第二十一屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA21-270

作品名稱：尤拉圖的零和基數刻劃

姓名：劉伯晏

關鍵字：尤拉圖、零和基數、圖形覆蓋

目錄

摘要

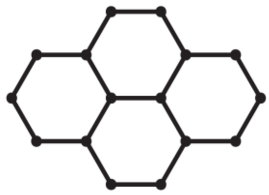
在圖論中，以 G=(V,E)表示一個圖，其中 G 的頂點集合記作 V(G)、邊集合記作 E(G)。令 k 是一個正整數，若我們能在 G 的每個邊上各給一個非零整數標號，其標號集合為{±1,±2,±3,...,±(k−1)}，且每個頂點所連出的邊標號總和為 0，則稱圖 G 有零和 k 流，當 k 有最小值時，我們稱 k 為圖 G 的零和基數，記作 F(G)。

在圖論研究中，無零流問題（*nowhere-zero flow*）與平面著色問題有著密切的關係，其中零和問題（*zero-sum flow*）是無零流問題的一種特例。自 2009 年開始，S. Akbari 等人提出了零和流猜想，猜測有零和流的圖其零和基數都不大於 6。

在本作品中，我們成功刻劃出尤拉圖（即每個頂點都連出偶數個邊且連通的圖）零和基數分別為 3 或 4 的充要條件，過程中我們構造出一些圖形的變換，協助論證，針對不同的情況探討其可能的零和基數上界，接著藉由圖形覆蓋的的手法，討論尤拉圖、(2,3)圖、橋與一般圖零和基數上界的關聯，嘗試解決部分零和流猜想。

壹、 研究動機

過去在報章雜誌、飲料包裝、數學書刊等，都曾出現各種有趣的標數字遊戲，而高一有一天，老師也拋了一個標數字問題給我們：「你們能不能在這個圖的每個邊都寫上一個不是零的整數，讓每個點連出去的邊加起來都是零？」



這個問題打動了我們的好奇心，我們嘗試給出一組解答，同時好奇這個問題有沒有一個一般化的結論或「最佳解」，不知不覺一頭栽入了這個研究。我們嘗試搜尋相關文獻，發現這是名為「零和流」的問題，且文獻[2]（S. Akbari et al. 2009）已用線性代數提出解的存在條件，以及某些特定的圖給出標準的數字標法。更令人感興趣的是，文獻[2]中也猜想所有有零和的圖零和基數不超過 6，我們深知這個問題是極為困難的，但也想透過證明部分結果以及提供一些新工具嘗試對這系列研究有些貢獻。

一般圖的零和基數上界是仍未完成的問題，起初我們希望從一些特殊的圖出發，一窺

這神秘的問題。一經深入探究發現，有零和的圖可以拆解成一些有零和的子圖的「覆蓋」，且能藉此掌握零和基數上界。而我們發現，在許多圖形之中，尤拉圖皆能作為這樣的子圖，因此我們首先期望能將尤拉圖的零和基數刻劃清楚，並思考是否能藉此判斷更多圖形的零和基數，或者將討論尤拉圖的零和基數時所得到的結果推廣到一般的圖形。

貳、 研究目的

經過討論後，我們列出一些研究方向如下，在文獻探討中會詳述討論以下項目的原因。

一、探討零和存在的條件

二、分析尤拉圖的零和基數上界

三、分析零和基數為 3, 4, 5 個別的情形

四、探討尤拉圖零和基數的可能值以及條件

五、將我們現有的結論推廣或應用於一般圖的零和基數上界判斷

參、 相關定義與文獻探討

一、名詞解釋與定義

（一）本研究會用到的圖論（graph theory）相關常用專有名詞與符號

1. 本文中提到的**一般圖**泛稱所有**簡單圖**（simple graph），即滿足任意兩個頂點連至多一條邊，且任意一條邊的兩端不會是同一個頂點的圖。
2. deg(v)代表頂點 v 所連出的邊數，也稱作 degree 或度。$N_G(v)$表示圖 G 中的頂點 v 所連出的邊所構成的集合，同時有$N_G(v) = |\deg(\mathrm{v})|$
3. $\delta(G) = \min\{\deg(\mathrm{v}): \mathrm{v} \in V(G)\}, \Delta(\mathrm{G}) = \max\{\deg(\mathrm{v}): \mathrm{v} \in V(G)\}$
4. **子圖**（subgraph）：取$\mathrm{V(S)} \subseteq \mathrm{V(G)}$，$\mathrm{E(S)} \subseteq \mathrm{E(G)}$，且對於所有 e∈E(S)均有 e 的兩端點位於 V(S)中，此時 S 為 G 的子圖。
5. **路徑**（path）：以圖中某個頂點為起點，途經一些兩兩不重複的頂點與邊後，以某個頂點為終點，此頂點與邊的集合稱為路徑（注意到頂點比邊多一個）。
6. **連通**（connectivity）：對於 G 中任意兩個頂點，若兩者間都能以一條只經過 G 的邊的路徑連接，則稱 G 為連通圖（connected graph）。**連通區**（**component**）：

一個子圖 S⊆G 滿足 S 是連通的且對於所有$v \in V(S), u \in V(G \backslash S)$都滿足$v, u$間不存在任何一個路徑連接兩者，則稱 S 為 G 的一個連通區。特別地，連通圖只有一個連通區。

7. **橋**（bridge）：若將某條邊從圖中移除後（兩端頂點不被移除），圖的連通區數量會增加，則該邊稱為一個橋。
8. **二部圖**（**二分圖**）（bipartite）：存在$V_1, V_2 \subset$ V(G)滿足$V_1 \cap V_2 = \emptyset$及$V_1 \cup V_2 = V(G)$，且V_1中任兩點、V_2中任兩點都沒有連邊，則稱 G 為二部圖。
9. **樹**（tree）：每一個邊都是橋的圖。**葉子**（leaf）：樹中 degree=1 的頂點。
10. **正則**（regular）：若圖 G 所有頂點的 degree 都相同且值為 r，則稱 G 為 r-正則圖。
11. **完美匹配**（perfect matching）：若圖 G 存在一個邊子集合$M \subseteq E$（G）使得所有頂點v $\in V(G)$都有$|N_G(v) \cap M| = 1$，則稱 G 有完美匹配，且稱v被 M許配。
12. **(2,3)圖**代表對於所有$v \in V(G)$都有$\deg(v) = 2,3$。
13. 若圖G 中的兩個子圖 S 與 T 滿足 V(S),V(T)$\subseteq$V(G) ， E(S)$\cap$E(T)=ϕ ，則稱 S 與 T 為**邊互斥**。

（二）零和與零和基數

1. 若存在一正整數 k 以及函數 $f: E(G) \longrightarrow \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, ..., \pm(\boldsymbol{k-1})\}$滿足

$$\sum_{e \in N(v)} f(e) = 0 \ \ \forall v \in V(G)$$

則稱 f 為 G 的零和邊權函數，且稱圖 G **有零和**；否則稱圖 G 沒有零和

2. F(G)表示最小的正整數 k 滿足 G 有零和，我們稱 F(G)為 G 的**零和基數**。
3. 若 G 不存在零和，則定 F(G)=∞
4. 為了方便討論，我們另外定義沒有邊的圖有零和且零和基數為 1。

（三）尤拉圖的定義與本文中設定的縮寫

對於所有v $\in V(G)$都有$\deg(v)$為偶數的圖我們稱為**偶圖**（even graph）。而我們稱連通的偶圖為**尤拉圖**（Eulerian graph）。

EGES： G 是連通的尤拉圖且邊數為偶數（Eulerian Graph with Even Size）

EGOS： G 是連通的尤拉圖且邊數為奇數（Eulerian Graph with Odd Size）

值得注意的是，偶圈（偶數個邊的圈）、奇圈分別是一種特別的 EGES、EGOS。

（四）圖形覆蓋的意義

對於一個圖 G，若存在子圖$S_1, S_2, \ldots, S_n$使得 $G = \bigcup_{1\le i\le n} S_i$ ，則稱 G 可以被拆解成一些子圖$S_1, S_2, \ldots, S_n$的覆蓋，或稱$S_1, S_2, \ldots, S_n$可覆蓋 G。換句話說，覆蓋是一種特別的圖形聯集，且允許邊重疊。

二、文獻回顧：本文會引用的圖論相關性質與定理

性質 2.1 （D.B. West[7]） 二部圖常見性質

1. G 是二部圖若且唯若 G 中沒有奇圈；G 是二部圖若且唯若 G 沒有奇數邊尤拉圖子圖

2. 二部圖移除任何一個邊或頂點之後都還是二部圖

性質 2.2 （D.B. West [7]） 尤拉圖常見性質

1. G 是尤拉圖若且唯若 G 中存在**尤拉迴路**，即對於每個頂點 v，都可以從 v 出發，經過 G 中所有邊恰各一次，回到 v。

2.尤拉圖與尤拉圖的**頂點沾黏**（頂點重疊，邊不重疊）仍然是尤拉圖，尤拉圖移除掉任何一個尤拉圖子圖後，每個連通區仍是尤拉圖。

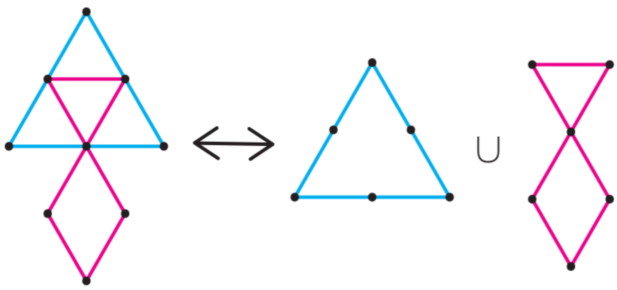


圖 2.3 尤拉圖的頂點沾黏 範例

性質 2.4 （D.B. West [7]）無橋圖常見性質

對於一個沒有橋（名詞解釋編號 7）的圖 G 與兩個相異頂點 u, v∈V(G)，都存在兩個路徑 p, q 滿足 p, q 沒有邊重疊且 p, q 的起點與終點都是 u, v；且對於 G 中的每個邊 e，都存在一個圈所包含 e。

定理　2.5　（D.B. West [7]）（Petersen 1891）
所有無橋（bridgeless）的 3-正則圖（3-regular graph）都有完美匹配（perfect matching）

三、文獻回顧：本文會引用的重要定理與猜想

在文獻探討時，我們讀到幾個前人在零和研究中所證明的重要的定理，在此列出與我們研究主題較相關者並解釋我們的**研究目的**。首先是零和猜想：

猜想　3.1　（S. Akbari et al. [2]）**零和猜想**（zero-sum conjecture, ZSC）

若圖 G 有零和，F(G)≤6。

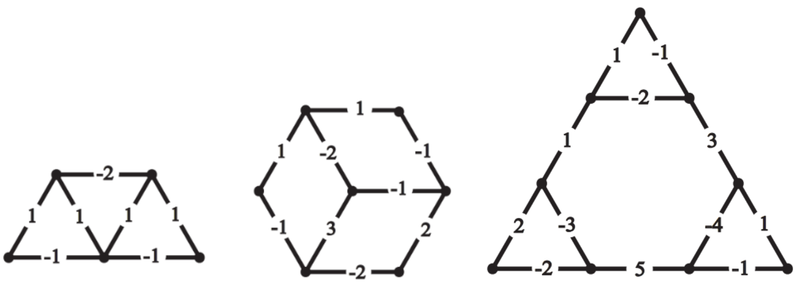


圖　3.2　F(G)≤6 的例子

定理　3.3　（S. Akbari et al. [2]）
若猜想 3.1 對所有(2,3)圖都對，則猜想 3.1 對所有圖都正確。

定理　3.4　（S. Akbari et al. [2]）
猜想 3.1 對所有二部圖都對。

接著是零和存在性的充分必要條件之一：

定義　3.5　（S. Akbari et al. [2]）　*Akbari* 條件

圖 G 滿足 Akbari 條件的意思是：

1. 若圖 G 是二部圖，則 G 沒有橋。

2. 若圖 G 不是二部圖，則 $G\setminus\{e\}$ 的任何一個連通區都不是二部圖對於任意 $e \in E(G)$ 。

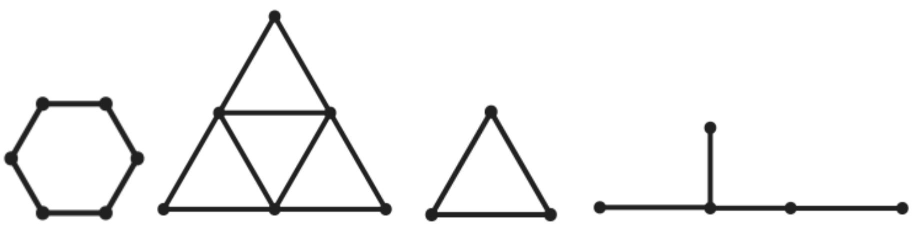


圖　3.6　（左一、二）滿足 *Akbari* 條件的例子 （右一、二）不滿足的例子

定理　3.7　（S. Akbari et al. [2]）

圖 G 有零和若且唯若 G 滿足 Akbari 條件

定理 3.3 指出我們只需要討論(2,3)圖即可，而在 2016 年，文獻[4]作者提出相關想法如下：

定義　3.8　（Z. K. Eu [4]）

一個**樹**（tree）的所有**葉子**（leaf）都以一個奇圈取代，而其他頂點可以選擇奇圈或偶圈替換，亦可不替換，則此圖稱為**樹燈圖**（tree lamp），如**圖** 3.9。

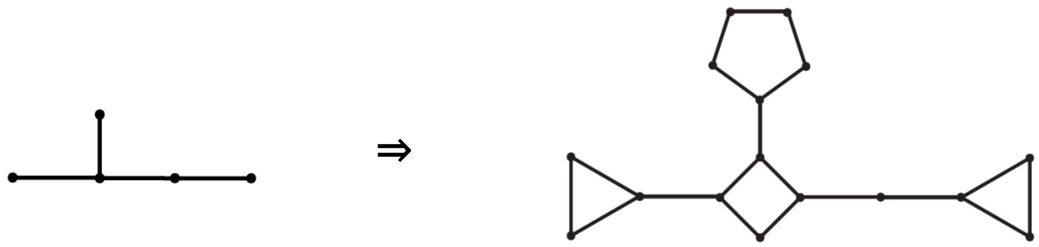


圖　3.9　　樹燈圖舉例

定理　3.10　（T. M. Wang and S. W. Hu [6]）

若 G 是一個樹燈圖，則 F(G)≤5

猜想　3.11　（Z. K. Eu [4]）開放問題二

一個(2,3)圖若有零和，則可以表示為若干個偶圈與樹燈圖的聯集。

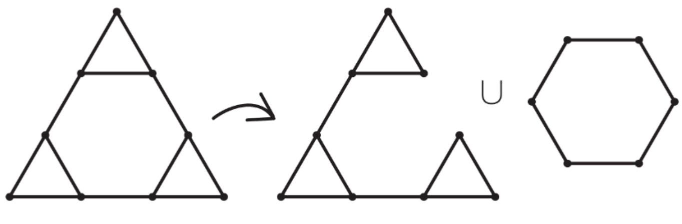


圖　3.12　　有零和的圖拆解成偶圈與樹燈圖聯集 舉例

我們舉了一些例子覺得猜想 3.11 應是正確的，而且若能證明，那麼將有機會透過圖形的覆蓋（聯集）的方法找到零和基數的上界，這是因為偶圈及樹燈圖都是有零和的「簡單圖形結構」。也因此我們重新探討零和存在的條件（**研究目的一**）。另一方面，由於零和存在性已有充要條件，開始有前人轉而探討 F(G)=2, 3, 4…的情況：

定理　3.13　（T. M. Wang and S. W. Hu [6]）
F(G)=2 若且唯若 G 為偶數邊尤拉圖（EGES）。

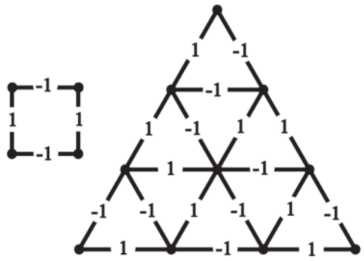


圖　3.14　F(G)=2 的兩個例子

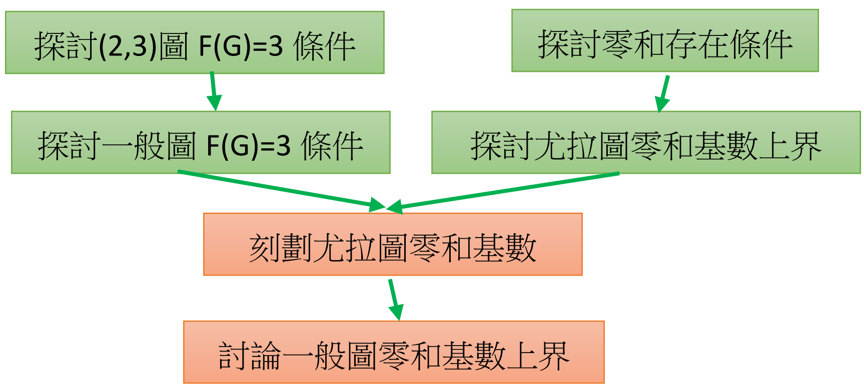
定理　3.15　（S. Akbari et al. [2]）
若 G 是一個 3 正則圖，則 F(G)≤5。且 F(G)=3 若且唯若 G 有完美匹配。

猜想 3.11 提到偶圈，定理 3.13 也提到 F(G)=2 的圖等價 EGES，我們自然好奇 EGOS 的零和基數。猜想 3.11 猜測有零和的圖可以表示為 EGES 與樹燈圖的覆蓋，而我們證明了後面會提到的引理 4.6 後，也懷疑 EGES 與一般圖零和基數上界有關連；此外，若能避免判斷尤拉圖的邊數是偶數或奇數也能省掉不少功夫，所以清楚 EGOS 零和基數可能也有幫助。（**研究目的二、四**）。

另外，閱讀文獻[4]與定理 3.3 後，我們決定從(2,3)圖出發接續討論 F(G)=3, 4, 5 的情況（**研究目的三**），再以研究過程中觀察到的性質與結果，嘗試討論一般圖的情形（零和猜想）（**研究目的五**）。

肆、研究過程或方法

一、研究架構



二、零和問題的觀察

在閱讀相關文獻後，我們對於零和問題做了一些觀察，並整理出一些相對基礎的性質與引理。其中引理 4.6 是我們常會使用到的。

性質　4.1

若 G 有零和，則不存在 degree=1 的頂點。

性質　4.2

若 G 有零和，則$\mathrm{F(G)} \geq 2$。等號成立時，我們以± 1在 G 的邊上標號。

性質　4.3

圖 G 有連通區$G_1, G_2, \dots, G_n$，則$F(G) = max\{F(G_i): 1 \leq i \leq n\}$。**因任兩個連通區的零和存在性與零和基數是獨立的，故本文中若未特別強調，我們均只討論連通圖。**

定義　4.4　（[7]）

細分（subdivision）：對於一個圖 G 來說，在圖 G 的邊上加入新頂點，使邊轉變成由多個頂點構成之路徑的變換。

平滑（smoothing）：對於一個圖 G 來說，將圖 G 路徑上 degree 為 2 的點全部抹去，使新圖與原圖仍為同胚（Homeomorphism）的一種變換。

定理　4.5　（定理 3.10 的補充）

G 是一個樹燈圖，則存在一種 G 的零和邊權函數使得 F(G)≤5，且所有權重為± 4的邊都是橋。

定理 3.10 已經說明完樹燈圖 F(G)≤5，而後半段證明請參考**附錄**。

引理　4.6

若圖G存在子圖集合$S_{1,}S_{2,}S_{3,}\dots S_{k,}$滿足$\bigcup_{1\le i\le k} S_i = G$且$S_{1,}S_{2,}S_{3,}\dots S_{k,}$個別都有零和，則圖$G$有零和，且$F(G) \le \prod_{1\le i\le k} F(S_i)$

證明：事實上，只需要證明「若G_A與G_B個別都有零和，且G可以表示為G_A與G_B兩個子圖的覆蓋（$G = G_A \cup G_B$），則G有零和且$F(G) \le F(G_A)\cdot F(G_B)$」，則原命題得證。

令零和邊權函數 $f:E(G_A)\to\{i:1\le|i|\le F(G_A)-1\}$，$g:E(G_B)\to\{i:1\le|i|\le F(G_B)-1\}$滿足$G_A$與$G_B$個別有零和，構造零和邊權函數$h:E(G_A)\to\{F(G_B)\cdot i:1\le|i|\le F(G_A)-1\}$，使得$G_A$有零和。接著便可利用 g 與 h 來構造G 的零和邊權函數x，其定義如下：

1. 若$e\in E(G_A\setminus G_B)$，則$x(e)=h(e)$
2. 若$e\in E(G_B\setminus G_A)$，則$x(e)=g(e)$
3. 若$e\in E(G_A\cap G_B)$，則$x(e)=h(e)+g(e)$

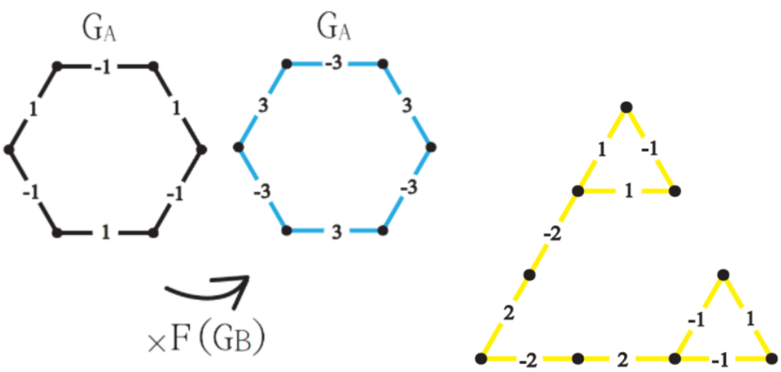
在此定義下，對於任一G 中的頂點 v，由於$N_{G_A}(v)$、$N_{G_B}(v)$中的邊權總和都是 0，因此 x 會使得$N_G(v)$中的邊權重和等於 0。

同時g與h個別的值域為 $R(h)=\{F(G_B)\cdot i:1\le|i|\le F(G_A)-1\}$, $R(g)=\{i:1\le|i|\le F(G_B)-1\}$

則R的值域 $R(x)=\{i:1\le|i|\le[F(G_A)-1]F(G_B)+F(G_B)-1\}=\{i:1\le|i|\le F(G_A)F(G_B)-1\}$

故G 有零和且$F(G)\le F(G_A)F(G_B)$，透過一樣的手法，我們可以針對$S_1,S_2,S_3,\ldots S_k$其個別的零和基數$F(S_i)$做組合，因此滿足$\bigcup_{1\le i\le k}S_i=G$且$S_1,S_2,S_3,\ldots S_k$個別都有零和時，可以推得$G$ 有零和，且$F(G)\le\prod_{1\le i\le k}F(S_i)$。

□



（上左一）G_A以 f標號

（上左二）G_A以 h 標號

（上左三）G_B以 g 標號

（下左）將G_A與G_B疊圖

（下右）重疊邊權重相加

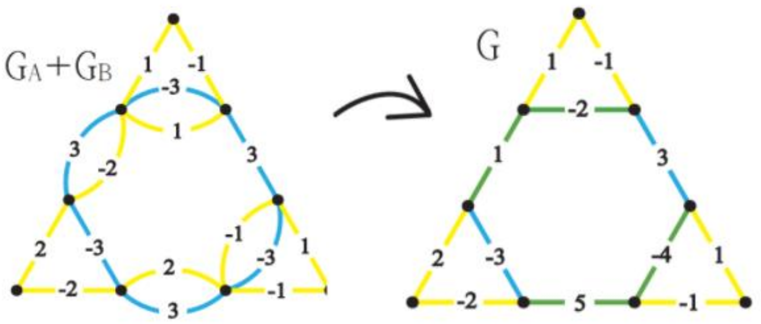


圖　4.7　　　　兩個有零和的圖覆蓋後亦有零和

引理 4.6 是我們目前看來，用以掌握零和基數上界最有利的工具，若能將一個圖拆解成一些子圖的覆蓋，便能掌握該圖的零和基數上界。下個章節我們將討論這些「子圖」可以是什麼。

三、探討零和存在的條件：以 EGES 與小樹燈圖刻劃

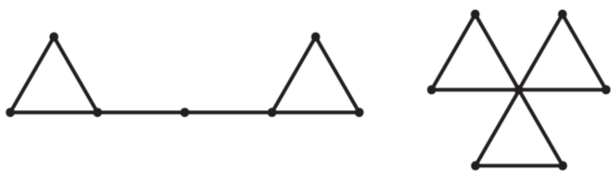
文獻[4]提出了開放問題二（猜想 3.11），作者猜測「樹燈圖與偶數邊尤拉圖的覆蓋」。而我們參考文獻[2]，文中提到，圖 *G* 存在零和若且唯若圖 *G* 滿足 *Akbari* 條件（定義 3.5），我們成功引用此圖形結構上的條件證明了猜想 3.11，並希望藉由了解零和存在條件輔助判斷尤拉圖的零和基數。

我們將本文的重點放在，以定理 5.4 為基礎，討論(2,3)圖與尤拉圖零和基數的刻畫與推廣，故僅於此章節列出定義及定理敘述，證明會放在**附錄**。

由於樹燈圖的結構太複雜，我們將其簡化成較小的圖形，如下定義：

定義　5.1　　（我們自創的定義）

我們稱圖 S 為 **小樹燈圖**　若 S 是兩個 EGOS 以一個路徑連接且任意兩個邊均不重疊。但另一方面，頂點是允許有重疊的



圖例一　　　　**圖例二**

圖　5.2　　　小樹燈圖範例

定義　5.3

我們稱圖 G 為**可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的**若且唯若對於所有邊 $e \in E(G)$，都存在一個子圖 $S \subseteq G$ 滿足：

1. $e \in E(S)$
2. S 是 EGES 或小樹燈圖

定理 5.4 （1.⇔2. 的部分即定理 3.7）

對於一個圖 G ，以下三個敘述兩兩等價

1. G 有零和 ⇔ 2. G 滿足 *Akbari* 條件 ⇔ 3. G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的

四、尤拉圖的零和基數上界

到目前為止，我們已知知道 EGES 的零和基數都是 2，且我們發現 **EGES** 子圖對於一張圖的零和基數有一定的影響，因此我們希望藉由 EGES 子圖的覆蓋的想法來得到 EGOS 的零和基數上界，如此一來會將尤拉圖的零和基數上界刻畫完畢。

引理 6.1

若圖 G 不是一個二部圖且 G 有零和，則存在一個子圖 $S \subseteq G$ 滿足 S 是一個小樹燈圖。

由於此證明非本章節重點，我們將其放於**附錄**。

引理 6.2

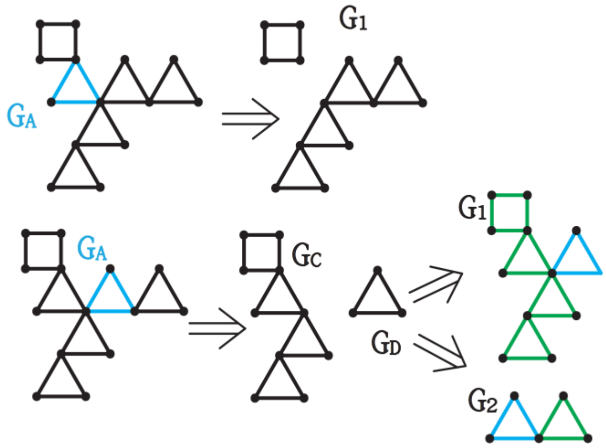
若 G 是一個有零和的 EGOS，則存在兩個子圖 $G_1, G_2 \subseteq G$ 滿足$G_1 \cup G_2 = G$且G_1, G_2都是偶圖，即G_1, G_2的所有連通區都是 EGOS 或 EGES。

證明：由性質 2.1 知 EGOS 不可能是二部圖。根據**引理 6.1**，G中必存在小樹燈圖子圖，由定義 5.1 知 G 存在兩個邊互斥的 EGOS 子圖。取G的兩個邊互斥 EGOS 子圖G_A與G_B。由性質 2.2 知 $G \backslash G_A$ 與 $G \backslash G_B$ 的每個連通區都是 EGOS 或 EGES。若 $G \backslash G_A$ 的每個連通區與 $G \backslash G_B$ 的每個連通區都是 EGES，此時令 $G_1 = G \backslash G_A$ 及 $G_2 = G \backslash G_B$ 即為所求。

現在假設$G \backslash G_A$及$G \backslash G_B$有其中一個非連通且有一個連通區為 EGOS。不失一般性，假設$G \backslash G_A$不連通。我們令 $G \backslash G_A$ 的其中一個 EGOS 連通區為 G_C，而其他連通區的聯集為 G_D，又因為$|E(G)|$、$|E(G_A)|$和$|E(G_C)|$都是奇數，所以$|E(G_D)| = |E(G)| - |E(G_A)| -$

$|E(G_C)|$是一個奇數，得$|E(G_A \cup G_C)|$和$|E(G_A \cup G_D)|$為偶數。且因為G_C與G_D的每個連通區都與G_A有頂點重疊，故 $G_A \cup G_C$ 和 $G_A \cup G_D$ 都是連通的，此時令$G_1 = G_A \cup G_C$，$G2 = G_A \cup G_D$即為所求。

□



（上） G\GA 的每個連通區都是 EGES。

令 G_1=G\GA

（下） G\GA 非連通且其中一個連通區為 EGOS。

令 G_1= GA∪GC，G_2= GA∪GD

圖 6.3　　　定理 6.2 證明示意圖

定理 6.4

若圖 G 是一個有零和的 **EGOS**，那麼 3≤F(G)≤4。

證明：由**定理** 3.13 知，若圖 G 不是 **EGES**，則 F(G)>2，故 3≦F(G)，由**引理** 6.2 知圖 G 存在兩個子圖 G_1，G_2⊆G 滿足G_1, $G_2 \subseteq$ G且 G_1，G_2 皆為 **EGES**，根據**推論**錯誤! 找不到參照來源。，F(G)≦F（G_1）·F（G_2）=4。此外圖 3.6 第二張圖零和基數便是 4，故 4 確實為 F(G)的最小上界。

□

五、探討(2,3)圖零和基數等於 3 的充分必要條件

根據定理 6.4 可以知道，尤拉圖的零和基數只有可能是 2、3 或 4（或沒有零和），其中零和基數為 2 的情況就是 EGES（**定理** 3.13 **[6]**），接著我們也希望能描述零和基數為 3、4 個別的情況，事實上只需要能刻畫其中一者即可。

我們在閱讀文獻[2]、文獻[4]之後，發現(2,3)圖在零和問題的重要性，同時其圖形結構較簡單，因此我們希望先針對(2,3)圖討論，再推廣到一般圖。在文獻[3]、文獻[4]中已經各提出了一種檢驗(2,3)圖零和基數為 3 的方法，而我們於此章節設計兩種邊上的雙色標籤，使得我們能夠很快判斷沒有橋的(2,3)圖零和基數是否小於等於 3。

定義　7.1　雙色標籤之一：AB-labeling（我們自創的工具）

若一個(2,3)圖 G 有 AB-labeling，表示圖 G 存在一種邊的標籤方式，使得每一個頂點皆滿足下列條件：

- degree=2 的頂點，其連出去的兩條邊，一條邊標 A、一條邊標 B。
- degree=3 的頂點，其連出去的三條邊，三條邊皆標 A 或三條邊皆標 B。

註：不難發現，**若圖 G 滿足 AB-labeling，則其標 A、B 的方式恰有兩種。只需要在一條邊上任意標 A 或 B，就可以很快判斷剩下的邊要標 A 或是 B**。

引理　**7.2**
若 G 是一個(2,3)圖且 $F(G) \leq 3$，則 G 有 AB-labeling

證明：若 $F(G) \leq 3$，則僅能使用±1、±2 標邊使圖滿足零和，又 G 是一個(2,3)圖，當 deg(v)=2 時，與 v 相鄰的兩邊標號只可能是 1,-1 或 2,-2；而當 deg(v)=3 時，與 v 相鄰的三邊標號只可能是 1,1,-2 或-1,-1,2。

當邊上標的是 1 或-2 時，我們標 A 於邊上，標-1 或 2 時，則標 B 於邊上。此時當 deg(v)=2 時，v 相鄰兩邊必定為 AB；而當 deg(v)=3 時，v 相鄰三邊必定為 AAA 或 BBB。故 G 符合 AB-labeling 的定義。

□

這裡要特別注意的是，並非所有滿足 AB-labeling 的(2,3)圖其零和基數都小於等於 3，如**圖 7.3** 就是一個例子，該圖有 AB-labeling，但從引理 7.4 可輕易看出其零和基數為 5，因此圖 G 有 AB-labeling 只是 $F(G) \leq 3$ 的必要條件。

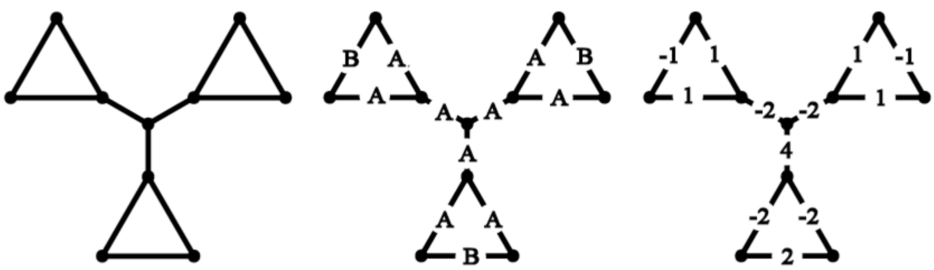


圖　7.3　　滿足 AB-labeling 但 F(G)>3 的例子

引理　**7.4**
b 是 G 的一個橋且 f 是 G 的零和邊權函數，那麼 $f(b)$ 是偶數

引理 7.4 的證明會放在**附錄**。

定義 7.5 雙色標籤之二：EO-labeling（我們自創的工具）

若一個(2,3)圖 G 有 EO-labeling，表示圖 G 存在一種邊的標籤方式，使得每一個頂點皆滿足下列條件：

- degree=2 的頂點，其連出去的兩條邊，兩條邊都標 E 或兩條邊都標 O。
- degree=3 的頂點，其連出去的三條邊，一條標邊標 E 另兩條邊標 O。

引理 7.6

若 G 是一個(2,3)圖且 F(G)≤4，則 G 有 EO-labeling。

證明：若圖 G 滿足 F(G)≤4，則僅能使用±1、±2、±3 標邊使圖滿足零和。根據零和標號的定義，每一個頂點的總和一定是 0，又 G 是一個(2,3)圖，其中 degree 為 2 的頂點，其相鄰邊權重必為相反數；而對於每個 degree 為 3 的頂點，其相鄰邊權重僅可能為三個偶數或一偶數兩奇數，另外在零和基數不超過 4 的前提下，能標在邊上的偶數只有±2，所以三個偶數的情況是不存在的。

當邊上標的是 1、-1、3、-3 時，在邊標記 O（odd 的縮寫）；當邊上標的是 2 或-2 時，在邊標記 E（even 的縮寫）。已知 G 是一個(2,3)圖且 F(G)≤4，當 deg(v)=2 時，僅可能是 1+（-1）、2+（-2）、3+（-3） 則相鄰邊可標記為 EE 或 OO；當 deg(v)=3 時，僅可能是（-2）+1+1 或 2+（-1）+（-1），則相鄰邊可標記為 EOO，故 G 為(2,3)圖且零和基數小於等於 4 時，G 有 EO-labeling。

□

定理 7.7

G 是一個(2,3)圖且 F(G)≤3 若且唯若 G 同時有 AB-labeling 和 EO-labeling

證明：

"⇒"（證明充分性） 若 G 是一個(2,3)圖且 F(G)≤3，則根據**引理 7.2**，G 有 AB-labeling。且同時 G 是一個也滿足 F(G)≤4 的圖，則根據**引理 7.6**，G 有 EO-labeling。綜合上述兩點，推得 G 同時有 AB-labeling 和 EO-labeling。

"⇐"（證明必要性） 若 G 同時有 AB-labeling 和 EO-labeling，我們同時給 G 一種

AB-labeling 以及一種 EO-labeling 的標籤方式，此時每條邊上會有四種標籤：AO、AE、BO、BE。將 AO 轉換為 1，AE 轉換為-2，BO 轉換為-1，BE 轉換為 2，那麼：

對於 degree=2 的頂點，其相鄰兩邊可能是 AO、BO 或 AE、BE

因此 degree=2 的頂點，其相鄰兩邊可轉換標號為 1、-1 或-2、2

對於 degree=3 的頂點，其相鄰三邊可能是 AO、AO、AE 或 BO、BO、BE

因此 degree=3 的頂點，其相鄰三邊可轉換標號為 1、1、-2 或-1、-1、2

故 G 的零和基數 F(G)≤3。

□

在得到定理 7.7 後，我們希望能夠更快速判斷一個(2,3)圖 G 是否滿足 F(G)≤3，而我們在觀察細分與平滑的變換之後，發現雙色標籤在 G 沒有橋時可以簡化成單色標籤。細節如下 4.4~7.13：

引理 7.8

對於任意一個(2,3)圖，都存在一種的平滑變換，使原圖變換成 3 正則圖。

證明：若 G 是一個(2,3)圖，將圖 G 中 deg(v)=2 的點都做平滑變換得新圖 G*，則圖 G*每一個頂點 degree 都會是 3，故圖 G*是一個 3 正則圖。

□

定理 7.9

已知圖 G 是一個(2,3)圖。圖 G 經平滑變換後的 3 正則圖 G*有完美匹配若且唯若原圖 G 有 EO-labeling。

證明：由**引理 7.8** 知，任何一個(2,3)圖，都存在一種平滑變換使原圖變換成 3 正則圖，因此我們可令平滑變換後的 3 正則圖為 G*。

“⇒”（證明充分性）

若 G*有完美匹配，我們將 G*上完美匹配的邊都標上 E，其餘標 O。根據完美匹配的定義，此時 G*每一個頂點（都滿足 degree=3）所連出去的邊都是 2 個 O、1 個 E。

因此 G*有 EO-labeling，此時將有 EO-labeling 的 3 正則圖進行細分，若標有 E 的邊被細分成兩個邊，則兩邊皆標上 E；若標有 O 的標被細分成兩個邊，則兩邊皆標上 O。那

麼經由有限次的細分變換便可得到一張有 EO-labeling 的(2,3)圖 G。

“⇐”（證明必要性） 將有 EO-labeling 的(2,3)圖進行平滑，由於 degree=2 的頂點兩邊標 EE 或 OO，抹除頂點後其兩連出邊合併為一邊，並標上相同的標籤（E 或 O），可得到一張有 EO-labeling 的 3 正則圖。此時所有標上 E 的邊即該 3 正則圖的完美匹配。

□

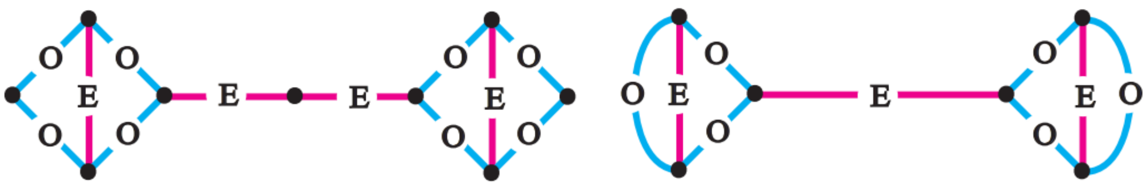


圖 7.10 EO-labeling 與完美匹配對應示意圖（對應定理 7.9）

引理 7.11
對於任意一個圖 G 來說，若圖 G 沒有橋，則平滑變換後的圖 G*亦然沒有橋。

證明：若圖 G*有橋，因為其移除後會使圖不連通，故該橋是 v_1 與 v_2 間的唯一路徑。若對圖 G*作細分，那麼 v_1 與 v_2 間的路徑仍是唯一，且路徑上的任何一條邊都會是該圖的橋。故若圖 G*有橋，經過平滑前（細分後）亦有橋。根據逆否命題得證。

□

推論 7.12
若 G 是一個沒有橋的(2,3)圖，則 G 有 EO-labeling

證明：

由**引理 7.8** 知，任何一個(2,3)圖，都存在一種平滑變換，使原圖變換成 3 正則圖。

由**引理 7.11** 知，若 G 是一個沒有橋的(2,3)圖，經過平滑變換後亦然沒有橋。

由**定理 2.5** 知，任意一個沒有橋的 3 正則圖都有完美匹配。

因此任何一個沒有橋的(2,3)圖，都存在一種平滑變換，使原圖變換成有完美匹配的 3 正則圖，故由**定理 7.9** 知，任意一個沒有橋的(2,3)圖都有 EO-labeling。

□

推論 7.13
設 G 是一個沒有橋的(2,3)圖，則 F(G)≤3 若且唯若 G 有 AB-labeling

此推論為**定理 7.7** 與**推論 7.12** 的推論，證明過程較為簡單，我們將其放於**附錄**。此外，此推論保證了沒有橋的(2,3)圖能夠快速判斷 F(G)≤3 與 F(G)>3。

六、探討一般圖零和基數等於 3 的充分必要條件

在**定理 7.7** 中，我們將(2,3)圖 F(G)≤3 的情形刻畫完畢，而接著我們希望將其結果推廣至一般圖。以下是我們的探究：

定義 8.1 廣義 AB-labeling（我們自創的定義）

若存在一種在圖 G 的每個邊上各標一個 A 或 B 的方式使得對於每個頂點，其每個頂點連出的邊中，標上 A 的數量與標上 B 的數量相差 3 的倍數（含 0），則稱 G 有廣義 AB-labeling。

定理 8.2

若一個圖 G 滿足 F(G)≤3 則 G 滿足廣義 AB-labeling

證明：若圖 G 滿足 F(G)≤3，那麼對於任意一個$v \in V(G)$，假設在$N_G(v)$中，邊上的權重為 1,-2 的有 a 個、為-1,2 的有 b 個。當邊上標 1,-2 時，我們在邊上標 A；當邊上標-1,2 時，我們在邊上標 B。那麼標上 A 的邊數為 a；標上 B 的邊數為 b。

由於 v 連出的邊權重是 0，又$\mathbf{-2 \equiv 1(mod\ 3)}$, $\mathbf{-1 \equiv 2(mod\ 3)}$，因此$a - b \equiv a + 2b \equiv \mathbf{0(mod\ 3)}$。我們可推論 F(G)≤3 的圖 G 滿足廣義 AB-labeling 定義。

□

定理 8.3

G 是一個沒有橋的圖，F(G)≤3 若且唯若 G 滿足廣義 AB-labeling

證明：

“⇒” 根據定理 8.2，若 G 滿足 F(G)≤3 則 G 滿足廣義 AB-labeling

“⇐” 假設 G 是一個沒有橋的圖且滿足廣義 AB-labeling。

我們先在 G 的邊上標廣義 AB-labeling 標號，並對 G 進行兩項變換如下：

（**第一型吹泡泡變換**）對於頂點 v，若其連出邊 A 的數量與 B 的數量一樣多，則不進行變換。此外，不失一般性假設 v 連出的邊標 A 的數量比 B 多，我們任挑其中一個標 A 的邊 e，並另外放置三個頂點 u, w, x，並使 e 改與 u 相連，同時建邊 uw, ux, vw, vx。

由於 u, w, x, v 會構成一個圈，u 到 v 間至少有兩條不重疊的路徑，故移除任何一個邊都不會產生新的橋。此外，我們可以在邊 uw 與 ux 標 B、vw 與 vx 標 A，使圖仍然滿足廣義 AB-labeling，同時 v 連出的邊中，A 的數量與 B 的數量的差會減少 3。如圖 8.4.1 所示。

我們對 G 的每個頂點都進行第一型吹泡泡變換，直到每個 degree 大於 3 的頂點連出的邊標 A 與 B 的數量都相同，令得到的圖為 G*。

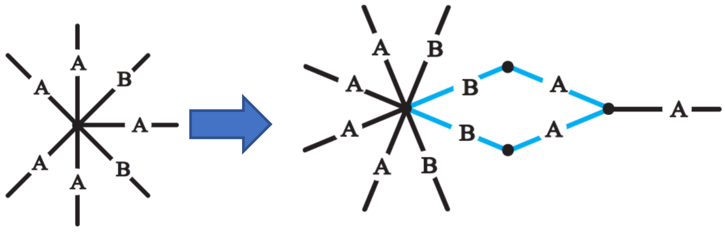
此後，再對每個頂點都進行第二型吹泡泡變換，令得到的圖為 G**。

（第二型吹泡泡變換） 對於頂點 v，令 r=deg(v)，且 $N_G(v)=\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$滿足 $e_1, e_3, \cdots, e_{r-1}$ 上標 A 且 $e_2, e_4, \cdots, e_r$ 上標 B。我們額外放置 r 個頂點 $v_1, v_2, \cdots, v_r$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 分別改與 $v_1, v_2, \cdots, v_r$相連而不與 v 相連，再將 v 從 G 中移除。另外再加入 $u_1, u_2, \cdots, u_r$，並且按照 $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_r, v_r, u_1$ 以 2r 條邊圍成一圈，且按照 A, A, B, B, A, A, ⋯, B, B 標邊。如圖 8.4.2 所示。

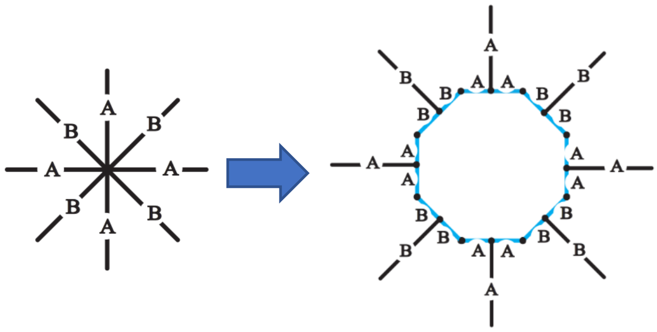
與第一型吹泡泡變換同理，經由第二型吹泡泡變換後不會產生新的橋。而 G**也滿足廣義 AB-labeling。此外，經過兩個變換後得到的 G**是(2,3)圖，換句話說，G**滿足 AB-labeling。所以根據推論 7.13，F(G**)≤3。

容易觀察到在第一型以及第二型吹泡泡變換中所新增的圈上的每個邊權重都是與相反數相鄰，故每個圈上的權重總合都是 0。也因此當 F(G**)≤3 時，對 G**進行第二型吹泡泡變換的逆向操作將得到 G*也有零和且 F(G*)≤F(G**)≤3，同理也有 F(G)≤F(G*)≤3。如圖 8.4.3、8.4.4 所示。

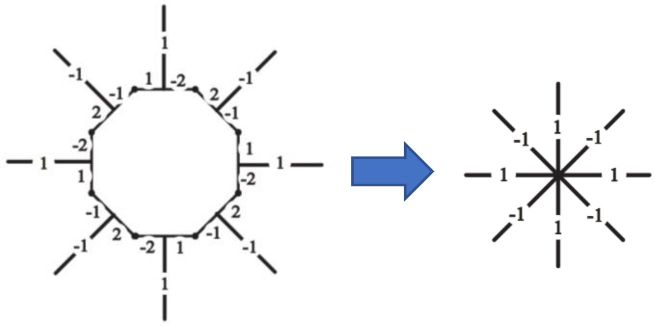
□



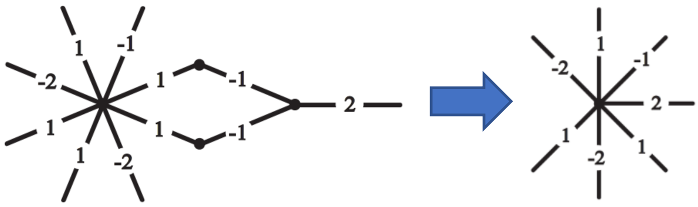
（8.4.1） **第一型吹泡泡變換（藍色為新增的邊，由 v, w, u, x 圍成一個圈）**



（8.4.2） 第二型吹泡泡變換（藍色為新增的邊，是一個圈）



（8.4.3） 對 G**進行第二型吹泡泡變換的逆向操作



（8.4.4） 再對 G*進行第一型吹泡泡變換的逆向操作

圖 8.4 第一型吹泡泡變換與第二型吹泡泡變換的操作與逆操作

性質 8.5 吹泡泡變換（從定理 8.3 證明中可以得出的結論）

對每個頂點進行第一型吹泡泡變換再對每個頂點進行第二型吹泡泡變換後，可以得到一個(2,3)圖。此外，對一個一般圖進行第一型吹泡泡變換或第二型吹泡泡變換或兩者的逆向操作，並不會影響其**零和存在性**、**橋的存在性**、**廣義 AB-labeling 的存在性**。同時，進行第一型或第二型吹泡泡變換的逆向操作時，其**零和基數不會增加**。

七、刻劃尤拉圖零和基數等於 3 與 4 的情形

在「四」當中我們已完全掌握有零和的 EGOS 的零和基數上下界。接著，我們希望藉由前兩個章節（五、六）的討論來刻劃 F(EGOS)=3 與 F(EGOS)=4 的情況。

定理 9.1

G 是一個尤拉圖，則以下列出所有可能情況：

1. $F(G)=\infty$，存在一條邊 $e\in E(G)$，使得 $G\backslash\{e\}$都是二部圖

2. $F(G)=2$，當 G 是一個 EGES

3. $F(G)=3$，當 G 是一個 EGOS 其不滿足「1.」的情況，且 G 有廣義 AB-labeling

4. $F(G)=4$，當 G 是一個 EGOS 其不滿足「1.」的情況，且 G 沒有廣義 AB-labeling

證明：因為尤拉圖不可能會有橋，否則將無法從圖中某個頂點出發，經由每條邊各恰一次再回到該頂點，與性質 2.2 牴觸。

根據定理 5.4，G 沒有零和若且唯若 G 不滿足 Akbari 條件，又 G 沒有橋，故存在一條邊 $e\in E(G)$，使得 $G\backslash\{e\}$都是二部圖。

根據定理 6.4，容易知道尤拉圖的零和基數只有 2, 3, 4 三種可能。根據定理 3.13，當 G 是一個 EGES 時，$F(G)=2$；當 G 是一個 EGOS 時，$F(G)>2$。另由於 G 沒有橋，故根據定理 8.3，$F(G)=3$ 若且唯若 G 有廣義 AB-labeling。

□

八、根據(2,3)圖、無橋圖與尤拉圖之零和基數估計一般圖零和基數

目前來看，最有機會找零和基數上界的方式便是根據引理 4.6 將一個有零和的圖拆解成已知零和基數的子圖的覆蓋，但要求覆蓋次數有限，這是最為困難的部分。我們會希望透過找到(2,3)圖、無橋圖、尤拉圖等較簡單的圖形的零和基數上界，再推廣到一般圖。其中會討論(2,3)圖主要是因為定理 3.3；會討論無橋圖是因為 Akbari 條件與橋的存在性有關聯且在定理 5.4、推論 7.13 中可看出其相較有橋圖不一樣的地方；會討論尤拉圖是因為：第一，猜想 3.11（定理 5.4）說明有零和的圖可以表示為 EGES 與小樹燈圖的覆蓋，第二，若選擇尤拉圖作為「已知零和基數的子圖」，能避免判斷尤拉圖的邊數是偶數或奇數也能省掉不少功夫，所以清楚 EGOS 零和基數可能也有幫助。

在此章節中，我們對(2,3)圖、無橋圖、尤拉圖著手對零和基數上界做一些初步的討論，我們首先從「圖形覆蓋」的角度去刻劃零和基數，如 10.1~10.7，而未完成的部分我們將於「陸、討論」與「柒、結論與未來展望」中指出未來的研究方向。

定理 10.1

若能證明所有有零和的無橋圖皆滿足零和基數不超過 M，則所有有零和的圖皆滿足零和基數不超過 5M

證明：

對於一個有零和的有橋圖 G，假設其所有橋所構成的集合為 B，而 G\B 的各個連通區分別稱作$G_1, G_2, \dots, G_n$（共 n 個）。此時對 G 進行一項變換，令得到的圖為 G*。將 $G_i\ (i = 1,2, \dots, n)$ 移除，換成頂點 $v_i\ (i = 1,2, \dots, n)$ ，對於任意一個 B 中的橋 b，其兩端點落在 G_i , G_j 若且唯若 G*中的橋 b 兩端點落在 v_i , v_j 中，此時 G*是一個樹。

我們要證明 G 可以表示為一個樹燈圖與 n 個零和基數不超過$\max\{6, \mathrm{M}\}$的子圖的覆蓋，其中 n 個零和基數不超過$\max\{6, \mathrm{M}\}$的子圖個別落在 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 之中。

假設 $G_i\ (i = k_1, k_2, \dots k_t \subseteq \{1,2, \dots, n\})$沒有零和而 $G_i\ (i \neq k_1, k_2, \dots k_t)$都有零和。根據定理 5.4，知 $G_i\ (i = k_1, k_2, \dots k_t)$ 不滿足 Akbari 條件，所以 $G_i (i = k_1, k_2, \dots k_t)$ 是無橋非二部圖但存在 $e_i \in\ E(G_i)$使得 $G_i \backslash \{e_i\}\ (i = k_1, k_2, \dots k_t)$ 為二部圖。

我們以下分成三種情況討論 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 之中零和基數不超過$\max\{6, \mathrm{M}\}$的子圖：

(1) 若 $G_i \backslash \{e_i\}\ (i \in \{k_1, k_2, \dots k_t\})$ 是沒有橋的二部圖，則因 G_i 不是二部圖，所以 e_i 會被一個 G_i 之中的奇圈所包含（根據性質 2.1），也因此 G_i 可以表示成一個奇圈與一個沒有橋的二部圖的覆蓋。令 S_i 為該沒有橋的二部圖子圖，其中根據定理 3.4， $F(S_i) \leq 6$。

(2) 反之，假設 $G_i \backslash \{e_i\}\ (i \in \{k_1, k_2, \dots k_t\})$ 是有橋的二部圖（令$e_i = uv$），在 $G_i \backslash \{e_i\}$ 之中這些橋會共同落在 u 到 v 的某一個路徑上；否則根據性質 2.4，若他們僅能落在 u 到 v 的某兩個相異路徑，則它們不會是橋。因此在 G_i 之中這些橋與 e_i 會共同落在某個圈上。另因 G_i 不是二部圖，所以該圈會是個奇圈。此時若將 $G_i \backslash \{e_i\}$ 的橋移除，會得到一個沒有橋的二部圖。因此 G_i 可以表示成一個奇圈與一個沒有橋的二部圖的覆蓋。其中沒有橋的二部圖零和基數不超過 6。令 S_i 為該沒有橋的二部圖子圖，其中根據定理 3.4， $F(S_i) \leq 6$。

(3) $G_j\ \ (j \notin \{k_1, k_2, \dots k_t\})$ 有零和，根據假設，有 $F(G_j) \leq M$。

若在 G*中， v_i 是葉子，那麼由於 G 有零和，所以根據定理 5.4，G 滿足 Akbari 條件；即 G_i 不是二部圖，那麼根據性質 2.1 可知存在一個 G_i 的 EGOS 子圖。所以根據(1)、(2)的討論，應存在一個 G 的樹燈圖子圖 T，T 的一些奇圈會包含所有 $G_i \backslash S_i$ $(i = k_1, k_2, \dots k_t)$ 的邊，且滿足對於所有 $b \in B$ 都有 $b \in E(T)$ 。至此說明了，G 可以表示為一個 T 與 S_i $(i = k_1, k_2, \dots k_t)$ 與 G_i $(i \neq k_1, k_2, \dots k_t)$ 的覆蓋。

根據引理 4.6，$F(G) \leq \max\{5\max\{6, \mathrm{M}\}, 5\} = \max\{5M, 5\} = 5M$。

□

定理 10.1 說明了討論無橋圖的意義，接著我們期望再將其簡化至只需討論無橋(2,3)圖。那我們勢必要利用一些工具去刻畫(2,3)圖與一般圖的關聯，而前面我們設計的吹泡泡變換便是其中一個。

定理　10.2
若能證明所有有零和的無橋(2,3)圖皆滿足零和基數不超過 M，則所有有零和的圖皆滿足零和基數不超過 5M

證明：

根據定理 10.1，只需要證明「若所有有零和的無橋(2,3)圖皆滿足零和基數不超過 M，則所有有零和的無橋圖皆滿足零和基數不超過 M」。

對於一個沒有橋的圖 G，我們對其每個頂點進行簡化版第二型吹泡泡變換如下：

（簡化版第二型吹泡泡變換）對於頂點 v，令 r=deg(v)，且 $N_G(v)=\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$，但不論 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 標上 A 或 B 或不存在廣義 AB-labeling（所以 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 可以是任意順序），我們額外放置 r 個頂點 $v_1, v_2, \cdots, v_r$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 分別改與 $v_1, v_2, \cdots, v_r$ 相連而不與 v 相連，再將 v 從 G 中移除。另外再加入 $u_1, u_2, \cdots, u_r$，並且按照 $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_r, v_r, u_1$ 以 2r 條邊圍成一圈。圖 10.3 為一操作示例。

與性質 8.5 類似地，簡化版第二型吹泡泡變換與逆向操作也不會影響橋的存在性與零和存在性（唯不討論廣義 AB-labeling 存在性），將一個 G 的每個頂點經過第二型吹泡泡變換，會得到有零和的無橋(2,3)圖。假設其零和基數不超過 M，則再根據性質 8.5，知 F(G)≤M。

□

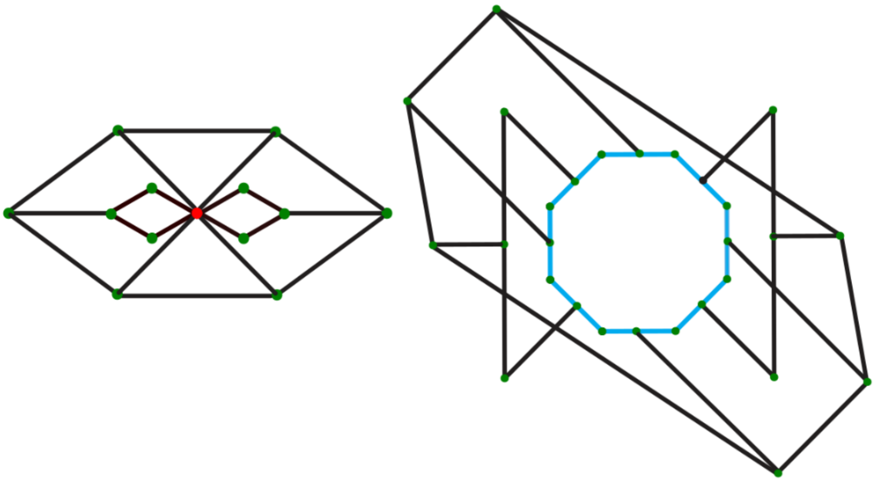
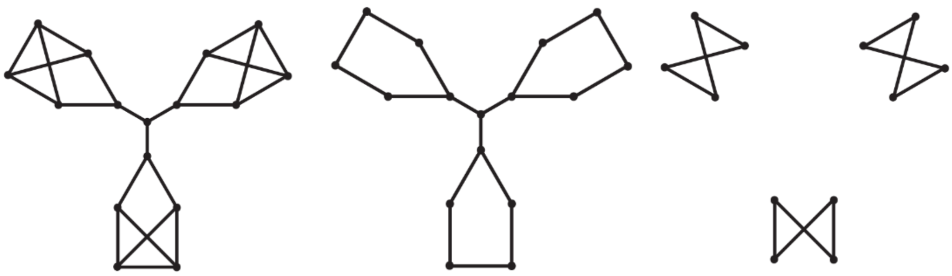


圖　10.3　　將左側的紅色頂點經過簡化版第二型吹泡泡變換得到右側藍色的圈

定理 10.2 的其中一個意義是，若能說明無橋(2,3)圖有 F(G)≤6，則所有有零和的圖都有 F(G)≤30。

接下來我們想實際猜測最好的圖形覆蓋次數，進而奠定未來的研究基礎。經過一些觀察，我們發現一個有零和且非二部圖的(2,3)圖似乎都可以拆解成「一個樹燈圖與一些沒有邊重疊的偶圈」的覆蓋，圖 10.4 舉出一個例子；在**附錄**中我們也放置了一些例子。如果這件事情可以做到，那麼根據引理 4.6，有零和的非二部圖便有個零和基數上界：10。值得一提的是，根據定理 3.4，二部圖的零和基數已經有一個上界是 6，且目前對其上界的猜想是 5；也因此，討論零和猜想時，可以只針對非二部圖探討。

觀察圖 10.4，我們能夠找到一個樹燈圖子圖覆蓋所有橋，並在沒有橋的子圖中找到偶圈，與樹燈圖的奇圈進行覆蓋。我們發現這與文獻[7]中曾提到的 cycle double cover conjecture（猜想 10.5）十分相像，想討論兩者之間的關聯。



原圖　　　　　　樹燈圖　　　　一些邊不重疊的偶圈

圖 10.4 將一個圖拆解成「樹燈圖與一些邊不重疊的偶圈」的覆蓋

猜想 10.5 (cycle double cover conjecture, CDC conjecture, Szekeres 1973, Seymour 1979)

對於每個沒有橋的圖，都存在兩組圈（迴路）覆蓋整個圖，其中同一組的圈兩兩邊不重疊（但頂點可以重疊）

這個猜想也顯示我們討論尤拉圖對於討論零和應是有幫助的，因為圈或迴路更廣義來說便是尤拉圖

引理 10.6

若 CDC 猜想對所有沒有橋的三正則圖是正確的，則 CDC 猜想對所有沒有橋的(2,3)圖也是正確的

此證明過程較為簡單，我們將其放於**附錄**。

定理 10.7

若 CDC 猜想對所有沒有橋的三正則圖都是正確的，則對於有橋且有零和的圖 G 都有 F(G)≤ 100

證明：

根據定理 3.3，我們只需要討論(2,3)圖的情形即可。

考慮有零和的圖 G 的所有橋所構成的集合 B，我們欲證明若 CDC 猜想對所有沒有橋的三正則圖都是正確，則 G 可以表示成G_A, G_B, G_C, G_D四個子圖的覆蓋，其中G_A, G_B是樹燈圖，而G_C, G_D的每個連通區都是偶圈。

假設 CDC 猜想對所有無橋三正則圖都是正確的，根據引理 10.6，其對所有無橋(2,3)圖也都是正確的。因此會存在四個相異圈族 $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ ，使得 S_1, S_2 中的圈是奇圈、S_3, S_4 中的圈是偶圈，同時滿足$S_1 \cup S_3$中任兩個圈沒有邊重疊、$S_2 \cup S_4$中任兩個圈沒有邊重疊，且$S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ 中的所有圈的覆蓋是 G\B。

我們欲構造出 G 的樹燈圖子圖G_A, G_B滿足$B \in E(G_A), B \in E(G_B)$，且$S_1$中的所有圈都落在$G_A$之中、$S_2$中的所有圈都落在$G_B$之中。我們將 G\B 的各個連通區分別稱作 $G_1, G_2, \ldots, G_n$（共 n 個）。此時對 G 進行一項變換，令得到的圖為 G*。將

$G_i\ (i = 1,2,\dots,n)$ 移除，換成頂點 $v_i\ (i = 1,2,\dots,n)$ ，對於任意一個 B 中的橋 b，其兩端點落在 G_i , G_j 若且唯若 G*中的橋 b 兩端點落在 v_i , v_j 中，此時 G*是一個樹。根據樹燈圖定義（定義 3.8），樹對應到樹燈圖時，樹葉所對應到的圈是奇圈，所以我們僅需要說明若 v_i 是葉子時， G_i 之中有奇圈即可。

根據定理 5.4，若 v_i 是葉子，則 G_i 中有奇圈。所以對於任一個葉子 v_i ，如果S_1在 G_i 中沒有（奇）圈，那麼我們可將 G_i 中的一個奇圈蒐集入一個新的圈族 S_5 之中，同時不難說明$S_1 \cup S_5$中的任意兩個圈都沒有邊重疊。同理，對於任一個葉子 v_i ，如果S_2在 G_i 中沒有（奇）圈，那麼我們將 G_i 中的一個奇圈蒐集入一個新的圈族 S_6 之中，同時 $S_2 \cup S_6$中的任意兩個圈都沒有邊重疊。

我們取一些路徑連接$S_1 \cup S_5$中的所有圈構成樹燈圖，定為G_A，同理連接$S_2 \cup S_6$中的所有圈構成樹燈圖可以得到G_B。並直接令S_3的所有圈的聯集為G_C，S_4的所有圈的聯集為G_D。因$S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ 中的所有圈的覆蓋是 G\B，$(S_1 \cup S_5) \cup (S_2 \cup S_6) \cup S_3 \cup S_4$中所有圈的覆蓋自然也是 G\B，又知道$G_A$和$G_B$都會通過所有橋，也因此圖 G 可以表示成 G_A, G_B, G_C, G_D四個子圖的覆蓋。

那麼根據引理 4.6、定理 3.10、定理 3.13，F(G)$\leq 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 100$。

□

另外，我們發現 AB-labeling 除了可以刻畫 F(G)=3 的情況，它也能夠控制零和基數上界。如下 10.8 到 10.10：

定理　10.8

設 G 是一個滿足 AB-labeling 的(2,3)圖。若 G 滿足 EO-labeling，則 F(G)≤3；否則 F(G)=5

證明：

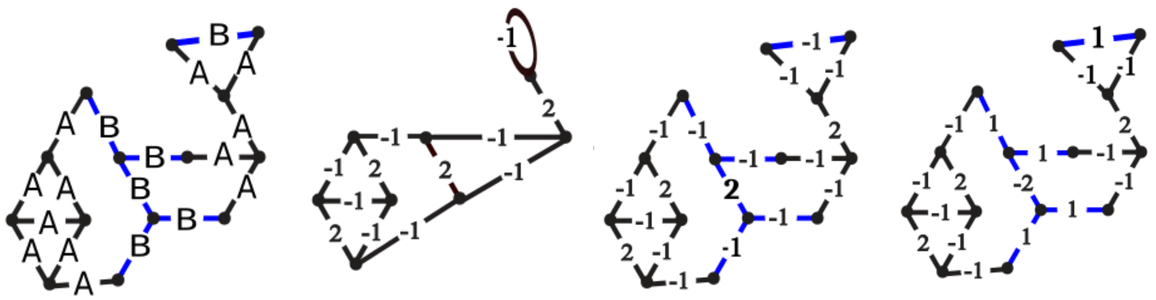
我們只須證明 G 有零和且 F(G)≤5，因為如此一來，根據引理 7.6 便可知，若 G 不滿足 EO-labeling，則 F(G)=5。

考慮對 G 進行一項變換：將所有 degree=2 的頂點拆成兩個 degree=1 頂點，且個別與原頂點相鄰的頂點連接；同時保留邊上 A 與 B 的標籤。此時會得到一些個別連通的(1,3)圖，我們訂為 $G_1, G_2, \dots, G_n$。

觀察到對於任一個G_i而言，只要其中一條邊標 A，則G_i之中所有邊都標 A，反之亦然（因為滿足 AB-labeling 的圖，degree=3 連出邊標 AAA 或 BBB）。此外對於 G 的任意一個 degree=2 的頂點，其連出的兩邊會個別在G_i, G_j之中且分別標上 A 與 B（根據 AB-labeling 定義）。

此時根據引理 7.8，可考慮將 G 平滑成一個三正則圖 G*，根據定理 3.15 知 F(G*)≤5。此時再將 G*細分回 G，其中所有 degree=3 的頂點鄰邊權重和仍是 0，而 degree=2 的頂點兩連出邊維持原邊權重（權重和不是 0）。最後將 G*中所有標有 B 的邊權重乘以(-1)，如此所有 degree=3 的頂點鄰邊權重和仍是 0，而 degree=2 的頂點兩鄰邊權重即為相反數（因為連出的邊標一個 A 一個 B），和為 0。因為此時 G 中權重的絕對值與 G*中權重的絕對值相同，故得到 F(G)≤5。

□



（原圖 G）　（三正則圖 G*）　（細分回 G）　（B 的權重乘以(-1)）

圖　10.9　將滿足 AB-labeling 的(2,3)圖 G*經過操作得到 F(G*)≤5

至此可以發現，其實定理 10.8 便是將定理 3.15 從 3 正則圖推廣到(2,3)圖的版本，同時，我們確實對於某部分(2,3)圖掌握其零和基數上界。

定理　10.10

若 G 是一個滿足廣義 AB-labeling 的圖，則 F(G)≤5。

證明：

若 G 是一個滿足廣義 AB-labeling 的圖，對其每個頂點進行第一型吹泡泡變換，再對每個頂點進行第二型吹泡泡變換，根據性質 8.5，會得到滿足 AB-labeling 的(2,3)圖 G**。另根據定理 10.8 知 F(G**)≤5。同樣根據性質 8.5，對 G**每個頂點進行第二型吹泡泡

變換的逆向操作，再對每個頂點進行第一型吹泡泡變換的逆向操作得到 G，零和基數不會增加，也因此 F(G)≤5。

□

定理 10.10 便是將定理 10.8 在一般圖上的推廣。

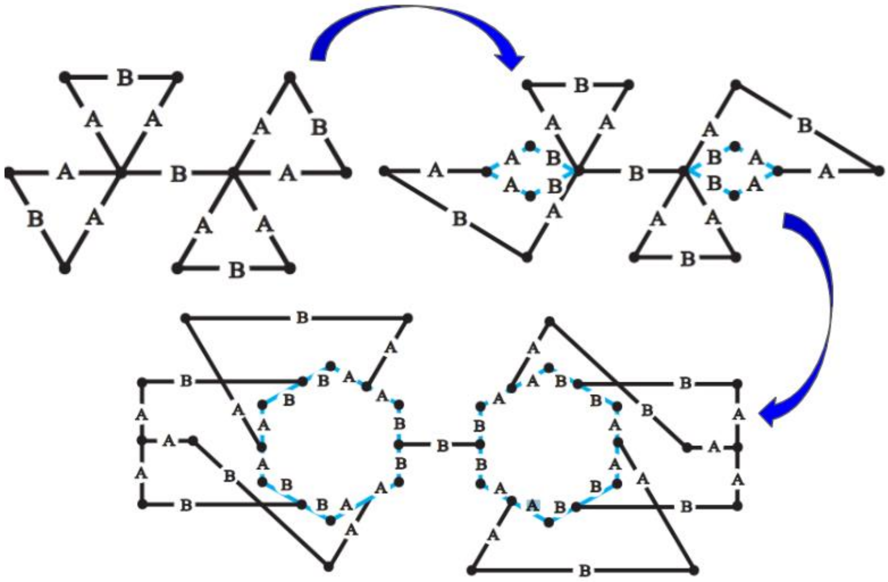


圖 10.11 將滿足廣義 AB-labeling 的圖進行吹泡泡變換（藍色為每次新增的邊）

伍、 研究結果

本研究有 3 個主要的手法：圖形覆蓋、AB-labeling、兩型吹泡泡變換。後兩者是我們自行設計的。我們以這些手法為基礎，從圖形結構，依「貳、研究目的」的順序進行討論。我們總結「肆、研究過程或方法」中得到的主要結果如下：

章節三：我們討論零和存在性並提出「覆蓋」的想法

章節四：我們使用章節三的手法，透過偶數邊尤拉圖的覆蓋證明了奇數邊尤拉圖的零和基數最小上界是 4

章節五：我們設計 AB-labeling 與 EO-labeling，將邊上權重以 A、B、E、O 替代，描述(2,3)圖零和基數是 3 的情形，如定理 7.13。對於沒有橋的(2,3)圖，透過圖論中的細分與平滑變換，證明了零和基數為 3 的等價條件是滿足 AB-labeling，如定理 8.3。

章節六：我們設計了兩個「吹泡泡變換」將章節五的結果推廣至一般圖

章節七：我們利用章節六的結果推論出奇數邊尤拉圖零和基數等於 3 等價於該圖滿足

廣義 AB-labeling。另與章節四結合得到定理 9.1，將奇數邊尤拉圖的零和基數刻劃出來。

	G 是偶數邊尤拉圖	G 是奇數邊尤拉圖
G 有廣義 AB-labeling	F(G)=2	F(G)=3
G 沒有廣義 AB-labeling	不存在	F(G)=4

章節八：我們將零和基數上界的問題分類成討論(2,3)圖、無橋圖、有橋圖、尤拉圖，以章節三提到的覆蓋的想法，並整合章節四到章節七的主要定理，給出初步的結果：

1. 若能證明所有有零和的無橋(2,3)圖皆滿足零和基數不超過 M，則所有有零和的圖皆滿足零和基數不超過 5M

2. 若 CDC 猜想對於所有三正則圖都是正確的，則對於有橋且有零和的圖 G 都有 $F(G) \leq 100$

3. 若 G 是一個滿足廣義 AB-labeling 的圖，則 $F(G) \leq 5$。

陸、討論

肆的**章節八**（第 20 頁）的一開始我們提到討論(2,3)圖、無橋圖、尤拉圖個別的意義，並於章節八中初步討論零和基數上界，也實際操作覆蓋技巧。零和猜想是個困難的問題，難以一蹴可幾，不過有機會從我們於章節八得到的一些結果出發往下探討，以下我們對於目前還沒完成的部分提出一些想法：

一、CDC 猜想與零和猜想命題的落差

CDC 猜想的命題是針對所有沒有橋的圖，而我們僅需針對有零和的圖移除橋後的連通區討論；另外，CDC 猜想的命題不要求圈的奇偶性，但圈的奇偶性對於零和基數上界大小有影響。若能釐清在 CDC 猜想成立的前提下，有零和的圖有什麼性質，或有助於壓低定理 10.7 的上界。另一方面，CDC 猜想的命題其實等價於「所有沒有橋的圖都可以表示為兩組尤拉圖的覆蓋，其中同一組中的尤拉圖兩兩互不邊重疊」，也就是我們可以嘗試將沒有橋的圖拆解成尤拉圖的覆蓋，這也顯示了我們討論尤拉圖零和基數有用之處；但由於有些尤拉圖沒有零和，因此可能不是所有圖都能做到這件事。

二、是否能將定理 10.7 的上界壓低？

我們期望找到一個好的覆蓋方式。根據定理 4.5，樹燈圖上權重±4的可以控制只標在橋上，若能控制樹燈圖之中橋的位置並避免與 EGES 覆蓋到，那麼零和基數上界可能可以控制在更低的數值。另外從引理 4.6 也可以發現，若將有零和的圖拆解成比較少的子圖覆蓋，零和基數上界可以控制在更低；若要證明零和猜想，證明「有零和的圖可以拆解成一個零和基數為 2 的圖與一個零和基數為 3 的圖」是一個可能的方向。

三、其他可能用以覆蓋的子圖

在定理 10.8 與 10.10，我們將定理 3.15 推廣到(2,3)圖與一般圖的版本，更清楚描述 F(G)=5 的圖的樣子，而此時我們所希望的，是將有零和的一般圖表示成 F(G_A)≤5 的G_A與 F(G_B)=2 的G_B的覆蓋（G_A和G_B是兩個子圖，且不一定連通），所以有機會使用滿足 AB-labeling 的(2,3)圖作為圖G_A。可以這麼說的原因是，有 AB-labeling 的(2,3)圖比 EGES 和小樹燈圖更一般（且包含兩者），也因此可能不會像 EGES 與小樹燈一樣「需要覆蓋太多次」。

柒、 結論與未來展望

本研究主要目的在於，先從還未曾有人完整討論的「尤拉圖」著手，討論其零和基數，接著嘗試將其結果或研究過程中得到的想法進而推廣至一般圖。我們在定理 9.1 中刻劃了尤拉圖的零和基數，並於「**肆、研究過程或方法**」的章節八初步討論一般圖的零和基數上界，或探討(2,3)圖、無橋圖與零和基數上界之間的關聯，實際得到結果如定理 10.2、定理 10.7、定理 10.10，其中已初步簡化「零和猜想（猜想 3.1）」所需討論的對象。整理「**肆、研究過程或方法**」與「**陸、討論**」所述，若要證明零和猜想或給出一個零和基數上界，我們未來可以首先針對以下問題討論：

一、討論無橋(2,3)圖的零和基數上界。

二、討論 CDC 猜想與零和猜想的關聯；準確來說，給出一個盡量小的 M 值，並證明若 CDC 猜想對於沒有橋的三正則圖都是正確的，那麼 F(G)≤M 對於所有有零和的圖。

三、討論 CDC 猜想對沒有橋的三正則圖是否正確；其次地，可以先證明沒有橋的三正則圖可以被拆成 3 組或更多組的圈的覆蓋。

除此之外，若能掌握零和基數上界，另一個有趣的問題是，怎麼判斷一個圖確切的零和基數？F(G)=2 的情形以刻畫完畢，F(G)=3 在沒有橋的情形也被刻畫；最後，我們希望能夠刻劃 F(G)=4 以及 F(G)=5 的情形。

捌、 參考文獻資料

[1] 張鎮華，蔡牧村 (2020)。*演算法觀點的圖論*（修訂版）。台大出版中心。

[2] S. Akbari, N. Gharaghani, G.B. Khosrovshahi, A. Mahmoody (2009). On zero-sum 6-flows of graphs. *Linear Algebra Appl.* 430, pp. 3047-3052.

[3] A. Dehghan and M.-R. Sadeghi (2015). The complexity of the zero-sum 3-flows. *Inform. Process. Lett.*, 115 (2):316 – 320.

[4] Z.-K. Eu (2016). *Zero-Sum Flow Numbers of (2,3)-Graphs* [unpublished master thesis]. Department of Applied Mathematics College of Science National Chiao Tung University

[5] P.D. Seymour, Nowhere-zero 6-flows, *J. Comb. Theory* Ser. B 30 (1981), pp. 130-135.

[6] T.-M.Wang, S.-W. Hu. (2012). *Zero-Sum Flow Numbers of Regular Graphs*. FAW-AAIM 2012. Lecture Notes in Computer Science (LNCS) 7285, pp. 269-278

[7] D. B. West (2002). *Introduction to Graph Theory*. Pearson Education (Singapore) Pte. Ltd., Indian Braneh.

玖、附錄

一、補充證明定理 5.4

在此附錄中，我們將針對定理 5.4 給出詳細證明。

針對文獻[4]中的開放問題二（猜想 3.11），我們參考文獻[2]，文中提到，圖 G 存在零和若且唯若圖 G 滿足 *Akbari* 條件（定理 3.7），我們希望藉由這個圖形結構上的條件輔助我們證明文獻[4]的開放問題二。

定理　11.1　　（[2] 同定理 3.7）
圖 G 存在零和若且唯若圖 G 滿足 *Akbari* 條件

我們將利用**定理 11.1** 來證明猜想 3.11，但問題中所提到的樹燈圖（定義 3.8）的圖形限制太少、結構可以很複雜，為此我們將樹燈圖簡化成**定義 5.1** 的小樹燈圖以協助我們間接作論證。事實上，任何樹燈圖皆可表示為若干個小樹燈圖與 EGES 的覆蓋，或者說小樹燈圖是樹燈圖的一個特例；所以只要證明所有有零和的圖都可以表示為若干個小樹燈圖與 EGES 的覆蓋，就相當於證明猜想 3.11。再根據**定理 11.1**，只需要證明「若滿足 *Akbari* 條件則可表示為若干個小樹燈圖與 EGES 的覆蓋」。**另外，「圖 G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的（定義 5.3）」與「圖 G 可拆解為若干個 EGES 與小樹燈圖的覆蓋」是等價敘述。**

引理　11.2　(S. Akbari et al. [2])　（我們給予另證）

若圖 G 存在零和，則 G 滿足 *Akbari* 條件（定義 3.5）

證明：我們利用反證法來說明這件事。假設 G 不滿足 *Akbari* 條件，即 G 滿足：「**（情況一）**G 是一個有橋的二部圖」或「**（情況二）**G 不是二部圖且存在一個橋 e 滿足 G\{e} 的其中一個連通區（名詞解釋編號 6）為二部圖」或「**（情況三）**G 不是二部圖也沒有橋，且存在一個邊 e 滿足 G\{e}是二部圖（因 G\{e}只有一個連通區）」。

(1) 對於圖 G 有橋的情況，假設 b 是圖 G 的橋，若將 b 從 G 中移除後會產生兩個連通區 G_1 及 G_2，b 的其中一端點是 G_1 的其中一個頂點，而另一端點是 G_2 中的其中一個頂點，則 $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{b\}$。

根據性質 3.1(2.)與前面假設，可知G_1及G_2都是二部圖（**符合情況一**）或其中一個是二部圖（**符合情況二**）。不失一般性假設G_1是二部圖，則有$V(G_{1A})$與$V(G_{1B})$兩個點集合滿足$V(G_{1A})\bigcap V(G_{1B})=\phi$且$V(G_{1A})\bigcup V(G_{1B})=V(G_1)$，同時$\forall uv=e\in E(G_1)$，都滿足$u\in V(G_{1A})$，$v\in V(G_{1B})$。

另外假設一個頂點$v^*\in V(G_{1B})$且$b\in N_G(v^*)$，令邊集合$E(S)=E(G_1)\backslash N_G(v^*)$。

在G有零和的條件下，假設f是G的一個零和邊權函數，

那麼有$\sum_{v\in V(G_{1B})\backslash\{v^*\}}\sum_{e\in N_G(v)} f(e)=0$且$\sum_{v\in V(G_{1A})}\sum_{e\in N_G(v)} f(e)=0$

因此

$$f(b)=0-\sum_{e\in N_G(v*)\backslash\{b\}} f(e)=0-\left[\sum_{v\in V(G1B)\backslash\{v*\}}\sum_{e\in N_G(v)} f(e)-\sum_{e\in E(S)} f(e)\right]$$

$$=\sum_{e\in E(S)} f(e)=\sum_{v\in V(G1B\backslash\{v*\})}\sum_{e\in N_G(v)} f(e)=0$$

$\rightarrow\leftarrow$

(2) 對於G沒有橋的情況，根據性質 3.1(2.)與前面假設，可知存在一條邊 e^* 滿足$G\backslash\{e^*\}$為二部圖（**符合情況三**），故有$V(G_A)$與$V(G_B)$兩個點集合滿足$V(G_A)\bigcap V(G_B)=\phi$且$V(G_A)\bigcup V(G_B)=V(G)$，同時$\forall uv=e\in E\left(G\backslash\{e^*\}\right)$，都滿足$u\in V(G_A)$，$v\in V(G_B)$或$v\in V(G_A)$，$u\in V(G_B)$。不失其一般性假設$u^*,v^*\in V(G_A)$，且$e^*\in N_G(v^*)$，$e^*\in N_G(u^*)$，由於$G$有零和，假設$f$是$G$的一個零和邊權函數，那麼有$\sum_{v\in V(G_B)}\sum_{e\in N_G(v)} f(e)=0$且$\sum_{v\in V(G_A)}\sum_{e\in N_G(v)} f(e)=0$

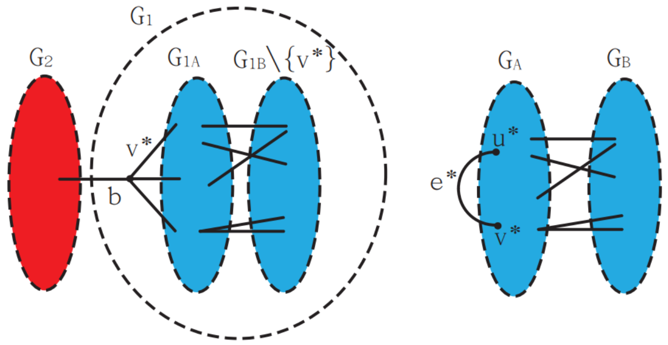
因此

$$2f(e^*)=\sum_{v\in V(G_A)}\sum_{v\in N_G(v)} f(e)-\sum_{e\in E(G\backslash\{e*\})} f(e)=-\sum_{e\in E(G\backslash\{e*\})} f(e)$$

$$=-\sum_{v\in V(G_B)}\sum_{e\in N_G(v)} f(e)=0$$

$\rightarrow\leftarrow$

$\square$



(1)G 有橋的情況　　　　(2) G 沒有橋的情況

圖　11.3　引理 11.1 反證法示意圖

> **引理　11.4**
>
> 令 G 一個沒有橋的圖，則 G 是二部圖若且唯若存在一個頂點 v ∈ V(G) 使得不存在任何 G 的 EGOS 子圖包含頂點 v

證明：

“⇒”充分條件　根據性質 2.1 成立。

“⇐”必要條件　考慮反證法。假設圖 G 不是二部圖且沒有橋。令 $S \subset G$ 為一個 G 的 EGOS 子圖使得$v \notin V(S)$，此時任選一個頂點 $u \in V(S)$。由於 G 沒有橋，故根據性質 2.4，存在兩個邊互斥的路徑 P_A 及 P_B，其兩個端點都是 u,v，此時令 p 為從 v 經由 P_A 路徑走到 u 的過程中，最早遇到的 S 上的頂點；而 q 為從 v 經由 P_B 路徑走到 u 的過程中，最早遇到的 S 上的頂點。觀察到，在 S 的一個尤拉迴路（性質 2.2）中存在一個路徑 $P_C \subseteq E(S)$ 滿足 p 及 q 為 P_C 路徑的兩端點，且因為 $|E(S)|$ 是奇數，故 $E|(P_C)|$ 與 $|E(S \backslash P_C)|$其中之一為偶數，同時有 $|E(P_D \cup P_C \cup P_E)|$ 與 $|E(P_D \cup (S \backslash P_C) \cup P_E)|$ 的其中之一為奇數，另外一個為偶數。但如此一來 $P_D \cup P_C \cup P_E$ 與 $P_D \cup (S \backslash P_C) \cup P_E$ 兩者都是從 v 經過 p, q 再回到 v 的迴路（圈），且其中之一為奇數邊迴路，這裡與假設產生了矛盾。

□

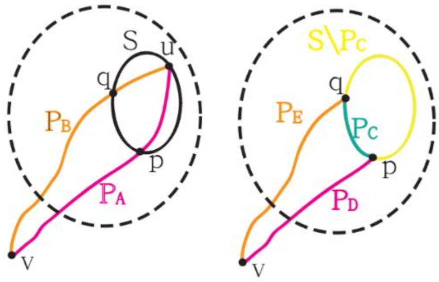


圖 11.5 引理 11.4 證明示意圖

定理 11.6

若圖 G 是滿足 *Akbari* 條件的則 G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的

證明：假設 G 滿足 *Akbari* 條件，那麼對於一個邊 e∈E(G)，我們分成以下三種狀況證明 e 必包含於某個 EGES 或小樹燈圖：

(1) 首先考慮 e 是橋的狀況。定義 e = uv 且 u∈V（S_1）, v∈V（S_2）, 其中 S_1, S_2 是為將 e 從 G 移除後產生的兩個相異聯通區。當 *Akbari* 條件成立時，所有 G 的任何橋移除後都不能有二部圖連通區，我們可知 S_1 及 S_2 都包含 EGOS 子圖（各任挑一個出來並令他們為 R_1 及 R_2）。

由於 G 是連通的，所以存在一個路徑連接 R_1 與 R_2（定義該路徑為 P，其中 P 與 R_1, R_2 沒有邊重疊）。另外因為 R_1 及 R_2 顯然是邊互斥的（$R_1 \subseteq S_1, R_2 \subseteq S_2, S_1 \cap S_2 = \varnothing$），所以（$R_1 \cup P \cup R_2$）是一個 G 的小樹燈圖子圖，而 P 必包含 e 因為 e 是橋，故 e 被小樹燈圖所通過。

(2) 考慮 e 不是橋的狀況，假設 e 沒有被 G 的任何 EGES 子圖所包含（如果有，那 G 便是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的，不特別討論）；換句話說，e 必須被某個 EGOS 子圖所通過。

此時考慮再對 G 進行一項變換。將 G 的所有橋移除，得到一個圖 G*；再將 G* 的每個連通區都以一個頂點取代，並將 G 中的橋放回去，得到 G**。

而因為 G 有橋，所以 G*中至少有兩個連通區，即 G**中至少有兩個頂點。觀察到 G**是一個樹，再觀察到兩個頂點以上的樹都有至少兩個葉子，所以對應回 G*，至少有兩個連通區只被原 G 中的一個橋連接。*Akbari* 條件成立時，對有橋

的圖 G 而言，移除任何一個橋都不能有連通區是二部圖，故 G*中的這兩個連通區都不是 G 的二部圖子圖。

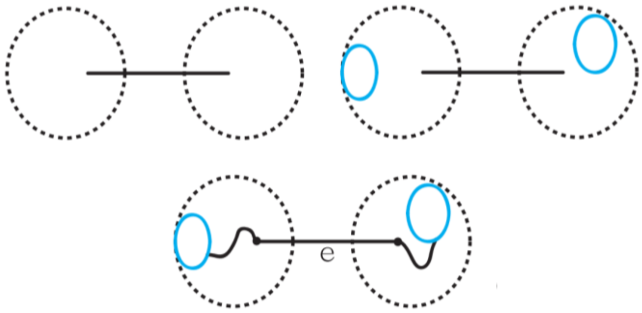
根據性質 2.1，這兩個連通區都存在一個 EGOS 子圖。也因此無論 e 落在 G*中的哪一個連通區，都一定至少有另一個連通區存在 EGOS 子圖G_A。又根據假設，e 落在 G*中某個連通區的某個 EGOS 子圖G_B上。對應回 G，將G_A與G_B間以一個路徑連接，得到一個 G 的小樹燈圖子圖，其包含 e。

(3) 若 G 是沒有橋的圖。先假設 e = uv ，其中 u 與 v 為 e 的兩端頂點。假設 e 沒有被 G 的任何 **EGES** 子圖所包含 （如果有，那 G 便是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的，不特別討論）。

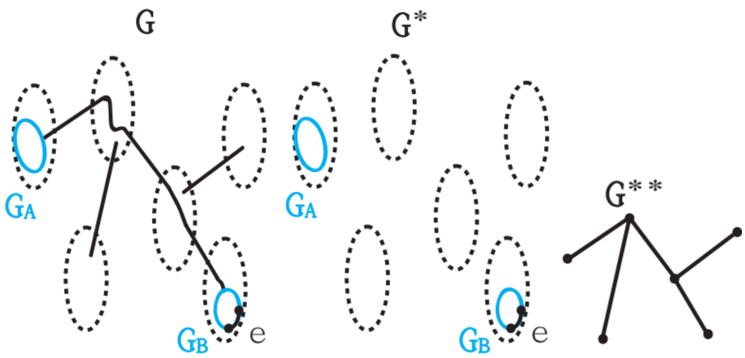
我們對 G 進行一個變換：「將 e 移除並以頂點 w 將頂點 u 與 v 取代，此時所有原本與 u 或 v 相鄰的邊會與 w 相鄰」。

根據假設（e 沒有被任何 EGES 子圖所包含）我們知道 w 不被任何 EGOS 子圖所包含，根據引理 11.4 我們知道此 G 經變換後為二部圖。現在將 G 還原，我們應有 $G\backslash\{e\}$ 為二部圖的結論，也因此 G 不符合 *Akbari* 條件，矛盾。

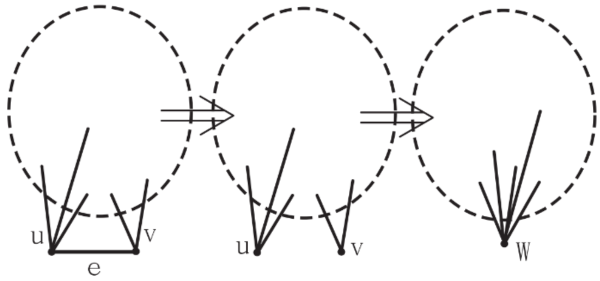
□



（上）當 e 是橋時。存在某個小樹燈圖子圖通過 e。



（中）當 e 不是橋，但 G 有橋時。若 e 不包含於 EGES 子圖，則存在小樹燈圖子圖通過 e



（下）當 G 沒有橋時。若 e 不被 EGES 子圖通過，則 w 不被任何 EGOS 子圖所通過。

圖 11.7　　定理 5.4 證明示意圖

定理　5.4

對於一個圖 G ，以下三個敘述兩兩等價

1. G 有零和　⇔　2. G 滿足 *Akbari* 條件　⇔　3. G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的

證明：

（1.⇒2.）　根據**定理 11.1** 或**定理 11.2**，若 G 有零和則 G 滿足 *Akbari* 條件。

（2.⇒3.）　根據**定理 11.6**，若 G 滿足 *Akbari* 條件則 G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的。

（3.⇒1.）　**因為小樹燈圖與 EGES 都有零和**，故根據**引理 4.6**，若圖 G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的，即 G 可以表示若干個小樹燈圖與 EGES 的聯集，則 G 有零和。

因此「G 有零和」與「G 符合 *Akbari* 條件」與「G 是可用 EGES 或小樹燈圖覆蓋的」互相等價。

□

至此，我們證明完猜想 3.11（文獻[4]開放問題二）。

二、補充證明文中未證明的引理、定理、推論（定理 5.4 以外），按文中順序編排

定理　4.5

G 是一個樹燈圖，則存在一種 G 的零和邊權函數 F(G)≤5，且所有權重為±4的邊都是橋。

證明：

樹燈圖 G 是將樹 T 的一些頂點以圈取代，葉子皆以奇圈取代的(2,3)圖。我們將 G 所對應到的樹（每個圈各以一個頂點取代）的樹根放最上面，一層一層放下來，其餘葉子在下面。已知有邊的樹一定有葉子，我們任挑一個葉子作為樹根，如圖 12.1.1 所示。

我們將樹根在 G 中對應的圈上交錯標上 1 和-1，此時與該圈相鄰的橋上權重則標上 2 或-2 以滿足零和定義。如圖 12.1.2 所示。

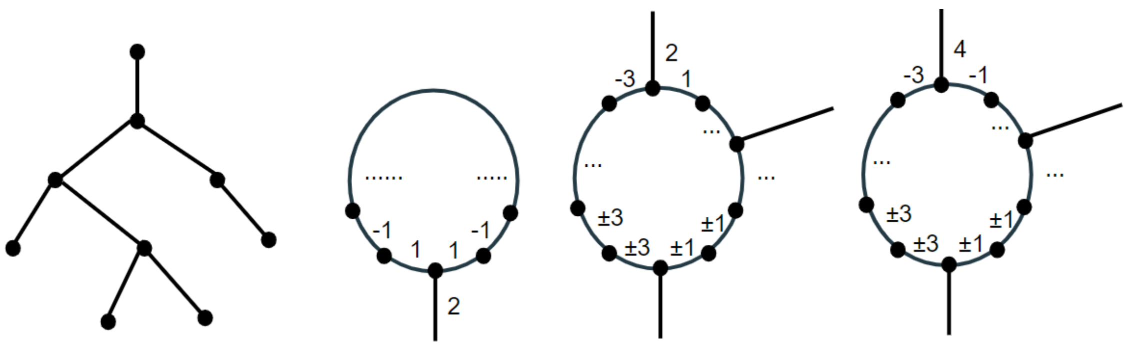
我們將從樹根一層一層標上權重直到葉子。

對於任何一個不是樹根也不是葉子的頂點在 G 中所對應的圈，假設已經有一條連出的橋標好±2 或 ±4 （上面一層所留下來的權重），那麼從該圈與該橋相接的頂點 v 出發，順時針沿著圈依序於邊標上±3的權重使滿足零和定義，直到遇到 degree=3 的頂點 u 停止。此時回到該圈與上一層的橋所相接的頂點，逆時針沿著圈依序於邊上標上±1，遇到 degree=2 的頂點就標上 1,-1，遇到 degree=3 的頂點則在橋上標上±2，而圈上的兩邊標上±1以符合零和定義，直到頂點 u 為止。此時 u 所連出的三個邊有兩者分別標上±1與±3，故我們可於另一條邊標上±2 或 ±4。如圖 12.1.3 與圖 12.1.4 所示。

最後對於任何一個非樹根的葉子所對應到的圈（奇圈）而言，若與上一層相接的橋標上±2，則在圈上依序標上±1；若與上一層相接的橋標上±4，則在圈上依序標上±2。

最後我們得到一個 F(G)≤5 的樹燈圖，且所有權重為±4的邊都是橋。

□



(12.1.1) (12.1.2) (12.1.3) (12.1.4)

圖 12.1 引理 4.5 證明示意圖

引理 6.1
若圖 G 不是一個二部圖且 G 有零和，則存在一個子圖 S⊆G 滿足 S 是一個小樹燈圖。

證明：我們使用反證法。假設 G 有零和且不是二部圖但不存在小樹燈圖子圖，換句話說，不存在兩個邊互斥的 EGOS 子圖。令 T 為所有 G 中的 EGOS 子圖所構成的交集

（根據假設，|E(T)|>0）。任選一邊 e∈E(T)，那麼所有 G 的 EGOS 子圖都要通過（包含）e，也因此 G\{e}將不存在 EGOS 子圖，根據性質 2.1 知 G\{e}為二部圖。

因此根據定義 3.5，G 不滿足 Akbari 條件。故根據**定理 5.4** 知 G 不具有零和，矛盾。

□

引理 7.4

b 是 G 的一個橋且 f 是 G 的零和邊權函數，那麼 $f(b)$ 是偶數

證明： 假設 b 的兩端點分別是 u*和 v*，而將 b 從 G 移除後會有兩個連通區，分別為 G_1 與 G_2，假設 u*落在 G_1 中而 v*落在 G_2 中。

$$f(b)=0-\sum_{e\in N_G(u^*)\setminus\{b\}} f(e)=-\left[\sum_{v\in V(G_1)\setminus\{u^*\}}\sum_{e\in N_G(v)} f(e)-2\sum_{e\in E(G_1)\setminus N_G(u^*)} f(e)\right]$$
$$=2\sum_{e\in E(G_1)\setminus N_G(u^*)} f(e)$$

□

推論 7.13

設 G 是一個沒有橋的(2,3)圖，則 F(G)≤3 若且唯若 G 有 AB-labeling

證明：

"⇒"（證明充分性）

設 G 是(2,3)圖且 F(G)≤3，根據**定理 7.7**，G 有 AB-labeling 且有 EO-labeling。

"⇐"（證明必要性）

已知 G 是一個沒有橋的(2,3)圖，根據**推論 7.12**，G 有 EO-labeling

又 G 有 AB-labeling 前提下，根據**定理 7.7** 可以推得 F(G)≤3。

□

引理 10.6

若 CDC 猜想對所有沒有橋的三正則圖是正確的，則 CDC 猜想對所有沒有橋的(2,3)圖也是正確的

證明：

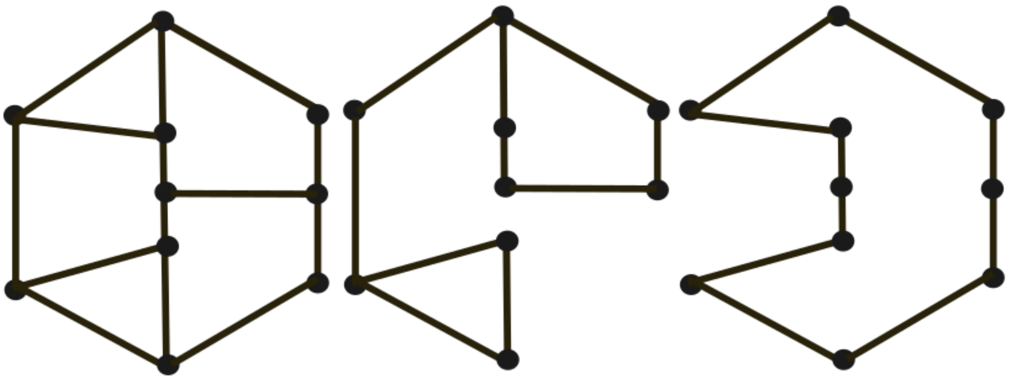
假設 CDC 猜想對於所有橋的三正則圖都是正確的。對於任意一個沒有橋的(2,3)圖 G，

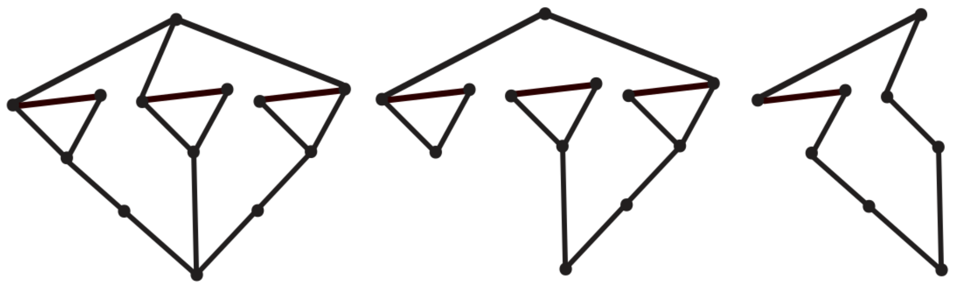
根據引理 7.8 與引理 7.11，我們可以將 G 平滑成一個三正則圖 G*且沒有橋，滿足存在兩組圈覆蓋整個圖，其中同一組的圈兩兩邊不重疊。將 G*細分回 G 時，該兩組圈中的圈會被細分成邊數比較多（或不變）的圈；若某條邊被細分成一條路徑，則原先通過該邊的圈會通過該路徑。因此所有邊仍然會被覆蓋到，且圈的數量沒有增加，自然也是兩組圈能覆蓋整張圖。

□

三、能夠表示為「一個樹燈圖與一些邊不重疊的偶數邊尤拉圖的覆蓋」的圖

於我們觀察過的有零和的圖之中，發現似乎除了二部圖以外，都能夠拆解成「一個樹燈圖與一些邊不重疊的偶圈（或一個偶圈）」的覆蓋，我們在圖 10.4 中放置了一個例子，在此另外舉出三個例子：





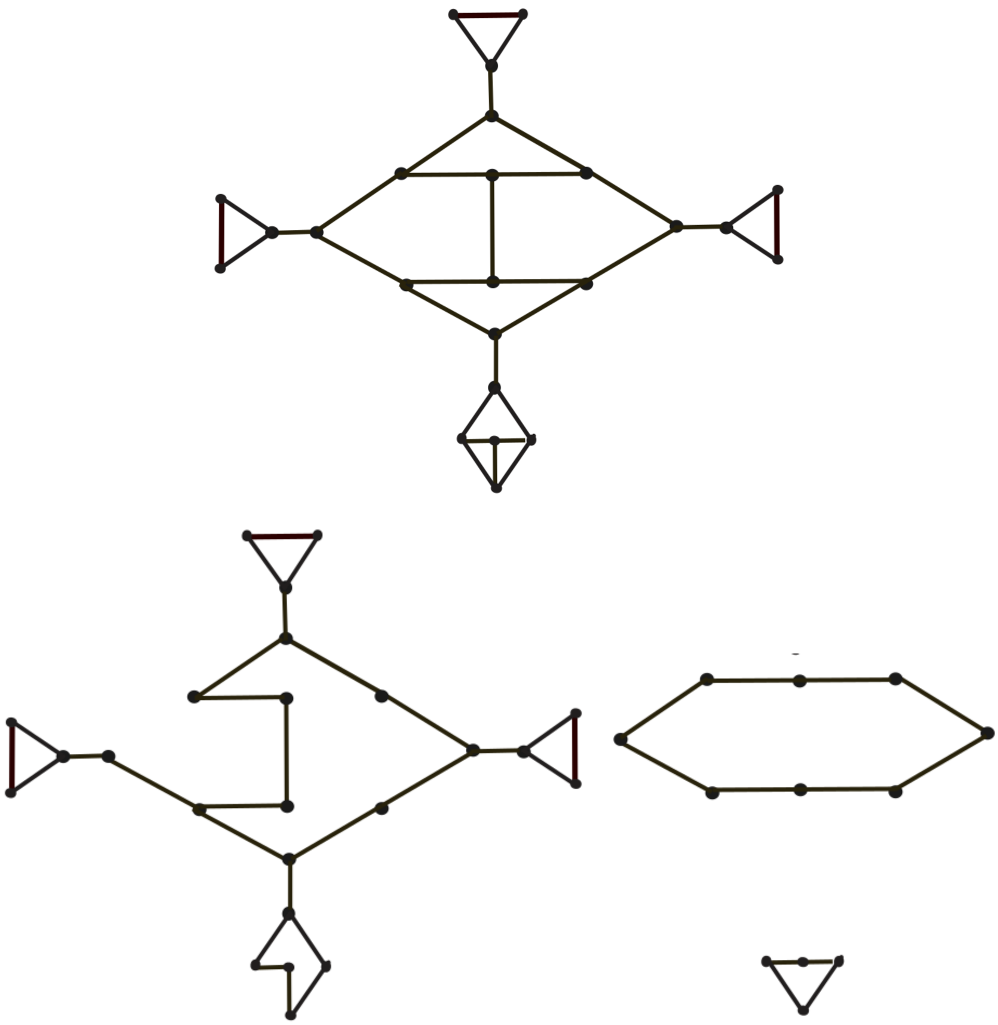


圖 13.1 有零和的(2,3)圖拆解成「樹燈圖與一些（或一個）邊不重疊的偶圈」的覆蓋 舉例