

第二十屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA20-346

作品名稱：更高維法里數列存在性研究

姓名：洪銘德

關鍵字：法里數列、福特圓、高維空間

目錄

壹、 簡介.....	1
一、 摘要.....	1
二、 研究動機.....	2
三、 研究目的.....	2
四、 研究過程.....	3
貳、 研究內容.....	4
一、 法里數列與其性質.....	4
(一) 相鄰項關係.....	4
(二) 正方形與法里數列.....	5
(三) 法里數列面積.....	5
二、 平面中的福特圓.....	6
(一) 福特圓會互相外切的性質.....	6
(二) 福特圓衍生的想法.....	7
(三) 福特圓的面積和.....	7
三、 三維空間中的福特球(舊定義).....	8
(一) 福特球衍生的方法.....	8
(二) 福特球半徑之間的關係.....	9
(三) 固定一顆球衍生的福特球.....	11
四、 三維空間的福特球(新定義).....	12
(一) 起始福特球的體積.....	12
(二) 福特球半徑關係.....	13
(三) 衍生福特球的球心位置.....	14
(四) 衍生球相切討論.....	15
五、 三維的法里數列.....	16
六、 高維空間中的福特球.....	18
(一) 福特球的衍生方法.....	18
(二) 起始球與衍生球的半徑關係.....	19

(三)	衍生球 x 座標位置	20
(四)	衍生球球心座標位置.....	21
(五)	衍生球相切討論	25
七、	高維空間中的法里數列	26
參、	結論.....	27
肆、	討論及應用	28
伍、	參考資料	28
附錄	29
一、	三維法里數列列表	29
二、	同一方向衍生的福特球	30
(二)	半徑倒數關係	31
(三)	座標關係	31
(四)	收斂性討論	31
三、	固定一球衍生的福特球	32
(一)	半徑倒數關係	33
(二)	座標關係	33
四、	證明.....	34
(一)	正方形與法里數列	34
(二)	法里數列面積	35
(三)	福特圓會相外切的性質.....	36
(四)	福特球半徑之間的關係.....	37
(五)	起始福特球的體積	38

壹、簡介

一、摘要

在這篇作品中，研究了法里數列的性質，並試圖藉由與二維法里數列有關的福特圓，將其推廣到空間中，找到空間中與法里數列相應的數。

研究分成兩個階段，第一階段是舊定義的階段。此階段中，定了空間中有起始三個相切的球，從這三個球繼續做更小的相切球。在幾個特例中，發現了特殊數列、切比雪夫多項式和一些球之間的特殊關係，並有試圖證明之。在經過一系列的討論，發現推廣到空間後的福特球有與平面福特圓重疊的部分，所以就大膽的假設這一大堆球，可以跟另一種定義等價——直接把平面的福特圓變成三維空間的球(也就是起始球是一整排無限多顆的球)，然後做相切小球可以得到一模一樣的結果。這樣的定義好處就是排除了原本定義很難多方向衍生的侷限性，並且對體積的求得比較有利，而跟平面福特圓的關聯性也更加的強。至於文獻部分，在研究後才發現有其他人也以起始三球的方式衍生福特球，但目前沒有看到以新定義來衍生福特球的文獻，而以舊定義來研究的文獻，也沒有得到全面性的結果，因此我認為新定義是研究的突破口。

第二個階段是由新定義開始的研究，直接將平面的福特圓變成空間中福特球的起始球，使得可以藉由法里數列的性質，快速求得福特球球心表示法，同時也找到了三維空間中的法里數列。研究更進一步推廣到 D 維空間($D \geq 3$)中，意外發現更高維的球心表示法與三維大同小異，最後得到三維到 D ($D > 3$)維空間的法里數列皆是相同數列的結論。

※作品中比較原創的部分集中在三維、高維，二維比較接近文獻探討。

二、研究動機

考科學班時，考題中出現了一種數列，考完試後回家查，才知道原來這種數列叫做法里數列(Farey sequence)，同時發現了福特圓(Ford circle)，這是一種在平面座標系上圓的集合，圓與 x 軸、鄰近的圓互相外切，這些圓的位置可以以法里數列表示，因此我就開始好奇，是否在空間中也存在類似的關係呢？

這研究一開始主要是研究福特球，企圖用三顆互相相切的起始球開始不斷衍生球，觀察這些球的半徑，在研究時只研究出一些特例，如同一方向的衍生、固定一球的衍生，在校內科展時被評審說參考文獻功課做不足，有人做過相同的研究。當時正好是在發現固定一球中有研究突破點的時候，但我無法說服評審這是我報告中獨創的部分。

後來這個題目就被我放置著，後來老師要我報名旺宏科學獎，想說不可能入圍，我沒新增什麼，只在報名資料上寫上了我一定會努力研究就報了。沒想到受到評審的青睞，既然有人願意欣賞我的作品，願意給我機會，我就應該要盡全力去將這件事做到最好。

我將原本的說明書刪了約半份(舊定義的部分，節錄在附錄)，將其重新整理才繼續研究。

進行研究後，發現當初我的預想沒有錯，固定一球的確是整份研究的突破點。最初還用舊方法慢慢找球心、同一方向衍生，但我發現這樣新定義就失去了意義。此時重新檢視整份說明書，靈光乍現利用法里數列的性質，成功在三維研究作出重大發現，更打鐵趁熱，推廣到高維空間的研究，也得到超乎預期的成果。

三、研究目的

- (一) 找出三維空間中是否存在球體有類似福特圓的性質。
- (二) 找出三維空間中的福特球是否與平面上的福特圓有關聯。
- (三) 在三維空間中找出法里數列的對應形式。
- (四) 將題目推廣到更高維的空間，並找出各維度之間的關聯。

四、研究過程



文獻探討-法里數列性質探討

見第 4 頁法里數列與其性質

法里數列的定義、性質、生成。

文獻探討-福特圓

見第 6 頁平面中的福特圓

與法里數列相關福特圓的定義、性質與面積，並有了福特圓衍生的想法。

推廣至三維空間(舊定義)

見第 8 頁三維空間中的福特球(舊定義)

定義三維空間中的三顆起始福特球，並開始研究，企圖由此切入三維法里數列。

附錄-同一方向研究

見第 30 頁

發現同一方向衍生的福特球之間有規律數列。

福特球之間半徑關係研究

見第 9 頁福特球半徑之間的關係

畫出半徑倒數之間有向圖，並發現球半徑關係。

固定一球衍生研究

見第 11 頁固定一顆球衍生的福特球

發現固定一球衍生的福特球有規律數列，並發現與福特球與福特圓的關聯(為新定義的跳板)。

附錄-以舊定義推廣至高維空間

見第 30、32 頁

定義高維空間中的福特球，並研究高維中同一方向、固定一球衍生半徑倒數數列。

三維福特球的新定義

見第 12 頁三維空間的福特球(新定義)

由固定一球衍生的研究發現，可以直接用福特圓的定義來定義福特球，使得研究結果更完善。

新增-衍生福特球

見第 14 頁衍生福特球的球心位置

發現新定義下，只要衍生一層福特球，就可以稱為所有的福特球了。

找到福特球球心座標表示法。

新增-三維的法里數列

見第 16 頁三維的法里數列

由福特球球心座標為跳板，找到三維的法里數列。

新增-高維空間的福特球

見第 18 頁高維空間中的福特球

定義高維空間中的福特球，並開始研究。

新增-高維空間的法里數列

見第 26 頁高維空間中的法里數列

藉由高維空間福特球球心座標，找出高維空間的法里數列，並發現與三維的無異。

貳、研究內容

一、法里數列與其性質

法里數列的定義：

n 階法里數列 F_n ：0和1之間分母不大於 n 最簡分數，由小至大排列所形成的數列的數列，其項數為 $1 + \sum_{i=1}^n \varphi(i)$ 。

以8階法里數列為例： $F_8 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1} \right\}$

法里數列有以下性質：

(一) 相鄰項關係

當 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 是法里數列中相鄰的兩項，且 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ，則

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{1}{bd} \Leftrightarrow bc - ad = 1$$

可以靠相鄰兩項分子分母分別相加生成法里數列：

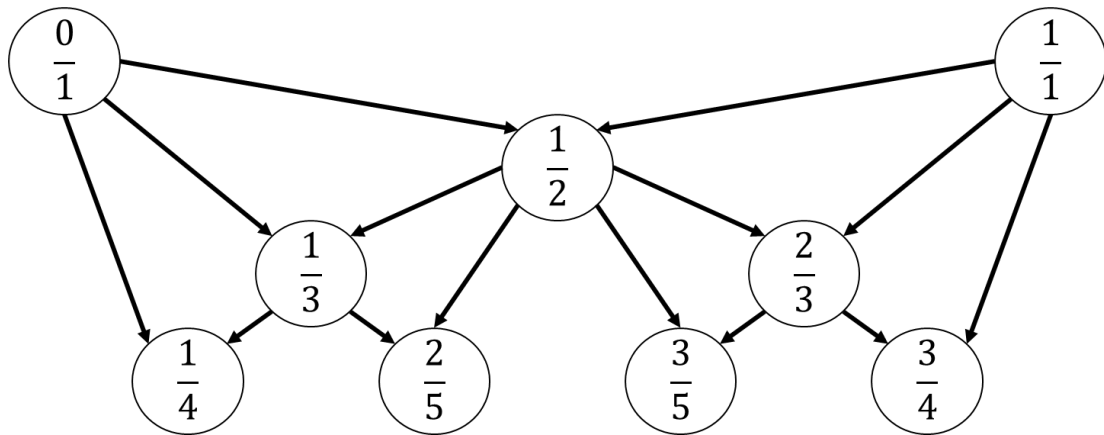


圖 1：法里數列生成

(二) 正方形與法里數列

【證明】見第 34 頁

如圖 2，從一個邊長為 1 的正方形開始，畫出兩條對角線，將交點投影到下面方的邊，之後不斷從舊有的交點(包括正方形一開始上方的兩個點)畫線到投影點，產生更多交點並投影，這些投影點的 x 座標即為法里數列中的項(方形的最左邊 x 座標為0)。

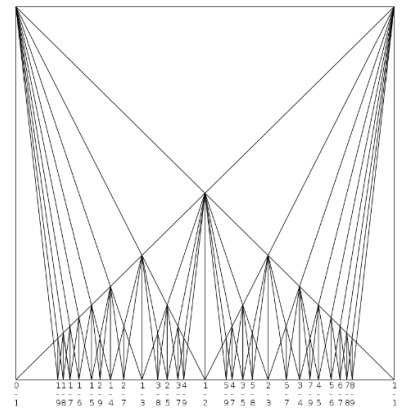


圖 2：正方形與法里數列

※這部分在後續研究並沒有用到。

(三) 法里數列面積

【證明】見第 35 頁

若將法里數列以分母為 x 座標，分子為 y 座標繪圖，且將分子分母對調並經過對稱後可得圖 3，且此圖形的面積為 $4(|F_n| - 1)$ ，其中 $|F_n|$ 為 n 階法里數列的項數，且此面積可以用皮克定理(Pick's theorem)簡單證明出來。

※這部分在後續研究並沒有用到。

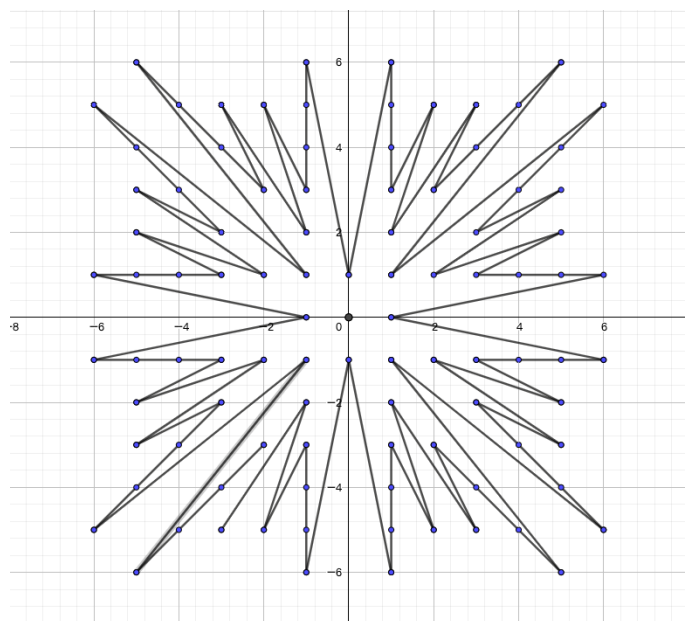


圖 3：以六階法里數列繪成的發散圖

二、平面中的福特圓

福特圓是與法里數列相關的一系列圓，在本研究中藉由福特圓推廣到福特球，去尋找三維的法里數列。

福特圓的定義：

圓心在 $(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2})$ 且半徑為 $\frac{1}{2q^2}$ 的圓(其中 $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1, \gcd(p, q) = 1$)，稱這樣的圓為**福特圓 (Ford circle)**，以 $C[p, q]$ 表示，若以 n 階法里數列中的每一項 $\frac{p}{q}$ 作出對應的 $C[p, q]$ 則這些圓會互相外切或外離，如圖 4。

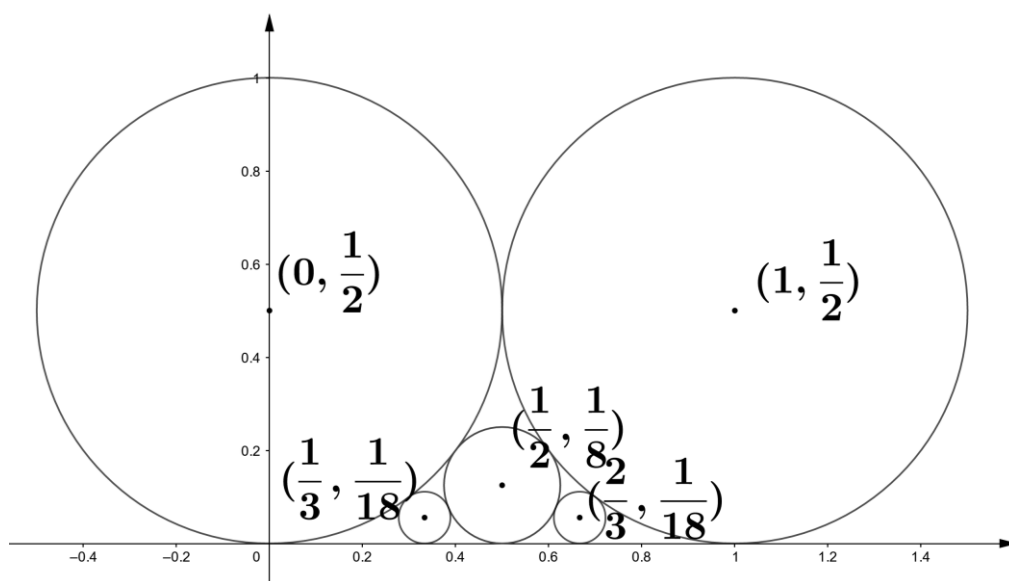


圖 4：福特圓

(一) 福特圓會互相外切的性質

【證明】見第 36 頁

福特圓就是許多互相外切或外離等不重疊的圓所成的集合。

當兩相切福特圓的圓心分別為 $(\frac{p_1}{q_1}, \frac{1}{2q_1^2})$ 、 $(\frac{p_2}{q_2}, \frac{1}{2q_2^2})$ ，則必存在 n 使得 $\frac{p_1}{q_1}$ 、 $\frac{p_2}{q_2}$ 為 n 階法里數列

中的相鄰兩項；當兩福特圓的圓心分別為 $(\frac{p_1}{q_1}, \frac{1}{2q_1^2})$ 、 $(\frac{p_2}{q_2}, \frac{1}{2q_2^2})$ ，其中 $\frac{p_1}{q_1}$ 、 $\frac{p_2}{q_2}$ 為 n 階法里數列中的相鄰兩項，則兩圓必定相切。

(二) 福特圓衍生的想法

由福特圓的性質，可以有另一種想法。在平面中的福特圓，是由兩個圓心分別在 $(0, \frac{1}{2})$ 、 $(1, \frac{1}{2})$ 且與 x 軸相切的起始圓開始，在每個圓皆與 x 軸相切的情況下，做出與任兩圓相切的下個圓，持續衍伸下去，如圖 5。

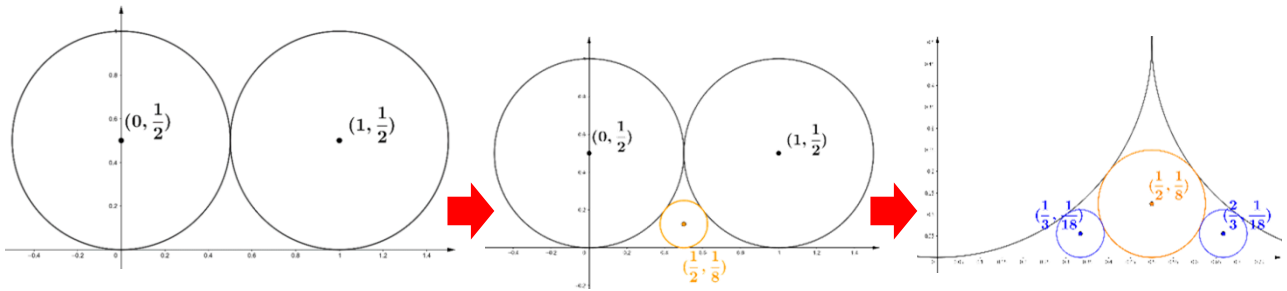


圖 5：福特圓的衍生想法

(三) 福特圓的面積和

所有福特圓的集合為 $\{C[p, q] \mid 0 \leq \frac{p}{q} \leq 1, \gcd(p, q) = 1\}$ 。

用福特圓的定義，可以得到所有福特圓的面積

$$A = \pi \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{\gcd(p,q)=1 \\ 0 \leq p \leq q}} \pi \left(\frac{1}{2q^2} \right)^2。$$

經過化簡後得

$$A = \frac{\pi}{4} \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^4} \sum_{\substack{\gcd(p,q)=1 \\ 0 \leq p \leq q}} 1 \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^4}。$$

其中 φ 為歐拉函數， $\varphi(n)$ 是小於或等於 n 且與 n 互質的正整數的個數。

又歐拉函數有此性質：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}。$$

其中 ζ 為黎曼 ζ 函數， $\zeta(s)$ 的定義為 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ，

故

$$A = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)}。$$

三、三維空間中的福特球(舊定義)

(一) 福特球衍生的方法

在空間中，目標是找的球心 (x, y, z) ，使得指定球心的球，以 z 為半徑作球，所得的球會互相外切或外離(類似福特圓)。先指定幾個起始的球，再作相切的球，如圖 6，漸漸作(衍生)出福特球的方式開始研究(類似第 7 頁福特圓衍生的想法)。

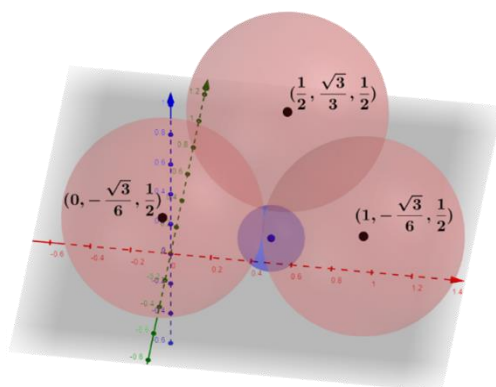


圖 6：衍生想法下的起始三顆福特球

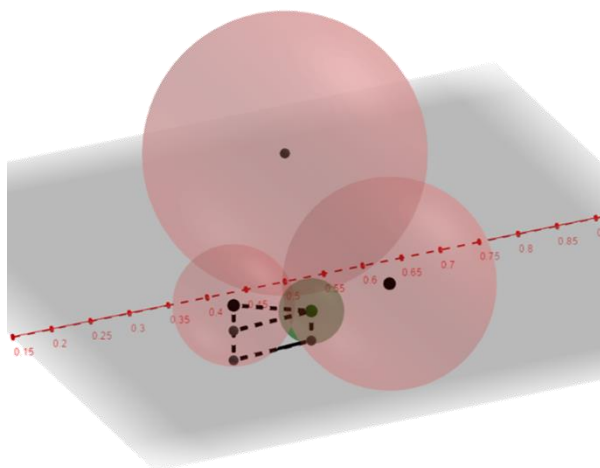


圖 7：三顆相切的福特球衍生出新球

當有一球心在 (x, y, z) 且半徑為 z 的球，與球心在 (x_1, y_1, z_1) 、 (x_2, y_2, z_2) 、 (x_3, y_3, z_3) ，半徑分別為 z_1 、 z_2 、 z_3 的球相外切，則由畢氏定理與連心線距離知

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} = z + z_i$$

經過化簡得

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = 4zz_i, i \in \{1, 2, 3\}$$

(二) 福特球半徑之間的關係

研究半徑關係時，可以使用三維空間的索迪公式(Soddy formula 或 Descartes' theorem)：

五顆互相外相切球之半徑倒數 k_i 必滿足

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)^2 = 3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + k_5^2)$$

又本研究中所有的球都切於同一平面(半徑倒數為0的球)，故新球與三顆舊球之間半徑倒數關係可以寫成

$$(k + k_1 + k_2 + k_3)^2 = 3(k^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

以類似第 4 頁圖 1：法里數列生成的模型來觀察半徑倒數規律。將起始三球的半徑倒數寫好後，用空間中的索迪公式求出新球的半徑倒數，並畫成一張有向圖，如圖 8。

黃色為已經發現規律的球，方形在規律裡沒有出現過的半徑倒數的球，虛線的節點為以不同組半徑倒數的球，卻衍生出相同半徑倒數的球。

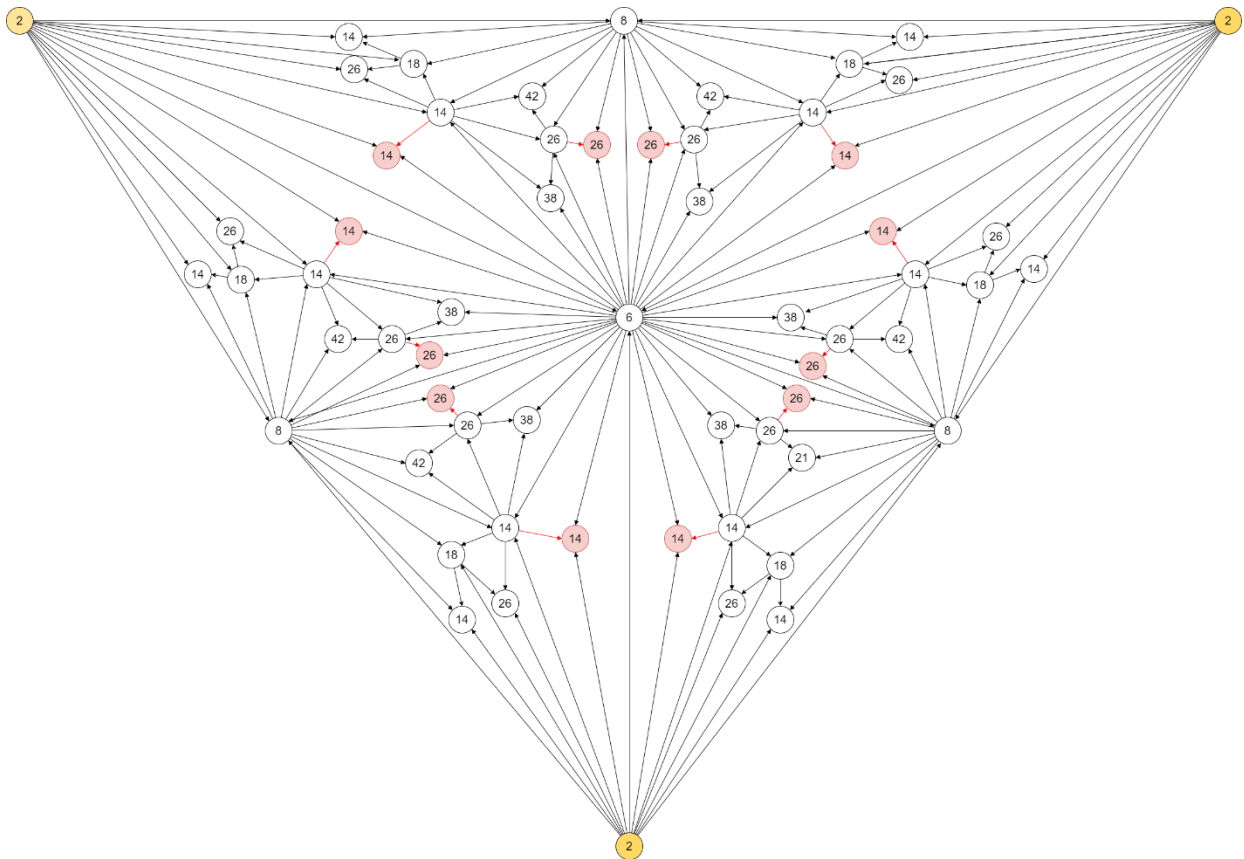


圖 8：半徑倒數關係

(三) 固定一顆球衍生的福特球

此部分為新定義的跳板

【更多內容】見第 32 頁

若衍生時，都用固定的一顆和最新的兩顆衍生出更新的球(如圖 11)，可以得到數顆球的球心，如表 1。

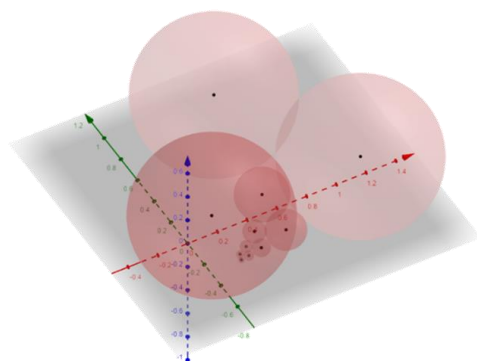


圖 11：固定一顆球的衍生情形

表 1：固定球球心為 $(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ 的衍生情況

球心
$(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(\frac{1}{1}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{8})$
$(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$
$(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{18})$
$(\frac{7}{26}, -\frac{5}{13\sqrt{3}}, \frac{1}{26})$
$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{32})$
$(\frac{3}{14}, -\frac{3}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{42})$
$(\frac{1}{5}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{50})$
⋮

在觀察固定一球衍生的情形時，我發現球心位置中有福特圓規則 $(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2})$ 的蹤影(如表 1 中灰底的部分)，所以就有了福特球的新定義。

四、三維空間的福特球(新定義)

根據固定一球衍生的福特球結果，可發現其中出現了福特圓的樣子(如表 1 中，灰底藍字部分)，因此我認為用以下定義方式定義福特球會得到較全面的結果。

將平面的福特圓變成空間中的球，具體來說，就是作出球心在 $(\frac{p}{q}, 0, \frac{1}{2q^2})$ 的球，則這些球在 xz 平面的投影與福特圓相同，且這些球皆切於 xy 平面。若以 8 階法里數列帶入其中的 $\frac{p}{q}$ 則如圖 12 所示。

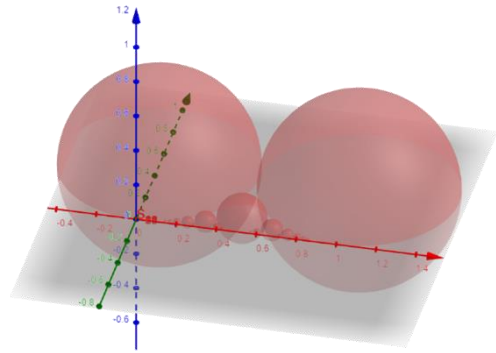


圖 12：新定義的起始福特球

(一) 起始福特球的體積

【證明】 見第 38 頁

採用與第 7 頁福特圓的面積和中類似的方法，可求得這一系列起始球的體積和為

$$V = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{\gcd(p,q)=1 \\ 0 \leq p \leq q}} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2q^2} \right)^3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\zeta(5)}{\zeta(6)}$$

其中 ζ 為黎曼 ζ 函數， $\zeta(s)$ 的定義為 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 。

※這部分在後續研究並沒有用到。

(二) 福特球半徑關係

【證明】見第 37 頁

由第 4 頁中所提到法里數列相鄰項關係知，在新定義下，三顆起始福特球相切，且左右兩顆球的半徑倒數為 $(2b^2)$ 與 $(2d^2)$ ，則中間球的半徑倒數必為

$$2(b + d)^2 = 2(b^2 + 2bd + d^2)$$

搭配第 10 頁衍生福特球之間的半徑關係中所提到衍生球之間的關係：

三顆互相外切的球衍生出一顆球後，此四顆球必定互相外切。在此四顆球選三顆衍生出新的球的話，則新球的半徑倒數為(三顆選出球半徑倒數和)-(未被選種的球的半徑倒數)。

可以做出各球之間半徑倒數關係的有向圖，如圖 13。

※這張圖在後面的研究並沒有用到。

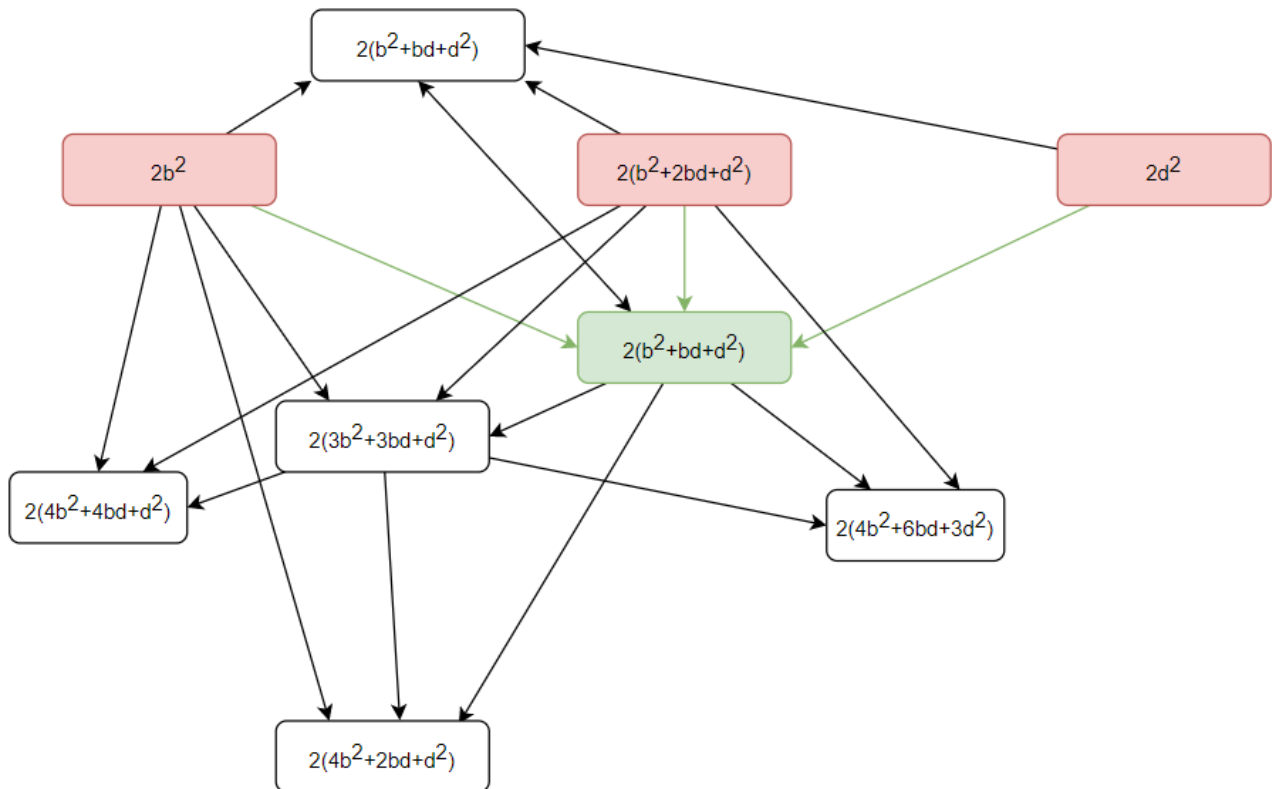


圖 13：各球半徑倒數關係

(三) 衍生福特球的球心位置

法里數列中，當 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 是 n 階法里數列中相鄰的兩項，且 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ，則 $bc - ad = 1$ ，且可以由分子分母相加 $\frac{a+c}{b+d}$ 產生在他們中間的新項，圓心在 $(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2})$ 、 $(\frac{a+c}{b+d}, \frac{1}{2(b+d)^2})$ 、 $(\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2})$ 的福特圓是彼此外切的。

以球心為 $(\frac{a}{b}, 0, \frac{1}{2b^2})$ 、 $(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2})$ 、 $(\frac{c}{d}, 0, \frac{1}{2d^2})$ 的三顆相外切起始球衍生(其中 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$)，由索迪公式知三顆起始福特球衍生出的新球半徑為 $\frac{1}{2(b^2+bd+d^2)}$ ，新球球心座標 (x, y, z) 會與三顆起始球相切，滿足

$$\begin{cases} \left(x - \frac{a}{b}\right)^2 + (y - 0)^2 = 4 \times \frac{1}{2(b^2 + bd + d^2)} \times \frac{1}{2b^2} \\ \left(x - \frac{c}{d}\right)^2 + (y - 0)^2 = 4 \times \frac{1}{2(b^2 + bd + d^2)} \times \frac{1}{2d^2} \end{cases}$$

經移項化簡得

$$x = \frac{-a^2b^2d^2 - a^2bd^3 - a^2d^4 + b^4c^2 + b^3c^2d + b^2c^2d^2 - b^2 + d^2}{2bd(b^2 + bd + d^2)(bc - ad)}$$

再由第 4 頁法里數列相鄰項關係中所提到的性質：相鄰兩項必滿足 $bc - ad = 1$ 的關係，可以將上式化簡為

$$2(b^2 + bd + d^2)x = 2ab + 2cd + bc + ad$$

將 x 代入原式可得

$$4(b^2 + bd + d^2)^2y^2 = \frac{1}{b^2}(4(b^2 + bd + d^2) - (b + 2d)^2(bc - ad)^2)$$

又 $bc - ad = 1$ ，可得

$$2(b^2 + bd + d^2)y = \pm \frac{1}{b} \sqrt{4(b^2 + bd + d^2) - (b + 2d)^2} = \pm \sqrt{3}$$

令 $k = 2(b^2 + bd + d^2)$ ，則可知道三顆起始球所衍生新球的球心位置在

$$\left(\frac{2ab + 2cd + bc + ad}{k}, \pm \frac{\sqrt{3}}{k}, \frac{1}{k}\right)$$

將起始福特球位置代入，則可以畫出起始福特球與他們衍生出的新球(其中y座標取正)，如圖 14。

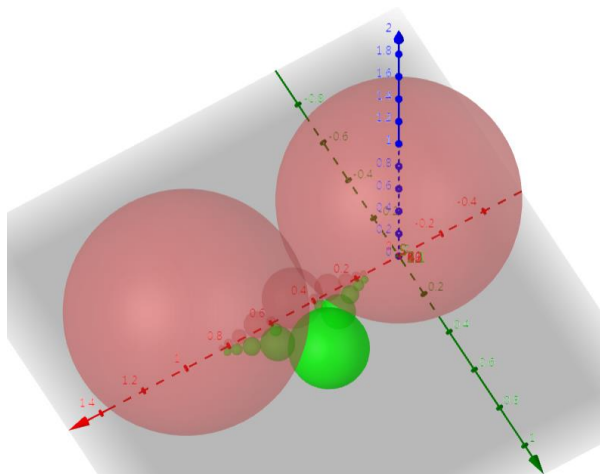


圖 14：起始福特球與其衍生的一層球

這些福特球沒有會互相衍生的問題，這就是新定義下的三維福特球。

(四) 衍生球相切討論

觀察圖 14，猜測「球心在 $(\frac{a}{b}, 0, \frac{1}{2b^2})$ 、 $(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2})$ 、 $(\frac{c}{d}, 0, \frac{1}{2d^2})$ 的起始福特球所衍生的球」會與「球心在 $(\frac{a}{b}, 0, \frac{1}{2b^2})$ 、 $(\frac{2a+c}{2b+d}, 0, \frac{1}{2(2b+d)^2})$ 、 $(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2})$ 的起始福特球所衍生的球」互相外切，如圖 15。

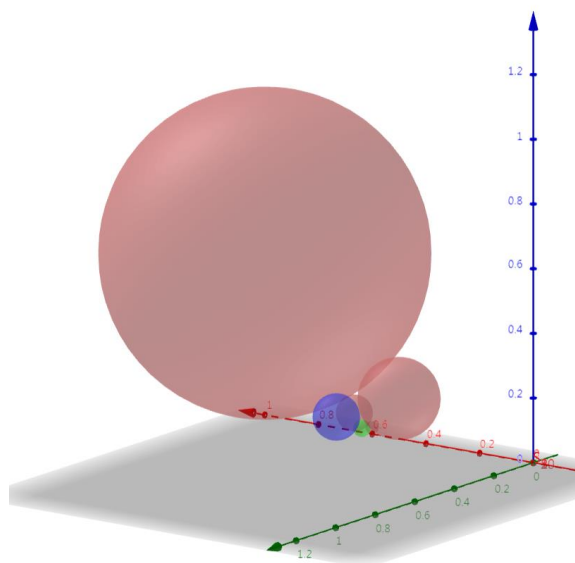


圖 15：衍生出的球相切

這兩顆衍生出的球球心座標分別為 $\left(\frac{2ab+2cd+bc+ad}{2(b^2+bd+d^2)}, \frac{\sqrt{3}}{2(b^2+bd+d^2)}, \frac{1}{2(b^2+bd+d^2)}\right)$ 與

$\left(\frac{6ab+3ad+3bc+2cd}{2(3b^2+3bd+d^2)}, \frac{\sqrt{3}}{2(3b^2+3bd+d^2)}, \frac{1}{2(3b^2+3bd+d^2)}\right)$ ，若這兩球相切，則滿足

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4z_1z_2$$

$$\left(\frac{2ab + 2cd + bc + ad}{2(b^2 + bd + d^2)} - \frac{6ab + 3ad + 3bc + 2cd}{2(3b^2 + 3bd + d^2)}\right)^2 = \frac{d^2(2b + d)^2(bc - ad)^2}{(b^2 + bd + d^2)^2(3b^2 + 3bd + d^2)^2}$$

又 $bc - ad = 1$

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{d^2(2b + d)^2}{(b^2 + bd + d^2)^2(3b^2 + 3bd + d^2)^2}$$

$$(y_1 - y_2)^2 = \frac{3b^2(b + d)^2}{(b^2 + bd + d^2)^2(3b^2 + 3bd + d^2)^2}$$

$$4z_1z_2 = \frac{1}{(b^2 + bd + d^2)(3b^2 + 3bd + d^2)}$$

符合 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4z_1z_2$ ，故此二衍生球互相外切。

同理可證「球心在 $\left(\frac{a}{b}, 0, \frac{1}{2b^2}\right)$ 、 $\left(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2}\right)$ 、 $\left(\frac{c}{d}, 0, \frac{1}{2d^2}\right)$ 的起始福特球所衍生的球」亦

會與「球心在 $\left(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2}\right)$ 、 $\left(\frac{a+2c}{b+2d}, 0, \frac{1}{2(b+2d)^2}\right)$ 、 $\left(\frac{c}{d}, 0, \frac{1}{2d^2}\right)$ 的起始福特球所衍生的球」互相外切。

五、三維的法里數列

這裡再看一次第 4 頁中法里數列生成的圖(如圖 16)。

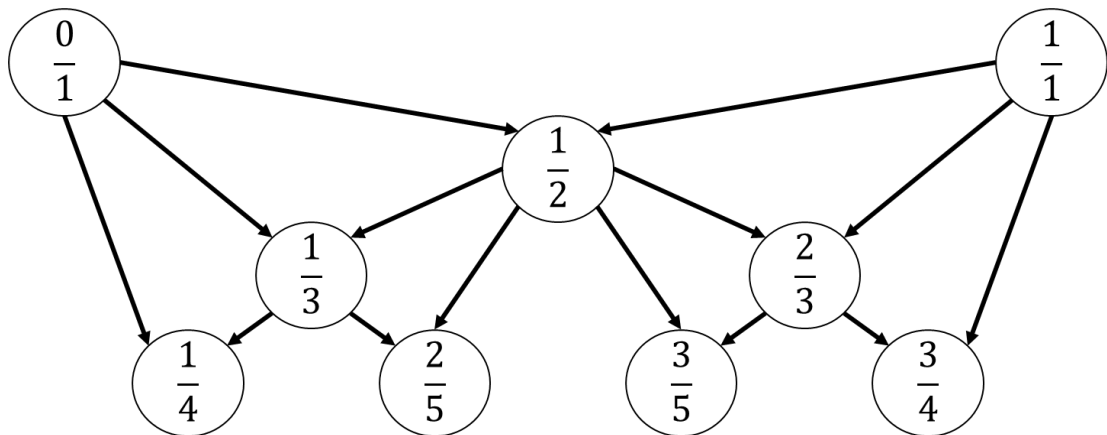


圖 16：法里數列的生成

將 n 階法里數列 F_n 中，任相鄰兩項中皆分子分母分別相加插入一項的新數列為 f_n ，如圖 17，這使得可以用 F_n 中的所有項來做前述衍生討論中起始球的 x 座標。

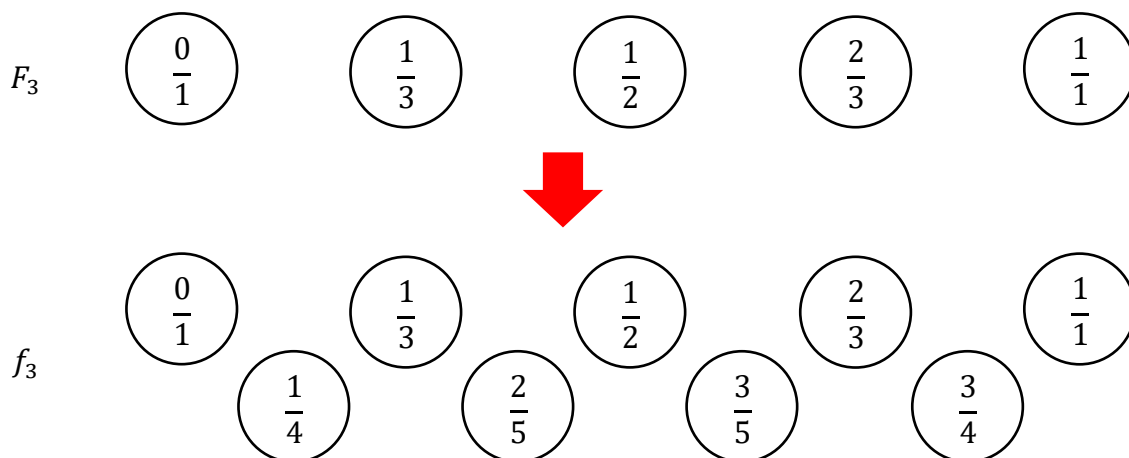


圖 17： F_3 與 f_3

因為衍生福特球球心座標為 $(\frac{2ab+2cd+bc+ad}{2(b^2+bd+d^2)}, \frac{\sqrt{3}}{2(b^2+bd+d^2)}, \frac{1}{2(b^2+bd+d^2)})$ ，故用 f_n 做起始球所

衍生球的 x 座標由小排到大就是研究的目標——三維空間中的法里數列，命名為 F_n^3 ：

$$F_3^3: \left\{ \frac{7}{26}, \frac{5}{14}, \frac{15}{38}, \frac{3}{6}, \frac{23}{38}, \frac{9}{14}, \frac{19}{26} \right\}$$

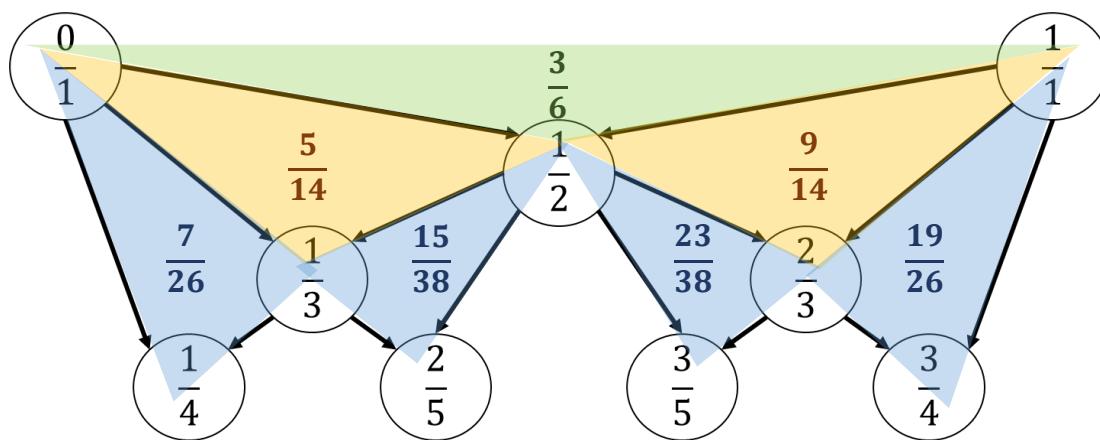


圖 18：三維法里數列各項對應的起始福特球的 $\frac{p}{q}$

三維法里數列 F_n^3 的集合為

$$\left\{ \frac{2ab + 2cd + bc + ad}{2(b^2 + bd + d^2)} \mid bc - ad = 1, \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F_n \right\}$$

F_n^3 項數為 f_n 中三角形的數量(如圖 18)，也就是 f_n 的項數少2，又知由 F_n 的定義知其項數為 $1 + \sum_{i=1}^n \varphi(i)$ ，故 f_n 的項數為 $1 + 2 \sum_{i=1}^n \varphi(i)$ ， F_n^3 的項數為 $2 \sum_{i=1}^n \varphi(i) - 1$ 。

【補充】三維法里數列列表見第 29 頁

六、高維空間中的福特球

為了方便敘述，接下來在各維空間中的球都稱為球。

福特球在高維空間(D 維空間)中的定義：

參照第 12 頁「將平面的福特圓變成空間中的球作為起始球」的方法，四維的福特球就是「所有三維的福特球(包括三維的起始球與三維的衍生球)變成四維空間的四維球作為起始球」，以此類推。本研究中， $D \geq 3$ 。

對起始球與衍生球的要求：

所有的球都要互相外切或外離(如二維、三維的情況)，且皆要切於一個($D - 1$)維的空間。如二維福特球是切於一線，三維福特球是切於一平面。

具體讓($D - 1$)維福特球變成 D 維的球作為起始球的做法：

若($D - 1$)維福特球的座標為 $(x_i, u_{i,2}, \dots, u_{i,(D-2)}, r_i)$ ，半徑為 r_i ，則 D 維起始球球心座標為 $(x_i, u_{i,2}, \dots, u_{i,(D-2)}, 0, r_i)$ ，半徑為 r_i 。如二維福特球球心座標為 $(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2})$ ，則三維起始球球心座標為 $(\frac{p}{q}, 0, \frac{1}{2q^2})$ 。

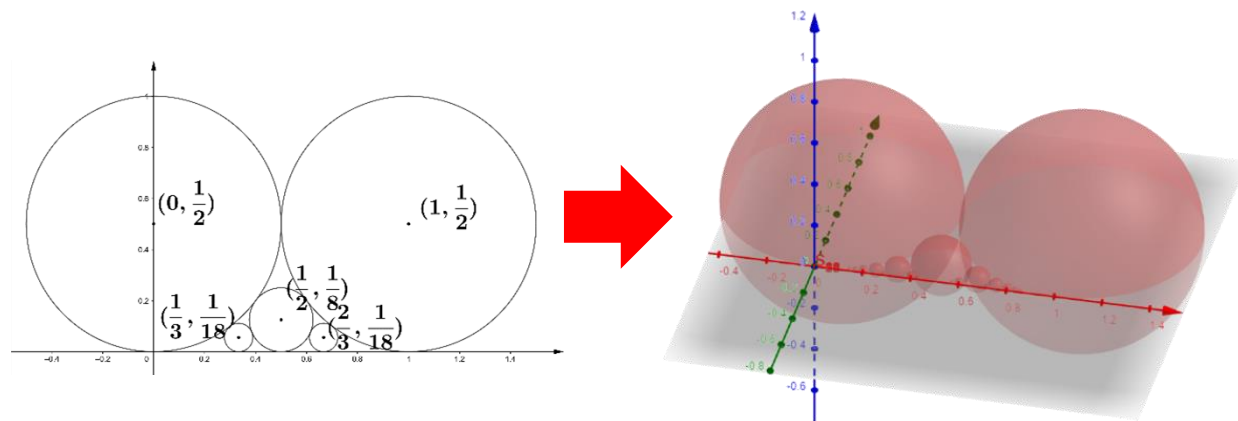


圖 19：將二維福特球做為三維福特球的起始球

(一) 福特球的衍生方法

參照第 8 頁三維福特球的討論方法， D 維空間中，有一球球心在

$(x_0, u_{0,2}, \dots, u_{0,(D-1)}, r_0)$ ，與球心在 $(x_i, u_{i,2}, \dots, u_{i,(D-1)}, r_i)$ 的球相外切，則

$$\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + \sum_{j=2}^{D-1} (u_{0,j} - u_{i,j})^2} + (r_0 - r_i)^2 = r_0 + r_i$$

化簡後得

$$(x_0 - x_i)^2 + \sum_{j=2}^{D-1} (u_{0,j} - u_{i,j})^2 = 4r_0 r_i$$

在 $D - 1$ 維相切的福特球，變成 D 維起始球時，必定依然符合此式，故依然相外切。

(二) 起始球與衍生球的半徑關係

D 維空間中也有索迪公式(Soddy formula)， $(D + 2)$ 顆互相外相切球之半徑倒數 k_i 必滿足

$$\left(\sum_{i=1}^{D+2} k_i \right)^2 = D \left(\sum_{i=1}^{D+2} k_i^2 \right)$$

又本研究中所有的球都切於同一 $(D - 1)$ 維空間(半徑倒數為0的球)，故新球與 D 顆舊球之間半徑倒數關係可以寫成

$$\left(k + \sum_{i=1}^D k_i \right)^2 = D \left(k^2 + \sum_{i=1}^D k_i^2 \right)$$

1. 四維空間

三維中，半徑倒數為 $(2b^2)$ 、 $2(b^2 + 2bd + 2d^2)$ 、 $(2d^2)$ 的三顆起始球可生出半徑倒數為 $2(b^2 + bd + d^2)$ 的衍生球，其中 $bc - ad = 1$ 。

所以四維中，四顆互相外切的起始球半徑倒數為 $(2b^2)$ 、 $2(b^2 + 2bd + d^2)$ 、 $(2b^2)$ 與 $2(b^2 + bd + d^2)$ 。衍生球的半徑倒數 k 要滿足：

$$\begin{aligned} & \left(k + 2b^2 + 2d^2 + 2(b^2 + 2bd + d^2) + 2(b^2 + bd + d^2) \right)^2 \\ &= 4 \left(k^2 + (2b^2)^2 + (2d^2)^2 + (2(b^2 + 2bd + d^2))^2 + (2(b^2 + bd + d^2))^2 \right) \end{aligned}$$

解得 $k = 2(b^2 + bd + d^2)$

2. D 維空間

在五維、六維所解得衍生球的半徑倒數也是 $2(b^2 + bd + d^2)$ ，故猜測3維以上衍生球的半徑倒數皆為 $2(b^2 + bd + d^2)$ 。

若假設成立，在 $(D - 1)$ 維空間衍生球半徑倒數為 $2(b^2 + bd + d^2)$ ， $D > 3$ ， D 維空間衍生球的半徑倒數 k 要滿足

$$\left(k + 2b^2 + 2d^2 + 2(b^2 + 2bd + 2d^2) + (D - 2)(2(b^2 + bd + d^2)) \right)^2$$

$$= D \left(k^2 + (2b^2)^2 + (2d^2)^2 + (2(b^2 + 2bd + d^2))^2 + (D-3)(2(b^2 + bd + d^2))^2 \right)$$

化簡得

$$\begin{aligned} & (k + 2(D-1)(b^2 + bd + d^2))^2 \\ & = D(k^2 + 4b^4 + 4d^4 + 4(b^2 + 2bd + d^2)^2 + 4(D-3)(b^2 + bd + d^2)^2) \end{aligned}$$

展開後代入公式得

$$k = \left[\frac{1}{2(1-D)} (4(1-D)b^2 + 4(1-D)bd + 4(1-D)d^2) \pm \sqrt{(4(1-D)b^2 + 4(1-D)bd + 4(1-D)d^2)^2 - 4(1-D)(4(1-D)b^4 + 8(1-D)b^3d + 12(1-D)b^2d^2 + 8(1-D)bd^3 + 4(1-D)d^4)} \right]$$

$$\Rightarrow k = (2b^2 + 2bd + 2d^2) \pm 0 = 2(b^2 + bd + d^2)$$

由數學歸納法知，高維空間中衍生球的半徑倒數皆為 $2(b^2 + bd + d^2)$ 。

(三) 衍生球 x 座標位置

$(D-1)$ 維的福特球到了 D 維都是起始球。 D 維中，互相外切的 D 顆起始球中，必有球心在 $(\frac{a}{b}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2b^2})$ 、 $(\frac{a+c}{b+d}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2(b+d)^2})$ 、 $(\frac{c}{d}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2d^2})$ 的幾顆(三維空間中的起始球)。

類似第 14 頁的方法，衍生球球心位置 $(x_0, u_{0,2}, u_{0,3}, \dots, u_{0,(D-2)}, u_{0,(D-1)}, r_0)$ 必滿足：

$$\begin{cases} \left(x_0 - \frac{a}{b}\right)^2 + \sum_{j=2}^{D-1} (u_{0,j} - 0)^2 = 4 \times r_0 \times \frac{1}{2b^2} \\ \left(x_0 - \frac{c}{d}\right)^2 + \sum_{j=2}^{D-1} (u_{0,j} - 0)^2 = 4 \times r_0 \times \frac{1}{2d^2} \end{cases}$$

$$\text{又 } r_0 = \frac{1}{2(b^2 + bd + d^2)},$$

$$\begin{cases} \left(x_0 - \frac{a}{b}\right)^2 + \sum_{j=2}^{D-1} (u_{0,j} - 0)^2 = 4 \times \frac{1}{2(b^2 + bd + d^2)} \times \frac{1}{2b^2} \\ \left(x_0 - \frac{c}{d}\right)^2 + \sum_{j=2}^{D-1} (u_{0,j} - 0)^2 = 4 \times \frac{1}{2(b^2 + bd + d^2)} \times \frac{1}{2d^2} \end{cases}$$

相減後就與三維的算式相同，故

$$2(b^2 + bd + d^2)x_0 = 2ab + 2cd + bc + ad$$

$$x_0 = (2ab + 2cd + bc + ad)r_0$$

(四) 衍生球球心座標位置

1. 四維空間

在四維中，起始球球心 $(x_i, u_{i,2}, u_{i,3}, r_i)$ 與其衍生的球球心 $(x_0, u_{0,2}, u_{0,3}, r_0)$ 滿足

$$(x_0 - x_i)^2 + (u_{0,2} - u_{i,2})^2 + (u_{0,3} - u_{i,3})^2 = 4r_0r_i$$

其中已知 $x_0 = (2ab + 2cd + bc + ad)r_0$ ， $r_0 = \frac{1}{2(b^2+bd+d^2)}$ ， $bc - ad = 1$ 。

因為算式與第 14 頁三維空間中的討論很像，可直接由三維的結論 y^2 改成 $u_{0,2}^2 + u_{0,3}^2$ 知

$$4(b^2 + bd + d^2)^2(u_{0,2}^2 + u_{0,3}^2) = \frac{1}{b^2}(4(b^2 + bd + d^2) - (b + 2d)^2(bc - ad)^2)$$

又 $bc - ad = 1$ ，故

$$4(b^2 + bd + d^2)^2(u_{0,2}^2 + u_{0,3}^2) = \frac{1}{b^2}(4(b^2 + bd + d^2) - (b + 2d)^2) = 3$$

$$u_{0,2}^2 + u_{0,3}^2 = 3r_0^2 \quad \text{①}$$

又一顆起始球的球心座標可表示為 $(r_0(2ab + 2cd + bc + ad), \sqrt{3}r_0, 0, r_0)$ ，

帶入上述關係式得

$$(u_{0,2} - \sqrt{3}r_0)^2 + (u_{0,3} - 0)^2 = 4r_0^2 \quad \text{②}$$

由①、②知

$$(u_{0,2}, u_{0,3}) = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}r_0, \pm \sqrt{\frac{8}{3}}r_0 \right)$$

取正數的部分，得四維衍生球球心為

$$\left((2ab + 2cd + bc + ad)r_0, \sqrt{\frac{1}{3}}r_0, \sqrt{\frac{8}{3}}r_0, r_0 \right)$$

2. 五維空間

在五維中，起始球球心 $(x_i, u_{i,2}, u_{i,3}, u_{i,4}, r_i)$ 與其衍生的球球心 $(x_0, u_{0,2}, u_{0,3}, u_{0,4}, r_0)$ 滿足

$$(x_0 - x_i)^2 + (u_{0,2} - u_{i,2})^2 + (u_{0,3} - u_{i,3})^2 + (u_{0,4} - u_{i,4})^2 = 4r_0r_i$$

其中已知 $x_0 = (2ab + 2cd + bc + ad)r_0$ ， $r_0 = \frac{1}{2(b^2+bd+d^2)}$ ， $bc - ad = 1$ 。

同四維的方法，可知

$$u_{0,2}^2 + u_{0,3}^2 + u_{0,4}^2 = 3r_0^2 \quad \text{①}$$

$$(u_{0,2} - \sqrt{3}r_0)^2 + u_{0,3}^2 + u_{0,4}^2 = 4r_0^2 \quad \text{②}$$

$$\left(u_{0,2} - \sqrt{\frac{1}{3}}r_0\right)^2 + \left(u_{0,3} - \sqrt{\frac{8}{3}}r_0\right)^2 + u_{0,4}^2 = 4r_0^2 \quad \text{③}$$

由①、②、③解得球心座標為

$$\left((2ab + 2cd + bc + ad)r_0, \sqrt{\frac{1}{3}}r_0, \sqrt{\frac{1}{6}}r_0, \sqrt{\frac{5}{2}}r_0, r_0 \right)$$

3. 六維空間

同五維空間的討論，解

$$u_{0,2}^2 + u_{0,3}^2 + u_{0,4}^2 + u_{0,5}^2 = 3r_0^2 \quad \text{①}$$

$$(u_{0,2} - \sqrt{3}r_0)^2 + u_{0,3}^2 + u_{0,4}^2 + u_{0,5}^2 = 4r_0^2 \quad \text{②}$$

$$\left(u_{0,2} - \sqrt{\frac{1}{3}}r_0\right)^2 + \left(u_{0,3} - \sqrt{\frac{8}{3}}r_0\right)^2 + u_{0,4}^2 + u_{0,5}^2 = 4r_0^2 \quad \text{③}$$

$$\left(u_{0,2} - \sqrt{\frac{1}{3}}r_0\right)^2 + \left(u_{0,3} - \sqrt{\frac{1}{6}}r_0\right)^2 + \left(u_{0,4} - \sqrt{\frac{5}{2}}r_0\right)^2 + u_{0,5}^2 = 4r_0^2 \quad \text{④}$$

由①、②、③、④解得球心座標為

$$\left((2ab + 2cd + bc + ad)r_0, \sqrt{\frac{1}{3}}r_0, \sqrt{\frac{1}{6}}r_0, \sqrt{\frac{1}{10}}r_0, \sqrt{\frac{12}{5}}r_0, r_0 \right)$$

4. D 維空間

將各維衍生球球心座標列出來，其中 $x_0 = (2ab + 2cd + bc + ad)r_0$ ， $r_0 = \frac{1}{2(b^2 + bd + d^2)}$ ，

$bc - ad = 1$ 。

表 2：各維空間衍生球球心座標

D	衍生球球心座標
3	$(x_0, \sqrt{3}r_0, r_0)$
4	$\left(x_0, \sqrt{\frac{1}{3}}r_0, \sqrt{\frac{8}{3}}r_0, r_0\right)$
5	$\left(x_0, \sqrt{\frac{1}{3}}r_0, \sqrt{\frac{1}{6}}r_0, \sqrt{\frac{10}{4}}r_0, r_0\right)$
6	$\left(x_0, \sqrt{\frac{1}{3}}r_0, \sqrt{\frac{1}{6}}r_0, \sqrt{\frac{1}{10}}r_0, \sqrt{\frac{12}{5}}r_0, r_0\right)$
⋮	⋮

在 D 維空間，衍生球球心座標的求法為解以下聯立方程

$$u_{0,2}^2 + u_{0,3}^2 + u_{0,4}^2 + \cdots + u_{0,(D-1)}^2 = 3r_0^2 \quad \text{①}$$

$$(u_{0,2} - \sqrt{3}r_0)^2 + u_{0,3}^2 + u_{0,4}^2 + \cdots + u_{0,(D-1)}^2 = 4r_0^2 \quad \text{②}$$

$$\left(u_{0,2} - \sqrt{\frac{1}{3}}r_0\right)^2 + \left(u_{0,3} - \sqrt{\frac{8}{3}}r_0\right)^2 + u_{0,4}^2 + \cdots + u_{0,(D-1)}^2 = 4r_0^2 \quad \text{③}$$

$$\left(u_{0,2} - \sqrt{\frac{1}{3}}r_0\right)^2 + \left(u_{0,3} - \sqrt{\frac{1}{6}}r_0\right)^2 + \left(u_{0,4} - \sqrt{\frac{10}{4}}r_0\right)^2 + u_{0,5}^2 + \cdots + u_{0,(D-1)}^2 = 4r_0^2 \quad \text{④}$$

⋮

由①、②就可以解出 $u_{0,2}$ ，由①、②、③就可以解出 $u_{0,3}$ ……，所以除了 $u_{(D-2)}$ 、 $u_{(D-1)}$ 外，其他座標皆與 $(D-1)$ 維衍生球相同，最後只要解兩條方程即可求得球心座標。

猜測衍生球球心座標為

$$\left(x_0, \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}} r_0, \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 4}} r_0, \dots, \sqrt{\frac{2}{(D-2)(D-1)}} r_0, \sqrt{\frac{2D}{D-1}} r_0, r_0 \right)$$

若在 $(D-2)$ 維空間中，衍生球球心為 $\left(x_0, \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}} r_0, \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 4}} r_0, \dots, \sqrt{\frac{2}{(D-4)(D-3)}} r_0, \sqrt{\frac{2(D-2)}{(D-3)}} r_0, r_0 \right)$

，且在 $(D-1)$ 維空間中，衍生球球心為 $\left(x_0, \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}} r_0, \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 4}} r_0, \dots, \sqrt{\frac{2}{(D-3)(D-2)}} r_0, \sqrt{\frac{2(D-1)}{(D-2)}} r_0, r_0 \right)$

則 D 維空間中，衍生球會與球心在 $\left(x_0, \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}} r_0, \dots, \sqrt{\frac{2}{(D-4)(D-3)}} r_0, \sqrt{\frac{2(D-2)}{(D-3)}} r_0, 0, 0, r_0 \right)$ 的球互相外切。且衍生球球心座標為

$$\left(x_0, \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}} r_0, \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 4}} r_0, \dots, \sqrt{\frac{2}{(D-3)(D-2)}} r_0, (u_{0,(D-2)}), (u_{0,(D-1)}), r_0 \right)$$

又衍生球與起始球相切，故

$$\begin{aligned} (x_0 - x_0)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}} r_0 - \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}} r_0 \right)^2 + \dots \\ + \left(\sqrt{\frac{2}{(D-3)(D-2)}} r_0 - \sqrt{\frac{2(D-2)}{(D-3)}} r_0 \right)^2 + (u_{0,(D-2)}^2 - 0) + (u_{0,(D-1)}^2 - 0) = 4r_0^2 \\ \Rightarrow \frac{2(D-3)}{(D-2)} r_0^2 + u_{0,(D-2)}^2 + u_{0,(D-1)}^2 = 4r_0^2 \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

衍生球也會與球心在 $\left(x_0, \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}} r_0, \dots, \sqrt{\frac{2}{(D-3)(D-2)}} r_0, \sqrt{\frac{2(D-1)}{(D-2)}} r_0, 0, r_0 \right)$ 的球互相外切，同理

得

$$\left(u_{0,(D-2)} - \sqrt{\frac{2(D-1)}{(D-2)}} r_0 \right)^2 + u_{0,(D-1)}^2 = 4r_0^2 \quad \textcircled{2}$$

由①、②解得

$$(u_{0,(D-2)}, u_{0,(D-1)}) = \left(\sqrt{\frac{2}{(D-2)(D-1)}} r_0, \sqrt{\frac{2D}{D-1}} r_0 \right)$$

由數學歸納法知，衍生球的球心座標為

$$\left(x_0, \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}} r_0, \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 4}} r_0, \dots, \sqrt{\frac{2}{(D-2)(D-1)}} r_0, \sqrt{\frac{2D}{D-1}} r_0, r_0 \right)$$

(五) 衍生球相切討論

三維空間中，「球心在 $\left(\frac{a}{b}, 0, \frac{1}{2b^2}\right)$ 、 $\left(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2}\right)$ 、 $\left(\frac{c}{d}, 0, \frac{1}{2d^2}\right)$ 的起始福特球所衍生的球」會與「球心在 $\left(\frac{a}{b}, 0, \frac{1}{2b^2}\right)$ 、 $\left(\frac{2a+c}{2b+d}, 0, \frac{1}{2(2b+d)^2}\right)$ 、 $\left(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2}\right)$ 的起始福特球所衍生的球」互相外切。

猜測在 D 維空間中，也有類似的性質。即球心在 $\left(x_1, \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}}r_1, \dots, \sqrt{\frac{2}{(D-2)(D-1)}}r_1, \sqrt{\frac{2D}{D-1}}r_1, r_1\right)$ 的福特球會與球心在 $\left(x_2, \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}}r_2, \dots, \sqrt{\frac{2}{(D-2)(D-1)}}r_2, \sqrt{\frac{2D}{D-1}}r_2, r_2\right)$ 的福特球互相外切。其中

$$x_1 = (2ab + 2cd + bc + ad)r_1, \quad r_1 = \frac{1}{2(b^2 + bd + d^2)}, \quad x_2 = [2ab + 2(a+c)(b+d) + b(a+c) + a(b+d)]r_2, \\ r_2 = \frac{1}{2(b^2 + b(b+d) + (b+d)^2)}, \quad bc - ad = 1.$$

若兩球互相外切，則要滿足

$$(x_1 - x_2)^2 + \sum_{j=2}^{D-1} (u_{1,j} - u_{2,j})^2 = 4r_1r_2$$

可參考第 15 頁，將數字代入得

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{d^2(2b+d)^2(bc-ad)^2}{(b^2+bd+d^2)^2(3b^2+3bd+d^2)^2} = \frac{d^2(2b+d)^2}{(b^2+bd+d^2)^2(3b^2+3bd+d^2)^2}$$

在第 23 頁的討論中知

$$u_{i,2}^2 + u_{i,3}^2 + u_{i,4}^2 + \dots + u_{i,(D-1)}^2 = 3r_i^2$$

$$(x_1 - x_2)^2 + \sum_{j=2}^{D-1} (u_{1,j} - u_{2,j})^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2 - \sum_{j=2}^{D-1} 2u_{1,j} \cdot u_{2,j}$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2 - 2 \sum_{j=2}^{D-2} \sqrt{\frac{2}{j(j+1)}}r_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{j(j+1)}}r_2 - 2 \sqrt{\frac{2D}{D-1}}r_1 \cdot \sqrt{\frac{2D}{D-1}}r_2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2 - 4 \sum_{j=2}^{D-2} \frac{1}{j(j+1)}r_1r_2 - \frac{4D}{D-1}r_1r_2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2 - \left(\frac{4}{2} - \frac{4}{D-1}\right)r_1r_2 - \frac{4D}{D-1}r_1r_2 = (x_1 - x_2)^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2 - 6r_1r_2$$

將 $r_1 = \frac{1}{2(b^2 + bd + d^2)}$ ， $r_2 = \frac{1}{2(b^2 + b(b+d) + (b+d)^2)}$ 代入化簡

$$(x_1 - x_2)^2 + \sum_{j=2}^{D-1} (u_{1,j} - u_{2,j})^2 = \frac{d^2(2b+d)^2}{(b^2+bd+d^2)^2(3b^2+3bd+d^2)^2} + \frac{3b^2(b+d)^2}{(b^2+bd+d^2)^2(3b^2+3bd+d^2)^2} = 4r_1r_2$$

符合 $(x_1 - x_2)^2 + \sum_{j=2}^{D-1} (u_{1,j} - u_{2,j})^2 = 4r_1r_2$ ，故此二衍生球互相外切。

$$\text{同理可證 } x_2 = [2(a+c)(b+d) + 2cd + (b+d)c + (a+c)d], r_2 = \frac{1}{2((b+d)^2 + (b+d)d + d^2)}$$

時，兩球亦會相切。

七、高維空間中的法里數列

第 16 頁討論三維法里數列時，因為三維衍生球的球心為 $((2ab + 2cd + bc + ad)r_0, \sqrt{3}r_0, r_0)$ ，

其中 $r_0 = \frac{1}{2(b^2+bd+d^2)}$ ，所以說三維的法里數列 F_n^3 所形成的集合為

$$\left\{ \frac{2ab + 2cd + bc + ad}{2(b^2 + bd + d^2)} \mid bc - ad = 1, \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F_n \right\}$$

而 D 維空間中， D 維衍生球的球心座標為

$$\left((2ab + 2cd + bc + ad)r_0, \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}}r_0, \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 4}}r_0, \dots, \sqrt{\frac{2}{(D-2)(D-1)}}r_0, \sqrt{\frac{2D}{(D-1)}}r_0, r_0 \right)$$

所以 D 維空間中的法里數列，其實與三維空間中的法里數列無異。可以統稱為「高維空間中的法里數列」。

參、結論

一、三維空間中，以球心為 $\left(\frac{a}{b}, 0, \frac{1}{2b^2}\right)$ 、 $\left(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2}\right)$ 、 $\left(\frac{c}{d}, 0, \frac{1}{2d^2}\right)$ 三顆互相外切的起始球衍生的球球心座標為

$$\left(\frac{2ab + 2cd + bc + ad}{k}, \pm \frac{\sqrt{3}}{k}, \frac{1}{k}\right), k = 2(b^2 + bd + d^2), bc - ad = 1$$

可參考第 14 頁

二、三維空間中，相鄰的衍生球會互相相切(其中 $bc - ad = 1$)：

「球心在 $\left(\frac{a}{b}, 0, \frac{1}{2b^2}\right)$ 、 $\left(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2}\right)$ 、 $\left(\frac{c}{d}, 0, \frac{1}{2d^2}\right)$ 的起始福特球所衍生的球」會與「球心在 $\left(\frac{a}{b}, 0, \frac{1}{2b^2}\right)$ 、 $\left(\frac{2a+c}{2b+d}, 0, \frac{1}{2(2b+d)^2}\right)$ 、 $\left(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2}\right)$ 的起始福特球所衍生的球」互相外切。

「球心在 $\left(\frac{a}{b}, 0, \frac{1}{2b^2}\right)$ 、 $\left(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2}\right)$ 、 $\left(\frac{c}{d}, 0, \frac{1}{2d^2}\right)$ 的起始福特球所衍生的球」亦會與「球心在 $\left(\frac{a+c}{b+d}, 0, \frac{1}{2(b+d)^2}\right)$ 、 $\left(\frac{a+2c}{b+2d}, 0, \frac{1}{2(b+2d)^2}\right)$ 、 $\left(\frac{c}{d}, 0, \frac{1}{2d^2}\right)$ 的起始福特球所衍生的球」互相外切。

可參考第 15 頁

三、藉由三維空間中的衍生球球心座標找到三維空間中的法里數列為三維福特球的 x 座標由小排到大，其項數為 $2 \sum_{i=1}^n \varphi(i) - 1$ ，所形成的集合為

$$\left\{ \frac{2ab + 2cd + bc + ad}{2(b^2 + bd + d^2)} \mid bc - ad = 1, \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F_n \right\}$$

可參考第 16 頁

四、 D 維空間($D \geq 3$)中，衍生球半徑 $r_0 = \frac{1}{2(b^2+bd+d^2)}$ (其中 $bc - ad = 1$)，球心座標為

$$\left(x_0, \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}} r_0, \dots, \sqrt{\frac{2}{(D-2)(D-1)}} r_0, \sqrt{\frac{2D}{D-1}} r_0, r_0 \right), x_0 = (2ab + 2cd + bc + ad)r_0$$

可參考第 21 頁

五、 D 維空間($D \geq 3$)中，也有與三維空間相似，相鄰衍生球會相切的性質。

可參考第 25 頁

六、 D 維空間($D \geq 3$)中的法里數列與三維空間中的法里數列無異。

可參考第 26 頁

肆、討論及應用

找到三維以及高維空間中的法里數列，但對於其性質的探討僅有項數。我也有嘗試將相鄰三項寫出來—— $\frac{2ab+2cd+bc+ad}{2(b^2+bd+d^2)}$ ， $\frac{38ab+23ad+23bc+14ad}{2(19b^2+23bd+7d^2)}$ ， $\frac{6ab+3ad+3bc+2cd}{2(3b^2+3bd+d^2)}$ ，不過目前沒有發現類似法里數列分子分母分別相加得新項或相鄰項 $bc - ad = 1$ 的性質，這部分值得繼續探討。

索迪公式最早是由笛卡爾(René Descartes)所提出，後來陸續有其他人重新提出。化學家索迪在研究中又發現並在 1936 年再次提出。猜測研究中的三維福特球有可能可以應用在建築結構、分子原子組合領域。

伍、參考資料

- 一、洪銘德、呂家維（2021）空間中的福特球。取自 <https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2021/pdf/010048.pdf> (2021)
- 二、柯利弗德·皮寇弗（2003）數學的異想世界——125 個有趣的數學遊戲（311- 316 頁）•臺北市：商周。
- 三、蘇意雯等人（2019）HPM 通訊第二十二卷第二期第一一版。取自 [http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter22\(2\).pdf?fbclid=IwAR1evFcjh-HQu25-Ic3YWKu7kF7eCpEI4saBqXSGCDDKSyCp_rjiRflTgTc](http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter22(2).pdf?fbclid=IwAR1evFcjh-HQu25-Ic3YWKu7kF7eCpEI4saBqXSGCDDKSyCp_rjiRflTgTc) (2020)
- 四、Hardy G.H., Wright E.M. (2008). *An introduction to the theory of numbers*. OUP.
- 五、Hatcher, Allen. (2021). *Topology of Numbers*. Ithaca, NY: Cornell U.
- 六、Jeffrey C. Lagarias., Colin L. Mallows. & Allan R. Wilks (2001). Beyond the Descartes circle theorem. *arXiv*. Retrieved from <https://arxiv.org/pdf/math/0101066.pdf> (2020)
- 七、Jonathan Ainsworth, Michael Dawson, John Pianta and James Warwick. (2012). The Farey Sequence. Retrieved from <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/fareyproject.pdf> (January 5, 2020)
- 八、J. H. Conway, N. J. A. Sloane. (1988) *Sphere Packings, Lattices and Groups*. New York, Springer.
- 九、Kristian Kiradjev. (2018). Connecting the Dots with Pick's Theorem. *Mathematics Today*. Retrieved from <https://www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/ECMPick.pdf> (2021)
- 十、The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) <https://oeis.org/>

附錄

一、三維法里數列列表

配合 第 16 頁

F_1^3	$\left\{ \frac{3}{6} \right\}$
F_2^3	$\left\{ \frac{5}{14}, \frac{3}{6}, \frac{9}{14} \right\}$
F_3^3	$\left\{ \frac{7}{26}, \frac{5}{14}, \frac{15}{38}, \frac{3}{6}, \frac{23}{38}, \frac{9}{14}, \frac{19}{26} \right\}$
F_4^3	$\left\{ \frac{9}{42}, \frac{7}{26}, \frac{21}{74}, \frac{5}{14}, \frac{15}{38}, \frac{3}{6}, \frac{23}{38}, \frac{9}{14}, \frac{53}{74}, \frac{19}{26}, \frac{33}{42} \right\}$
F_5^3	$\left\{ \frac{11}{62}, \frac{9}{42}, \frac{27}{122}, \frac{7}{26}, \frac{21}{74}, \frac{5}{14}, \frac{37}{98}, \frac{15}{38}, \frac{33}{78}, \frac{3}{6}, \frac{45}{78}, \frac{23}{38}, \frac{61}{98}, \frac{9}{14}, \frac{53}{74}, \frac{19}{26}, \frac{95}{122}, \frac{33}{42}, \frac{51}{62} \right\}$
F_6^3	$\left\{ \frac{13}{86}, \frac{11}{62}, \frac{33}{182}, \frac{9}{42}, \frac{27}{122}, \frac{7}{26}, \frac{21}{74}, \frac{5}{14}, \frac{37}{98}, \frac{15}{38}, \frac{33}{78}, \frac{3}{6}, \frac{45}{78}, \frac{23}{38}, \frac{61}{98}, \frac{9}{14}, \frac{53}{74}, \frac{19}{26}, \frac{95}{122}, \frac{33}{42}, \frac{149}{182}, \frac{51}{62}, \frac{73}{86} \right\}$
F_7^3	$\left\{ \frac{15}{114}, \frac{13}{86}, \frac{39}{254}, \frac{11}{62}, \frac{33}{182}, \frac{9}{42}, \frac{27}{122}, \frac{7}{26}, \frac{51}{186}, \frac{21}{74}, \frac{47}{158}, \frac{5}{14}, \frac{37}{98}, \frac{15}{38}, \frac{91}{218}, \frac{33}{78}, \frac{59}{134}, \frac{3}{6}, \frac{75}{134}, \frac{45}{78}, \frac{127}{218}, \frac{23}{38}, \frac{61}{98}, \frac{9}{14}, \frac{111}{158}, \frac{53}{74}, \frac{135}{186}, \frac{19}{26}, \frac{95}{122}, \frac{33}{42}, \frac{149}{182}, \frac{51}{62}, \frac{215}{254}, \frac{73}{86}, \frac{99}{114} \right\}$
F_8^3	$\left\{ \frac{17}{146}, \frac{15}{114}, \frac{45}{338}, \frac{13}{86}, \frac{39}{254}, \frac{11}{62}, \frac{33}{182}, \frac{9}{42}, \frac{27}{122}, \frac{7}{26}, \frac{51}{186}, \frac{21}{74}, \frac{47}{158}, \frac{5}{14}, \frac{71}{194}, \frac{37}{98}, \frac{99}{258}, \frac{15}{38}, \frac{91}{218}, \frac{33}{78}, \frac{59}{134}, \frac{3}{6}, \frac{75}{134}, \frac{45}{78}, \frac{127}{218}, \frac{23}{38}, \frac{159}{258}, \frac{61}{98}, \frac{123}{194}, \frac{9}{14}, \frac{111}{158}, \frac{53}{74}, \frac{135}{186}, \frac{19}{26}, \frac{95}{122}, \frac{33}{42}, \frac{149}{182}, \frac{51}{62}, \frac{215}{254}, \frac{73}{86}, \frac{293}{338}, \frac{99}{114}, \frac{129}{146} \right\}$
F_9^3	$\left\{ \frac{19}{182}, \frac{17}{146}, \frac{51}{434}, \frac{15}{114}, \frac{45}{338}, \frac{13}{86}, \frac{39}{254}, \frac{11}{62}, \frac{33}{182}, \frac{9}{42}, \frac{65}{302}, \frac{27}{122}, \frac{61}{266}, \frac{7}{26}, \frac{51}{186}, \frac{21}{74}, \frac{47}{158}, \frac{5}{14}, \frac{71}{194}, \frac{37}{98}, \frac{99}{258}, \frac{15}{38}, \frac{91}{218}, \frac{33}{78}, \frac{169}{386}, \frac{59}{134}, \frac{93}{206}, \frac{3}{6}, \frac{113}{206}, \frac{75}{134}, \frac{217}{386}, \frac{45}{78}, \frac{127}{218}, \frac{23}{38}, \frac{159}{258}, \frac{61}{98}, \frac{123}{194}, \frac{9}{14}, \frac{111}{158}, \frac{53}{74}, \frac{135}{186}, \frac{19}{26}, \frac{205}{266}, \frac{95}{122}, \frac{237}{302}, \frac{33}{42}, \frac{149}{182}, \frac{51}{62}, \frac{215}{254}, \frac{73}{86}, \frac{293}{338}, \frac{99}{114}, \frac{383}{434}, \frac{129}{146}, \frac{163}{182} \right\}$

二、同一方向衍生的福特球

此部分為舊定義研究的摘錄。

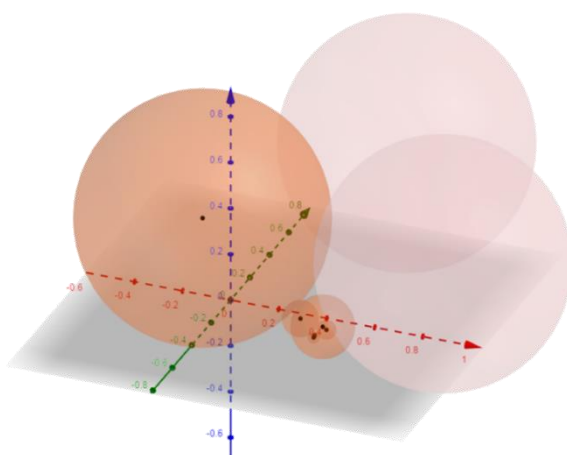


圖 20：同一方向衍生的福特球

若將球持續以同一個方向往下做(以最新三顆球衍生出更新的球，如圖 20)，並對球心座標配合z值分母作適當的化繁，可以得到數顆球的球心如。

表 3：同一方向衍生的福特球球心

球心	將分母變為與z值分母有關後
$\left(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{0}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{3}{6}, -\frac{0}{6\sqrt{3}}, \frac{1}{6}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{8}\right)$	$\left(\frac{4}{8}, -\frac{4}{8\sqrt{3}}, \frac{1}{8}\right)$
$\left(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$	$\left(\frac{5}{14}, -\frac{4}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$
$\left(\frac{6}{13}, -\frac{7}{26\sqrt{3}}, \frac{1}{26}\right)$	$\left(\frac{12}{26}, -\frac{7}{26\sqrt{3}}, \frac{1}{26}\right)$
$\left(\frac{3}{7}, -\frac{3}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{42}\right)$	$\left(\frac{18}{42}, -\frac{9}{42\sqrt{3}}, \frac{1}{42}\right)$
$\left(\frac{31}{74}, -\frac{11}{37\sqrt{3}}, \frac{1}{74}\right)$	$\left(\frac{31}{74}, -\frac{22}{74\sqrt{3}}, \frac{1}{74}\right)$
$\left(\frac{7}{16}, -\frac{5}{16\sqrt{3}}, \frac{1}{128}\right)$	$\left(\frac{56}{128}, -\frac{40}{128\sqrt{3}}, \frac{1}{128}\right)$
⋮	⋮

(一) 半徑倒數關係

若將球持續以同一個方向往下做(以最新三顆球生出更新的球，如圖八)，可發現半徑倒數 $\left(\frac{1}{z}\right)$ 呈現以下數列：

$$2, 6, 8, 14, 26, 42, 74, 128, 218, 378 \dots$$

設此數列為 $\langle z \rangle$ ，可以發現以下規律：

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3} - z_{n-4}, z_1 = 2, z_2 = 6, z_3 = 8, z_4 = 14, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

其一般式為

$$z_n = 2 \left(\frac{T_{n+2}(\alpha) - T_{n+2}(\beta)}{\alpha - \beta} \right)$$

其中， $\alpha = \frac{1+\sqrt{13}}{4}$ ， $\beta = \frac{1-\sqrt{13}}{4}$ ， $T_n(x)$ 為第一類切比雪夫多項式(Chebyshev polynomials of the first kind)。

第一類切比雪夫多項式： $T_0(x) = 1$ ， $T_1(x) = x$ ， $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

可以用索迪公式與數學歸納法證明。

在 D 維空間中，半徑倒數數列 $\langle k_D \rangle$ 有以下關係式：

$$(D-1)k_n = \left(\sum_{i=n-D+1}^{n-1} 2k_i \right) - (D-1)k_{n-D}$$

(二) 座標關係

將以上化繁後的 x 分子列出來得到此數列： $0, 3, 4, 5, 12, 18, 31, 56, 93, \dots$ ，設其為 $\langle x_n \rangle$ 。

將以上化繁後的 y 分子列出來得到此數列： $1, 0, 4, 4, 7, 15, 22, 40, 70, \dots$ ，設其為 $\langle y_n \rangle$ 。

可以發現到數列規律

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} - x_{n-4}, x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3} - y_{n-4}, y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 4, y_4 = 4, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

(三) 收斂性討論

可以藉由特徵方程、反證法證明同一方向的福特球會收斂，並藉由電腦得到大致的收斂位置。

三、固定一球衍生的福特球

此部分為舊定義研究的摘錄。

配合 第 11 頁

衍生時，都用固定的一顆和最新的兩顆衍生出更新的球(如圖十五)，並對球心座標配合 z 值分母作適當的化繁，可以得到數顆球的球心，如表 4。

表 4：固定球的球心為 $(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ 的衍生情況

球心	配合 z 值分母化繁
$(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(\frac{1}{1}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$	$(\frac{2}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$	$(\frac{3}{6}, \frac{0}{6\sqrt{3}}, \frac{1}{6})$
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{8})$	$(\frac{4}{8}, \frac{-4}{8\sqrt{3}}, \frac{1}{8})$
$(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$	$(\frac{5}{14}, \frac{-4}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$
$(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{18})$	$(\frac{6}{18}, \frac{-9}{18\sqrt{3}}, \frac{1}{18})$
$(\frac{7}{26}, -\frac{5}{13\sqrt{3}}, \frac{1}{26})$	$(\frac{7}{26}, \frac{-10}{26\sqrt{3}}, \frac{1}{26})$
$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{32})$	$(\frac{8}{32}, \frac{-16}{32\sqrt{3}}, \frac{1}{32})$
$(\frac{3}{14}, -\frac{3}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{42})$	$(\frac{9}{42}, \frac{-18}{42\sqrt{3}}, \frac{1}{42})$
$(\frac{1}{5}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{50})$	$(\frac{10}{50}, \frac{-25}{50\sqrt{3}}, \frac{1}{50})$
⋮	⋮

(一) 半徑倒數關係

若以固定的一顆和最新的兩顆衍生出更新的球(如圖十二)，可發現衍生出的球的半徑倒數數列 $\langle z \rangle$ 具有以下規律：

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2} - z_{n-3} + z_0, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

其中 z_0 為固定的球的半徑倒數，以表四而言， $z_0 = 2, z_1 = 6, z_2 = 8, z_3 = 14$

其一般式為

$$z_n = \frac{1}{4}(5 + 3(-1)^{n+3} + 2(n+1)(n+3))$$

這可以用索迪公式與數學歸納法證明。

在 D 維空間中，半徑倒數數列 $\langle k_D \rangle$ 有以下關係式：

$$(D-1)k_n = 2 \left(\sum_{i=n-D+1}^{n-1} k_i + k_0 \right) + (D-1)k_{n-D}$$

(二) 座標關係

將以上化繁後的 x 分子列出來得到此數列： $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ ，設其為 $\langle x_n \rangle$ 。

將以上化繁後的 y 分子列出來得到此數列： $-1, 2, -1, 0, -4, -4, -9, \dots$ ，設其為 $\langle y_n \rangle$ 。

可以發現到數列規律

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3} + x_0, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} - y_{n-3} + y_0, y_0 = -1, y_1 = 2, y_2 = -1, y_3 = 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

四、證明

此部分補充內文沒有完整的證明。

(一) 正方形與法里數列

配合 第 5 頁

法里數列有一種產生方法，從一個邊長為 1 的正方形開始，畫出兩條對角線，將交點投影到下面方的邊，之後不斷從舊有的交點(包括正方形一開始上方的兩個點)畫線到投影點，產生更多交點並投影，這些投影點的 x 座標即為法里數列中的項(方形的最左邊 x 座標為 0)，如圖 21。

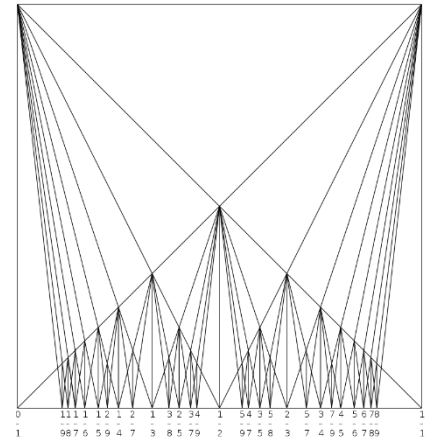


圖 21：正方形與法里數列

這可以簡單的證明。先假設 x 座標為 $\frac{p}{q}$ 的交點距離投

影點距離為 $\frac{1}{q}$ ，如圖四。由相似形可知 $r:k = \frac{1}{q_1} : \frac{1}{q_2}$ 、

$q_3 = q_1 + q_2$ ，又由內分點公式知焦點的 x 座標為

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{\frac{1}{q_2}}{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}} + \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{\frac{1}{q_1}}{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}} = \frac{\frac{p_1 + p_2}{q_1 q_2}}{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}} = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}。$$

符合法里數列相鄰兩項間的關係，故這些投影點的 x 座標即為法里數列中的項。

又一開始是從 x 座標為 $\frac{0}{1}$ 、 $\frac{1}{1}$ 高度為 1 的點開始，之後的交點皆為 x 座標為 $\frac{p}{q}$ ，高度為 $\frac{1}{q}$ 的點，故假設成立。

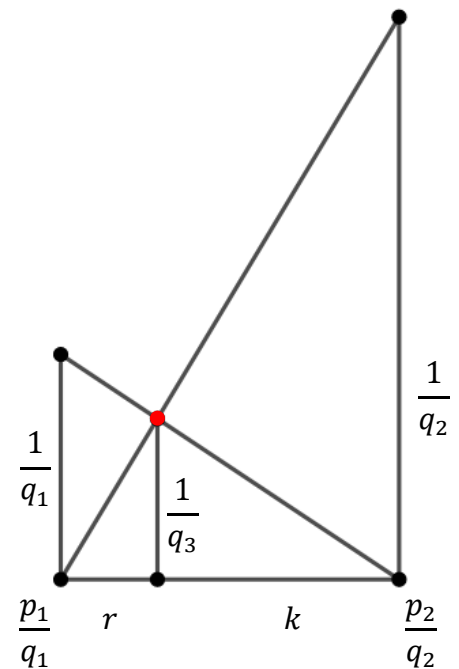


圖 22：點之間的關係

(二) 法里數列面積

配合 第 5 頁

若將法里數列以分母為 x 座標，分子為 y 座標繪圖，且將分子分母對調並經過對稱後可得圖 23，且此圖形的面積為 $4(|F_n| - 1)$ ，其中 $|F_n|$ 為 n 階法里數列的項數，且此面積可以用皮克定理簡單證明出來。

皮克定理即為給定任一個頂點皆為格子點（座標為整數）的多邊形，其面積 $A = i + \frac{b}{2} - 1$ ，其中 i 為多邊形內部格子點數， b 為邊上格子點數。

因為在此圖形中所有的點皆為邊點，所以 $b = |F_n|$ 、 $i = 0$ ，所以根據皮克定理，其面積 $A = 8\left(0 + \frac{|F_n|}{2} - 1\right) + 4 = 4(|F_n| - 1)$

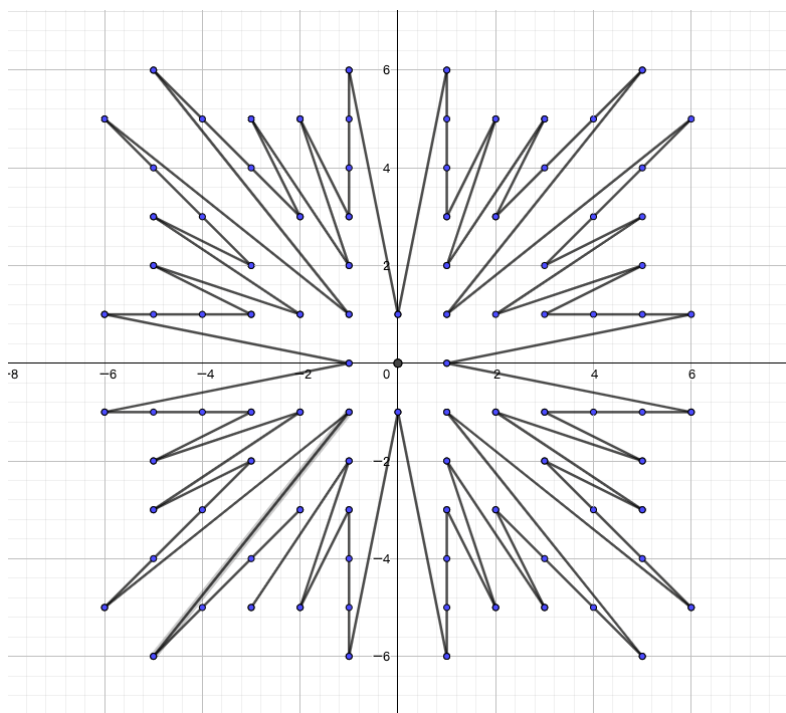


圖 23：以六階法里數列繪成的發散圖

(三) 福特圓會相外切的性質

配合 第 6 頁

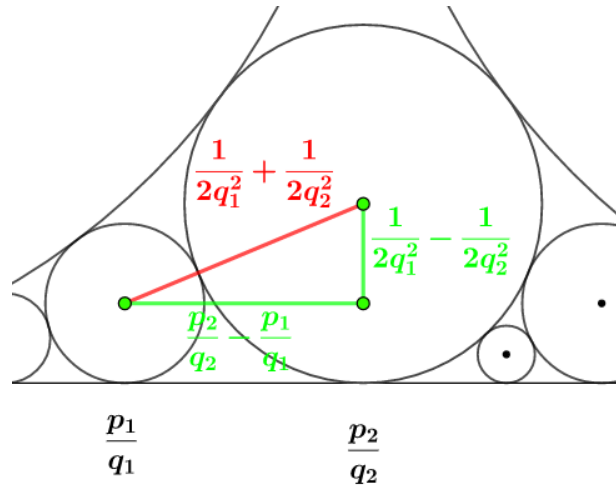


圖 24：兩個相切的福特圓

已知法里數列中有一性質：當 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 是法里數列中相鄰的兩項，且 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ，則

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{1}{bd} \Leftrightarrow bc - ad = 1$$

設有兩圓相切圓的圓心分別為 $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{1}{2q_1^2}\right)$ 、 $\left(\frac{p_2}{q_2}, \frac{1}{2q_2^2}\right)$ ，如圖 24，則

$$\begin{aligned} \frac{1}{2q_1^2} + \frac{1}{2q_2^2} &= \sqrt{\left(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2q_1^2} - \frac{1}{2q_2^2}\right)^2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2q_1^2} + \frac{1}{2q_2^2}\right)^2 &= \left(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2q_1^2} - \frac{1}{2q_2^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4q_1^4} + \frac{1}{2q_1^2q_2^2} + \frac{1}{4q_2^4} &= \frac{p_2^2}{q_2^2} + \frac{p_1^2}{q_1^2} - \frac{2p_1p_2}{q_1q_2} + \left(\frac{1}{4q_1^4} - \frac{1}{2q_1^2q_2^2} + \frac{1}{4q_2^4}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{q_1^2q_2^2} &= \frac{p_2^2}{q_2^2} + \frac{p_1^2}{q_1^2} - \frac{2p_1p_2}{q_1q_2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{q_1^2q_2^2} &= \frac{q_1^2p_2^2}{q_1^2q_2^2} + \frac{q_2^2p_1^2}{q_2^2q_1^2} - \frac{2q_1q_2p_1p_2}{q_1^2q_2^2} \\ \Leftrightarrow 1 &= q_1^2p_2^2 + q_2^2p_1^2 - 2q_1q_2p_1p_2 \\ \Leftrightarrow 1 &= (p_1q_2 - p_2q_1)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= |p_1q_2 - p_2q_1| \end{aligned}$$

$1 = |p_1q_2 - p_2q_1|$ 符合法里數列的性質，由此可知只要符合兩圓相切圓的圓心分別為

$\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{1}{2q_1^2}\right)$ 、 $\left(\frac{p_2}{q_2}, \frac{1}{2q_2^2}\right)$ ，則 $\frac{p_1}{q_1}$ 、 $\frac{p_2}{q_2}$ 必為法里數列中的相鄰兩項。

(四) 福特球半徑之間的關係

配合 第 10、13 頁

三顆互相外切的球衍生出一顆球後，此四顆球必定互相外切。在此四顆球選三顆衍生出新的球的話，則新球的半徑倒數為(三顆選出球半徑倒數和)-(未被選中的球的半徑倒數)。

令三顆被選中的球的半徑倒數分別為 k_1 、 k_2 、 k_3 (圖 25 中藍色方形)，沒被選到那顆的半徑倒數為 x (圖 25 中綠色方形)，新衍生出的球的半徑倒數為 y (圖 25 中紅色圓圈)，即

$$y = k_1 + k_2 + k_3 - x$$

知道相切球之間要符合索迪公式：

$$(k + k_1 + k_2 + k_3)^2 = 3(k^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

所以

$$(x + k_1 + k_2 + k_3)^2 = 3(x^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

$$(y + k_1 + k_2 + k_3)^2 = 3(y^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

兩式相減

$$3x^2 - 3y^2 = x^2 - y^2 + 2x(k_1 + k_2 + k_3) - 2y(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$2x^2 - 2y^2 = 2x(k_1 + k_2 + k_3) - 2y(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$(x + y)(x - y) = (x - y)(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$[(x + y) - (k_1 + k_2 + k_3)](x - y) = 0$$

又 $x \neq y$ ($x = y$ 的話是圖 25 中再次生出綠色方形)，故

$$(x + y) - (k_1 + k_2 + k_3) = 0$$

$$y = k_1 + k_2 + k_3 - x$$

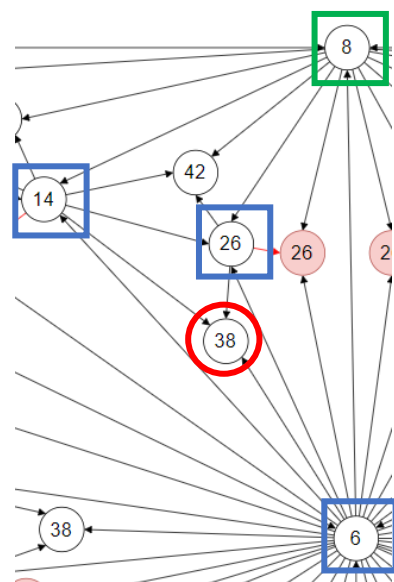


圖 25：福特球半徑關係(部分)

(五) 起始福特球的體積

配合 第 12 頁

類似第 7 頁算福特圓面積和時的方法，這些球的體積和為

$$V = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{\gcd(p,q)=1 \\ 0 \leq p \leq q}} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2q^2} \right)^3$$

經過化簡後得

$$V = \frac{1}{6} \pi \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^6} \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ 0 \leq p \leq q}} 1 \right) = \frac{1}{6} \pi + \frac{1}{6} \pi \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^6}$$

其中 φ 為歐拉函數， $\varphi(n)$ 是小於或等於 n 的正整數中與 n 互質的數的數目。

又歐拉函數有此性質：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

其中 ζ 為黎曼 ζ 函數， $\zeta(s)$ 的定義為

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

故

$$V = \frac{1}{6} \pi + \frac{1}{6} \pi \cdot \frac{\zeta(5)}{\zeta(6)}$$