第二十屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA20-450

作品名稱：多人循環賽局策略之研究

姓名：蔡平樂

關鍵字：納許均衡、不等式、遞迴

壹、研究動機

P_1、P_2、P_3三名參賽者進行決鬥，以 P_1、P_2、P_3的順序，每位參賽者輪流射擊一次，目標自由選擇，被射中的參賽者退出賽局，剩下一人決鬥即結束。P_1每次射擊的命中率為三分之一、P_2每次射擊的命中率為三分之二、P_3每次射擊必定命中目標，問這時使 P_1勝率最高的策略為何。令人意想不到的是，此時 P_1的最佳行動是放棄自己的射擊機會。當P_1放棄，輪到P_2射擊時，由於P_3命中率比P_1大，對P_2更具威脅，因此P_2將會選擇射擊P_3而不是P_1。若P_2射擊落空而輪到P_3的回合時，由於P_2命中率比P_1大，因此P_3也會選擇射擊P_2而不是P_1，且必定命中目標。等 P_2、P_3互相射擊過後，P_1再與剩下的參賽者決鬥。我們好奇三名參賽者命中率不固定時，他們的決策會有怎樣的變化?人數增加至多人時，各參賽者的決策又會有什麼規律?

貳、研究目的與架構

本研究的研究目的有以下四點:

一、分析兩人弓箭手賽局中，參賽者的平衡策略及勝率。

二、分析三人弓箭手賽局:

(一)對於給定策略的三人弓箭手賽局，找出勝率的一般式

(二)推導判斷平衡策略的樹狀圖

(三)計算各策略發生機率

三、分析四人以上的弓箭手賽局:

(一)推導多人弓箭手賽局的遞迴式

(二)實作計算多人弓箭手賽局平衡策略的程式

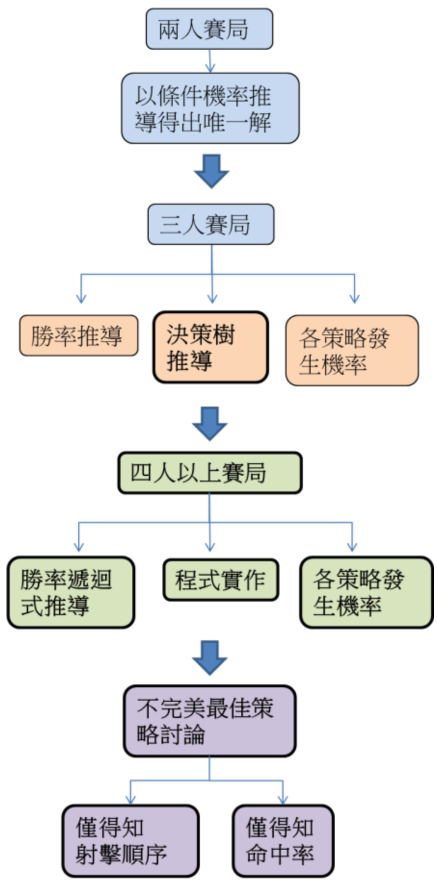
(三)計算各策略的發生機率，並尋找其規律

四、用程式統計參賽者在以下情況的不完美平衡策略:

(一)僅得知射擊順序時

(二)僅得知命中率大小順序時

研究架構如圖一，其中粗框、粗體部分僅在本研究出現



圖一、研究架構

參、研究設備

Google Colaboratory、紙、筆、電腦。

肆、研究流程

一、名詞解釋

(一) 三人弓箭手賽局

P_1、P_2、P_3三名參賽者進行弓箭手賽局，依P_1、P_2、P_3的順序，每位參賽者輪流射擊。每個參賽者能決定「射擊別的參賽者」或「不射擊」。若參賽者 Pi 決定射擊，他有p_i的機率射中目標，目標若被射中即退出賽局。若被輪到的參賽者已退出或該參賽者策略為「不射擊」則跳過。每位參賽者輪流執行自己的策略，最後留下的參賽者即為獲勝者。

此外我們將只有兩人進行決鬥的弓箭手賽局稱為兩人賽局，每位參賽者只能決定「射擊另一名參賽者」或「不射擊」。

我們本次探討的遊戲增加了一條規則:「在參賽者決定策略後，只要場上的參賽者組成不變，就不能改變自己的策略」。也就是說若P_1第一次射擊時選擇射擊P_2，那在他第二次射擊前只要沒有人死亡，P_1就只能選擇射擊P_2。

此賽局符合馬可夫性質，也就是每個參賽者當下的勝率與時間點無關，只與目前場上的參賽者、目前執行策略的人及各參賽者的策略有關。

(二) 參賽者(Pi)

我們依行動的先後順序，將參與決鬥的參賽者分別以P_1、P_2、P_3表示。

(三) 命中率(pi)

我們將P_1、P_2、P_3的命中率以p_1、p_2、p_3表示。而為了簡化算式，P_1、P_2、P_3沒射中目標的機率$(1-p_1)$、$(1-p_2)$、$(1-p_3)$我們以 $\overline{p_1}$、$\overline{p_2}$、$\overline{p_3}$表示。

(四) 策略集(L)

每位參賽者所選定並執行的策略，必須是「射擊另一名參賽者」或「不射擊」。我們以 $Pi \rightarrow Pj$ 表示「Pi 射擊 Pj」的策略，若 Pi 的策略為不射擊，我們以 $Pi \rightarrow X$ 表示。我們將該場賽局所有參賽者的策略合稱為「策略集」。以「(P_1的射擊目標,P_2的射擊目標,P_3的射擊目標)」的方式表示。代號為 L。例如一場P_1策略為$P_1 \rightarrow P_2$、P_2策略為$P_2 \rightarrow P_3$、P_3策略為$P_3 \rightarrow X$ 的賽局，我們就以(2,3,X)表示此賽局各參賽者依射擊順序對應的策略集。若我們要表示策略集 L 中某參賽者 Pi 選擇的策略，我們以 L(Pi)表示，例如 L=(2,3,X)的賽局中，$L(P_1)=(P_1 \rightarrow P_2)$，$P_2$、$P_3$的策略以此類推。討論兩人賽局時，我們以($P_1$的射擊目標,$P_2$的射擊目標)表示兩人賽局的策略集。

(五) 勝率(W)

對於一場策略集為 L 的弓箭手賽局，我們以 $W_{Pi}(L)$表示參賽者P_i的勝率。此外，當某策略集中所有參賽者的策略都為「放棄」，我們定義此策略集下個參賽者的勝率皆為 0。也就是 $W_{P1}(X,X,X)=W_{P2}(X,X,X)=W_{P3}(X,X,X)=0$。同樣的，在兩人賽局中，我們定義 $W_{P1}(X,X)=W_{P2}(X,X)=0$。

(六)平衡策略(BL) :

假設任意參賽者P_i都能夠知道所有參賽者行動造成的結果，且$P_i \rightarrow P_j$是所有P_i的策略

中，可使 P_i 在該情況下勝率最大的策略，則 $P_i \rightarrow P_j$ 便稱為 P_i 的局部平衡策略。某些參賽者策略固定、其他參賽者皆選擇使其勝率最大的策略，所產生的策略集，稱為局部平衡策略集。以更嚴格的定義來說(以三人賽局為例):

1、若 $P_3 \rightarrow Pt_3$ 是 P_1、P_2 策略分別固定為 $P_1 \rightarrow Pt_1$、$P_2 \rightarrow Pt_2$ 時的局部平衡策略 ($t_1,t_2,t_3 \in \{1,2,3,X\}$)，則對於任何非 $P_3 \rightarrow Pt_3$ 的 P_3 策略 $P_3 \rightarrow Pt_3'$($t_3 \in \{1,2,X\}$)，$W_{P3}(t_1,t_2,t_3) > W_{P3}(t_1,t_2,t_3')$，也就是說 Pt_3 是所有 P_3 的行動中可使 P_3 勝率最高的一個。也稱(t_1,t_2,t_3)為此時的局部平衡策略集，寫作 $ABL(t_1,t_2)=(t_1,t_2,t_3)$。

2、若 $P_2 \rightarrow Pt_2$ 是 P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow Pt_1$ 時的局部平衡策略($t_1,t_2 \in \{1,2,3,X\}$)，則對於任何非 $P_2 \rightarrow Pt_2$ 的 P_2 策略 $P_2 \rightarrow Pt_2'$ ($t_2 \in \{1,3,X\}$)，$W_{P2}(t_1,t_2,t_3) > W_{P2}(t_1,t_2',t_3')$ (Pt_3'是 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow Pt_1$、P_2 策略為 $P_2 \rightarrow Pt_2'$時 P_3 的局部平衡策略集)。也可稱(t_1,t_2,t_3)為 P_2 在($P_1 \rightarrow Pt_1$)時的平衡策略集，寫作 $ABL(t_1)=(t_1,t_2,t_3)$。

3、若 $P_1 \rightarrow Pt_1$ 是 P_1 的平衡策略($t_1 \in \{2,3,X\}$)，則對於任何非 $P_1 \rightarrow Pt_1$ 的 P_1 策略 $P_1 \rightarrow Pt_1'$，$W_{P1}(t_1,t_2,t_3) > W_{P1}(t_1',t_2',t_3)$ ((t_1',t_2',t_3')是($P_1 \rightarrow Pt_1'$)時的局部平衡策略集)。也可稱(t_1,t_2,t_3)為整場賽局的平衡策略集，寫作 $BL=(t_1,t_2,t_3)$。

對於四人以上的賽局，我們可以遞迴方式定義局部平衡策略:

在一場 n 人賽局中，若限制前 k 人的策略為L_{prev_k}，則此時的局部平衡策略為:

1.若 k=n，則$ABL\left(L_{prev_k}\right) = L_{prev_k}$

2.若 k<n，則$ABL\left(L_{prev_k}\right) = ABL\left(L_{prev_k} + \{P_{k+1} \rightarrow P_{tar}\}\right)$。其中$P_{tar}$為使$P_{k+1}$勝率最大的$P_{k+1}$射擊目標。也就是:

$$W_{P_{k+1}}\left(ABL\left(L_{prev_k} + \{P_{k+1} \rightarrow P_{tar}\}\right)\right) \geq W_{P_{k+1}}\left(\ ABL\left(L_{prev_k} + \{P_{k+1} \rightarrow P_i\}\right)\ \right)$$

$$, P_i \in \{X, P_1, P_2 \dots P_n\} - \{P_{k+1}\}$$

事實上，平衡策略就相當於此賽局的納許均衡解。此研究的主要目的便是分析討論各種不同命中率組合下的平衡策略。

二、兩人賽局研究

因三人賽局過於複雜，因此我們由分析兩人賽局的平衡策略、勝率開始，再推至三人賽局。以下分析參賽者只有 P_1、P_2 時，兩人的平衡策略及勝率:

(一)策略分析

每位參賽者的策略都只有「不射擊」或「射擊另一名參賽者」兩種。因此我們直接列舉所有狀況，觀察 P_1、P_2 的平衡策略。

1、P_1 策略固定時，P_2 的局部平衡策略

我們分別假設 P_1 的策略固定為 $P_1 \rightarrow X$ 和 $P_1 \rightarrow P_2$，推導 P_2 的局部平衡策略，再合併兩種狀況，推導 P_1 的平衡策略。

(1) P_1策略固定為 P_1→X 時，P_2的策略

我們列舉不同的 P_2策略，再選擇其中使 P_2勝率較高者:

a、 P_2策略固定為 P_2→X 時

此時 P_2的勝率 $W_{P2}(X,X)=0$(由定義)

b、 P_2策略固定為 P_2→P_1時

此時 P_2的勝率 $W_{P2}(X,1)=1$:

由於 P_1不進行任何行動，因此整場賽局只有 P_2不斷射擊 P_1。且當時間延長至無限，P_2必能夠射中 P_1，P_2必勝。

綜合 a、b，$W_{P2}(X,1) > W_{P2}(X,X)$，$P_2$選擇策略 P_2→P_1的勝率大於 P_2選擇策略 P_2→X 的勝率。又由定義可知，P_2的局部平衡策略為所有 P_2的策略中使 P_2勝率最高者。P_2局部平衡策略為 P_2→P_1。

(2) P_1策略固定為 P_1→P_2時，P_2的策略

我們列舉不同的 P_2策略，再選擇其中使 P_2勝率較高者:

a、P_2策略固定為 P_2→X 時

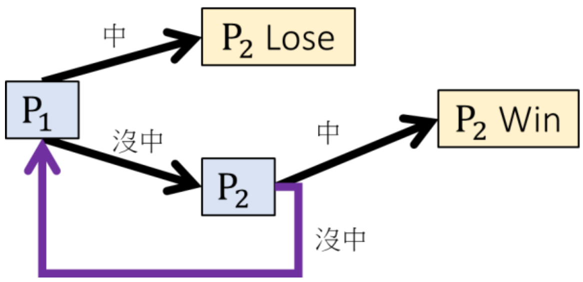
此時 P_2勝率 $W_{P2}(2,X)=0$:

由於 P_2不進行任何行動，因此整場賽局只有 P_1不斷射擊 P_2。且當時間延長至無限，P_1必能夠射中 P_2，P_1必勝。

b、P_2策略固定為 P_2→P_1時

此時 P_2勝率 $W_{P2}(2,1)=\frac{\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}$:

我們將賽局以樹狀圖表示(圖二):



圖(二)

$W_{P2}(2,1)$即是此樹狀圖中所有分支勝率的總和:

$$W_{P2}(2,1) = P(P_1\text{中}) * 0 + P(P_1\text{不中} \wedge P_2\text{中}) * 1 + P(P_1\text{不中} \wedge P_2\text{不中}) * W_{P2}(2,1)$$

$$= p_1 \times 0 + (1-p_1)p_2 \times 1 + (1-p_1)(1-p_2) \times W_{P2}(2,1)$$

$$\rightarrow (1-(1-p_1)(1-p_2)) \times W_{P2}(2,1) = (1-p_1)p_2$$

$$\rightarrow W_{P2}(2,1) = \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}$$

綜合 a.、b.，當 $0<p_1<1$ 且 $0<p_2$時，$W_{P2}(2,1)>0=W_{P2}(2,X)$，$P_2$選擇策略 P_2→P_1的勝率大於 P_2選擇 P_2→X 的勝率。又由定義可知，P_2的局部平衡策略為所有 P_2的策略中使 P_2勝率最高者。此時 P_2的局部平衡策略為 P_2→P_1。

綜合(1)、(2)，無論 P_1 策略為何，P_2 局部平衡策略必為 $P_2 \rightarrow P_1$。

2、P_1 的平衡策略

由 1、可知無論 P_1 策略為何，P_2 必選擇策略 $P_2 \rightarrow P_1$。因此我們只要觀察 P_1 選擇不同策略下的勝率即可:

(1) P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow X$ 時:

此時 P_1 勝率 $W_{P1}(X,1)=0$

(2) P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時:

此時 P_1 勝率 $W_{P1}(2,1)=\frac{p_1}{1-\overline{p_1p_2}}$:

P_1、P_2 勝率和為 1

$\rightarrow W_{P_1}(2,1)+W_{P_2}(2,1)=1$

$\rightarrow W_{P_1}(2,1)=1-\frac{\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1p_2}}=\frac{1-\overline{p_1p_2}-\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1p_2}}=\frac{p_1}{1-\overline{p_1p_2}}$

當 $0<p_1$ 且 $0<p_2$，$W_{P1}(2,1)=\frac{p_1}{1-\overline{p_1p_2}}>0=W_{P1}(X,1)$，$P_1$ 選擇策略 $P_1 \rightarrow P_2$ 的勝率大於 P_1 選擇策略 $P_1 \rightarrow X$ 的勝率。又由定義可知，P_1 平衡策略為所有 P_1 策略中使 P_1 勝率最高者。P_1 平衡策略為 $P_1 \rightarrow P_2$。

綜合 1、2，由 P_1、P_2 進行的兩人賽局平衡策略集必為(2,1)，即互相射擊。

(二)對手命中率對參賽者勝率的影響

$W_{P1}(2,1)=\frac{p_1}{1-\overline{p_1p_2}}$，$\frac{dW_{P_1}(2,1)}{d(p_2)}=\frac{-p_1\overline{p_1}}{(1-\overline{p_1p_2})^2}$，在 $0<p_1,p_2<1$ 時，$\frac{dW_{P_1}(2,1)}{d(p_2)}<0$，也就是 P_2 命中率越大，P_1 勝率越低。

$W_{P2}(2,1)=\frac{\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1p_2}}$，$\frac{dW_{P_2}(2,1)}{d(p_1)}=\frac{-p_2(1-\overline{p_1p_2})-(\overline{p_1}p_2)(\overline{p_2})}{(1-\overline{p_1p_2})^2}$，在 $0<p_1,p_2<1$ 時，$\frac{dW_{P_2}(2,1)}{d(p_1)}<0$，也就是 P_1 命中率越大，P_2 勝率越低。

以上是針對兩人賽局的分析。我們發現在兩人賽局中，兩名參賽者的平衡策略必為互相射擊，且 P_1 勝率為 $\frac{p_1}{1-\overline{p_1p_2}}$，$P_2$ 勝率為 $\frac{\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1p_2}}$。此結果有助於我們推導三人賽局一般化勝率。

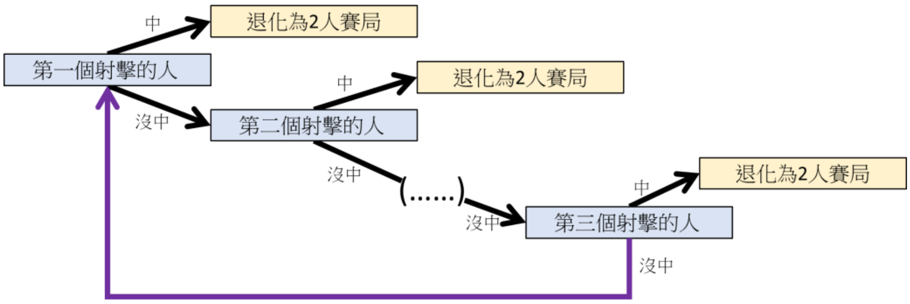
三、三人賽局研究

三人賽局不同於二人賽局，參賽者的行動只有「射」或「不射」兩種，還能選擇不同的射擊目標。由於策略的可能性非常多，因此參賽者的勝率也會受到不同策略影響。我們先找出三人賽局計算勝率的方式，並尋找賽局的特性，再尋找平衡策略。

(一)給定策略集後，各參賽者的勝率

對於一場策略集為 L 的弓箭手賽局，我們可以繪出樹狀展開表示賽局進行(圖三)。每

個策略為「射擊某人」的參賽者若射擊成功，三人賽局便會變為兩人賽局，我們稱這種現象為「退化」。由馬可夫性質我們可以發現，若前三回合賽局都沒退化，則第四回合的狀態與第一回合完全相同。因此只要分析賽局的前三回合 (從開始到P_1第二次被輪到之間的賽局)，我們便可求出三人的勝率。



圖三，以樹狀圖表示賽局進行

我們以$W_{Pi}(L)$表示策略集為 L 時某參賽者P_i的勝率，並以R_j表示賽局在第 j 回合退化為 2 人賽局的事件、以R'表示在三回合內賽局皆無退化的事件，可列出下式:

$W_{Pi}(L) = \sum_{j=1}^{3} P(R_j) * P(P_i \text{ win}|R_j) + P(R') * W_{Pi}(L)$

可解得

$$W_{Pi}(L) = \frac{\sum_{j=1}^{3} P(R_j)*P(P_i \text{ win}|R_j)}{1-P(R')}$$

因此我們只需求得$P(R_j)$、$P(P_i \text{ win} \mid R_j)$、$P(R')$再進行合併，即可求得勝率一般式(以下分析中的$j \leq 3$):

1.在第 j 回合，且該回合參賽者策略不為「放棄」時，賽局退化的機率

在第 j 回合時執行策略的是參賽者P_j。若P_j策略為「放棄」，則該回合賽局退化的機率必為 0。因此以下僅討論 Pj 策略不為「放棄」時的退化機率:

若輪到P_j時場上依然有三個參賽者，那在P_j前策略為「射擊」的參賽者都不能射中目標

➔策略集為 L，賽局在第 j 回合前場上皆有三名參賽者的機率為

$$\prod_{t=1}^{j-1} \begin{cases} 1 & L(P_t) = Pt \to X \\ \overline{p_t} & L(P_t) \neq P_t \to X \end{cases}$$

$(L(P_k)$表示參賽者P_k在策略集 L 中的策略)

且除了前$j-1$回合中的參賽者不能命中目標，P_j也須射中目標才能使賽局退化:

➔策略集為 L，賽局在第 j 回合退化為兩人的機率為

$$P(R_j)=\left(\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}\right)*p_j$$

當 j=1 時，$P(R_j)=p_j$

2.在第 j 回合退化後，P_i的勝率

若P_j策略為放棄時賽局必不退化，故以下僅討論P_j策略不為放棄射擊的狀況。對於不同的P_j射擊所轉移至的兩人賽局，Pi 的勝率 $P(P_i\ win \mid R_j)$會有所不同:

(1)若$P_i=P_j$，則 $P(P_i\ win \mid R_j)=\frac{\overline{p_k}*p_i}{1-\overline{p_i}\overline{p_k}}$($P_k$是三人中，除了$P_i$與$P_i$射擊目標以外的第三人)。因場上只剩$P_i$與$P_k$，且由$P_k$先射擊

(2)若$P_i\neq P_j$且P_j的射擊目標是P_i，則 $P(P_i\ win \mid R_j)=0$ ，因為P_i已退出賽局

(3)若$P_i\neq P_j$且P_j的射擊目標不是P_i， 則 $P(P_i\ win \mid R_j)=\frac{p_i}{1-\overline{p_i}\overline{p_j}}$，因場上只剩$P_i$與$P_j$，且由$P_i$先射擊

我們可知只有在三回合內，所有策略為「射擊」的參賽者都沒射中目標時，賽局才不會退化。故前三回合賽局都沒有退化的機率為$P(R')=\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}$。且結合 1.、2.的內容代入$W_{Pi}(L)=\frac{\sum_{j=1}^{3}P(R_j)*P(P_i\ win|R_j)}{1-P(R')}$

可得一般式為:

$$W_{Pi}(L)=\frac{\sum_{j=1}^{3}\left(\left(\begin{cases}p_j & j=1\wedge L(P_j)\neq(P_j\to X)\\ \left(\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}\right)*p_j & j>1\wedge L(P_j)\neq(P_j\to X)\\ 0 & L(P_j)=(P_j\to X)\end{cases}\right)*\left(\begin{cases}\frac{\overline{p_k}p_i}{1-\overline{p_i}\overline{p_k}} & P_j=P_i\\ 0 & L(P_j)=(P_j\to P_i)\\ \frac{p_i}{1-\overline{p_i}\overline{p_j}} & else\end{cases}\right)\right)}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}$$

其中分子後半部的P_k為P_i、P_i射擊目標以外的第三名參賽者，p_k為其命中率。

(二)三人賽局的特性

我們發現三人賽局中，無論P_1,P_2,P_3的數值，都會有一些共同的特性:

1、只有一人策略改變時，勝率的大小關係

對於兩組P_1,P_2策略相同的策略集$(t_1,t_2,1)$與$(t_1,t_2,2)$($t_1,t_2\in\{X,1,2,3\}$):

(1)若$p_1<p_2$，則 $W_{P3}(t_1,t_2,1)<W_{P3}(t_1,t_2,2)$。

(2)若$p_1>p_2$，則 $W_{P3}(t_1,t_2,1)>W_{P3}(t_1,t_2,2)$。

簡單來說，如果 P_1、P_2策略固定，P_3射擊命中率較大的目標時，P_3的勝率比 P_3射擊命中率較低的目標時的勝率大。例如在 $p_1<p_2$時，$W_{P3}(X,3,1)$必小於 $W_{P3}(X,3,2)$。證明由於篇幅因素，放置於附錄一。

而對於 P_1 與 P_2，我們也可發現類似的特性:

若有兩組不同策略$(2,t_2,t_3)$與$(3,t_2,t_3)$($t_2,t_3 \in \{X,1,2,3\}$):

(1)若$p_2 < p_3$，則 $W_{P1}(2,t_2,t_3)<W_{P1}(3,t_2,t_3)$。

(2)若$p_2 > p_3$，則 $W_{P1}(2,t_2,t_3)>W_{P1}(3,t_2,t_3)$。

若有兩組不同策略$(t_1,1,t_3)$與$(t_1,3,t_3)$($t_2,t_3 \in \{X,1,2,3\}$):

(1)若$p_1 < p_3$，則 $W_{P2}(t_1,1,t_3))<W_{P2}(t_1,3,t_3)$。

(2)若$p_1 > p_3$，則 $W_{P2}(t_1,1,t_3)>W_{P2}(t_1,3,t_3)$。

也就是若某參賽者 Pi 決策不影響另外兩名參賽者策略時，Pi 射擊在場命中率最高者(去除自己後)的勝率必比射擊在場命中率次高者的勝率高。

由此特性，我們可以發現在平衡策略集中，P_3的策略只有兩種可能:「放棄」或「射擊在場命中率最高者」，因為 P_1 和 P_2決定好最佳策略後，在出現陣亡者之前都不會改變策略，相當於固定策略。因此 P_3射擊命中率最高者得到的勝率必大於射擊命中率較低者。也就是說在平衡策略集中，P_3不會射擊另外兩人中命中率較低者。

2、若某參賽者的策略不為「放棄」，則該參賽者的勝率必不為 0

當某參賽者的策略不為「放棄」，則該參賽者的勝率必不為 0。且可由此發現:若某參賽者 P_i 選擇策略 $P_i \rightarrow X$ 時勝率為 0，則 $P_i \rightarrow X$ 必不為 P_i的平衡策略。

四、三人賽局的平衡策略

我們以樹狀展開的方式，先探討 P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow P_3$、$P_1 \rightarrow P_2$、$P_1 \rightarrow X$ 三種狀況下 P_2、P_3的局部平衡策略，最後再進行合併。

(一) P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3的決策分析

我們先分析此前提下，P_2、P_3的決策特性，再利用決策特性化簡平衡策略判斷。

1、P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3決策的特性

我們發現，若 P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3的決策有以下特性(證明由於篇幅限制，放至附錄二-(一)):

(1) 在 $p_1<p_3$時，若 ABL(X,1)不為(X,1,X)，則 $P_2 \rightarrow P_1$ 不為 P_2的平衡策略

我們可以使用上述特性化簡下列判斷。

2、P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3的決策

(1)$p_1<p_2$時，P_2、P_3的平衡策略

因 $p_1<p_2$，ABL(X,X)=(X,X,2)。又 $W_{P2}(X,X,2)=0$，由三-(二)-2 可知 $P_2 \rightarrow X$ 必不為 P_2的平衡策略。且由於 $W_{P3}(X,3,X)=0$ 且 $p_1<p_2$，此時 ABL(X,3)=(X,3,2)。而 P_2、P_3的詳細決策我們依據 p_1、p_3大小關係分類:

a.$p_1<p_3$時，P_2、P_3的平衡策略

根據四-(一)-1-(1)，我們可得:

(a)若 ABL(X,1)=(X,1,X)且 $W_{P2}(X,1,X)>W_{P2}(X,3,2)$，局部平衡策略為(X,1,X) (b)若 ABL(X,1)不為(X,1,X)或 $W_{P2}(X,1,X)<W_{P2}(X,3,2)$，局部平衡策略為(X,3,2)

b.$p_1>p_3$時，P_2、P_3的平衡策略

因 $W_{P2}(X,3,2)<W_{P2}(X,1,2)<W_{P2}(X,1,X)$

➔P_2平衡策略不為 P_2➔P_3

且 P_2平衡策略也必不為 P_2➔X

➔P_2平衡策略必為 P_2➔P_1

而 P_3平衡策略則不一定:

(a)若 $W_{P3}(X,1,X)<W_{P3}(X,1,2)$，$P_3$平衡策略為 P_3➔P_2

(b)若 $W_{P3}(X,1,X)>W_{P3}(X,1,2)$，$P_3$平衡策略為 P_3➔X

(2)$p_1>p_2$時，P_2、P_3的平衡策略

$p_1>p_2$時 ABL(X,1)僅(X,1,1),(X,1,X)兩種可能，ABL(X,X)僅(X,X,1)一種可能。因 $W_{P2}(X,1,X)<W_{P2}(X1,1)<W_{P2}(X,X,1)$

➔(P_2➔P_1)必不為 P_2的平衡策略。

➔P_2平衡策略為 P_2➔X 或 P_2➔P_3

➔由於 $W_{P3}(X,X,X)=0$，$W_{P3}(X,3,X)=0$，P_3平衡策略必不為 P_3➔X

➔P_3平衡策略必為 P_3➔P_1

而 P_2策略則不一定:

a.$p_1<p_3$時，P_2、P_3的平衡策略

(a).若 $W_{P2}(X,X,1)>W_{P2}(X,3,1)$，平衡策略集為(X,X,1)

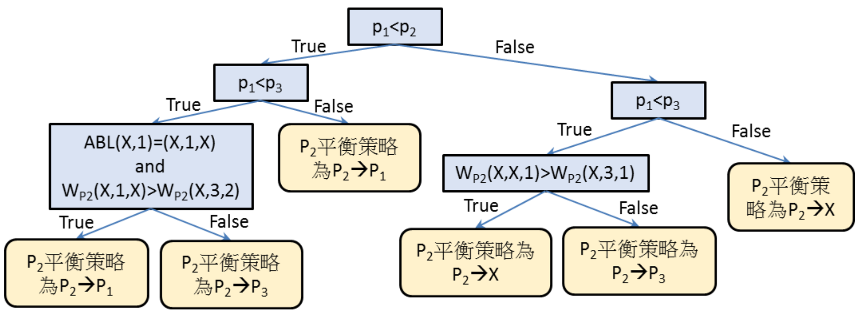
(b).若 $W_{P2}(X,X,1)<W_{P2}(X,3,1)$，平衡策略集為(X,3,1)

b.$p_1>p_3$時，P_2、P_3的平衡策略

因 $p_1>p_2$，$p_1>p_3$時 $W_{P2}(X,3,1)<W_{P2}(X,X,1)$，$P_2$平衡策略不為 P_2➔P_3。

➔P_2平衡策略必為 P_2➔X

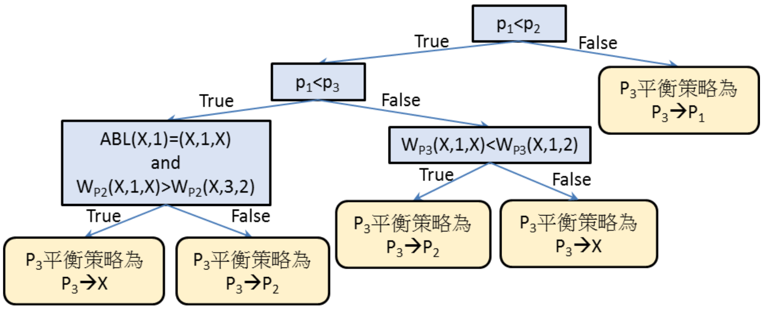
我們可將四-(一)-2 中，判斷 P_2平衡策略的方式彙整為樹狀圖，如下所示(圖四):



圖四

上圖以多個含不等式的節點、「True」、「False」兩條邊與對應不同平衡策略的葉節點構成。代表若 $p_1<p_2$不等式成立，那 P_2的平衡策略由左子樹(根節點為 $p_1<p_3$的子樹)判斷，若 $p_1<p_2$且 $p_1>p_3$，則平衡策略為左子樹根節點的右葉節點(P_2平衡策略為 P_2➔P_1)。若 $p_1<p_2$不成立，那 P_2的平衡策略由右子樹判斷，以此類推。

我們也可將判斷 P_3 平衡策略的方式彙整為樹狀圖，如下所示(圖五):



圖五

(二)P_1 策略為 $P_1→P_2$ 時，P_2、P_3 的決策分析

1、P_1 策略為 $P_1→P_2$ 時，P_2、P_3 決策的特性

當 P_1 策略固定為 $P_1→P_2$，P_2、P_3 決策有以下特點(以下證明由於篇幅限制，放至附錄二-(二)):

(1)若 P_2 策略固定為 $P_2→P_3$ 時，P_3 的局部平衡策略為 $P_3→X$，則 P_2 策略為 $P_2→X$ 或 $P_2→P_1$ 時，P_3 的局部平衡策略也都必為 $P_3→X$。

(2)當 $p_1<p_3$ 時，若 ABL(2,1)不為(2,1,X)，則 $P_2→P_1$ 必不是 P_2 的平衡策略

(3)若 $p_1>p_2$ 且 $p_1<p_3$，則 $P_2→P_1$ 必不為 P_2 的平衡策略

(4)當 $p_1>p_3$ 時，若 ABL(2,3)不為(2,3,1)，則 $P_2→P_3$ 必不為 P_2 的平衡策略

我們可使用以上特性簡化 P_2、P_3 的策略判斷。

2、P_1 策略為 $P_1→P_2$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

我們以 P_1 與 P_2 的大小關係、P_1 與 P_3 的大小關係為所有狀況分類:

(1)$p_1<p_2$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

根據三-(二)-1，此時 P_3 平衡策略只有 $P_3→X$、$P_3→P_2$ 兩種可能。由於 $W_{P2}(2,X,X)=0$，$W_{P2}(2,X,2)=0$，由三-(二)-2 得知此時 $P_2→X$ 必不為 P_2 的平衡策略。而 P_2、P_3 的詳細決策我們依據 p_1、p_3 大小關係分類:

a.$p_1<p_3$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

(a)若 ABL(2,1)=(2,1,X)且 $W_{P2}(2,1,X)>W_{P2}(ABL(2,3))$，$P_2$ 平衡策略為 $P_2→P_1$，平衡策略集為(2,1,X)

(b)若 ABL(2,1)不為(2,1,X) 或 $W_{P2}(2,1,X)<W_{P2}(ABL(2,3))$，$P_2$ 平衡策略必為 $P_2→P_3$。而 P_3 的策略則不一定:

若 $W_{P3}(2,3,2)>W_{P3}(2,3,X)$，$P_3$ 平衡策略為 $P_3→P_2$

若 $W_{P3}(2,3,2)<W_{P3}(2,3,X)$，$P_3$ 平衡策略為 $P_3→X$

b.$p_1>p_3$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

由三-(二)-1 得知 $p_1<p_2$ 時，$P_3→P_1$ 不可能是 P_3 的平衡策略，因此 ABL(2,3) 不可能是(2,3,1)，根據四-(二)-1-(4)，$P_2→P_3$ 不可能是 P_2 的平衡策略。又由前所

述得知 $P_2 \rightarrow X$ 必不為 P_2 的平衡策略

$\rightarrow P_2$ 平衡策略必為 $P_2 \rightarrow P_1$

P_3 的策略則不一定:

(a)若 $W_{P3}(2,1,2)>W_{P3}(2,1,X)$，$P_3$ 平衡策略必為 $P_3 \rightarrow P_2$

(b)若 $W_{P3}(2,1,2)<W_{P3}(2,1,X)$，$P_3$ 平衡策略必為 $P_3 \rightarrow X$

(2)$p_1>p_2$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

根據三-(二)-1，此時 P_3 平衡策略必為 $P_3 \rightarrow X$ 或 $P_3 \rightarrow P_1$，而 P_2、P_3 的詳細決策我們依據 p_1、p_3 大小關係分類:

a.$p_1<p_3$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

根據四-(二)-1-(3)， 此時 $P_2 \rightarrow P_1$ 不可能是 P_2 的平衡策略。又根據四-(二)-1-(2):

(a)若 $ABL(2,X)=(2,X,1)$ 且 $W_{P2}(2,X,1)>W_{P2}(ABL(2,3))$，局部平衡策略集為(2,X,1)

(b)若 $ABL(2,X)$ 不為(2,X,1)或 $W_{P2}(2,X,1)<W_{P2}(ABL(2,3))$，$P_2$ 平衡策略必為 $P_2 \rightarrow P_3$。

而 P_3 的策略則不一定:

若 $W_{P3}(2,3,2)>W_{P3}(2,3,X)$，$P_3$ 平衡策略為 $P_3 \rightarrow P_2$

若 $W_{P3}(2,3,2)<W_{P3}(2,3,X)$，$P_3$ 平衡策略為 $P_3 \rightarrow X$

b.$p_1>p_3$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

(a)若 $W_{P2}(2,X,1)> W_{P2}(ABL(2,X)),W_{P2}(ABL(2,3)$:

P_2 的平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_1$，而 P_3 的策略則不一定:

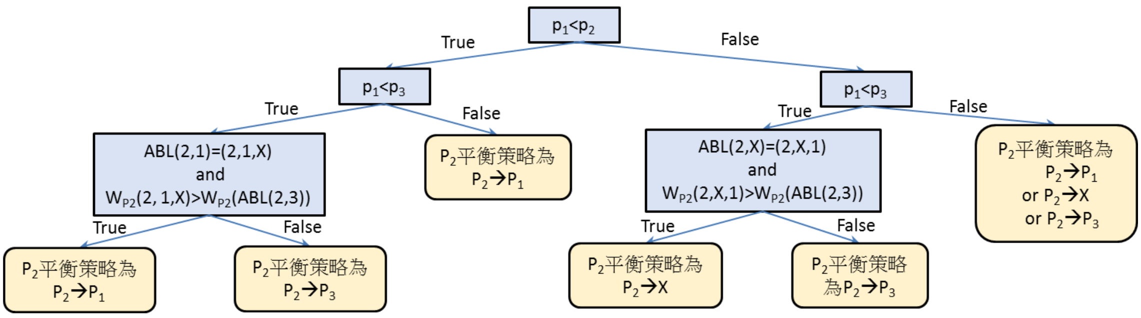
若 $W_{P3}(2,1,1)>W_{P3}(2,1,X)$，$P_3$ 平衡策略為 $P_3 \rightarrow P_1$

若 $W_{P3}(2,1,1)<W_{P3}(2,1,X)$，$P_3$ 平衡策略為 $P_3 \rightarrow X$

(b)若 $ABL(2,X)$ 為(2,X,1)且 $W_{P2}(2,X,1)> W_{P2}(ABL(2,1)), W_{P2}(ABL(2,3))$，此時平衡策略集為(2,X,1)

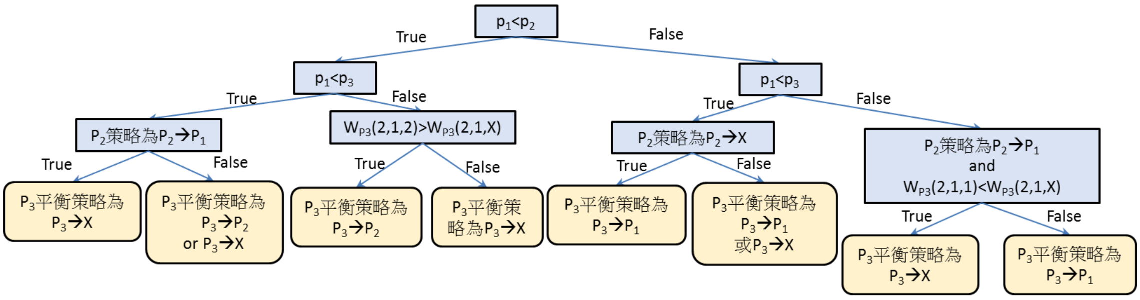
(c)若 $ABL(2,3)$ 為(2,3,1)且 $W_{P2}(2,3,1)> W_{P2}(ABL(2,1)),W_{P2}(ABL(2,X))$，此時平衡策略集為(2,3,1)

我們可將四-(二)-2 中判斷 P2、P3 平衡策略的方式彙整為樹狀圖，如下所示(圖六、圖七):



圖六，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_2 的平衡策略判斷

由於 $p_1>p_2$ and $p_1>p_3$ 狀況中判斷 P_2 平衡策略的方式幾乎無法化簡，因此僅列出 P_2 的可能平衡策略。



圖七，P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_2$時，P_3的平衡策略判斷

(三)、P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_2、P_3的決策分析

1、P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_2、P_3決策的特性

當 P_1策略固定為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_2、P_3的局部平衡策略有以下幾個特點 (以下證明由於篇幅限制，放至附錄二-(三)):

(1) P_3平衡策略必不為 $P_3 \rightarrow X$

(2)當 $p_1<p_2$，P_2策略必不為 $P_2 \rightarrow X$

我們可透過上述性質簡化 P_2、P_3的平衡策略分析。

2、P_1策略固定為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_2、P_3的平衡策略

我們發現 P_2、P_3的決策受到 P_1與 P_2的大小關係、P_1與 P_3的大小關係影響。因此我們以這兩者為所有狀態進行分類，再分別求出平衡策略。

(1) $p_1<p_2$時 P_2、P_3的平衡策略

根據四-(三)-1-(1)，此時 P_3平衡策略必為 $P_3 \rightarrow P_2$

又根據四-(三)-1-(2)，P_2平衡策略必為「射擊命中率大者」。因此:

$p_1<p_3$時，P_2平衡策略必為 $P_2 \rightarrow P_3$

$p_1>p_3$時，P_2平衡策略必為 $P_2 \rightarrow P_1$

(2) $p_1>p_2$時 P_2、P_3的平衡策略

根據四-(三)-1-(1)，此時 P_3平衡策略必為 $P_3 \rightarrow P_1$

且此時無論 P_2策略為何，P_3平衡策略都不變，根據三-(二)-1，P_2平衡策略必不為「射擊命中率小者」。因此可歸納出以下結果:

a. $p_1<p_3$時，P_2的平衡策略

此時 $P_2 \rightarrow P_1$必不為 P_2的平衡策略，因此:

(a)若 $W_{P2}(3,X,1)<W_{P2}(3,3,1)$，$P_2$平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_3$

(b)若 $W_{P2}(3,X,1)>W_{P2}(3,3,1)$，$P_2$平衡策略為 $P_2 \rightarrow X$

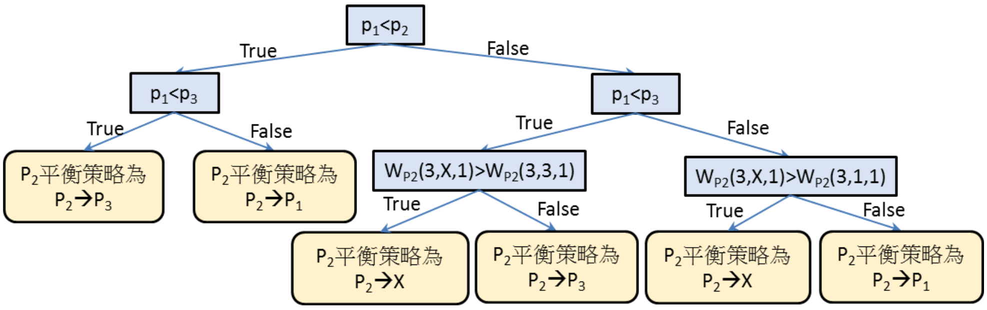
b. $p_1>p_3$時，P_2的平衡策略

此時 $P_2 \rightarrow P_3$必不為 P_2的平衡策略，因此:

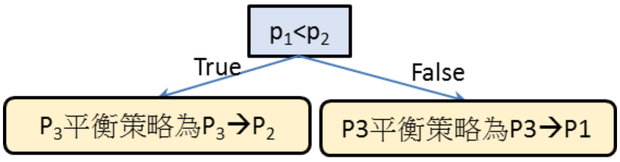
(a)若 $W_{P2}(3,X,1)<W_{P2}(3,1,1)$，$P_2$平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_1$

(b)若 $W_{P2}(3,X,1)>W_{P2}(3,1,1)$，$P_2$平衡策略為 $P_2 \rightarrow X$

我們可將四-(三)-2 中判斷 P_2、P_3平衡策略的方式彙整為樹狀圖，如下所示(圖八、圖九):



圖八，P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_2的平衡策略判斷



圖九，P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_3的平衡策略判斷

(四)P_1的決策分析

由於 P_1的決策牽涉 P_2、P_3的決策太多，我們能整理的 P_1決策特性相當有限，因此 P_1大部分僅能先列舉自己的不同策略，並觀察 P_2、P_3決策，最後再選擇使自己勝率較大者。

1、P_1決策的特性

(1)當 $p_1 > p_2$且 $p_1 > p_3$時，$P_1 \rightarrow X$ 必不為 P_1的平衡策略

當 $p_1 > p_2$且 $p_1 > p_3$，根據(二)-2-(2)，$P_1 \rightarrow X$的平衡策略必為(X,X,1)，$W_{P1}(X,X,1)=0$，$P_1 \rightarrow X$ 必不為 P_1的平衡策略

2、P_1的平衡策略

(1)若 $p_1 > p_2$且 $p_1 > p_3$

P_1平衡策略有 $P_1 \rightarrow P_2$、$P_1 \rightarrow P_3$兩種可能

(2)若 $p_1 < p_2$ 或 $p_1 < p_3$

P_1平衡策略有 $P_1 \rightarrow X$、$P_1 \rightarrow P_2$、$P_1 \rightarrow P_3$三種可能

以上是三人賽局的平衡策略分析。我們可藉由樹狀圖的方式判斷在P_1選擇不同策略時P_2、P_3的平衡策略，再回推P_1的平衡策略，即可找出一場三人賽局中，各參賽者的平衡策略集。

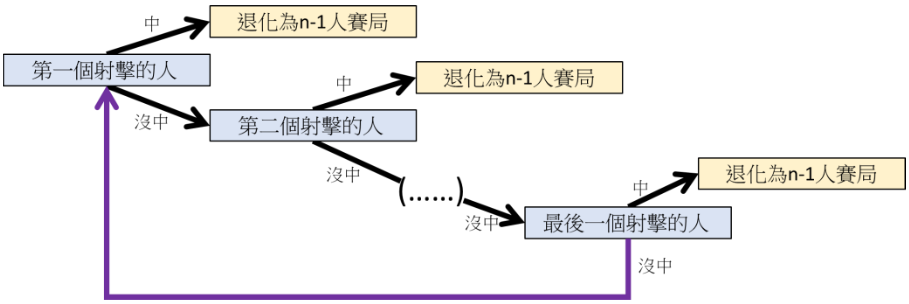
五、以遞迴方式實現計算多人賽局的程式

在 n 人賽局中，只要一名參賽者射中另一人，賽局就會變為 n-1 人賽局，我們將這種現象稱為「退化」。在三人賽局中，由於退化後的兩人賽局有固定的策略、勝率，因此我們能夠推導出三人賽局的勝率一般式。但四人以上的賽局退化後並沒有固定的平衡策略，因此我們無法列出勝率的一般式，較難以一般數學方式分析。雖然無法以一般方式分析多人賽局，但我們可使用遞迴方式計算四人以上賽局的平衡策略、各參賽者勝率，並以程式實作。

(一)n 人賽局勝率遞迴式推導

1.賽局退化特性說明

觀察三人賽局的勝率一般式，我們可發現它是由許多退化後的 2 人賽局一般式所構成。對於四人以上的賽局，我們也可用類似的方式推導勝率。對於一場策略集為 L 的 n 人弓箭手賽局，我們可以下列樹狀圖表示賽局進行(圖十):



圖十，以樹狀圖表示 n 人賽局

以推導三人賽局勝率的類似方式，我們知道在 n 人賽局中某參賽者P_i的勝率為各分支總和，且「第一個射擊的人」第二次被輪到時，P_i的勝率與賽局開頭相同。若我們以$W_{Pi}(L)$表示 n 人賽局中的P_i勝率，以R_j表示賽局在第 j 回合退化為 n-1 人賽局的事件，並以R'表示在 n 回合內賽局皆無退化的機率，我們可得

$$W_{Pi}(L) = \sum_{j=1}^{n} P(R_j) * P(P_i \text{ win} \mid R_j) + P(R') * W_{Pi}(L)$$

$$\rightarrow W_{Pi}(L) = \frac{\sum_{j=1}^{n} P(R_j) * P(P_i \text{ win} \mid R_j)}{1 - P(R')}$$

與三人賽局的狀況相似，R_j發生的機率為「P_j前策略為射擊的參賽者都沒有命中目標，且P_j策略為射擊並命中目標」的機率，故

$$P(R_j) = \begin{cases} p_j & j = 1 \land L(P_j) \neq (P_j \rightarrow X) \\ \left(\prod_{t=1}^{j-1} \begin{cases} 1 & L(P_t) = Pt \rightarrow X \\ \overline{p_t} & L(P_t) \neq P_t \rightarrow X \end{cases}\right) * p_j & j > 1 \land L(P_j) \neq (P_j \rightarrow X) \\ 0 & L(P_j) = (P_j \rightarrow X) \end{cases}$$

且R'發生的機率為「策略為射擊的參賽者都沒有命中目標」的機率，故

$$P(R') = \left(\prod_{k=1}^{n} \begin{cases} \overline{p_k} & L(P_k) \neq (P_k \rightarrow X) \\ 1 & L(P_k) = (P_k \rightarrow X) \end{cases}\right)$$

因此目前未知的參數只有$P(P_i \text{ win} \mid R_j)$。故我們只要能夠計算不同的 j 所對應的$P(P_i \text{ win} \mid R_j)$，便可推得 n 人賽局中$P_i$的勝率。而$P(P_i \text{ win} \mid R_j)$僅需得知退化後的各參賽者位置改變即可計算。

2.賽局退化後，各參賽者位置的改變

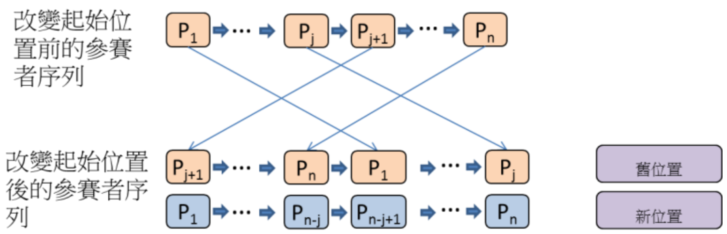
以下討論在 n 人賽局中，由P_j射中目標導致賽局退化時，參賽者序列的改變。在接下來的討論中，我們以P_{tar}代表P_j的射擊目標，且 tar 為P_{tar}在 n 人賽局中的編號。

若我們想利用原始的參賽者序列求得退化後的新參賽者序列，必須經過改變起始

位置、刪除P_j目標兩步驟。雖兩步驟無先後順序影響，但我們推導與實作時先進行改變起始位置，再進行刪除P_j目標。

(1).改變起始位置後，各參賽者位置的改變

我們以圖十一表示改變起始位置前後的參賽者序列:



圖十一、各參賽者重排前後位置改變

由於目前只先將序列重排，還未刪除P_j的目標，因此人數仍為 n 人。P_j射中目標後，P_j即排到序列尾端，因此重排後的P_n即為原序列的P_j，重排後的P_1即為原序列中的P_{j+1}。觀察上圖我們可發現，在原序列中介於P_{j+1}與P_n之間的參賽者P_{k1}，重排後的位置為P_{k1-j}，在原序列P_1與P_j之間的參賽者P_{k2}，重排後的位置為$P_{k2+(n-j)} = P_{k2+n-j}$。因此我們可歸納出:原序列中的參賽者$P_k$，若在重排後的序列中位置為$P_{k'}$，則:

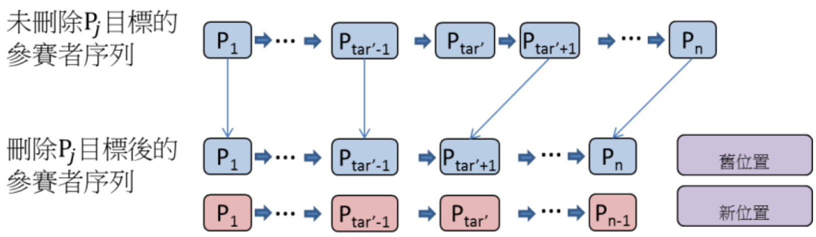
$$k' = \begin{cases} k-j & k>j \\ k+n-j & k \le j \end{cases}$$

若使用模數運算，上式也可改寫為

$$k' = (k+n-j) \bmod n$$

(2)改變起始位置並刪除P_j的目標後，各參賽者位置的改變

我們以圖十二表示改變起始位置後，刪除P_j目標前後的參賽者序列(P_j目標重排後的位置以$tar' = (tar+n) \bmod n$表示):



圖十二、刪除P_j目標前後參賽者位置改變

觀察上圖，可發現序列中在tar'前的參賽者位置不變，在tar'後的參賽者位置為原位置減一。

綜合(1)、(2)，我們可得退化前後的位置轉換公式。若P_k在退化後賽局的位置為$P_{k'}$，則:

$$k' = \begin{cases} (k+n-j) \bmod n & [(k+n-j) \bmod n] < [(tar+n-j) \bmod n] \\ (k-j-1+n) \bmod n & [(k+n-j) \bmod n] > [(tar+n-j) \bmod n] \end{cases}$$

因此我們可得知:

$P(P_i\ win \mid R_j) = W_{Pi'}(\text{players}', \text{policy}')$

其中i'為P_i在退化後賽局的位置，也就是

$$i' = \begin{cases} (i-j+n) \bmod n & [(i+n-j) \bmod n] < [(tar-j+n) \bmod n] \\ (i-j-1+n) \bmod n & [(i-j+n) \bmod n] > [(tar-j+n) \bmod n] \end{cases}$$

$\text{players}'$為由P_j射中目標，退化後賽局的參賽者序列，也就是

$$\text{players}' = \{P_{j+1}, P_{j+2} \dots, P_n, P_1, \dots P_j\} - \{P_j\text{射擊目標}\}$$

L'為$\text{players}'$所進行之 n-1 賽局的平衡策略。由於平衡策略本身即以遞迴方式定義(見肆-一-(六))，因此只要有勝率一般式便可以遞迴計算得出。

3.遞迴式推導

綜合 1.、2.，我們可推導 n 人賽局的勝率一般式。但由於原本定義的 $W_{Pi}(L)$無法表示出人數變化，因此我們必須修改 W 的表示法。

若以$W_{Pi}(\{P_1, P_2, \dots, P_n\}, L)$代表參賽者序列為$\{P_1、P_2、\dots、P_n\}$，且策略集為 L 的 n 人賽局中$P_i$的勝率，我們即可以遞迴式寫出其一般式:

在 n=1 時，$W_{Pi}(\{P_1, P_2, \dots, P_n\}, L) = 1$

在 n>1 時，

$$W_{Pi}(\{P_1, P_2, \dots, P_n\}, L) = \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} P(R_j) * \begin{cases} 0 & L(P_j) = (P_j \to P_i) \\ W_{Pi'}(\text{players}', L') & \text{else} \end{cases}}{1 - P(R')} \right)$$

其中

$$P(R_j) = \begin{cases} p_j & j = 1 \wedge L(P_j) \neq (P_j \to X) \\ \left(\prod_{t=1}^{j-1} \begin{cases} 1 & L(P_t) = Pt \to X \\ \overline{p_t} & L(P_t) \neq P_t \to X \end{cases} \right) * p_j & j > 1 \wedge L(P_j) \neq (P_j \to X) \\ 0 & L(P_j) = (P_j \to X) \end{cases}$$

$$P(R') = \left(\prod_{k=1}^{n} \begin{cases} 1 & L(P_k) = (P_k \to X) \\ \overline{p_k} & \text{else} \end{cases} \right)$$

$$i' = \begin{cases} (i-j+n) \bmod n & [(i+n-j) \bmod n] < [(tar-j+n) \bmod n] \\ (i-j-1+n) \bmod n & [(i-j+n) \bmod n] > [(tar-j+n) \bmod n] \end{cases}$$

$$\text{players}' = \{P_{j+1}, P_{j+2} \dots, P_n, P_1, \dots P_j\} - \{P_j\text{射擊目標}\}$$

L'為$\text{players}'$所進行之 n-1 賽局的平衡策略。由於平衡策略本身即以遞迴方式定義(見肆-一-(六))，因此只要有勝率一般式便可以遞迴計算得出。

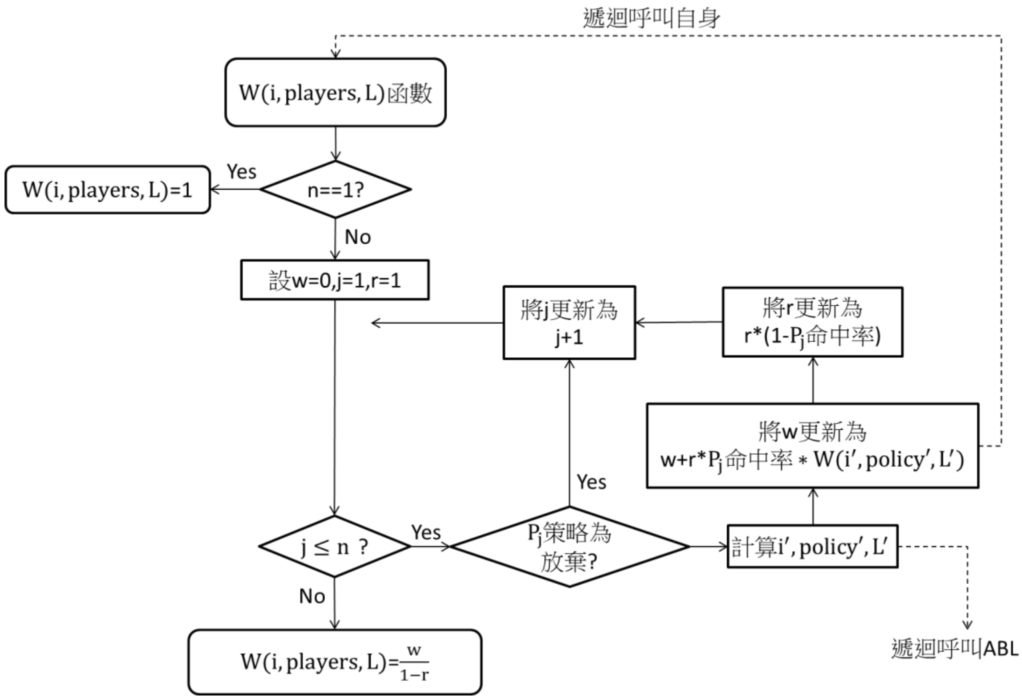
推導出一般式後，我們便可計算任意 n 人賽局的平衡策略，但計算量相當大，因此可利用程式實現。

(三)實現計算多人賽局的程式

使用兩個函式$W(i, players, L)$、$ABL(players, L_{prev})$相互遞迴呼叫，W 計算參賽者組合為$players$、策略集為L下參賽者P_i的勝率，$ABL(players, L_{prev})$計算參賽者組合為$players$、前 k 名參賽者策略固定為L_{prev}的賽局中，各參賽者的平衡策略。為優化計算時間，每次計算完畢後，我們會以雜湊表保存結果，此步驟未繪製於流程圖。以下以流程圖方式呈現

1.勝率函數(w)

由於此函數是用於計算勝率，因此一旦$W(i, players, L)$的值確定後程式即結束。詳細流程如圖十三:

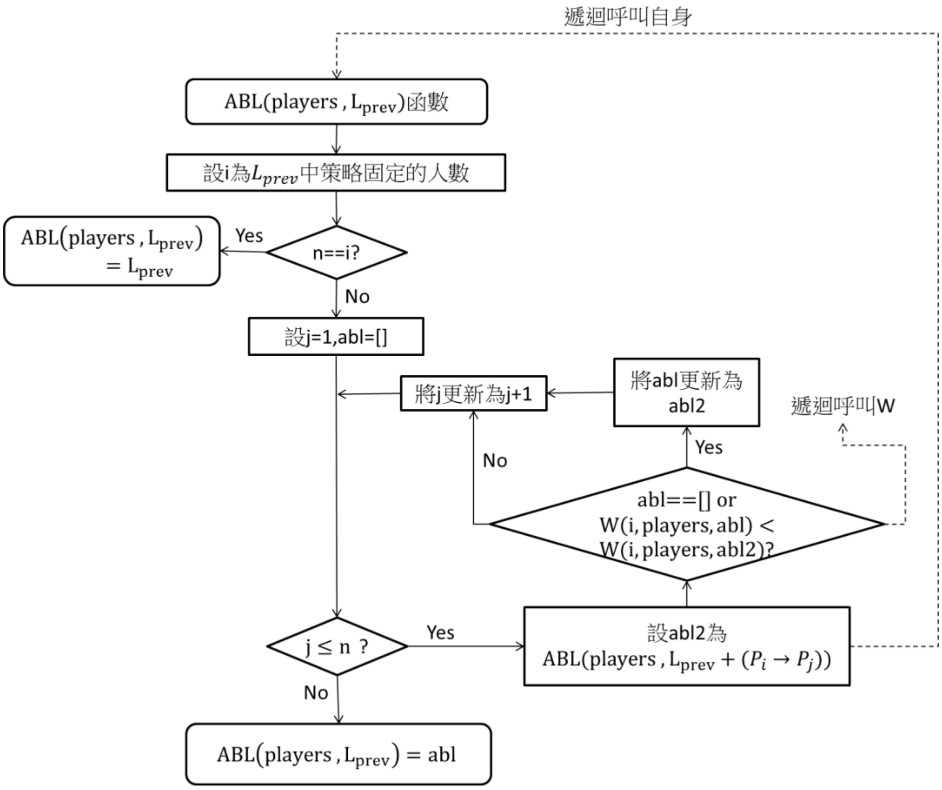


圖十三，$W(i, players, policy)$函數流程圖

此程式利用中間的迴圈累計勝率。對於每一個策略不為放棄的參賽者P_j，此程式先計算出退化後的參賽者序列，再遞迴呼叫 ABL 函式計算退化後賽局的平衡策略，最後遞迴呼叫 W 函式獲得退化後P_i的勝率並進行累計。在累計完所有退化狀況後，便可計算出 n 人賽局中參賽者P_i的平衡策略。

2.平衡策略函數

由於此函數是用於計算平衡策略，因此一旦$ABL(players, L_{prev})$的值確定後程式即結束。詳細流程如圖十四:



圖十四，$\mathrm{ABL}(\mathrm{players}, \mathrm{L_{prev}})$函數流程圖

此程式利用中間的迴圈求出平衡策略。此程式列舉$\mathrm{P_i}$的各種策略，再遞迴呼叫 W 函式計算選擇不同策略時$\mathrm{P_i}$的勝率，並從中找出使$\mathrm{P_i}$勝率最高的策略作為平衡策略。

使用 W 與 ABL 函數相互呼叫，即可計算四人以上賽局各參賽者的平衡策略與勝率。我們可用 Python 實作上述程式，程式碼於附錄三呈現。

(三)複雜度分析

我們對於不同的 n 值，可計算出產生一場 n 人賽局平衡策略時需遞迴呼叫的 W 函數、ABL 函數次數，也計算出了需查詢雜湊表次數的上限。若以$\mathrm{T_W(n)}$、$\mathrm{T_{ABL}(\,n)}$分別表示計算一組 n 人賽局($\mathrm{n > 1}$)平衡策略時需遞迴呼叫的 W 函數次數、ABL 函數次數，並以$\mathrm{T_C(n)}$表示需於雜湊表進行的查詢次數上限，則:

$$\mathrm{T}_{W}(n) = \frac{n^{n+1}-n}{n-1} + n + \sum_{k=2}^{n-1} C_k^n * \frac{k^{k+2}-k^2}{k-1}$$

$$\mathrm{T}_{ABL}(n) = \frac{n^{n+1}-1}{n-1} + 2n + \sum_{k=2}^{n-1} C_k^n * \frac{k^{k+2}-k}{k-1}$$

$$\mathrm{T_C(n)} = \frac{2n^{n+2}-n^2-n}{n-1} + 3n + \sum_{k=2}^{n-1} C_k^n * \frac{2k^{k+3}-k^3-k^2}{k-1}$$

其中的$\mathrm{T_W(n)}$、$\mathrm{T_{ABL}(n)}$也相當於我們計算一組平衡策略所需計算出的最少狀態。即使我們使用其他方式(例如實際手算)，也至少得計算完$\mathrm{T_W(n)}$組勝率及$\mathrm{T_{ABL}(n)}$組平衡策略才能夠得出一組 n 人賽局平衡策略。詳細推導放置於附錄四。

且由附錄四-(五)，我們可讀出$T_W(n)$、$T_{ABL}(n)$、$T_C(n)$的上界:

$$T_W(n,k) < C * n^{n+1}$$
$$T_{ABL}(n,k) < C * n^{n+1}$$
$$T_C(n) < C * n^{n+2}$$

C為常數。隨著 n 增加，W 函數與 ABL 函數的執行時間成長不超過$O(n)$，每次的查詢執行時間不超過$O(1)$，故程式總實行時間成長不超過

$$C * [n * (n^{n+1} + n^{n+1}) + 1 * n^{n+2}] = 3C * n^{n+2}$$

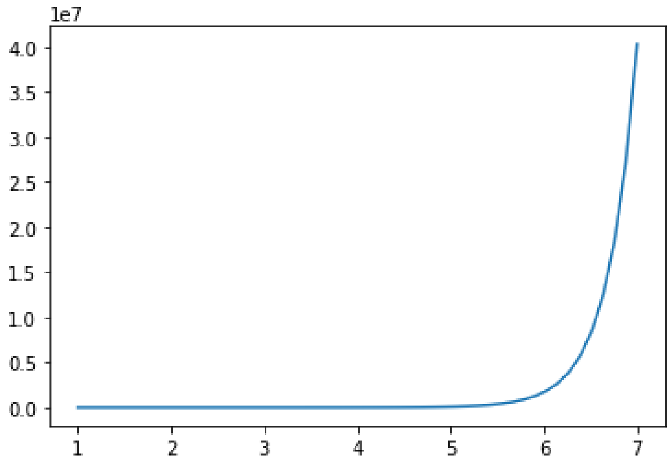
故此程式複雜度為$O(n^{n+2})$

表一是不同 n 值下，所對應的計算平衡策略時間花費與對應的$T(n) = n^{n+2}$數值。

表一，不同 n 值下，所對應的花費時間

n	實際花費時間	$T(n)$
1	$8.00 * 10^{-6}$	1
2	$1.45 * 10^{-4}$	16
3	$2.61 * 10^{-3}$	243
4	$5.16 * 10^{-2}$	4096
5	1.10	$7.81 * 10^{4}$
6	26.61	$1.68 * 10^{6}$
7	708	$4.04 * 10^{7}$

圖十五顯示出隨 n 變大時T(n)成長的趨勢，可看出成長的相當迅速。



圖十五，隨 n 變大時T(n)成長的趨勢

由於一組七人賽局平衡策略需時 708 秒，約十分鐘，因此無法進行大量模擬。以T(n)預測 8 人以上賽局執行時間，可發現計算一組 8 人賽局平衡策略需時約 18838 秒，接近五個小時。一組 12 人賽局需$2.25 * 10^{10}$秒，約 700 年。因此即使有程式輔助，人數過多的賽局目前依然無法使用我們的程式進行分析研究。

以上是多人賽局的勝率遞迴式推導，以及程式的實作。透過推導出的遞迴式，我們可實作出計算 n 人賽局平衡策略的程式。但由於程式複雜度高達$O(n^{n+2})$，因此實際上只能計算七人以下賽局的平衡策略，大量模擬也只能對六人以下賽局進行。

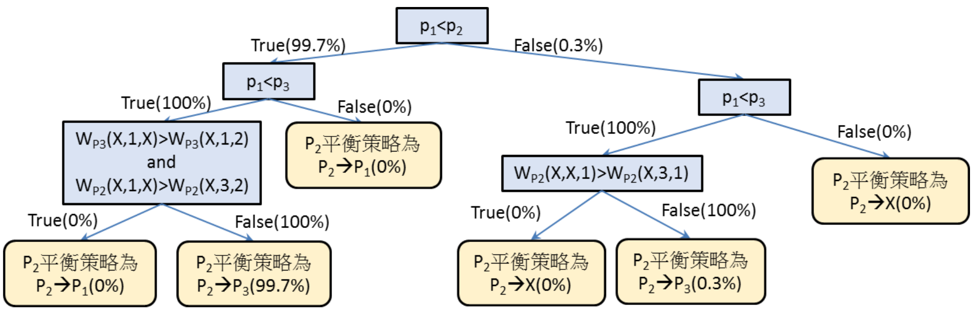
伍、研究結果

一、三人賽局下的各平衡策略發生機率

根據研究流程，我們得出了在 P_1 策略分別固定為 $P_1 \rightarrow X$、$P_1 \rightarrow P_2$、$P_1 \rightarrow P_3$時，P_2、P_3判斷平衡策略的方式，並繪製成了樹狀圖的形式。接著我們利用 Python 程式隨機產生 200000 組 p_1、p_2、p_3，並使這 200000 組命中率中 P_1的平衡策略皆固定，接著計算樹狀圖中各分支發生的機率。以下呈現(小數點 2 位以下採四捨五入):

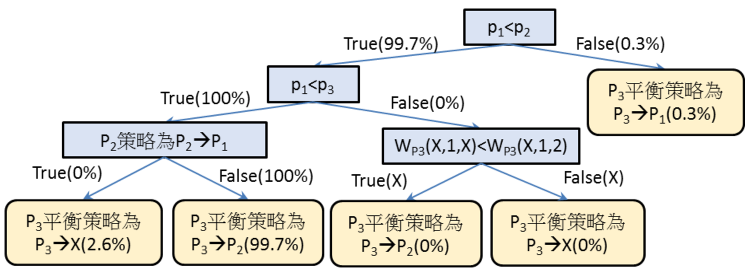
(一)、P_1平衡策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3的平衡策略及發生機率:

我們利用 Python 程式隨機產生 200000 組 p_1、p_2、p_3，且這 200000 組命中率中 P_1的平衡策略皆必為 $P_1 \rightarrow X$。並使用程式統計 P_2策略的樹狀圖(P_1策略固定為 $P_1 \rightarrow X$)中，中各分支的發生機率，如下圖呈現(圖十六)



圖十六，P_1平衡策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2的平衡策略與發生機率

與肆-四中的圖相比，圖九中的每個「True」、「False」後都有以機率標記，代表的是到達該節點的所有前提條件都成立時，該節點某事件發生的機率。例如節點「$p_1 < p_2$」左方「True」中的(99.7%)代表在模擬中所有 P_1平衡策略為 $P_1 \rightarrow X$ 的(p_1,p_2,p_3)，有 99.7%滿足 $p_1 < p_2$。節點「$p_1 < p_2$」左方「$p_1 < p_3$」左方「True」中的 100%，代表在模擬中所有滿足 $p_1 < p_2$的(p_1,p_2,p_3)，有 100%滿足 $p_1 < p_3$(也代表若 $p_1<p_2$且 $p_1>p_3$，則 P_1的平衡策略必不為 $P_1 \rightarrow X$)。我們也可以同樣的方式表示 P_3的平衡策略發生機率(圖十七):



圖十七，P_1平衡策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_3的平衡策略與發生機率

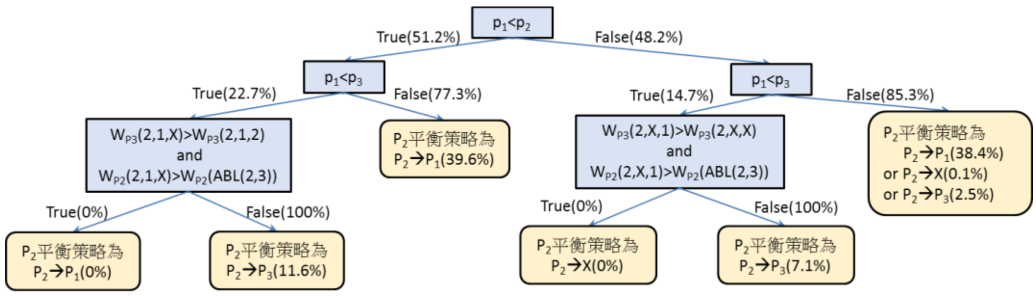
在某些參賽者僅知部分資訊的賽局中，我們便可使用上圖協助判斷。例如 P_1 得知三人命中率但 P_2 無法得知時，則可由上表發現若 P_1 選擇 $P_1 \rightarrow X$，則 P_3 有 99.7%的機率選擇策略 $P_3 \rightarrow P_2$ 對自己較有利。此外，透過累加葉節點機率，我們可得到 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3 選擇各平衡策略的機率(表二):

表二，P_1 選擇策略 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3 選擇各策略的機率

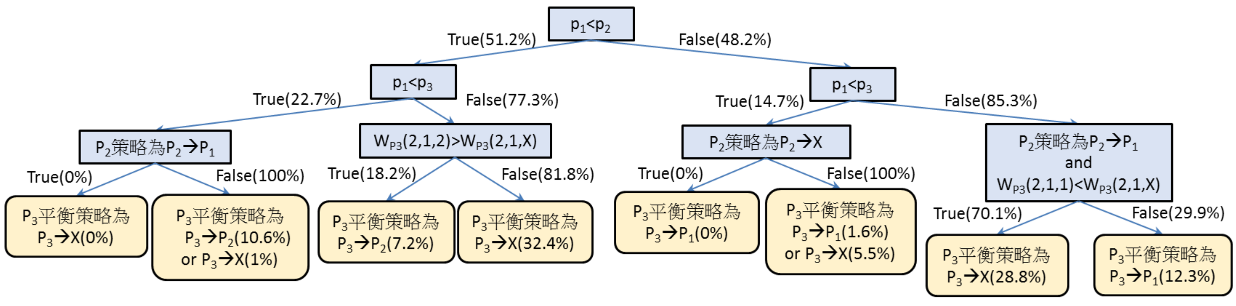
策略 / 參賽者	射擊 P_1	射擊 P_2	射擊 P_3	放棄射擊
P_2	0	0	100%	0
P_3	0.3%	99.7%	0%	0

(二)、P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_2、P_3 的平衡策略及發生機率:

我們利用 Python 程式隨機產生 200000 組 p_1、p_2、p_3，且這 200000 組命中率中 P_1 的平衡策略皆必為 $P_1 \rightarrow P_2$。將其帶入程式統計 P_2、P_3 策略的樹狀圖(P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow X$)中，中各分支的發生機率，如下圖呈現(圖十八、圖十九)



圖十八，P_1 平衡策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_2 的平衡策略與發生機率



圖十九，P_1 平衡策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_3 的平衡策略與發生機率

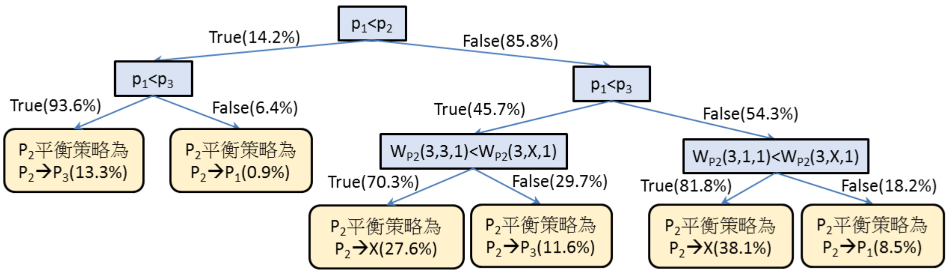
此外，透過累加葉節點機率，我們可得到 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_2、P_3 選擇各平衡策略的機率(表三):

表三，P_1 選擇策略 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_2、P_3 選擇各策略的機率

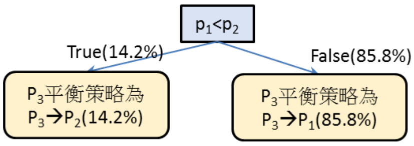
策略 / 參賽者	射擊 P_1	射擊 P_2	射擊 P_3	放棄射擊
P_2	78%	0	21.2%	0.1%
P_3	13.9%	17.8%	0	67.7%

(三)、P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_2、P_3的平衡策略及發生機率:

我們利用 Python 程式隨機產生 200000 組 p_1、p_2、p_3，且這 200000 組命中率中 P_1的平衡策略皆必為 $P_1 \rightarrow P_3$。將其帶入程式，觀察判斷 P_2、P_3策略的樹狀圖(P_1策略固定為 $P_1 \rightarrow X$)中，各分支的發生機率，如下圖呈現(圖二十、圖二十一)



圖二十，P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_2的平衡策略與發生機率



圖二十一，P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_2的平衡策略與發生機率

此外，透過累加葉節點機率，我們可得到 P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_2、P_3選擇各平衡策略的機率(表四):

表四，P_1選擇策略 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_2、P_3選擇各策略的機率

策略 / 參賽者	射擊 P_1	射擊 P_2	射擊 P_3	放棄射擊
P_2	9.4%	0	24.9%	65.7%
P_3	85.8%	14.2%	0	0

(四)、P_1的平衡策略及發生機率

我們使用了程式隨機給出 200000 組 p_1、p_2、p_3，觀察 P_1各策略出現次數，最終換算出 P_1選擇不同策略的機率，結果如表五:

表五，P_1選擇各策略的機率

P_1策略	$P_1 \rightarrow X$	$P_1 \rightarrow P_2$	$P_1 \rightarrow P_3$
發生機率	24%	41.3%	34.7%

(五)、P_1、P_2、P_3不同平衡策略的發生機率

綜合(一)、(二)、(三)、(四)，我們可將 P_1選擇不同策略的機率與表一、表二、表三相乘，計算出不同參賽者選擇各策略的機率，得出以下結果(表六):

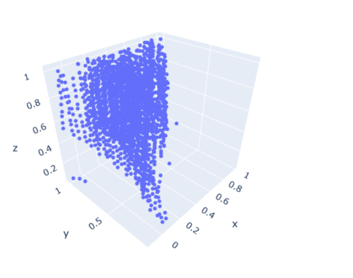
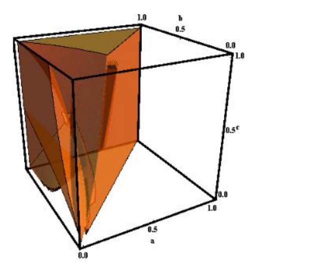
表六，P_1、P_2、P_3選擇各參賽者的機率

策略 / 參賽者	射擊 P_1	射擊 P_2	射擊 P_3	放棄射擊
P_1	0	41.3%	34.7%	24%
P_2	35.5%	0	41.4%	22.8%
P_3	35.6%	36.2%	0	28%

(六)、各策略的分布

對於某組 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 的命中率組合(p_1,p_2,p_3)，我們可將其視為空間座標中的一點(x,y,z)。將所有 P_1 策略為 $P1 \rightarrow X$ 的(p_1,p_2,p_3)以散點圖方式於空間座標標示，我們即可觀察 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 下的命中率分布。此作法最初於參考資料一的科展報告實現(平震傑，Shoot？or not？—以全決策盒分析循環賽局之最佳策略)，並以 mathematica 實現。我們以 Plotly 重現此結果，並與其進行比較(表七):

表七，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 的三人命中率分布

以 Plotly 實現的結果	參考資料一的結果
	

由於 Plotly 本身的限制，無法清楚看出圖形的陰影等細節，但可大致看出圖形的分布約在空間左半部，且類似一三角柱。其餘比較放置於附錄五。

二、不同人數下，各平衡策略的發生機率

由於四人以上賽局無法直接列出勝率一般式，因此無法直接推導平衡策略，但由肆-五我們發現多人賽局的各參賽者勝率可用遞迴式表示，並使用程式實作計算。我們使用 Python 實現程式，便可對多人賽局進行大量模擬。我們產生多組命中率組合$(p_1, p_2 \dots p_n)$，並計算每一組命中率組合的平衡策略，進行統計後即可得出不同平衡策略的發生機率。以下為三~六人賽局中不同平衡策略的發生機率

(一)、三人賽局中，不同平衡策略的發生機率

我們模擬了 100000 組(p_1, p_2, p_3)，計算各命中率組合下的平衡策略並進行統計，得出表八(小數點 2 位後四捨五入):

表八，三人賽局下各策略發生機率

策略 / 參賽者	放棄射擊	射擊P_1	射擊P_2	射擊P_3
P_1	23.81%	0%	40.99%	35.20%
P_2	23.14%	35.51%	0%	41.35%
P_3	27.80%	36.07%	36.13%	0%

此表格與伍-一中以樹狀圖統計得出的結果相差不大。

(二)、四人賽局中，不同平衡策略的發生機率

我們模擬了 10000 組(p_1, p_2, p_3, p_4)，計算各命中率組合下的平衡策略並進行統計，得出表九(小數點 2 位後四捨五入):

表九，四人賽局下各策略發生機率

參賽者 \ 策略	放棄射擊	射擊P_1	射擊P_2	射擊P_3	射擊P_4
P_1	5.06%	0%	33.77%	30.57%	30.60%
P_2	5.38%	31.99%	0%	32.00%	30.63%
P_3	4.88%	29.42%	31.93%	0%	33.77%
P_4	5.32%	32.37%	29.65%	32.66%	0%

(三)、五人賽局中，不同平衡策略的發生機率

我們模擬了 10000 組$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$，計算各命中率組合下的平衡策略並進行統計，得出表十(小數點 2 位後四捨五入):

表十，五人賽局下各策略發生機率

參賽者 \ 策略	放棄射擊	射擊P_1	射擊P_2	射擊P_3	射擊P_4	射擊P_5
P_1	12.28%	0%	23.87%	19.97%	20.87%	23.01%
P_2	11.84%	21.2%	0%	24.79%	21.28%	20.89%
P_3	10.87%	19.75%	22.83%	0%	24.98%	21.57%
P_4	11.7%	19.57%	20.71%	22.96%	0%	25.06%
P_5	11.77%	22.59%	20.35%	21.73%	23.56%	0%

(四)、六人賽局中，不同平衡策略的發生機率

由於時間限制，我們只模擬了 1000 組$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$，計算各命中率組合下的平衡策略並進行統計，得出表十一(小數點 2 位後四捨五入):

表十一，六人賽局下各策略發生機率

參賽者 \ 策略	放棄射擊	射擊P_1	射擊P_2	射擊P_3	射擊P_4	射擊P_5	射擊P_6
P_1	6.4%	0%	18.4%	17.8%	17.6%	16.2%	23.6%
P_2	5.5%	21.9%	0%	18.8%	19.3%	18.5%	16.0%
P_3	4.9%	20.8%	19.7%	0%	19.2%	15.8%	19.6%
P_4	4.7%	18.4%	16.8%	20.9%	0%	22.4%	16.8%
P_5	5.1%	17.8%	16.7%	21.0%	19.6%	0%	19.8%
P_6	5.0%	21.1%	17.6%	18.6%	16.8%	20.9%	0%

由表八~表十一可發現，各參賽者選擇放棄的機率最低，而射擊其他參賽者的機率相差不大。

由於七人以上賽局計算一組平衡策略的時間多於 10 分鐘，因此我們無法進行大量模擬。但觀察三、四、五、六人表格的趨勢，我們發現各參賽者選擇放棄射擊的機率最低，而射擊其他參賽者的機率相當接近，但在 n 人賽局中，$P_1 \sim P_{n-1}$射擊下一位參賽者(P_1的下一位是P_2，以此類推)的機率較高，而P_n射擊P_{n-1}的機率較高。但此趨勢至六人賽局時消失，推測是因六人模擬次數太少，導致趨勢無法表現。

三、以命中率大小關係觀察各策略出現機率

由研究結果一，我們發現參賽者中命中率最高者與次高者平衡策略剛好是互射的機率特別高。因此我們好奇，若不是根據射擊順序，而是改成根據命中率大小關係觀測賽局，是否能發現新的特性。我們先隨機產生 n 個遞增且介於 0、1 間的隨機數，再列舉這 n 組數字的每一種排列，每種排列對應一組命中率組合，並分別計算各種組合的平衡策略，最後再將計算出的策略映射回原排列的策略，計算各策略出現機率。由於此統計需做出排列，花費的時間比伍-二的統計更久，因此六人賽局我們即無法進行統計，僅能做出三~五人賽局的實驗結果。在接下來的表格中，我們以H_1 表示 n 人賽局中命中率最低的參賽者，以H_2 表示 n 人賽局中命中率次低的參賽者…，以H_k表示 n 人賽局中命中率第 k 低的參賽者。以下呈現以命中率大小關係表示各參賽者時，各策略的出現機率。

(一)三人賽局中，以命中率大小關係觀察下，不同平衡策略的發生機率

我們模擬了 100000 組H_1、H_2、H_3並維護三人命中率遞增，計算各種決策順序排列下的平衡策略集(共 100000*3!=600000 組)出現機率並進行統計，得出表十二(僅顯示出現機率大於 1%的策略集，且小數點二位以下四捨五入):

表十二，以命中率觀察下，三人賽局各平衡策略集發生機率

策略集	出現機率
$H_1 \to X, H_2 \to H_3, H_3 \to H_2$	72.88%
$H_1 \to H_3\ H_2 \to H_3, H_3 \to H_2$	21.34%
$H_1 \to H_3\ , H_2 \to H_1, H_3 \to X$	2.36%
$H_1 \to H_3\ , H_2 \to H_1, H_3 \to H_2$	1.57%

可看出，若以命中率觀測各策略，則一場三人賽局有七成的機率平衡策略為($H_1 \to X, H_2 \to H_3, H_3 \to H_2$)。也就是最弱者射擊中等者、中等者與最強者互射，與最原始題目($\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}$ 三人互射)給出的解答相同。

此外，也可統計出各參賽者選擇不同策略的機率(表十三):

表十三，以命中率觀察下，三人賽局各平衡策略發生機率

策略 / 參賽者	放棄射擊	射擊H_1	射擊H_2	射擊H_3
H_1	72.88%	0%	1.25%	25.87%

H_2	0.6%	3.93%	0%	95.47%
H_3	2.36%	0.58%	97.05%	0%

(二)四人賽局中，以命中率大小關係觀察下，不同平衡策略的發生機率

我們模擬了 10000 組H_1, H_2, H_3, H_4 並維護四人命中率遞增，計算各種決策順序排列下的平衡策略集(共 10000*4!=240000 組)出現機率並進行統計，得出表十四(僅顯示出現機率大於 3%的策略集):

表十四，以命中率觀察下，四人賽局各平衡策略集發生機率

策略集	出現機率
$H_1 \rightarrow H_4, H_2 \rightarrow H_1, H_3 \rightarrow H_4, H_4 \rightarrow H_3$	50.75%
$H_1 \rightarrow X, H_2 \rightarrow H_1, H_3 \rightarrow H_4, H_4 \rightarrow H_3$	15.25%
$H_1 \rightarrow H_4, H_2 \rightarrow H_1, H_3 \rightarrow H_4, H_4 \rightarrow H_1$	8.18%
$H_1 \rightarrow H_4, H_2 \rightarrow H_4, H_3 \rightarrow H_4, H_4 \rightarrow H_3$	5.39%
$H_1 \rightarrow H_3, H_2 \rightarrow H_1, H_3 \rightarrow H_4, H_4 \rightarrow H_3$	5.13%

可以發現，出現機率最高的策略集變為($H_1 \rightarrow H_4, H_2 \rightarrow H_1, H_3 \rightarrow H_4, H_4 \rightarrow H_3$)，而機率最高的策略出現機率由三人的 72%掉到 51%，各策略發生機率也更分散。此外，也可統計出各參賽者選擇不同策略的機率:

表十五，以命中率觀察下，四人賽局各平衡策略發生機率

策略 / 參賽者	放棄射擊	射擊H_1	射擊H_2	射擊H_3	射擊H_4
H_1	16.04%	0%	1.49%	9.39%	73.09%
H_2	0.76%	91.46%	0%	0.46%	7.32%
H_3	3.1%	4.31%	1.6%	0%	90.99%
H_4	0.63%	13.74%	5.3%	80.33%	0%

(三)五人賽局中，以命中率大小關係觀察下，不同平衡策略的發生機率

由於時間因素，我們僅模擬了 100 組H_1, H_2, H_3, H_4, H_5並維護五人命中率遞增，計算各種射擊順序排列下的平衡策略集(共 100*5!=12000 組)出現機率並進行統計，得出下表(由於策略集數量過多，僅顯示出現機率大於 3%的策略集):

表十六，以命中率觀察下，五人賽局各平衡策略集發生機率

策略集	出現機率
$H_1 \rightarrow H_5, H_2 \rightarrow H_5, H_3 \rightarrow H_2, H_4 \rightarrow H_5, H_5 \rightarrow H_4$	9.04%
$H_1 \rightarrow H_5, H_2 \rightarrow H_1, H_3 \rightarrow H_2, H_4 \rightarrow H_5, H_5 \rightarrow H_4$	8.32%
$H_1 \rightarrow X, H_2 \rightarrow H_5, H_3 \rightarrow H_2, H_4 \rightarrow H_5, H_5 \rightarrow H_4$	4.23%
$H_1 \rightarrow H_2, H_2 \rightarrow H_1, H_3 \rightarrow H_2, H_4 \rightarrow H_5, H_5 \rightarrow H_4$	3.63%
$H_1 \rightarrow H_4, H_2 \rightarrow H_1, H_3 \rightarrow H_2, H_4 \rightarrow H_5, H_5 \rightarrow H_4$	3.3%

可以發現，出現機率最高的策略集變為$(H_1 \rightarrow H_5, H_2 \rightarrow H_5, H_3 \rightarrow H_2, H_4 \rightarrow H_5, H_5 \rightarrow H_4)$，而機率最高的策略集出現機率僅剩 9%，各策略發生機率也更分散。此外，也可統計出各參賽者選擇不同策略的機率:

表十七，以命中率觀察下，五人賽局各平衡策略發生機率

策略 / 參賽者	放棄射擊	射擊H_1	射擊H_2	射擊H_3	射擊H_4	射擊H_5
H_1	16.12	0	13.82%	18.82%	18.31%	32.93%
H_2	10.45%	31.14%	0%	11.41%	12.65%	34.35%
H_3	13.00%	3.88%	69.93%	0%	1.48%	11.72%
H_4	8.93%	2.93%	8.29%	8.43%	0%	71.41%
H_5	8.65%	5.47%	5.32%	4.96%	75.61%	0%

可發現五人賽局雖沒有出現機率極高的平衡策略集，但參賽者H_3、H_4、H_5仍有出現機率極高的平衡策略。

根據 3~5 人賽局結果我們推測，在多人賽局中，最強與次強者(H_n與H_{n-1})出現機率最高的策略為互射，其他參賽者策略的趨勢較不明顯。

此外，比起伍-二的各策略機率接近平均，以命中率觀察後許多參賽者策略的趨勢變得更加明顯。因此我們認為比起射擊順序，參賽者的命中率關係對平衡策略的影響更大。

四、不完美平衡策略

上述研究推導了槍手得知賽局中所有狀況後，選擇平衡策略的方式。但現實中許多時候是無法得知所有狀況的，此時我們可用統計等方式獲得僅有部分資訊下的不完美平衡策略。以下討論「僅得知射擊順序」、「僅得知命中率大小順序」兩種狀況下，的不完美平衡策略。

(一)僅得知射擊順序時，各參賽者的不完美平衡策略

伍-四-(一)討論的賽局中，所有參賽者僅能得知射擊的順序，無法得知彼此命中率。我們猜測這時各參賽者的不完美平衡策略即為伍-二各表格中，該參賽者發生機率最高的策略，如表十八所示:

表十八，僅得知射擊順序時，各參賽者的不完美平衡策略

參賽者 / 人數	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
3	射擊P_2	射擊P_3	射擊P_2			
4	射擊P_2	射擊P_3	射擊P_4	射擊P_3		
5	射擊P_2	射擊P_3	射擊P_4	射擊P_5	射擊P_4	
6	射擊P_6	射擊P_1	射擊P_1	射擊P_5	射擊P_3	射擊P_1

但伍-二各表格中，除放棄射擊外各策略出現機率相差不大，並沒有顯著的趨勢，因此我們推測在僅知順序的賽局中選擇不同的策略對勝率影響不大。此外，我們也試著用蒙地

卡羅法，透過模擬求出不同策略下各參賽者勝率的期望值，再依平衡策略定義尋找不完美平衡策略，但許多策略勝率過於接近，因此無法求出明確的平衡策略。

(二)僅得知命中率大小順序時，各參賽者的不完美平衡策略

伍-四-(二)討論的賽局中。所有參賽者僅能得知各參賽者命中率大小的順序，卻無法得知射擊順序，必須先決定好策略再上場實行。我們猜測這時各參賽者的不完美平衡策略即為伍-三各表格中，該參賽者發生機率最高的策略，如表十九所示。由於沒有順序，因此我們依命中率由大到小以H_1~H_n表示各參賽者:

表十九，僅得知命中率大小順序時，各參賽者的不完美平衡策略

參賽者 / 人數	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
3	放棄射擊	射擊H_3	射擊H_2		
4	射擊H_4	射擊H_1	射擊H_4	射擊H_3	
5	射擊H_5	射擊H_5	射擊H_2	射擊H_5	射擊H_4

由於五人賽局模擬次數較少，目前的五人賽局不完美平衡策略可能還不是最佳解。伍-三各表格中，發生機率的趨勢比伍-二明顯，因此我們推測比起僅知決策順序的賽局，在僅知命中率順序的賽局中選擇不同的策略對勝率影響較大。類似現實中的大富翁等遊戲中，實力較強的人容易彼此競爭，而忽略其他較無威脅性的人。

除此之外，我們發現隨人數增加，除H_n、H_{n-1}外的各參賽者不同策略出現機率逐漸趨向平均，至五人時H_1、H_2各策略機率皆小於 50%。因此我們推測，在人數較高的不完美資訊賽局中，除了H_n、H_{n-1}外，各參賽者選擇不完美平衡與否對他們影響不大，直到四人賽局後不完美平衡策略才較有意義。

陸、結論

一、在參賽者有兩人 P_1、P_2的兩人弓箭手賽局中，P_1平衡策略必為 $P_1 \rightarrow P_2$、P_2策略必為 $P_2 \rightarrow P_1$。

二、在參賽者有三人 P_1、P_2、P_3的三人弓箭手賽局中，參賽者 P_i的勝率為

$$W_{P_i}(L)=\frac{\sum_{j=1}^{3}\left(\left\{\begin{matrix} p_j & j=1 \wedge L(P_j)\neq(P_j\rightarrow X) \\ \left(\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\rightarrow X \\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\rightarrow X\end{cases}\right)*p_j & j>1 \wedge L(P_j)\neq(P_j\rightarrow X) \\ 0 & L(P_j)=(P_j\rightarrow X)\end{matrix}\right.\right)*\left(\left\{\begin{matrix} \frac{\overline{p_k}p_i}{1-\overline{p_1 p_k}} & P_j=P_i \\ 0 & L(P_j)=(P_j\rightarrow P_i) \\ \frac{p_i}{1-\overline{p_1 p_j}} & \text{else}\end{matrix}\right.\right)}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\rightarrow X) \\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\rightarrow X)\end{cases}\right)}$$

三、在參賽者有三人 P_1、P_2、P_3的三人弓箭手賽局中，對於任意參賽者 P_i，射擊場上命中率較高者的勝率必大於射擊命中率較低者的勝率。

四、在參賽者有三人 P_1、P_2、P_3的三人弓箭手賽局中:

(一)P_1出現機率最高的平衡策略為 $P_1 \rightarrow P_2$

(二)P_2出現機率最高的平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_3$

(三)P_3出現機率最高的平衡策略為 $P_3 \rightarrow P_2$

在三人無法得知彼此命中率時，選擇上述策略較易使參賽者勝率提高。

五、在已知三人命中率大小順序的三人弓箭手賽局中，出現機率最高的平衡策略為最弱者不射擊，另外兩人互射。

六、在由 n 名參賽者$\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$所進行的多人賽局中，參賽者P_i的勝率為

$$W_{Pi}(\{P_1, P_2, \dots, P_n\}, L) = \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} P(R_j) * \begin{cases} 0 & L(P_j) = (P_j \rightarrow P_i) \\ W_{Pi'}(\text{players}', L') & \text{else} \end{cases}}{1 - P(R')} \right)$$

其中

$$P(R_j) = \begin{cases} p_j & j = 1 \ \wedge \ L(P_j) \neq (P_j \rightarrow X) \\ \left(\prod_{t=1}^{j-1} \begin{cases} 1 & L(P_t) = Pt \rightarrow X \\ \overline{p_t} & L(P_t) \neq P_t \rightarrow X \end{cases} \right) * p_j & j > 1 \ \wedge \ L(P_j) \neq (P_j \rightarrow X) \\ 0 & L(P_j) = (P_j \rightarrow X) \end{cases}$$

$$P(R') = \left(\prod_{k=1}^{n} \begin{cases} 1 & L(P_k) = (P_k \rightarrow X) \\ \overline{p_k} & \text{else} \end{cases} \right)$$

$$i' = \begin{cases} (i - j + n) \bmod n & [(i + n - j) \bmod n] < [(tar - j + n) \bmod n] \\ (i - j - 1 + n) \bmod n & [(i - j + n) \bmod n] > [(tar - j + n) \bmod n] \end{cases}$$

$$\text{players}' = \{P_{j+1}, P_{j+2} \dots, P_n, P_1, \dots P_j\} - \{P_j\text{射擊目標}\}$$

七、在已知順序，無固定命中率大小順序的多人賽局中，各參賽者出現機率最低的策略為放棄射擊。除此之外，選擇不同目標的機率相差不大，但 3~5 人賽局中有出現$P_1 \sim P_{n-1}$射擊下一個參賽者、P_n射擊P_{n-1}機率略高的趨勢。

八、在已知命中率大小順序，無固定射擊順序的多人賽局中，命中率最高與次高兩人出現機率最高的策略為互射，而其他參賽者較無明顯的規律。

九、在多人弓箭手賽局中，我們推測命中率大小關係比射擊順序更易影響參賽者的決策

十、在僅得知命中率順序的多人不完美賽局中，我們推測各參賽者的不完美平衡策略在五人以上時意義不大。

柒、討論與未來展望

我們曾試著將命中率計算規則由「取決於射擊者」改為「取決於射擊目標」，觀察賽局是否會產生改變，結果發現賽局的勝率分布產生極大變化。未來希望能對規則更加複雜的賽局。如各參賽者面對不同目標時命中率都不同，或在各參賽者攻擊不同人時加入攻擊需付出的代價，讓賽局更具真實性。

本研究雖是進行弓箭手賽局的研究，但如大富翁、卡卡頌等具有回合制、淘汰制、循環特性的賽局只要能找到好的狀態改變規律，都可以類似此研究的方式進行分析。

捌、參考資料

一、平震傑（2011）‧Shoot？or not？—以全決策盒分析循環賽局之最佳策略‧中華民國第 51 屆中小學科學展覽會

二、Len Fisher（2019）。剪刀石頭布-生活中的賽局理論。天下文化。

三、楊佩璐、宋強。科學運算 Python 程式理論與應用。上奇資訊。

四、姚景星、劉睦雄(1976)。賽局淺說。數學傳播。 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_01_3_05/index.html

五、結城浩(2013)。數學女孩：隨機演算法。世茂

附錄

一、「P3 射擊命中率大者勝率必比射擊命中率小者勝率高」證明

假設 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_{t_1}$，P_2 策略為 $P_2 \rightarrow P_{t_2}$ (t_1、$t_2 \in \{1,2,3,X\}$)，若 P_3 策略為 $P_3 \rightarrow P_1$，則此時策略集 $L_1 = (t_1, t_2, 1)$。若以 RI_j 表示策略集為 L_1 時賽局在第 j 回合退化為 2 人賽局的事件、以 RI' 表示在三回合內賽局皆無退化的事件，並以 $W_{P3}(L_1)$ 表示此時 P_3 的勝率，則我們可得:

$$W_{P3}(L_1) = \frac{\sum_{j=1}^{3} P(RI_j)*P(P_3\ win|RI_j)}{1-P(RI')} = \frac{\left[\sum_{j=1}^{2} P(RI_j)*P(P_3\ win|RI_j)\right]+P(RI_3)*P(P_3\ win|RI_3)}{1-P(RI')}$$

假設 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_{t_1}$，P_2 策略為 $P_2 \rightarrow P_{t_2}$ (t_1、$t_2 \in \{1,2,3,X\}$)，若 P_3 策略為 $P_3 \rightarrow P_2$，則此時策略集 $L_2 = (t_1, t_2, 2)$。若以 RII_j 表示策略集為 L_2 時賽局在第 j 回合退化為 2 人賽局的事件、以 RII' 表示在三回合內賽局皆無退化的事件，並以 $W_{P3}(L_2)$ 表示此時 P_3 的勝率，則我們可得:

$$W_{P3}(L_2) = \frac{\sum_{j=1}^{3} P(RII_j)*P(P_3\ win|RII_j)}{1-P(RII')} = \frac{\left[\sum_{j=1}^{2} P(RII_j)*P(P_3\ win|RII_j)\right]+P(RII_3)*P(P_3\ win|RII_3)}{1-P(RII')}$$

由於 L_1、L_2 中策略不為「放棄」的參賽者都相同，因此 $RI' = RII'$。
且 L_1、L_2 中前兩名參賽者策略相同，因此

$$\left[\sum_{j=1}^{2} P(RI_j) * P(P_3\ win|RI_j)\right] = \left[\sum_{j=1}^{2} P(RII_j) * P(P_3\ win|RII_j)\right]、$$
$$P(RI_3) = P(RII_3)$$

計算 $W_{P3}(L_1) - W_{P3}(L_2)$:

$$W_{P3}(L_1) - W_{P3}(L_2) =$$
$$\frac{\left[\sum_{j=1}^{2} P(RI_j)*P(P_3\ win|RI_j)\right]+P(RI_3)*P(P_3\ win|RI_3)}{1-P(RI')} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{2} P(RII_j)*P(P_3\ win|RII_j)\right]+P(RII_3)*P(P_3\ win|RII_3)}{1-P(RII')}$$

$$= \frac{P(RI_3)*[P(P_3\ win|RI_3)-P(P_3\ win|RII_3)]}{1-P(RI')}$$

$$= \frac{P(RI_3)*\left[\frac{\overline{p_2}p_3}{1-\overline{p_2}p_3} - \frac{\overline{p_1}p_3}{1-\overline{p_1}p_3}\right]}{1-P(RI')} = \frac{P(RI_3)*\left[\frac{p_3(\overline{p_2}-\overline{p_1})}{(1-\overline{p_2}p_3)(1-\overline{p_1}p_3)}\right]}{1-P(RI')}$$

$$= \frac{P(RI_3)*\left[\frac{p_3}{(1-\overline{p_2}p_3)(1-\overline{p_1}p_3)}\right]}{1-P(RI')} * (p_1 - p_2)$$

由於$\frac{P(RI_3)*\left[\frac{p_3}{(1-\overline{p_2}p_3)(1-\overline{p_1}p_3)}\right]}{1-P(RI')}$ >0，因此 $W_{P3}(L_1)$-$W_{P3}(L_2)$的正負取決於(p_1-p_2):

(1)當$p_1>p_2$，$W_{P3}(t_1,t_2,1)-W_{P3}(t_1,t_2,2)>0$

(2)當$p_1<p_2$，$W_{P3}(t_1,t_2,1)-W_{P3}(t_1,t_2,2)<0$

二、P_1不同策略下 P_2、P_3決策特性的證明

(一) P_1策略為 P_1→X 下 P_2、P_3決策特性的證明

(1)在 $p_1<p_3$時，若 ABL(X,1)不為(X,1,X)，則 P_2→P_1不為 P_2的平衡策略

設 Pt_3為 P_1、P_2中命中率較大者($t_3\in\{1,2\}$)。當 P_2策略為 P_2→P_3時，P_3平衡策略必為P_3→Pt_3。若P_2策略為P_2→P_1時，P_3平衡策略為P_3→Pt_3，此時 $W_{P2}(X,1,t_3)<W_{P2}(X,3,t_3)$，$P_2$→$P_1$不為 P_2的平衡策略。

(二) P_1策略為 P_1→P_2下 P_2、P_3決策特性的證明

(1)若 P_2策略固定為 P_2→P_3時，P_3的局部平衡策略為 P_3→X，則 P_2策略為P_2→X 或 P_2→P_1時，P_3的局部平衡策略也必為 P_3→X。

以下我們設 Pt_3是 P_1、P_2中命中率較大者($t_3\in\{1,2\}$)。並設 P_3射中 Pt_3後，P_3勝率為 W3(若 $Pt_3=P_1$,W3=$\frac{\overline{P_2}P_3}{1-\overline{P_2}P_3}$，若$Pt_3=P_2$,W3=$\frac{\overline{p_1}p_3}{1-\overline{p_1}p_3}$)。此時 P_3的平衡策略只有 P_3→X、P_3→Pt_3兩種可能。接著觀察 P_2平衡策略不同時 P_3平衡策略為 P_3→X 的條件:

a.若 P_2的行動為 P_2→P_1

P_3平衡策略為 P_3→X 的充要條件為:

$W_{P3}(2,1,X)>W_{P3}(2,1,t_3)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\overline{p_1}p_2}\left(p_1\frac{p_3}{1-\overline{p_1}p_3}+\overline{p_1}p_2\frac{p_3}{1-\overline{p_2}p_3}\right)>$$

$$\frac{1}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}p_3}\left(p_1*\frac{p_3}{1-\overline{p_1}p_3}+\overline{p_1}p_2\frac{p_3}{1-\overline{p_2}p_3}+\overline{p_1}\overline{p_2}p_3\times W3\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{p_1}\overline{p_2}p_3}{(1-\overline{p_1}p_2)(1-\overline{p_1}\overline{p_2}p_3)}\left(p_1\times\frac{p_3}{1-\overline{p_1}p_3}+\overline{p_1}p_2\times\frac{p_3}{1-\overline{p_2}p_3}\right)>$$

$$\frac{\overline{p_1}\overline{p_2}p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}p_3}(W3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-\overline{p_1}p_2)}\left(p_1\times\frac{p_3}{1-\overline{p_1}p_3}+\overline{p_1}p_2\times\frac{p_3}{1-\overline{p_2}p_3}\right)>(W3)$$

b.若 P_2 的行動為 $P_2 \rightarrow X$

P_3 平衡策略為 $P_3 \rightarrow X$ 的充要條件為:

$W_{P3}(2,X,X) > W_{P3}(2,X,t_3)$

$$\rightarrow \left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right) > \frac{1}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}} + \overline{p_1}p_3 \times W3\right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right) \times \frac{\overline{p_1}p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}} > \frac{\overline{p_1}p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}(W3)$$

$$\rightarrow \left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right) > (W3)$$

c.若 P_2 的行動為 $P_2 \rightarrow P_3$

P_3 平衡策略為 $P_3 \rightarrow X$ 的充要條件為:

$W_{P3}(2,3,X) > W_{P3}(2,3,t_3)$

$$\rightarrow \frac{1}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right) > \frac{1}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}\overline{p_3}}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}} + \overline{p_1}\overline{p_2}p_3 \times W3\right)$$

$$\rightarrow \frac{\overline{p_1}\overline{p_2}p_3}{(1-\overline{p_1}\overline{p_2})(1-\overline{p_1}\overline{p_2}\overline{p_3})}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right) > \frac{\overline{p_1}\overline{p_2}p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}\overline{p_3}}(W3)$$

$$\rightarrow \frac{1}{(1-\overline{p_1}\overline{p_2})}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right) > (W3)$$

由上述 a.、b.、c.，我們可以發現，對於各種 P_2 的決策，可以把 $P_3 \rightarrow X$ 為平衡策略的條件整理為「某數 $>(W3)$」。

由於 $\frac{1}{(1-\overline{p_1}\overline{p_2})}\left(p_1\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right) < \frac{1}{(1-\overline{p_1}\overline{p_2})}\left(p_1\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}} + \overline{p_1}p_2\frac{p_3}{1-\overline{p_2}\overline{p_3}}\right)$，

且 $\frac{1}{(1-\overline{p_1}\overline{p_2})}\left(p_1\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right) = \frac{p_1}{(1-\overline{p_1}\overline{p_2})}\left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right) < \left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right)$

，因此當 $W3 < \frac{1}{(1-\overline{p_1}\overline{p_2})}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right)$，W3也必定比

$\frac{1}{(1-\overline{p_1}\overline{p_2})}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}} + \overline{p_1}p_2 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_2}\overline{p_3}}\right)$ 和 $\left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\right)$ 小，也就是:

若 $P_2 \rightarrow P_3$ 時，$P_3 \rightarrow X$ 為 P_3 的最佳策略，則在 $P_2 \rightarrow P_1$ 和 $P_2 \rightarrow X$ 時，$P_3 \rightarrow X$ 也是 P_3 的最佳策略。

(2)當 $p_1<p_3$ 時，若 ABL(2,1)不為(2,1,X)，則 $P_2 \rightarrow P_1$ 必不是 P_2 的平衡策略

設 P_{t_3} 為 P_1、P_2 中命中率較大者($P_{t_3} \in \{P_1,P_2\}$)。由(二)-(1)我們得知若 ABL(2,1)=(2,1,t_3)，則 ABL(2,3)=(2,3,t_3)。又在 $p_1<p_3$ 時，$W_{P2}(2,3,t_3) > W_{P2}(2,1,t_3)$，$P_2 \rightarrow P_1$ 不是所有 P_2 策略中使 P_2 勝率最大者，P_2 平衡策略不為 $P_2 \rightarrow P_1$。

(3)若 $p_1>p_2$ 且 $p_1<p_3$，則 $P_2 \rightarrow P_1$ 必不為 P_2 的平衡策略

$p_1>p_2$ 時，P_3 平衡策略只有 $P_3 \rightarrow X$ 或 $P_3 \rightarrow P_1$ 兩種可能。由(二)-(2)我們得知若 $p_1<p_3$，只有 ABL(2,1)=(2,1,X)時 $P_2 \rightarrow P_1$ 才有可能是 P_1 的平

衡策略。但 $p_1<p_3$ 時 $W_{P2}(2,1,X)<W_{P2}(2,3,X)$ 必成立，且當 $p_1<p_3$ 時 $W_{P2}(2,1,X)< W_{P2}(2,3,1)$ 也必成立。$W_{P2}(2,1,X)<W_{P2}(ABL(2,3))$，$P_2$→$P_1$ 必不為 P_2 的平衡策略。

(4)當 $p_1>p_3$ 時，若 ABL(2,3)不為(2,3,1)，則 P_2→P_3 必不是 P_2 的平衡策略

我們分 ABL(2,3)=(2,3,2)、ABL(2,3)=(2,3,X)兩種狀況:

a.若 ABL(2,3)=(2,3,2)

此時 ABL(2,1)有(2,1,X)和(2,1,2)兩種可能。由於 $W_{P2}(2,1,X)>W_{P2}(2,1,2)$，又在 $p_1>p_3$ 時 $W_{P2}(2,1,2)>W_{P2}(2,3,2)$，結合上述兩式我們可發現 $W_{P2}(2,1,X)>W_{P2}(2,1,2)>W_{P2}(2,3,2)$，$W_{P2}(ABL(2,1))>W_{P2}(ABL(2,3))$。$P_2$→$P_3$ 不是所有 P_2 的策略中使 P_2 勝率最大者，P_2 平衡策略不為 P_2→P_3。

b.若 ABL(2,3)=(2,3,X)

由(二)-(1)我們得知此時 ABL(2,1)=(2,1,X)。又在 $p_1>p_3$ 時，$W_{P2}(2,1,X)>W_{P2}(2,3,X)$，$P_2$→$P_3$ 不是所有 P_2 策略中使 P_2 勝率最大者，P_2 平衡策略不為 P_2→P_3。

綜合 a.、b.，當 ABL(2,3)為(2,3,2)或(2,3,X)時，P_2→P_3 必不為 P_2 的平衡策略。

(三) P_1 策略為 P_1→P_3 下 P_2、P_3 決策特性的證明

(1)P_3 平衡策略必不為 P_3→X

我們假設在場 P_3 以外的參賽者中，命中率最高的是 P_{t_3}($t_3 \in \{1,2\}$)，並假設 P_3 射中 P_{t_3} 後 P_3 勝率=W3(若 $P_{t_3}=P_1$，W3=$\frac{\overline{P_2}P_3}{1-\overline{P_2P_3}}$。若 $P_{t_3}=P_2$，W3=$\frac{\overline{P_1}P_3}{1-\overline{P_1P_3}}$)，此時 P_3 可能的平衡策略只有 P_3→P_{t_3}、P_3→X 兩種。接著列舉不同的 P_2 策略，觀察 P_3 平衡策略變化情形:

a.P_2 策略固定為 P_2→P_1 時

P_3 選擇策略 P_3→P_{t_3} 的充要條件為

$W_{P3}(3,1,t_3)>W_{P3}(3,1,X)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\overline{P_1P_2P_3}}\left(\overline{p_1}p_2 \times \frac{p_3}{1-\overline{P_2P_3}} + \overline{p_1p_2}p_3 \times W3\right) > \frac{1}{1-\overline{P_1P_2}}\left(\overline{p_1}p_2 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_2p_3}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\overline{P_1P_2P_3}}(\overline{p_1p_2}p_3 \times W3) > \left(\frac{1}{1-\overline{p_1p_2}} - \frac{1}{1-\overline{p_1p_2p_3}}\right)\left(\overline{p_1}p_2 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_2p_3}}\right)$$

$\rightarrow \frac{\overline{p_1 p_2} p_3}{1-\overline{p_1 p_2 p_3}}(W3) > \left(\frac{\overline{p_1 p_2} p_3}{(1-\overline{p_1 p_2})(1-\overline{p_1 p_2 p_3})}\right)\left(\overline{p_1} p_2 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_2 p_3}}\right)$

$\rightarrow (W3) > \left(\frac{1}{(1-\overline{p_1 p_2})}\right)\left(\overline{p_1} p_2 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_2 p_3}}\right)$

根據 P_1、P_2 大小關係，W3 會有所不同:

(a)當 $P_1 > P_2$ 時，$Pt_3 = P_1$，$W3 = \frac{\overline{P_2} P_3}{1-\overline{P_2 P_3}}$:

$$(W3) > \left(\frac{1}{(1-\overline{P_1 P_2})}\right)\left(\overline{P_1} P_2 \times \frac{P_3}{1-\overline{P_2 P_3}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\overline{P_2} P_3}{1-\overline{P_2 P_3}} > \left(\frac{P_2}{(1-\overline{P_1 P_2})}\right)\left(\frac{\overline{P_1} P_3}{1-\overline{P_2 P_3}}\right)$$

由兩人賽局研究可知當 $P_1 > P_2$ 時，$\frac{\overline{P_2} P_3}{1-\overline{P_2 P_3}} > \frac{\overline{P_1} P_3}{1-\overline{P_1 P_3}}$。且

$\frac{P_2}{1-\overline{P_1 P_2}} < 1$，不等式必成立。

(b)當 $P_1 < P_2$ 時，$Pt_3 = P_2$， $W3 = \frac{\overline{P_1} P_3}{(1-\overline{P_1 P_3})}$:

$$\frac{\overline{P_1} P_3}{1-\overline{P_1 P_3}} > \left(\frac{1}{(1-\overline{P_1 P_2})}\right)\left(\overline{P_1} P_2 \times \frac{P_3}{1-\overline{P_2 P_3}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{P_3}{1-\overline{P_1 P_3}} > \left(\frac{P_2}{(1-\overline{P_1 P_2})}\right)\left(\frac{P_3}{1-\overline{P_2 P_3}}\right)$$

由兩人賽局研究可知當 $P_1 < P_2$ 時，$\frac{P_3}{1-\overline{P_1 P_3}} > \frac{P_3}{1-\overline{P_2 P_3}}$。且

$\frac{P_2}{1-\overline{P_1 P_2}} < 1$，不等式必成立。

綜合 a.、b.，不等式 $W_{P3}(3,1,t_3) > W_{P3}(3,1,X)$ 必成立，P_3 平衡策略必不為 $P_3 \rightarrow X$。

b.P_2 策略固定為 $P_2 \rightarrow X$ 時:

使 P_3 選擇 $P_3 \rightarrow Pt_3$ 的充要條件為

$$W_{P3}(3,X,t_3) > W_{P3}(3,X,X)$$

由於 $W_{P3}(3,X,t_3) > 0 = W_{P3}(3,X,X)$，不等式必成立。$P_3$ 平衡策略必為「射擊在場命中率較高者」

c.P_2 策略固定為 $P_2 \rightarrow P_3$:

使 P_3 選擇 $P_3 \rightarrow Pt_3$ 的充要條件為

$$W_{P3}(3,3,t_3) > W_{P3}(3,3,X)$$

由於 $W_{P3}(3,3,t_3) > 0 = W_{P3}(3,3,X)$，不等式必成立。$P_3$ 平衡策略必不為 $P_3 \rightarrow X$。

綜合 a.、b.、c.，我們發現無論 P_2 策略為何，P_3 平衡策略必

不為 P_3→X。

(2)當 $p_1<p_2$，P_2策略必不為 P_2→X

當 $p_1<p_2$，P_3策略必為 P_3→P_2。設 Pt_2是 P_1、P_3中命中率較高者，則 P_2的平衡策略只有 P_2→X、P_2→Pt_2兩種可能。而在此前提下，P_2選擇策略 P_2→Pt_2的充要條件為:

$W_{P2}(P_3,Pt_2,P_2)>W_{P2}(P_3,X,P_2)$

設 P_2射中 Pt_2後勝率為 W2，則上式可寫為:

$$\frac{1}{1-\overline{P_1P_2P_3}}\left(p_1\times\frac{p_2}{1-\overline{p_1p_2}}+\overline{p_1}p_2\times W2\right)>\frac{1}{1-\overline{p_1p_3}}\left(p_1\times\frac{p_2}{1-\overline{p_1p_2}}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1-\overline{P_1P_2P_3}}(\overline{p_1}p_2\times W2)>\left(\frac{1}{1-\overline{p_1p_3}}-\frac{1}{1-\overline{p_1p_2p_3}}\right)\left(p_1\times\frac{p_2}{1-\overline{p_1p_2}}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1p_2p_3}}(p_2\times W2)>\left(\frac{\overline{p_1}p_2\overline{p_3}}{(1-\overline{p_1p_3})(1-\overline{p_1}\ \overline{p_2}\ \overline{p_3})}\right)\left(p_1\times\frac{p_2}{1-\overline{p_1p_2}}\right)$$

$$\Rightarrow(W2)>\left(\frac{1}{(1-\overline{p1p3})}\right)\left(\overline{p3}p1\times\frac{p2}{1-\overline{p1p2}}\right)$$

接下來根據 p_1、p_3大小關係，W2 會有所不同:

a.若 $p_1>p_3$，此時 $Pt_2=P_1$，W2=$\frac{\overline{p3}p2}{(1-\overline{p3p2})}$:

$$\frac{\overline{p3}p2}{(1-\overline{p3p2})}>\left(\frac{\overline{p3}p2}{(1-\overline{p1p3})}\right)\left(\frac{p1}{1-\overline{p1p2}}\right)=\left(\frac{1}{(1-\overline{p1p3})}\right)\left(\overline{p3}p1\times\frac{p2}{1-\overline{p1p2}}\right)$$ ，

不等式必成立

b.若 $p_1<p_3$，此時 $Pt_2=P_2$，W2=$\frac{\overline{p1}p2}{(1-\overline{p1p2})}$:

$$\frac{\overline{p1}p2}{(1-\overline{p1p2})}>\left(\frac{p1}{(1-\overline{p1p3})}\right)\left(\frac{\overline{p3}p2}{1-\overline{p1p2}}\right)=\left(\frac{1}{(1-\overline{p1p3})}\right)\left(\overline{p3}p1\times\frac{p2}{1-\overline{p1p2}}\right)$$，不等式必成立

綜合 a.、b.，不等式 $W_{P2}(3,t_2,2)>W_{P2}(3,X,2)$必成立。$P_3$策略為 P_3→P_2時，P_2平衡策略必不為 P_2→X。

三、使用程式輔助觀察賽局

程式分為計算特定策略的勝率、尋找平衡策略兩部分。我們以陣列方式表示三人命中率與策略，參賽者 P_i命中率以 p[i]存取，P_i的策略 P_i→P_j以 pol[i]=j 表示。且在程式中我若某參賽者 Pi 策略為「放棄」，則 pol[i]=i:

(一) 計算勝率部分

使用 Python 模擬伍-四-(一)的勝率一般化公式

```
W=dict()
def w(pi,p,pol):#pi=要計算勝率的參賽者，p 為一陣列，p[i]=參賽者 Pi 的命中率，pol 為策略集，pol[i]為 Pi 的策略，若 pol[i]=i 則代表該參賽者策略為放棄
  n=len(p)

  if(W.get(str(p))!=None and W[str(p)].get(str(pol))!=None
                and W[str(p)][str(pol)].get(pi)!=None):
    return W[str(p)][str(pol)][pi]


  if(n==1):#若場上剩下參賽者一人，則該參賽者勝利
    return 1
  if(n==3):
    return w3(pi,p,pol)
  #檢查是否所有人策略都為放棄
  ok=False
  for i in range(n):
    if(pol[i]!=i):
      ok=True
      break
  if(not ok):
    return 0


  r=1#紀錄「到目前為止，前一名參賽者都沒有射中目標的機率」
  ret=0#記錄勝率
  per=[i for i in range(n)]

  for j in range(n):#一般式中的 sigma
    if(pol[j]==j):#若該參賽者放棄射擊則直接跳過
      continue
    if(pol[j]!=pi):#若該參賽者策略不為「射擊 Pi」，則 Pi 勝率可累加上退化後賽局中的勝率
      p2=p[j+1:]+p[:j+1]#將命中率陣列以退化後的射擊順序重排

      #刪除遭射中的參賽者
      d=(pol[j]+n-j-1)%n
      del p2[d]
```

```
        #Pi 在退化後賽局的位置
        pi2=(pi+n-j-1)%n
        if(pi2>d):
          pi2-=1
        pl2=ABL(p2)#尋找退化後賽局的平衡策略
        ret+=r*p[j]*w(pi2,p2,pl2)#將退化後賽局的勝率累加

      r*=(1-p[j])
    ret/=(1-r)
    #紀錄結果
    if(W.get(str(p))==None):
      W[str(p)]=dict()
    if(W[str(p)].get(str(pol))==None):
      W[str(p)][str(pol)]=dict()
    W[str(p)][str(pol)][pi]=ret
    return ret
```

(二) 尋找平衡策略部分

使用 Python 根據定義尋找平衡策略

```
ABL_dict=dict()
def ABL(s,cur=[]):
    if(len(cur)==0 and ABL_dict.get(str(s))!=None):
        return ABL_dict[str(s)]
    pi=len(cur)
    if(len(cur)==len(s)):
        return cur
    abl=[]
    for pli in range(len(s)): #使用 for 迴圈列舉 Pi 策略
        abl2=ABL(s,cur+[pli])
        if (abl==[]):
            abl=abl2
        elif (w(pi,s,abl2)>w(pi,s,abl)): #若目前策略比 abl 勝率高
則更新 abl
            abl=abl2
    if(len(cur)==0): #紀錄結果
        ABL_dict[str(s)]=abl
    return abl
```

四、推導計算 n 人賽局平衡策略時，W 函數與 ABL 函數的遞迴呼叫次數

在以下分析，我們將所有呼叫的 w 函數、ABL 函數以該次呼叫中的 length (players)(也就是該次呼叫的參賽者人數)分類。若某次呼叫的 W(pi,players,policy) 中 length (players)=k 則稱該次呼叫的是第 k 階 W 函數，若某次呼叫的 ABL(players,current)中 length (players)=k 則稱該次呼叫的是第 k 階 ABL 函數。且由於呼叫完每組 W 函數後皆會儲存計算結果，因此接下來的推導若出現重複呼叫的情形(兩次呼叫 W 函數所給參數皆相同)，只會在第一次將函數完全展開，第二次後會直接查詢上次呼叫結果。故所有相同的函式呼叫僅在第一次呼叫時計入呼叫次數。若以上述方法計數，則每次 n 人賽局的 W、ABL 呼叫次數皆固定，不會隨參賽者不同改變。

(一)產生一組 n 人賽局平衡策略時，需呼叫第 n 階 W 函數、ABL 函數的次數

若 n=1 時，必定只需呼叫一組 W 與兩組 ABL，因此以下狀況皆是討論 n>1 的情況。

1.產生一組 n 人賽局平衡策略時，需呼叫第 n 階 ABL 函數的次數

觀察 ABL 的虛擬碼，可發現除了 length(current)==n 的狀況以外，呼叫一次 ABL(players,current)函數時它便會呼叫出另外 n 組 ABL，且多呼叫出的 ABL 其 len(current)皆會比原先多 1(ABL(players,current+[1]), ABL(players,current+[2]) ,⋯ ABL(players,current+[n]))。因此我們若以 $\mathrm{T}_{ABL}(n,n,k)$來表示 n 人賽局中，在呼叫一組 length(current)==k 的第 n 階 ABL 後，其他第 n 階 ABL 被遞迴呼叫的次數，即可得遞迴式:

$$\mathrm{T}_{ABL}(n,n,k)=\begin{cases}1 & k=n\\ 1+n*\mathrm{T}_{ABL}(n,n,k+1) & k<n\end{cases}$$

產生一組 n 人賽局平衡策略時，需呼叫第 n 階 ABL 函數的次數即為 $\mathrm{T}_{ABL}(n,n,0)$。而將$\mathrm{T}_{ABL}(n,n,0)$展開後可發現 n>1 時，$\mathrm{T}_{ABL}(n,n,0)$即為一等比級數和:

$$\mathrm{T}_{ABL}(n,n,0)=1+\mathrm{n}*\mathrm{T}_{ABL}(n,n,1)=1+n+n^2*\mathrm{T}_{ABL}(n,n,2)=\cdots$$

$$=1+n+n^2\ldots+n^n=\frac{(n^{n+1}-1)}{n-1}$$

故產生一組 n 人賽局平衡策略時，需呼叫第 n 階 ABL 函數的次數為 $\frac{(n^{n+1}-1)}{n-1}$。當 n=1 時，需呼叫次數為 1+n=2。

2.產生一組 n 人賽局平衡策略時，需呼叫第 n 階 W 函數的次數

觀察 W 的虛擬碼，可發現第 n 階 W 函數僅會由第 n 階 ABL 函數呼叫。觀察 ABL 的虛擬碼，可發現若 length(current)=n，ABL 函數不會呼叫任何其他 ABL 與 W。若$0\leq\mathrm{length(current)}<\mathrm{n}$，呼叫一次

ABL(players,current)函數時它除了呼叫出另外 n 組 ABL，還會另外呼叫出 n 組 n 階 W 函數。因此我們若以$T_W(n,n,k)$表示 n 人賽局中，在呼叫一組 length(current)==k 的第 n 階 W 函數後，其他第 n 階函數被遞迴呼叫的次數，即可得遞迴式:

$$T_W(n,n,k)=\begin{cases}0 & k=n\\ n+n*T_W(n,n,k+1) & 0<k<n\end{cases}$$

產生一組 n 人賽局平衡策略時，需呼叫第 n 階 W 函數的次數即為$T_W(n,n,0)$。而將$T_W(n,n,0)$展開後可發現 n>1 時，$T_W(n,n,0)$即為一等比級數和:

$$T_W(n,n,0)=n+n*T_W(n,n,1)=n+n^2+n^2*T_W(n,n,2)=\cdots=n+n^2\ldots+n^n$$

$$=\frac{n(n^n-1)}{n-1}=\frac{n^{n+1}-n}{n-1}$$

故產生一組 n 人賽局平衡策略時，需呼叫第 n 階 W 函數的次數為$\frac{(n^{n+1}-n)}{n-1}$。當 n=1 時，需呼叫次數為 0+n=1。

透過(1)、(2)我們可得產生一組 n 人賽局平衡策略時，需呼叫第 n 階 W、ABL 的次數。將其推廣便可得第 n-1~1 階函數的呼叫次數。

(二)產生一組 n 人賽局平衡策略時，需呼叫第 k 階 W 函數、ABL 函數的次數

由五-(一)我們可得呼叫第 n 階函數時，需呼叫第 n 階 W、ABL 的次數。以下推導 n 人賽局中第 k 階(k<n) W、ABL 函數被呼叫的次數。

由於 ABL 函數必須展開所有的狀態才能求得平衡策略，因此由 n 人賽局的任意一種退化賽局都會被計算。n 人賽局退化成的 k 人賽局共有C_k^n種參賽者組成方式，每一種組成根據退化後的P_1不同，又有 k 種排列方式。因此一場 n 人賽局共有C_k^n*k種退化為 k 人賽局的參賽者序列。而根據 1.我們得知計算一場 k 人賽局平衡策略時須呼叫 k 階 ABL 函數$\frac{k^{k+1}-1}{k-1}$次、k 階 W 函數$\frac{k^{k+1}-k}{k-1}$次，因此:

若以$T_{ABL}(n,k)\ \ (1<k<n)$來表示計算一組 n 人賽局平衡策略時呼叫第 k 階 ABL 次數的總和，即可得

$$T_{ABL}(n,k)=C_k^n*k*T_{ABL}(k,k,0)=C_k^n*\frac{k^{k+2}-k}{k-1}$$

若以$T_W(n,k)\ \ (k<n)$來表示計算一組 n 人賽局平衡策略時呼叫第 k

階 W 次數的總和，即可得

$$\mathrm{T_W}(n,k)=\mathrm{C_k^n}*k*T_W(k,k,0)=\mathrm{C_k^n}*\frac{k^{k+2}-k^2}{k-1}$$

以此我們可推導出在計算一組 n 人賽局時，遞迴呼叫的 W 與 ABL 次數。

(三)產生一組 n 人賽局平衡策略時，需呼叫的 W 函數、ABL 函數總次數

產生一組 n 人賽局平衡策略時，需呼叫的 W 函數、ABL 函數總次數即為所有階數的 W、ABL 次數總和。因此:

若以$\mathrm{T_{ABL}}(n)$來表示計算一組 n 人賽局平衡策略時呼叫 ABL 次數的總和，即可得

$$\mathrm{T}_{ABL}(n)=\frac{n^{n+1}-1}{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}T_{ABL}(n,k)$$

$$=\frac{n^{n+1}-1}{n-1}+2n+\sum_{k=2}^{n-1}C_k^n*\frac{k^{k+2}-k}{k-1}$$

其中+2n 項是由$\mathrm{T_{ABL}}(\mathrm{n},1)$而來

若以$\mathrm{T_W}(n,k)$來表示計算一組 n 人賽局平衡策略時呼叫第 k 階 W 次數的總和，即可得

$$\mathrm{T}_W(n)=\frac{n^{n+1}-n}{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}T_W(n,k)=\frac{n^{n+1}-n}{n-1}+n+\sum_{k=2}^{n-1}C_k^n*\frac{k^{k+2}-k^2}{k-1}$$

其中+n 項是由$\mathrm{T_W}(\mathrm{n},1)$而來

以下為在在不同的 n 值下，程式運行時紀錄的 W、ABL 函式呼叫次數，以及對應的$\mathrm{T_W}(\mathrm{n})$、$\mathrm{T_{ABL}}(n)$數值(由於 n=1 時無法使用等比求和公式，因此下表跳過 n=1 的狀況):

n 值	2	3	4	5	6	7
呼叫 W 函式次數	8	78	884	12000	196062	3774190
$\mathrm{T_W}(\mathrm{n})$	8	78	884	12000	196062	3774190
呼叫 ABL 函式次數	11	88	913	12076	196249	3774632
$\mathrm{T_{ABL}}(\mathrm{n})$	11	88	913	12076	196249	3774632

可發現$\mathrm{T_W}(\mathrm{n})$與$\mathrm{T_{ABL}}(\mathrm{n})$計算的結果與程式實際呼叫次數相同。

(四)產生一組 n 人賽局平衡策略時，需進行的額外查詢次數推導

由於計算平衡策略時經常需重複呼叫相同的函數，因此我們使用 dictionary 保存每次的呼叫結果。以下推導這些呼叫結果被查詢的最大次數。

由於額外查詢次數會受到產生的平衡策略影響，因此並不固定。但我們可透過一些方法估計。由於每個被呼叫的第 k 階 W 函數(不含遞迴)僅在計算勝率時進行查詢，因此至多會進行 k 次。同樣的，每個被呼叫的第 k 階 ABL 函數(不含遞迴)僅在比較各策略時會進行查詢，至多也只會進行 k 次。以上分析對 W 與 ABL 函數皆相同。因此若以$\mathrm{T_C(n)}$表示計算一組 n 人賽局平衡策略時，則:

$$\mathrm{T}_C(n) < n * \frac{n^{n+1}-n}{n-1} + n + \sum_{k=2}^{n-1} k * T_W(n,k) + \mathrm{n} * \frac{n^{n+1}-1}{n-1} + 2n + \sum_{k=2}^{n-1} k * T_{ABL}(n,k)$$

$$= \frac{2n^{n+2}-n^2-n}{n-1} + 3n + \sum_{k=2}^{n-1} C_k^n * \frac{2k^{k+3}-k^3-k^2}{k-1}$$

(五)$\mathrm{T_W(n)}$、$\mathrm{T_{ABL}(n)}$、$\mathrm{T_C}(n)$的上界

由 1.、2.、3.、4.，我們可得出呼叫 W、ABL 函數的次數，以及查詢次數的上限，但$\mathrm{T_W(n)}$、$\mathrm{T_{ABL}(n)}$、$\mathrm{T_C}(n)$都包括了∑等較複雜的運算，較不合適用於分析演算法複雜度，因此我們必須為∑運算的值找到合適的上界。以下我們先計算 n 增大時，三函數較寬鬆的上界，再對上界進行化簡。透過一些簡單的計算我們發現:

$$\mathrm{T_W(n,k)} < \mathrm{C} * \left(\mathrm{n^n} + \sum_{\mathrm{k=2}}^{\mathrm{n-1}} \mathrm{C_k^n} * \mathrm{k^{k+1}}\right)$$

$$\mathrm{T_{ABL}(n,k)} < \mathrm{C} * \left(\mathrm{n^n} + \sum_{\mathrm{k=2}}^{\mathrm{n-1}} \mathrm{C_k^n} * \mathrm{k^{k+1}}\right)$$

$$\mathrm{T_C(n\,)} < \mathrm{C} * \left(\mathrm{n^{n+1}} + \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n-1}} \mathrm{C_k^n} * \mathrm{k^{k+2}}\right)$$

C 為常數。有了較簡潔的上界後，我們再進一步將∑運算化簡。透過一些計算我們發現:

$$\sum_{\mathrm{k=2}}^{\mathrm{n-1}} \mathrm{C_k^n} * \mathrm{k^{k+1}} < n^{n+1}$$

我們可用二項式定理進行證明:

令 $S=\sum_{k=2}^{n-1} C_k^n * k^{k+1}$，則

$$S < \sum_{k=0}^{n} C_k^n * (n-1)^{k+1} = (n-1) * \sum_{k=0}^{n} C_k^n * (n-1)^{k+1}$$

$$= (n-1) * (n-1+1)^n = (n-1)n^n$$

又 $(n-1)n^n < n^{n+1}$，故得證 $\sum_{k=2}^{n-1} C_k^n * k^{k+1} < n^{n+1}$

以類似的方式，我們也能得證:

$$\sum_{k=2}^{n-1} C_k^n * k^{k+2} < n^{n+2}$$

因此我們可得出化簡過後的函數上界:

$T_W(n,k) < C * (n^n + n^{n+1}) < C_2 * n^{n+1}$

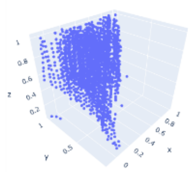
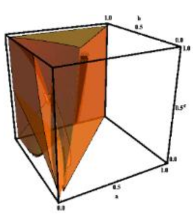
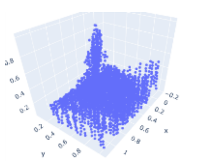
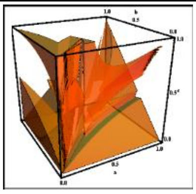
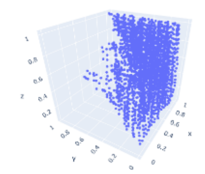
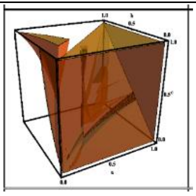
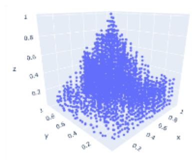
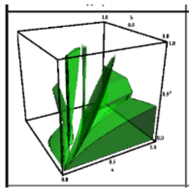
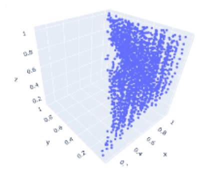
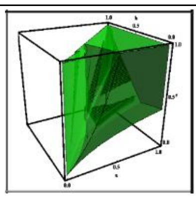
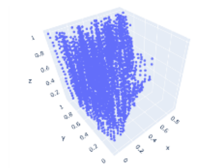
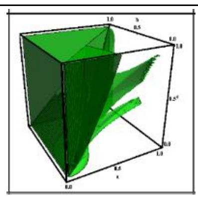
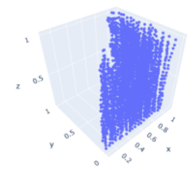
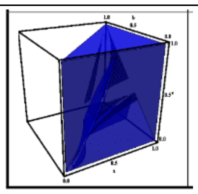
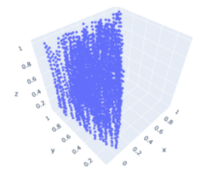
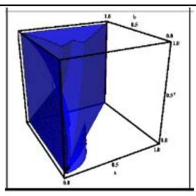
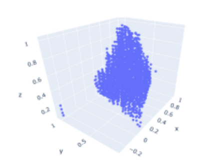
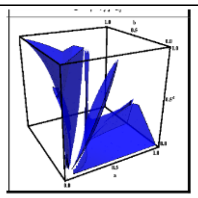
$T_{ABL}(n,k) < C * (n^n + n^{n+1}) < C_2 * n^{n+1}$

$T_C(n) < C * (n^{n+1} + n^{n+2}) < C_2 * n^{n+2}$

C、C_2 為常數

五、勝率分布比較

此處列出參考資料一報告中的勝率分布，以及本研究以 Plotly 畫出的勝率分布散點圖。

P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 的策略分布		P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 的策略分布		P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_3$ 的策略分布	
 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現
P_2 策略為 $P_2 \rightarrow P_1$ 的策略分布		P_2 策略為 $P_2 \rightarrow X$ 的策略分布		P_2 策略為 $P_2 \rightarrow P_3$ 的策略分布	
 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現
P_1 策略為 $P_3 \rightarrow P_1$ 的策略分布		P_3 策略為 $P_3 \rightarrow P_2$ 的策略分布		P_3 策略為 $P_3 \rightarrow X$ 的策略分布	
 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現