))

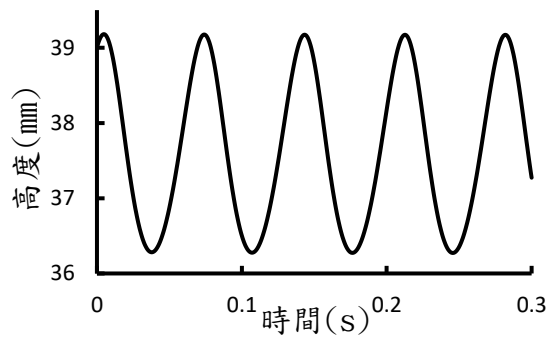
```



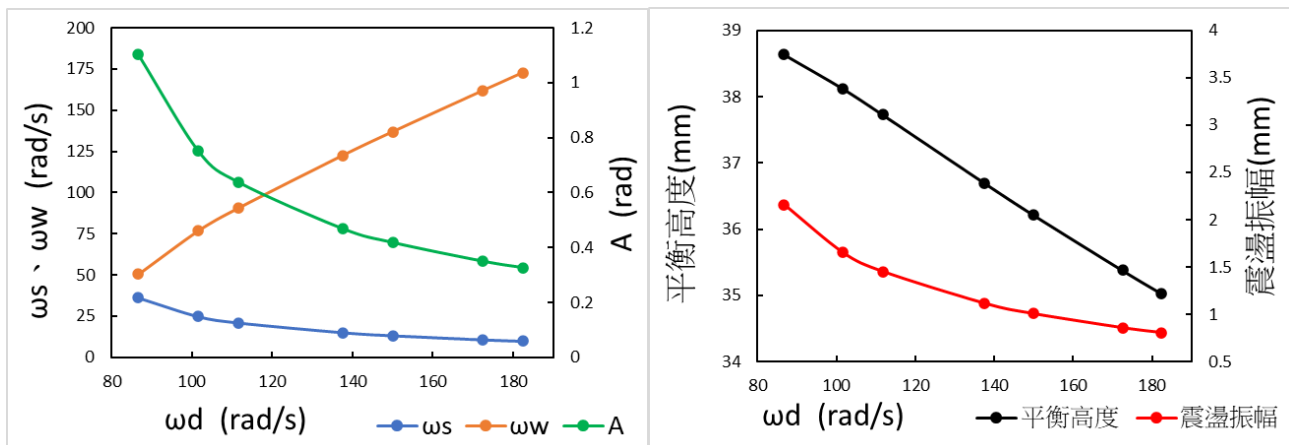
圖(二十三)Jupyter 模擬動畫界面截圖之二



圖(二十四)數值模擬的角位移

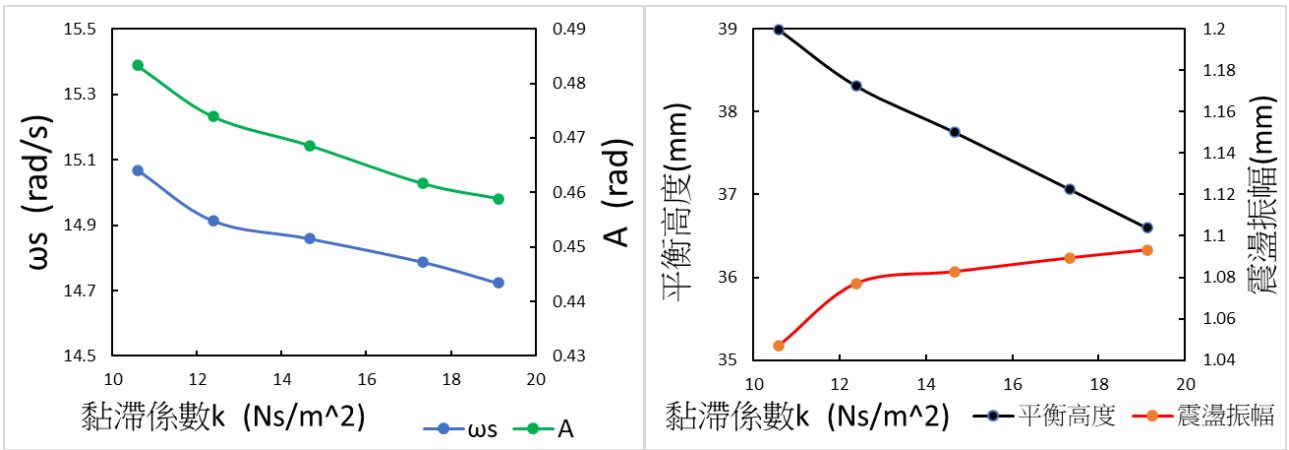


(二十五)數值模擬的的鉛直位移

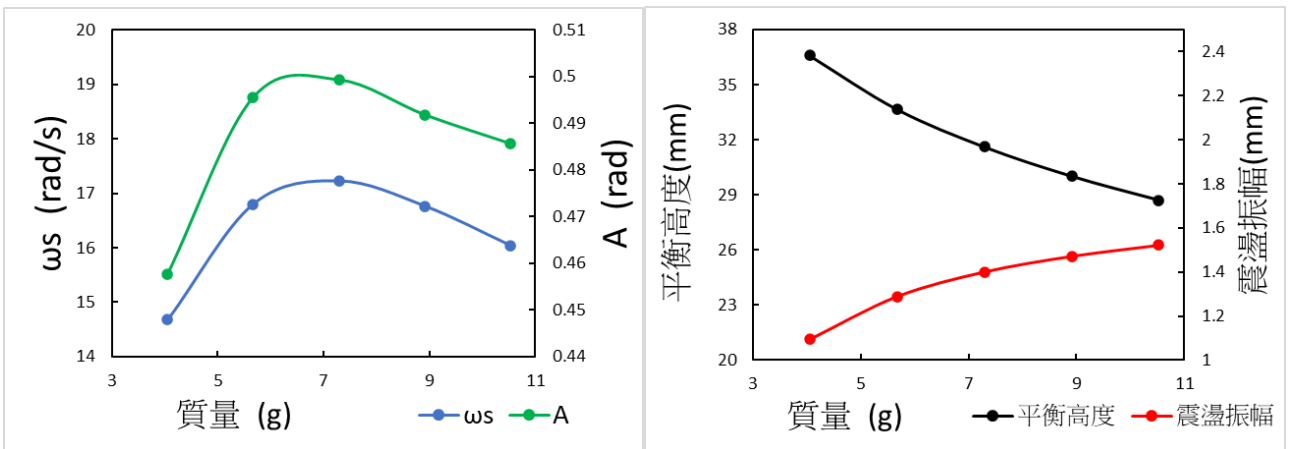


圖(二十六)數值模擬攪拌機轉速與運動參數之關係

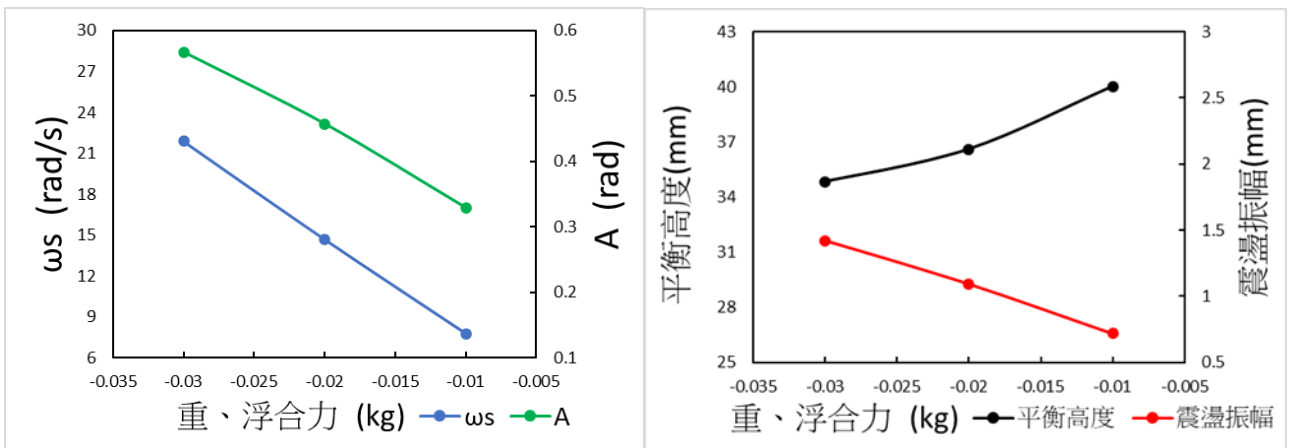




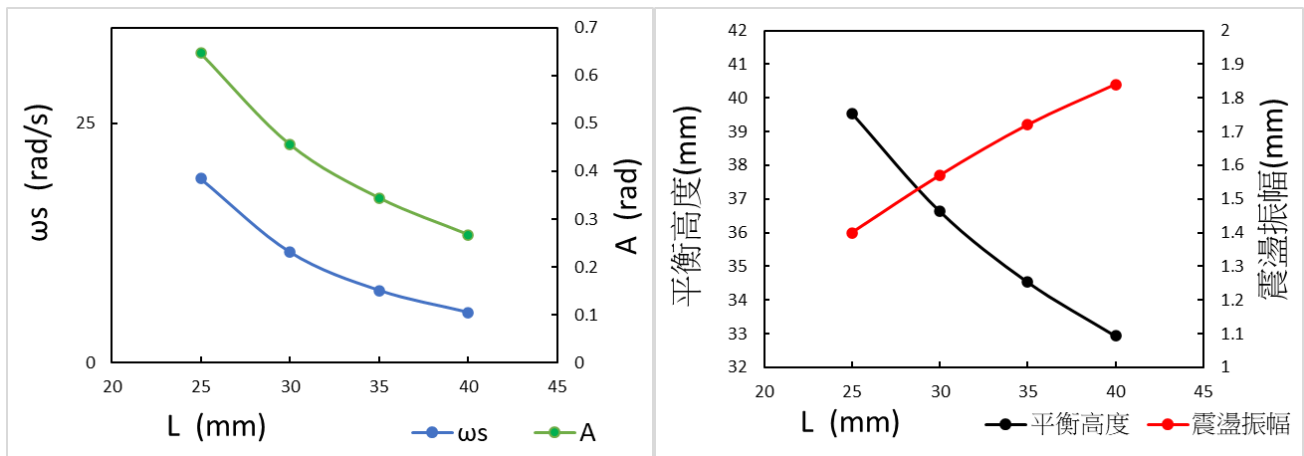
圖(二十七)數值模擬液體黏滯係數與運動參數之關係



圖(二十八)數值模擬磁攪拌子質量與運動參數之關係



圖(二十九)數值模擬重力和浮力之合力與運動參數之關係



圖(三十)數值模擬磁攪拌子長度與運動參數之關係

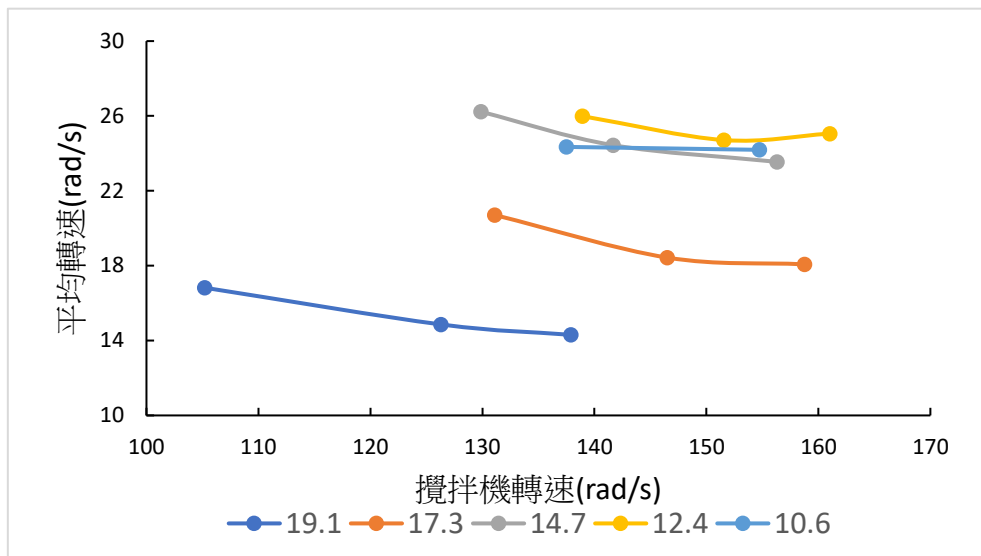
	平均轉速	角頻率	擺動振幅	平衡高度	震盪振幅
攪拌機轉速	負相關	正相關	負相關	負相關	負相關
黏滯係數	負相關	正相關	負相關	負相關	正相關
質量	不一定	不一定	不一定	負相關	正相關
浮力	負相關	正相關	負相關	正相關	負相關
長度	負相關	正相關	負相關	負相關	正相關

表(一)操作變因與運動參數之預期相關性

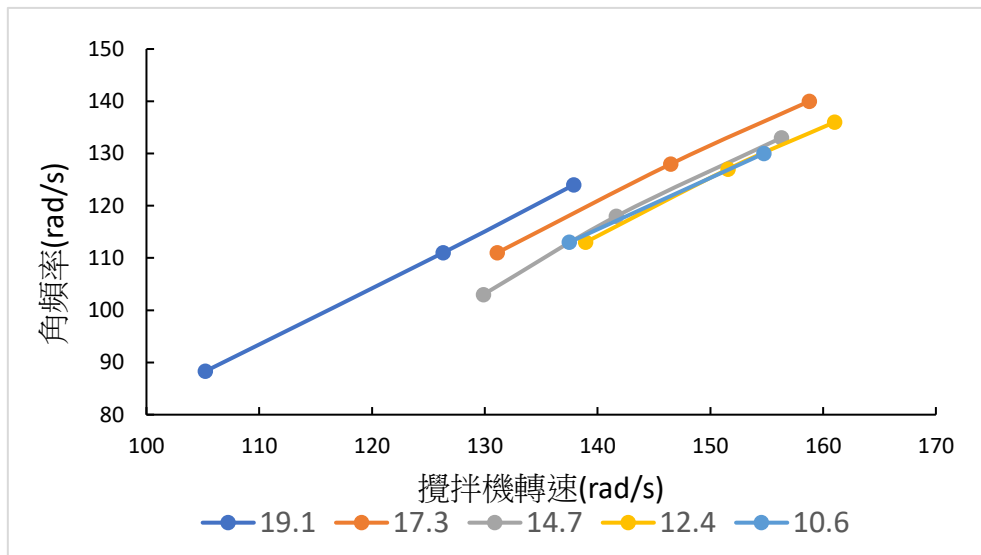
圖(二十二)和圖(二十三)是研究者製作的互動式模擬動畫，調控參數就可觀賞相應的模擬動畫。圖(二十四)和圖(二十五)是模擬出的懸浮軌跡，與實驗的軌跡圖形相似符合實際的情況。從圖(二十六)到圖(三十)是理論模擬的各變因對各運動參數的關係圖，調控各變因取得模擬之軌跡，並用特殊方法(二)分析。

表(一)是對圖(二十六)到圖(三十)的整理，列出各變因對各運動參數的相關性。

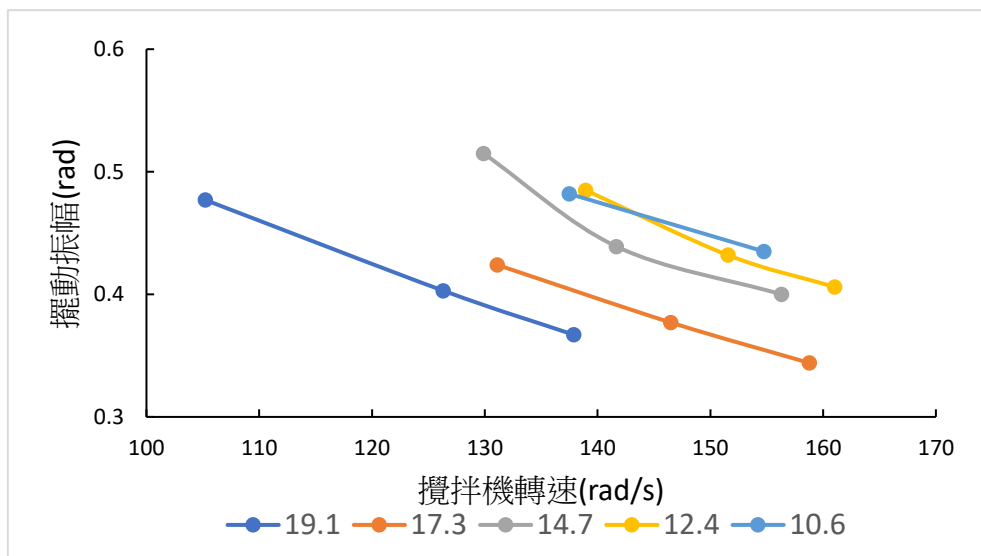
藉由數值分析法可知道各種變因對懸浮運動的影響，於是進行驗證實驗(二)。當攪拌機轉速、液體黏度、磁攪拌子質量增加時，平均轉速、擺動振幅、平衡高度和震盪振幅皆減小，角頻率則增加。攪拌機轉速的部分是符合的，但液體黏度與磁攪拌子質量的部分實驗結果與理論預測不符，因為實驗方法的限制，忽略了浮力的改變。利用 3D 列印出不同質量的外殼時，同時也增加了體積；利用酒精降低蓖麻油的黏度時，減少了密度。因此當液體黏度或磁攪拌子的質量增加時，浮力也增加。若將浮力的因素納入比較，實驗結果在理論的預測範圍以內。另外，磁攪拌子長度之實驗結果中的震盪振幅與理論預測不符，其實在實驗的過程中，加上外殼的磁攪拌子之中心有移動的現象，而理論模擬並沒有考慮中心之移動，可能因此造成此誤差。總體而言，本研究的理論模型在預測變因的影響上有很好的適用性。



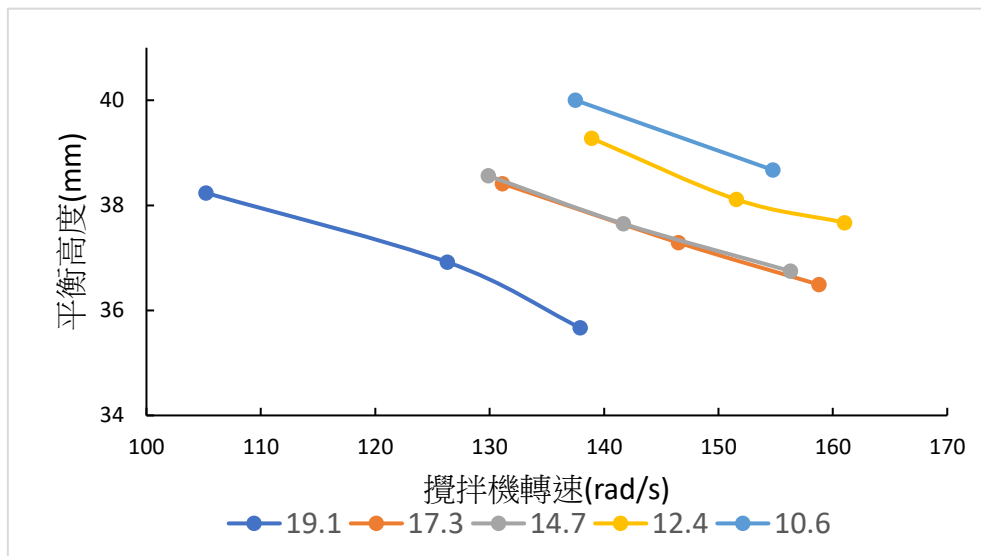
圖(三十一)不同黏滯係數液體中平均轉速與攪拌機轉速之關係



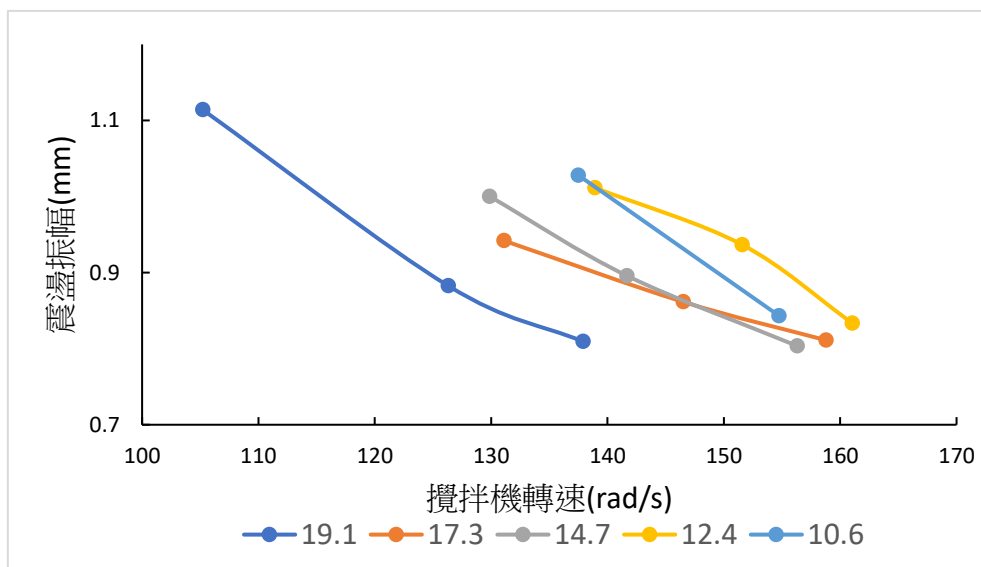
圖(三十二) 不同黏滯係數液體中角頻率與攪拌機轉速之關係



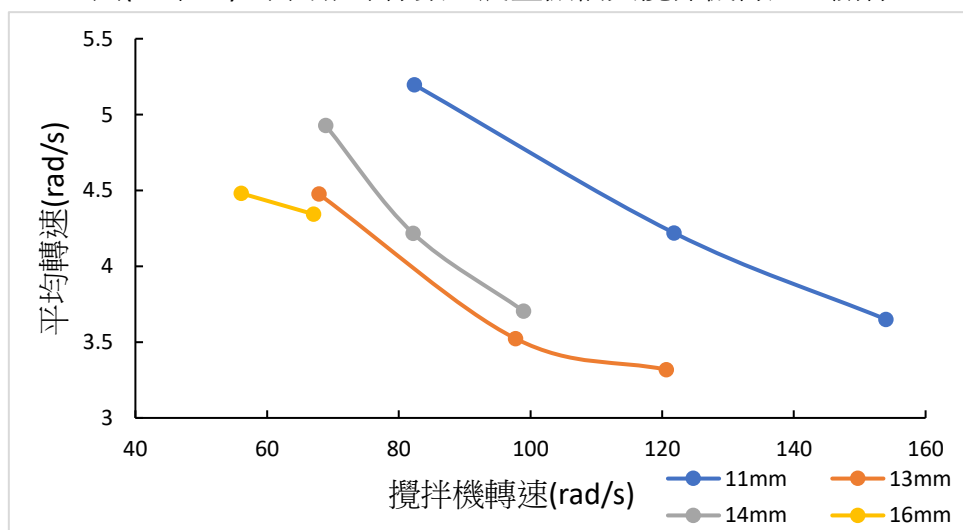
圖(三十三) 不同黏滯係數液體中擺動振幅與攪拌機轉速之關係



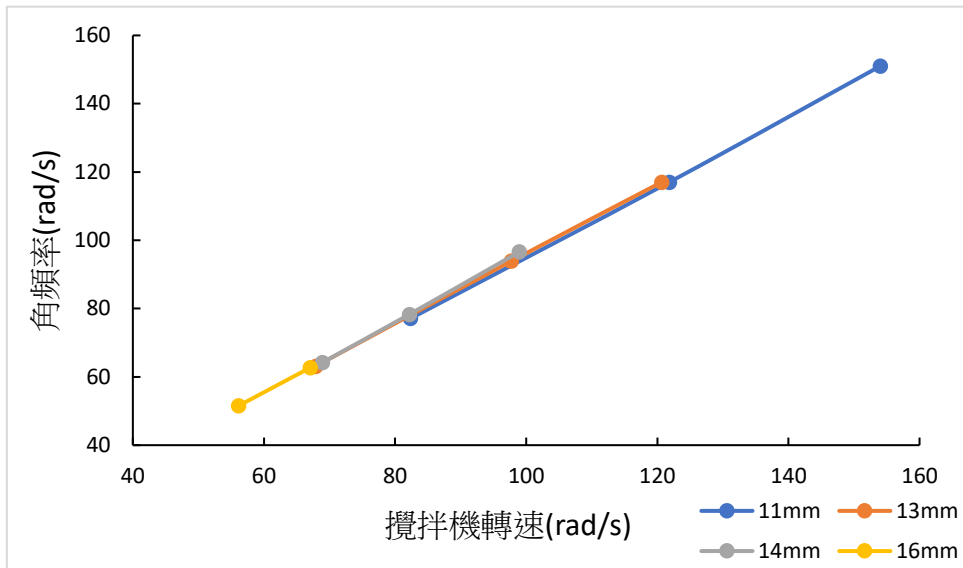
圖(三十四) 不同黏滯係數之平衡高度與攪拌機轉速之關係



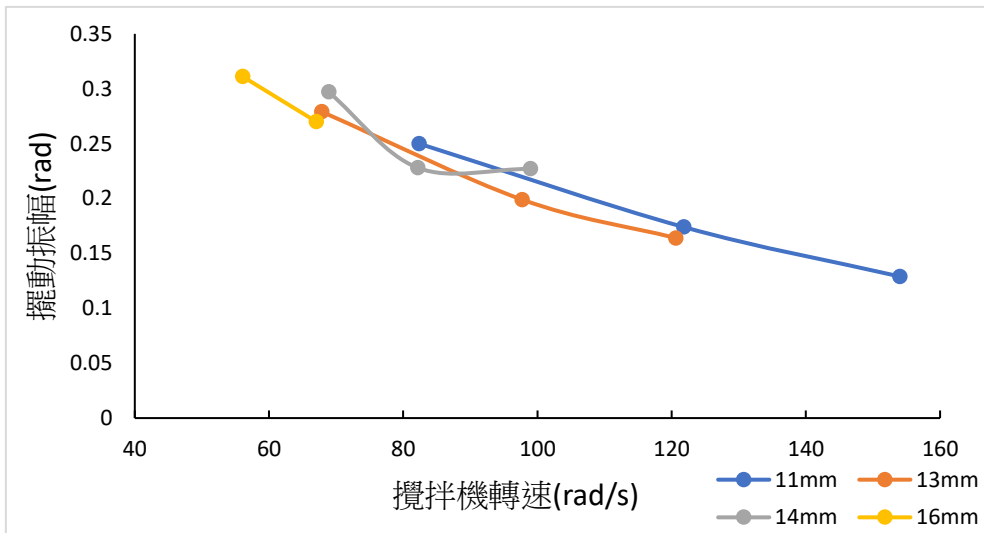
圖(三十五) 不同黏滯係數之震盪振幅與攪拌機轉速之關係



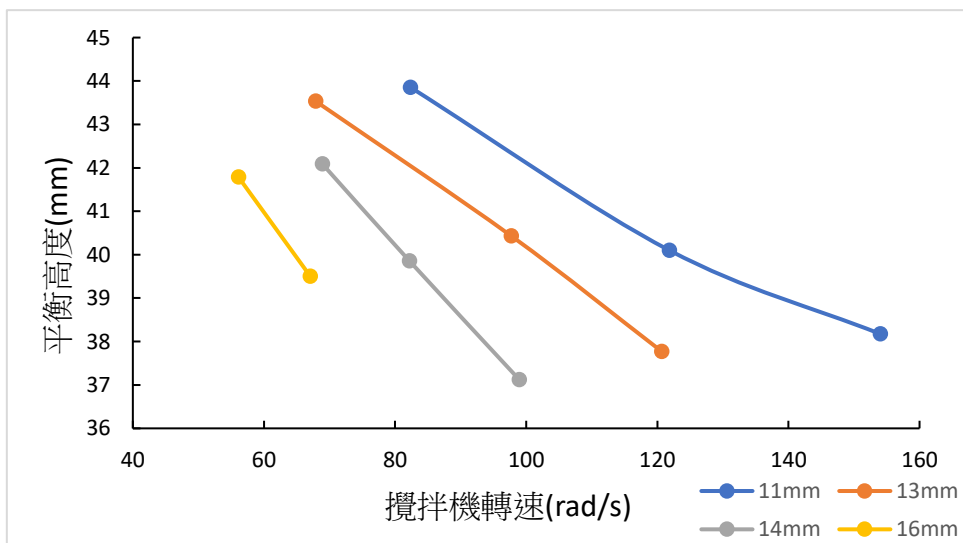
圖(三十六) 不同寬度磁攪拌子平均轉速與攪拌機轉速之關係



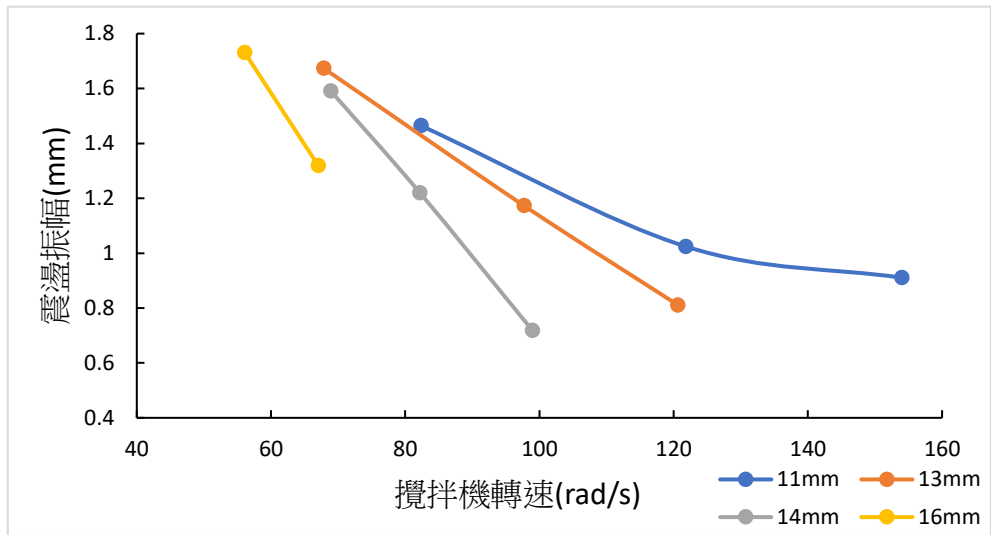
圖(三十七) 不同寬度磁攪拌子之角頻率與攪拌機轉速之關係



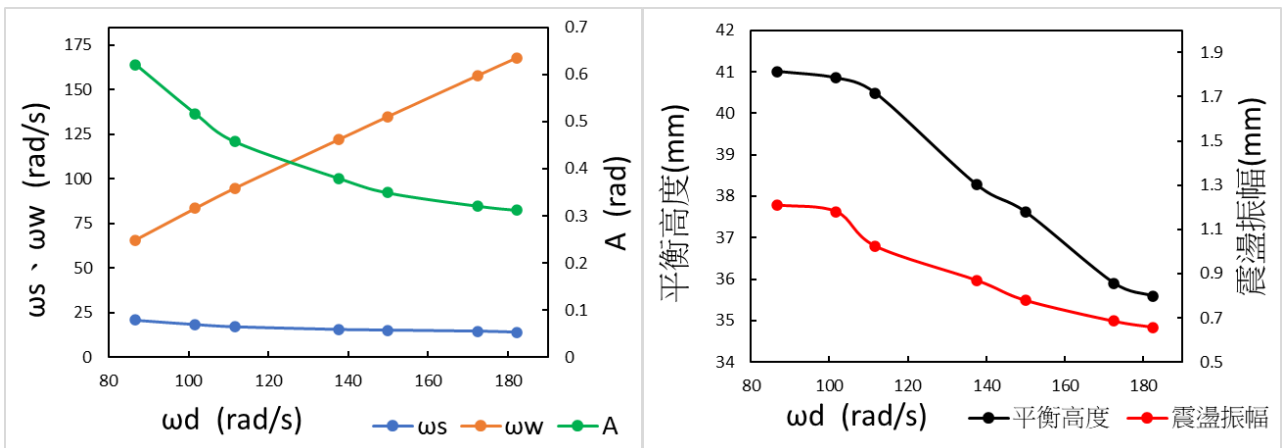
圖(三十八) 不同寬度磁攪拌子之擺動振幅與攪拌機轉速之關係



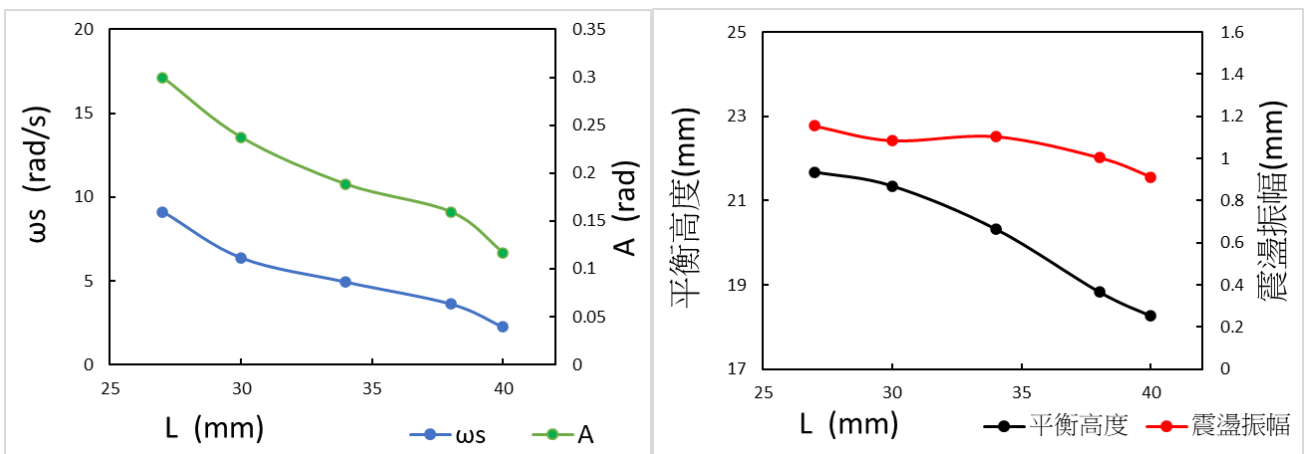
圖(三十九) 不同寬度磁攪拌子之平衡高度與攪拌機轉速之關係



圖(四十) 不同寬度磁攪拌子之震盪振幅與攪拌機轉速之關係



圖(四十一)攪拌機轉速與運動參數之關係

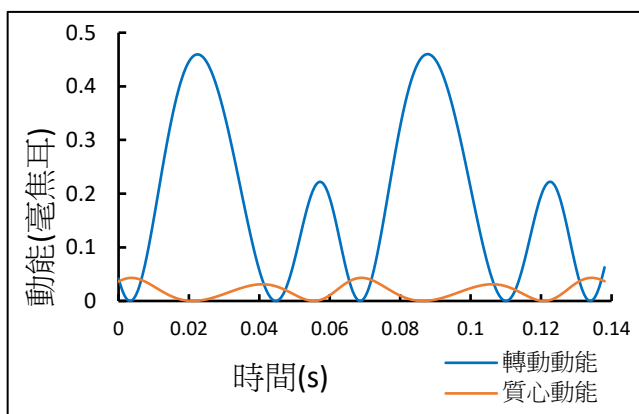


圖(四十二)磁攪拌子長度與運動參數之關係

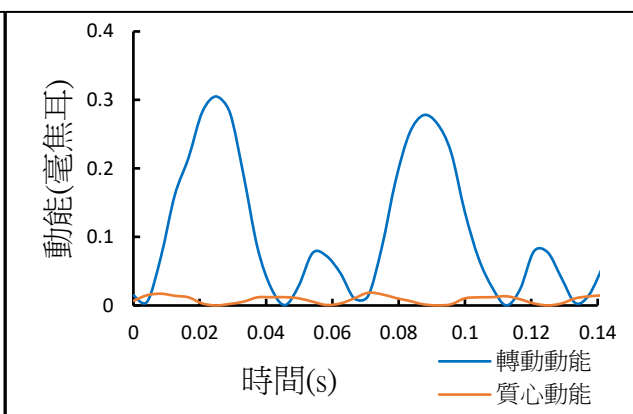


從圖(三十一)到圖(三十五)是液體黏度對各運動參數的關係圖，因為攪拌機轉速無法精確控制，故取多筆資料看趨勢。從圖(三十六)到圖(四十)是磁攪拌子寬度各運動參數的關係圖，因為攪拌機轉速無法精確控制，故取多筆資料看趨勢，可推演成質量對運動參數的趨勢。圖(四十一)是攪拌機轉速對各運動參數的關係圖，因無需調整其它變因，故將各運動參數繪製在一起。圖(四十二)是長度對各運動參數的關係圖，隨著實驗技術的進步，已能夠精確控制攪拌機轉速，故不必取多組資料。

確認理論模型能夠與實驗連結後，可以深入的探討懸浮的運動特性。由理論模型出發，先預期能夠觀察到哪些現象，再做實驗嘗試驗證。本研究關注懸浮運動的動能，動能可分成轉動動能與質心動能做討論，理論模型預測轉動動能與質心動能會彼此消長，並且轉動動能的變化幅度大於質心動能。驗證實驗(三)處理而來的動能圖形能夠發現這些特徵。



圖(四十三)理論預測之動能圖形



(四十四)實驗取之的動能圖形

圖(四十三)和圖(四十四)分別是理論預測與實驗取得的動能圖形，各取兩個週期作為代表。

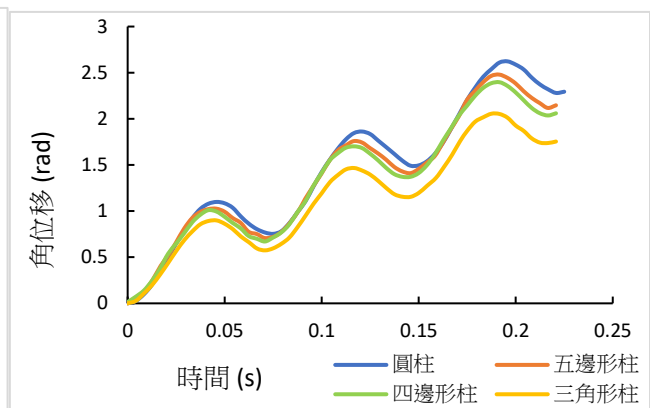
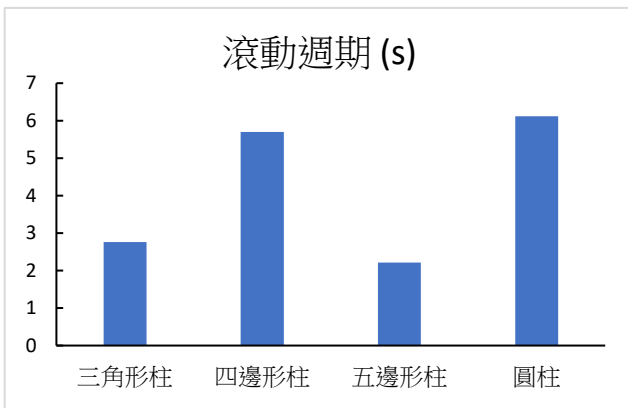
此種轉動動能與質心動能的交互作用是一種耦合。與常見的韋氏擺做比較，韋氏擺的擺動與震盪的振幅需要經過多個週期才能進行一次轉換，磁攪拌子的轉動與質心動能則是在同一個週期內互相消長。擺動與震盪這兩種看似互不干涉的運動透過一個媒介有了交互作用，在韋氏擺是透過彈簧的內力，但是本研究的這兩種運動一直都是分開討論的。其實造成擺動的力矩與造成震盪的鉛直力都來自於磁力，只是為了簡化系統，而將三維的磁力向量拆解成磁力矩與磁鉛直分量。因為擺動與震盪都是由磁力造成的，磁攪拌子的懸浮可以出現耦合。

那麼為什麼磁攪拌子的耦與韋氏擺的有如此大的差異？研究者認為韋氏擺的主體是彈簧，受力物與力源互相連接；磁攪拌子懸浮耦合的主體是快速旋轉超越的磁鐵，受力物與力源不連接，比韋氏擺有更大的自由性，使交互作用能夠在一個週期內就發生。再者，從(式 1.)與(式 2.)可以看出磁力矩與磁鉛直力隨相位角的變化有相差，分別為 $\sin \phi$ 與 $-\cos \phi$ 的變化，這也使耦合更容易發生。

至此為止，懸浮運動的特性與數值模擬方法已討論完備，但在目前的實驗探究中，研究者使用的都是典型的圓柱形磁攪拌子，而不同的外形應會對懸浮運動造成影響，於是進行實驗探究(一)。

實驗探究(一)使用了重量與體積相等的多邊形柱外殼，在實驗的過程中，研究者觀察到磁攪拌子懸浮時除了擺動與震盪，也表現出滾動的運動，於是對其滾動一周所需的時間進行探討。實驗發現三角形與五邊形柱滾動一周的時間少於四邊形柱與圓柱，如圖(四十五)；而針對擺動運動的角度觀測發現，三角形柱的平均轉速稍微慢於圓柱，而四角形與五邊形柱的角度變化與圓形柱大致相等，如圖(四十六)。實驗結果可以推理出規律性：

1. 對於多邊形柱，形狀越對稱，滾動速度越慢，如圓形與四邊形是點對稱，三角形與五邊形則屬於線對稱。
2. 隨著邊數減少，多邊形柱落後圓柱的角度越大，而三角形柱較其他實驗組更明顯。

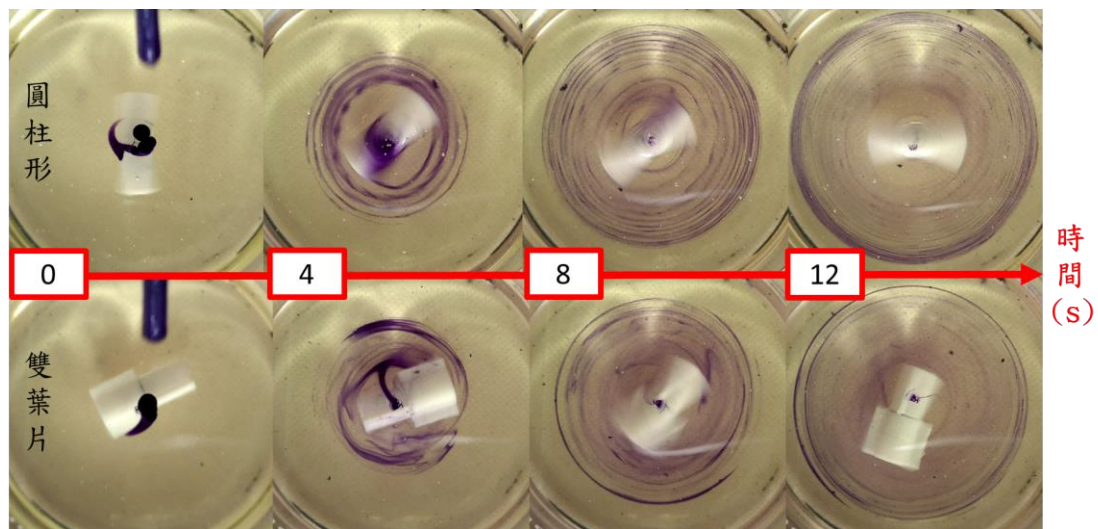


圖(四十五)不同外形磁攪拌子的滾動週期之比較

圖(四十六)不同外形磁攪拌子的轉動角度之比較

圖(四十五)與圖(四十六)是實驗探究(一)的結果。觀察磁攪拌子滾動一周的時間，將各實驗組如圖(四十五)比較。追蹤磁攪拌子的轉動角度，角速度為 0 設為起始，取三個週期，將各實驗組如圖(四十六)比較。

研究者探究多邊形柱外殼的影響後，好奇非柱狀的外形是否會對懸浮運動造成影響，又想到磁攪拌子原本的作用是攪拌，於是將外殼設計出攪拌葉片的形狀，促成實驗探究(二)。研究者發現加上雙葉片外殼的磁攪拌子表現出了非典型的懸浮運動，除了原本的擺動與震盪，還存在滾動與質心的移動，兩者間有特定的互動模式 (詳見未來展望)。因此研究者暫不探討雙葉片磁攪拌子的運動，轉而研究其對液體流對的影響。實驗探究(二)發現雙葉片磁攪拌子能夠更均勻的攪動液體，如圖(四十七)。



圖(四十七) 圓柱形與雙葉片磁攪拌子在各時間點之液體發散對照圖

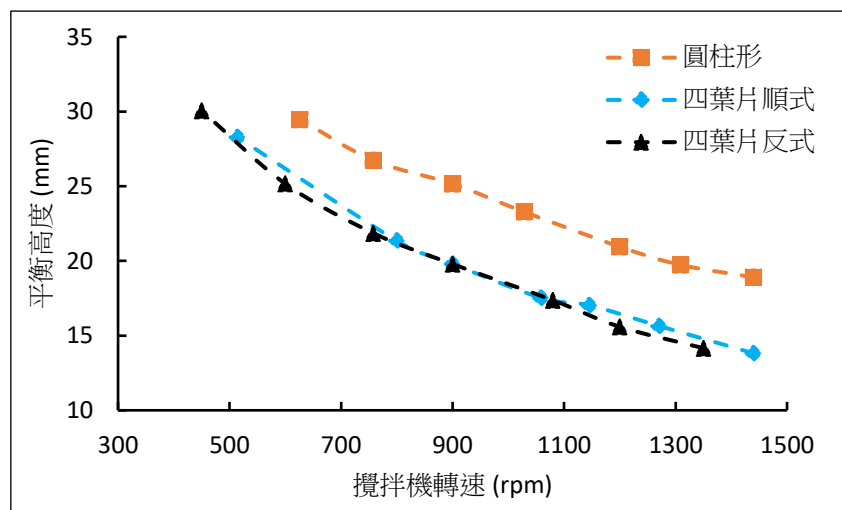
圓柱形磁攪拌子：4s 液體從中心處落下，接觸磁攪拌子後向外送出；

8s 發散範圍更大，呈環形層流型態；12s 液體積累在外層，中段區域仍有液體未混合均勻。

雙葉片磁攪拌子：4s 液體從磁攪拌子側邊落下，液體分布較混亂；

8s 發散範圍更大，液體不如圓柱形的分層明顯；12s 中段區域液體混合較均勻。

由於雙葉片磁攪拌子在懸浮時會滾動，無法限制葉片的方向，研究者設計了四葉片的外殼，有順式與反式兩種方向，詳見實驗探究(三)。考慮懸浮時的轉動方向，順式應使液體往下流動，高度升得更高；反式應使液體往上流動，高度降得更低。為驗證此想法而進行探究實驗(三)，取得平衡高度與攪拌機轉速的關係圖。然而實驗結果表明葉片方向不影響平衡高度。



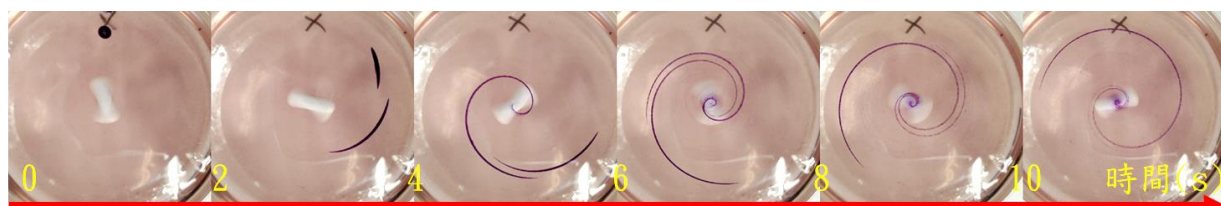
圖(四十八)磁攪拌子外形對平衡高度之關係

圖(四十八)是實驗探究(三)的結果。在同等攪拌機轉速下，未加裝葉片的磁攪拌子之平衡高度較高；而不論葉片的方向是順式或反式，其平衡高度幾乎不變。



受到實驗探究(二)的啟發，研究者認為液體流動是有趣的探究題材，一直以來作實驗都是使用圓形燒杯，因此想了解邊界限制對液體流動的影響，而進行實驗探究(四)。

圓形邊界：液體向中心流動，呈現螺旋的形狀，且整體發生旋轉。



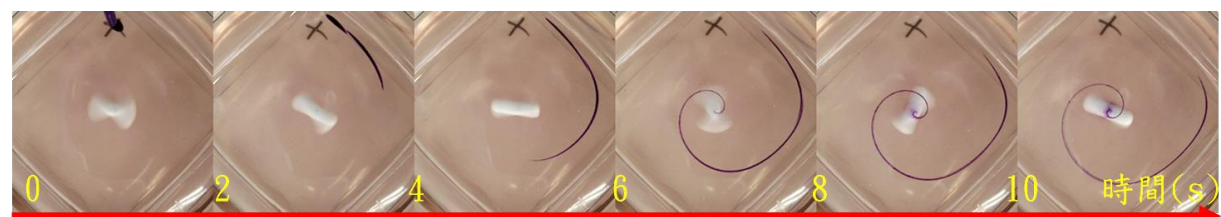
圖(四十九)圓形邊界之液體流動示意圖

三角形邊界：液體向中心螺旋流動，其螺旋不如圓形邊界的明顯；頂角的位置在經歷 10 秒後仍有未流動的液體，整體液體未旋轉。



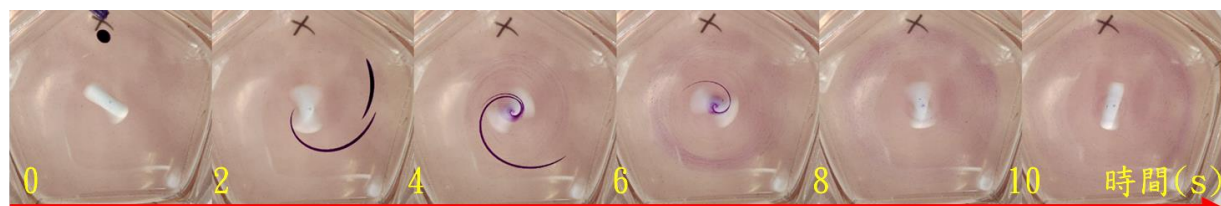
圖(五十)三角形邊界之液體流動示意圖

四邊形邊界：液體向中心螺旋流動，其螺旋受邊界影響而有明顯彎曲；頂角的液體快速流走，而整體液體些微旋轉。



圖(五十一)四邊形邊界之液體流動示意圖

五邊形邊界：液體迅速向中心流去。



圖(五十二)五邊形邊界之液體流動示意圖

根據圖(四十九)至圖(五十二)歸納出以下推論：

推論	論據
磁攪拌子在周圍形成環形流場。	頂角的角度越小，該處的液體越不易流動，三角形邊界即是一個極端的例子。
邊界壓縮磁攪拌子在周圍形成的環流，使流速更快。	圓形邊界的液體在周圍停留的時間較五邊形邊界久，而五邊形邊界將液體限制在較小的空間。

至此為止，研究者發展了懸浮運動的數值分析法，也對磁攪拌子的外形與容器的邊界限制進行了有趣的實驗探究。而研究者有意繼續研究此懸浮現象的應用性，於是朝著「適合達成磁懸浮」的方向改良磁攪拌機。

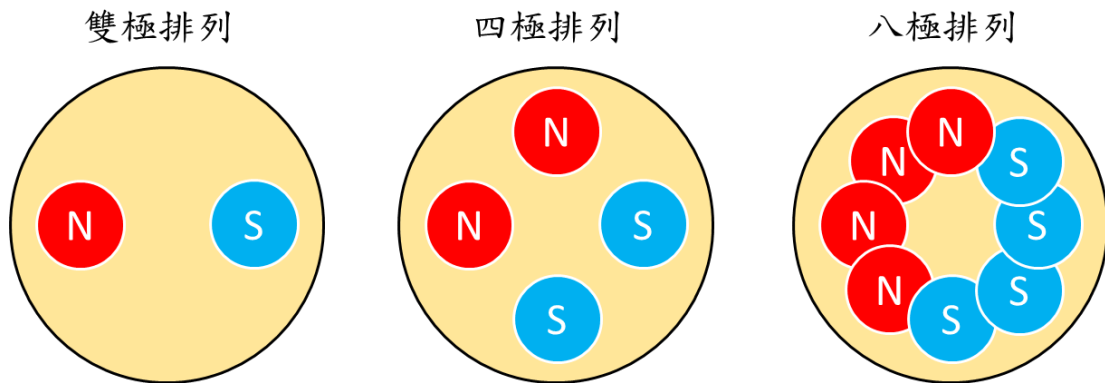
磁攪拌機最原始的作用是牽引磁攪拌子與驅動磁鐵同步旋轉，為達攪拌的作用，需要強大的磁力才不至於被攪拌中的阻力阻礙。但若是為了進行懸浮運動，磁鐵的磁力應不需要太強，因此研究者擬改良驅動磁鐵。原本磁鐵的 N 極與 S 極同時作用於驅動系統中，磁極位置不明確，如果使用兩個小磁鐵分別代表 N 極與 S 極，驅動系統將會更接近磁偶極，且能減少磁力。從(式 3.)可知， $\frac{M_t}{z^3} \approx \frac{1}{12} k L^3 \omega_d$ ，磁攪拌子跳起的臨界轉速與磁力矩強度呈正相關，因此減少磁力可讓懸浮運動更輕易達成。

而研究者將焦點放在磁力強弱對懸浮運動的影響，以數值模擬法觀察。假如可以做到以個別磁鐵表現單一磁極，應可以做到多磁極驅動系統，研究者以數值模擬法模擬二極、四極、八極的驅動系統，其中同極相鄰、異極相對，如圖(五十三)所示。多磁極驅動系統可視為多對磁偶極的疊加，所以改寫方程式中新增之磁偶極的相位差即可，如(式.4)與(式.5)的四極驅動系統之懸浮運動方程式，其中僅新增了另一個磁偶極的磁力項目，且兩磁偶極有著 $\pi/2$ 的相位差。由數值模擬預測：

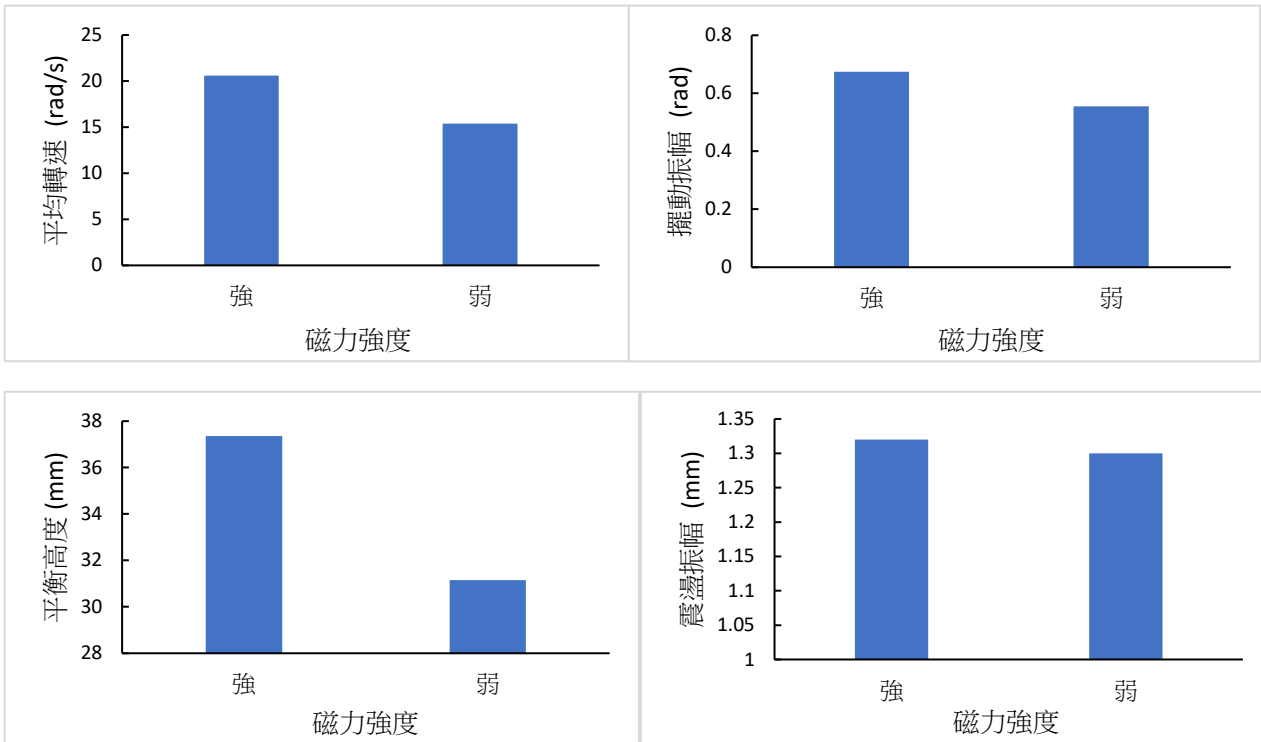
1. 磁力減弱時，各個運動參數皆有下降的趨勢。
2. 磁極數目增加時，平均轉速、擺動振幅、平衡高度有增加的趨勢，而震盪振幅則是減少。

$$I\ddot{\theta}_f = \frac{M_t}{z^3} \cdot \sin(\phi(t)) + \frac{M_t}{z^3} \cdot \sin\left(\phi(t) + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{12} k L^3 \dot{\theta}_f \quad (\text{式.4})$$

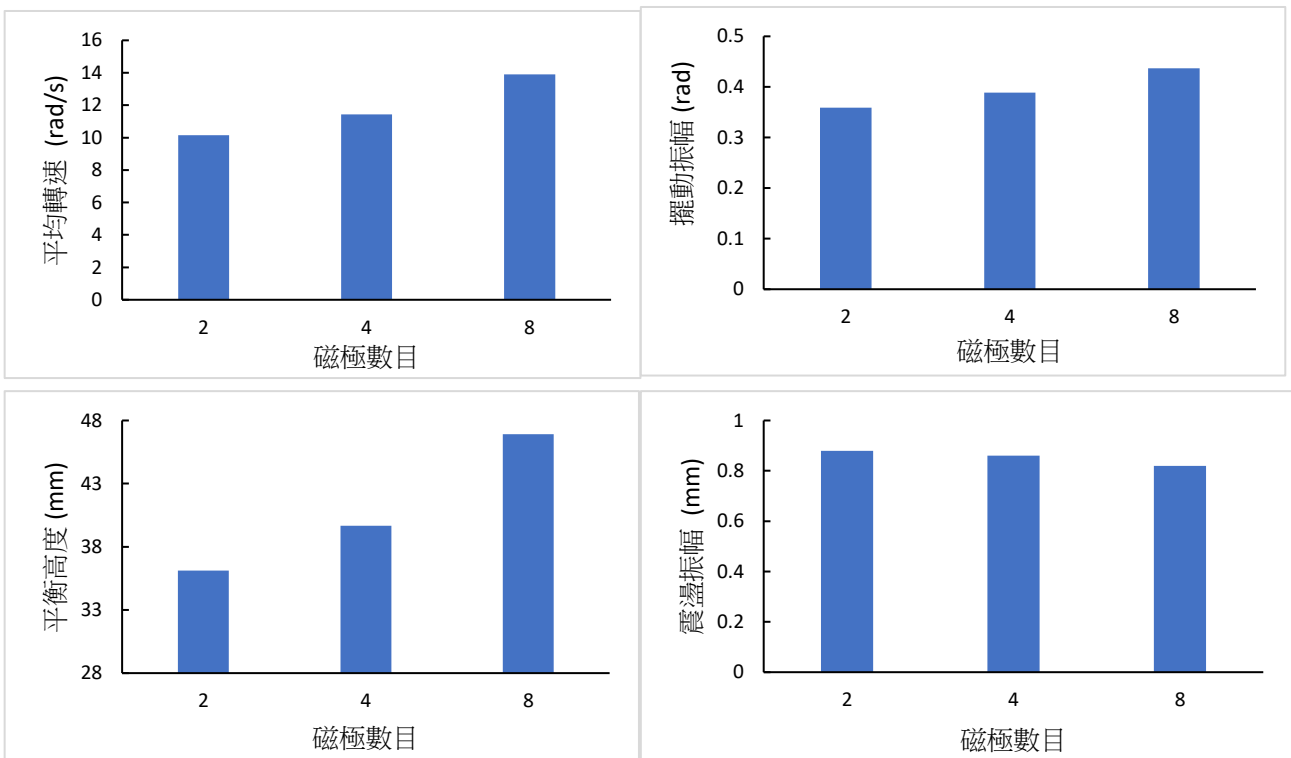
$$m\ddot{z} = -mg - \frac{M_f}{z^4} \cdot \cos(\phi(t)) - \frac{M_f}{z^4} \cdot \cos\left(\phi(t) + \frac{\pi}{2}\right) - kL\dot{z} \quad (\text{式.5})$$



圖(五十三)多極排列示意圖



圖(五十四)理論模擬的各項運動參數與磁力強度之比較



圖(五十五)理論模擬的各項運動參數與磁極數目之比較

圖(五十三)說明雙極、四極、八極的排列方式，其中同極相鄰、異極相對。

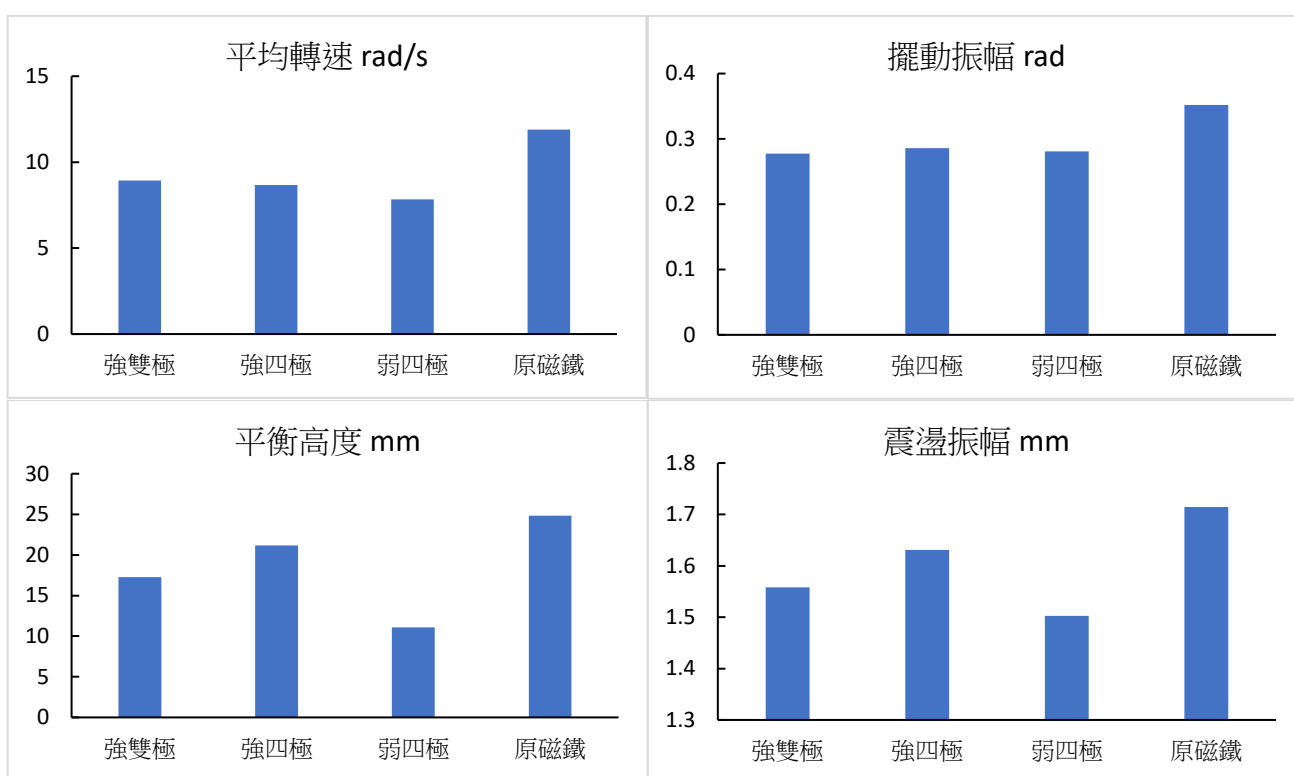
圖(五十四)與圖(五十五)為磁力強弱與磁極數目的運動參數變化之理論模擬，其中平衡高度為磁攪拌子至驅動磁鐵的距離。



知曉理論模擬的結果後，即設法將其實現，實驗方法與使用器材詳見實驗探究(五)與實驗器材(二)改進磁攪拌機。將鈷鐵硼磁鐵與氧化鐵磁鐵簡稱為強與弱，其後加上磁極數目，如氧化鐵磁鐵雙極排列簡稱為弱雙極。實驗發現弱雙極無法使磁攪拌子懸浮，而研究者將其他實驗組的運動參數與使用原磁鐵的對照組作比較，有以下發現：

1. 磁極化的驅動系統的平均轉速、擺動振幅、平衡高度、震盪振幅皆低於原本的驅動系統。
2. 強雙極、強四極、弱四極的轉動方面的參數差異不大。
3. 各實驗組的平衡高度與震盪振幅之變化趨勢一致。

將強四極與弱四極一同比較，各項參數隨磁力強弱的變化符合理論的預測。而將強雙極與強四極比較，從雙極變四極對擺動振幅與平衡高度的變化符合理論的預測，但平均轉速與震盪振幅不符合。

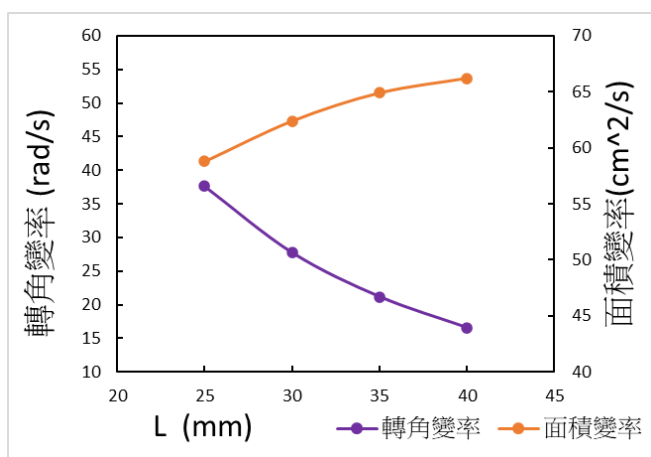


圖(五十六)各項運動參數與磁極排列方式之比較

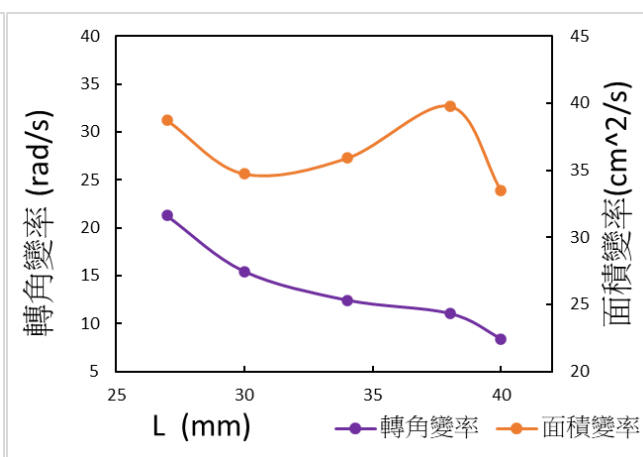
圖(五十六)為實驗探究(五)的結果，將各實驗組的運動參數放置在一起比較，其中平衡高度是磁攪拌子至燒杯底部的距離。

改進磁攪拌機後，研究者欲探討磁攪拌子的攪拌效率，認為攪拌效率與單位時間內轉過的面積有關，於是使用理論模擬長度與轉角變率和面積變率的關係。轉角變率為一秒內轉過的角度；面積變率為一秒內掃過的面積。如圖(五十七)，雖隨轉角變率減少，但面積變率因受長度影響而增加。

使用驗證實驗(二)中操縱變因為長度之實驗數據，分析得長度與轉角變率和面積變率的關係，如圖(五十八)。根據實驗的情況，長度增加到 40mm 時，磁攪拌子傾斜著懸浮，且轉動中心不斷移動，非理論所預設的情況，若不考慮這組資料，面積變率有隨長度增加的趨勢。而轉角變率與長度呈負相關，亦符合理論之預測。



圖(五十七)理論模擬長度與面積變率之關係



圖(五十八)實驗的長度與面積變率之關係

圖(五十八)從驗證實驗(二)中長度變因的實驗數據分析而來，因主要探討的對象「面積變率」是由轉角變率處理而來，因此也加入理論模擬與實驗分析。

然而研究者發現加上驗證實驗(二)中長度變因之外殼的磁攪拌子無法在氧化鐵磁鐵之四極驅動系統懸浮，推測是因為外殼太重了。因此改使用吸管加長磁攪拌子，期望輕量化的磁攪拌子能在較弱的驅動系統中懸浮，為探究實驗(五)的一部分。實驗發現同樣 4cm 的長度，若使用吸管增長磁攪拌子，可在磁鐵較弱的情況下運作。且加裝吸管的磁攪拌子之懸浮落下極限馬達轉速，比未加裝的低。

這一連串的改良與實作在應用層面上提供了實用的辦法。若將實驗探究(五)中所分析的面積變率視為攪拌效率的指標，實驗結果顯示適度的增加磁攪拌子的長度可以增加攪拌效率，而長度變長也代表攪拌範圍增大。在實驗探究(五)中，發現輕量化的加長磁攪拌子可以使保持懸浮的低限馬達轉速降低，長時間攪拌時能夠減少耗能。而懸浮運動不一定只能由磁攪拌機達成，馬達可以輕易取得，對磁鐵磁性的要求也不高，儘管擁磁鐵很弱，只要形成多極排列，也可以是成功的驅動系統。

## 柒、結論

一、本研究對於為何磁攪拌子會在黏度高的液體中跳起，提出了定性的解釋與定量的描述。黏滯力會隨著速度增加，磁攪拌子為了與驅動磁鐵保持同步旋轉，需要相應的磁力矩抵抗黏滯力矩，因此轉速越快兩者間的夾角就越大，到達垂直時磁攪拌子即將跳起，此適用於方程式  $\frac{M_t}{z^3} \approx \frac{1}{12} k L^3 \omega_d$ 。

二、本研究對於為何磁攪拌子會在黏度高的液體中維持懸浮，提出了定性的解釋與定量的描述。因為磁攪拌子進行週期性的懸浮運動時，在低處受到了較強的向上磁力與順向力矩，因此能夠維持在一定的高度懸浮，並且有增加角度的傾向。此適用於方程組

$$I\ddot{\theta}_f = \frac{M_t}{z^3} \cdot \sin(\phi(t)) - \frac{1}{12} k L^3 \dot{\theta}_f \quad m\ddot{z} = -m\dot{g} - \frac{M_f}{z^4} \cdot \cos(\phi(t)) - kL\dot{z} \quad .$$

三、本研究根據懸浮運動的方程組發展數值模擬法，並將模擬的軌跡以 `vpython` 動畫化。在這之中增加了數個可變動的參數，並進行實驗驗證此模型的適用性。在這之後，更是使用本研究發展的數值模擬法，測試多極驅動系統的可行性，表示此研究具有實用價值。

四、本研究以實驗探討磁攪拌子外形對懸浮運動的影響，實驗結果顯示外形並無顯著影響，但探究的過程中發現了滾動，外形越對稱，其週期越長。研究者也對液體流動進行實驗探究，發現外加攪拌葉片的磁攪拌子能夠打亂原有的層流結構，將液體更均勻的混合。

五、本研究以實驗探討邊界限制對液體流動的影響，根據實驗結果歸納：磁攪拌子作懸浮運動時，表面的液體以螺旋路徑向中心流動，在周圍形成環形流場，而邊界的限制壓縮了環流，造成流速加快。

六、本研究對懸浮運動的應用方面提出了實用的辦法。首先，研究者改進原有的磁攪拌機，使用多磁極的驅動系統，即使磁力弱的磁鐵也能使磁攪拌子懸浮。接著討論長度對攪拌效率的影響，長度增加能夠增加攪拌效率；也使用輕量化的方式增長磁攪拌子，成功在較弱的驅動系統中懸浮。

## 捌、應用

磁攪拌子的動態懸浮運動如此獨特，它打破了一般所了解的攪拌與懸浮的框架。此種運動告訴我們，磁攪拌機的攪拌功能不只侷限在液體的底部，經過巧妙的力學作用，它可以懸浮在液體中作擺動與震盪，因為是動態的懸浮，磁攪拌子仍然擁有攪拌的功能。研究著認為此種現象可以應用在不同黏度液體的混合，但是普通的混合並不能發揮此現象的應用價值。研究者發現進行某些化學反應時，需要將一液體倒入另一較黏稠的液體，然後攪拌進行反應。一般葉片式的定點攪拌無法控制反應速率，而磁攪拌子的懸浮式攪拌能夠週期性的攪動液體，且造成的液流為穩定的層流，應該可以穩定的進行反應。

## 玖、未來展望

在進行實驗探究(二)時，研究者發現了雙葉片磁攪拌子的獨特運動模式，除了擺動與震盪，還具有滾動與質心的圓周運動，而這些運動之間存在特定的互動模式。

先從滾動說起，此種運動模式之滾動的特殊之處在於不是滾一整圈，而是在 180 度內擺盪，因此造成某一端葉片重複的平放與直立。而此種滾動與轉動和質心移動有著特殊的關聯，在轉動與質心移動的影響下，磁攪拌子的兩端會交替出現在中央與外側。研究者觀察到在中樣的那一端有讓葉片平放的傾向，而外側就有直立的傾向，當磁攪拌子的一端反覆出現在中央與外側時，葉片也會週期性的滾動。而滾動的方向有一定的規律性，若磁攪拌子之轉動傾向為順時針，則在外側的那一端來看，也會是順時針滾動，當原本在外側的一端移動至中央，滾動方向也就改變。除此之外，外側端的鉛直移動幅度較大，移至內側後又會變小，如此不斷反覆。

對於為何會有如此運動模式，研究者還未有頭緒。由於此為整體性的週期變動，難以逐一拆解討論原因。若未來有機會進行更深入的探究，這會是十分有趣的課題，也期望本研究的數值模擬法能夠繼續發展，能模擬質心移動的情況。










## 拾、參考資料

- 一、 陳亮宇。黏滯液體中的磁懸浮現象
- 二、 探討攪拌子在溶液中轉動產生懸浮之研究
- 三、 Baldwin, Kyle & de Fouchier, Jean-Baptiste & Atkinson, Patrick & Hill, R. & Swift, M. & Fairhurst, David. (2018). Magnetic Levitation Stabilized by Streaming Fluid Flows.
- 四、 2020 物理辯論賽第 9 題，取自 <http://typt.phy.ntnu.edu.tw/news/139-12th-typt.html>
- 五、 Andrey Kuznetsov. Comment on "Magnetic Levitation Stabilized by Streaming Fluid Flows"
- 六、 NOBUO MITSUISHI, KATSUYUKI NAKANO AND YOSHIKI ID. Department of Chemical Engineering, Kyushu University, Fukuoka, Japan(1972).  
MIXING AND REACTION IN HIGHLY VISCOUS LIQUID'
- 七、 Sarah H Ali. (2019). Measure liquid viscosity by tracking falling ball Automatically depending on image processing algorithm

正文於上一頁結束

## 附錄

### 一、實驗器材

器材名稱	變壓器	支架	磁攪拌子
照片			
用途	改變電壓以控制攪拌機轉速	固定力感測器以測量磁攪拌子受力、固定手機拍攝實驗紀錄影片	研究懸浮前及懸浮狀態下的各種物理量
器材名稱	甘油	蓖麻油	酒精
照片			
用途	磁攪拌子懸浮用液體	磁攪拌子懸浮用液體	改變蓖麻油濃度
器材名稱	記憶式拉壓力計	伸縮支架	量筒
照片			
用途	測量磁攪拌子的受力	改變盛裝液體之燒杯與磁攪拌機之間高度	測量磁攪拌子體積與蓖麻油黏度的器材

## 二、互動式模擬動畫之程式碼

語言：python

執行環境：Jupyter

第一部分：

```
import math
import numpy as np
n=5000
inertia=1.87304*10**-7
magfor=10**-6.76
magtor=10**-7.0117
thida=[0]*n
z=[0]*n
omega=[0]*n
v=[0]*n
a=[0]*n
t=[0]*n
alpha=[0]*n
thida[0]=-2
z[0]=0.0385
omega[0]=-6.8
v[0]=-0.05
thidad=[0]*n
dt=0.001
from ipywidgets import interact
def f(omegad,k,mass,buoyancy,length):
    buoyancy=buoyancy/1000
    mass=mass/1000
    f=-mass*9.8+buoyancy
    vistor=(-2.52001*10**-5)*k/19.2*(length/25)**3
    visfor=-0.48*k/19.2*length/25
    inertia=mass*1.87304*10**-7/0.00405
    for i in range(1,n,1):
        t[i]=0.001*i
        thidad[i]=omegad*t[i]
        alpha[i]=(magtor*math.sin(thidad[i]-thida[i-1]))/(z[i-1]**3)+vistor*omega[i-1])/inertia
        a[i]=(-magfor*math.cos(thidad[i]-thida[i-1]))/(z[i-1]**4)+visfor*v[i-1]+f)/mass

        z[i]=z[i-1]+v[i-1]*dt+a[i]*dt*dt/2
        thida[i]=thida[i-1]+omega[i-1]*dt+alpha[i]*dt*dt/2
```



```

v[i]=v[i-1]+a[i]*dt
omega[i]=omega[i-1]+alpha[i]*dt

```

```

interact(f,omegad=(50,150),k=(9.,29.),mass=(2.,6.),buoyancy=(12.,36.),length=(15,35))

```

第二部分：

```

from vpython import *

```

```

size = 25

```

```

l=size/2

```

```

scene = display(width=800 ,height=600, center = (0,300,0), background=(0.5,0.5,0))

```

```

floor = box(length=100, height=1, width=100, color=color.green)

```

```

floor.pos = vector(0,-25,0)

```

```

balla = sphere(radius = 5, color=color.red)

```

```

ballb = sphere(radius = 5, color=color.blue)

```

```

balla.pos=vector(l*math.cos(thida[0]),z[0]*1000,l*math.sin(thida[0]))

```

```

ballb.pos=vector(-l*math.cos(thida[0]),z[0]*1000,-l*math.sin(thida[0]))

```

```

pointer = arrow(pos=vector(0,38.5,0), axis=vector(0,10,0), shaftwidth=0.5)

```

```

pointer2 = arrow(pos=vector(0,38.5,0),axis=vector(l*math.cos(thida[0]),38.5,l*math.sin(thida[0])),
shaftwidth=1)

```

```

ballc = sphere(radius = 7, color=color.blue)

```

```

balld = sphere(radius = 7, color=color.red)

```

```

ballc.pos=vector(16,0,0)

```

```

balld.pos=vector(-16,0,0)

```

```

for i in range(1500,n,1):

```

```

    rate(50)

```

```

    balla.pos=vector(l*math.cos(thida[i]),z[i]*1000-25,l*math.sin(thida[i]))

```

```

    ballb.pos=vector(-l*math.cos(thida[i]),z[i]*1000-25,-l*math.sin(thida[i]))

```

```

    pointer.pos=vector(0,z[i]*1000-25,0)

```

```

    pointer2.pos=vector(l*math.cos(thida[i]),z[i]*1000-25,l*math.sin(thida[i]))

```

```

    pointer2.axis=vector(-2*l*math.cos(thida[i]),0,-2*l*math.sin(thida[i]))

```

```

    ballc.pos=vector(16*math.cos(thidad[i]),0-25,16*math.sin(thidad[i]))

```

```

    balld.pos=vector(-16*math.cos(thidad[i]),0-25,-16*math.sin(thidad[i]))

```