

第二十二屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA22-461

姓名：鍾佳恩

作品名稱：百「折」不屈 - 大氣折射對日照時長影響

參賽類別：地球科學

關鍵字：大氣折射、日照時長

摘要

本研究加入太陽視角、大氣偏折等考量，計算出接近實際白天時長的理論數據。首先假設地球為正球體，計算未考慮大氣的理論白天時長，並考量太陽視角導致的誤差，進一步得出蒙氣差數值；第二步考慮大氣偏折，將大氣分成數層折射率不同的大氣層，由司乃耳定律計算出日光的偏折路徑以及和地表的相切座標，並代入日照時長公式後即計算出考慮大氣的理論白天時長；最後和各國真實白天時間比較，繪製理論與實際情況比較的散佈圖，可知實際與理論日照時長僅存在些微差距。推測誤差為未考慮地球之橢球體形狀及大氣中不同層的複雜變化所造成，可作為未來改進方向。

壹、研究動機

日照總時長會因著地球自轉軸的傾斜，和太陽光線照射位置的不同而隨季節更迭。高中課程曾提到：春秋分時，太陽光線直射赤道，此時理論白天總時長為12小時。然而，光線也會因大氣密度分佈的不同而產生偏折，此時實際的春秋分白天時間還會是12小時嗎？

於是本篇研究中，我們以系統性的方法計算大氣對日出日落時間差的影響，並與實際情況做比對，希望能確認本篇研究方法的正確性。其中計算中常提到的蒙氣差即是原本直線前進的光或其它電磁波在穿越大氣層時，因為空氣密度隨著高度變化所產生的偏折。

貳、研究目的

- 一、視地球為正球體，僅考量太陽視角，計算出白天理論時長。
- 二、考量大氣氣體密度差異所導致日光偏折現象，將大氣分層，計算出更精確日照數據。
- 三、比對各國實際與理論日照時長差距，並計算蒙氣差數值，確認其精準性。

參、研究設備及器材

- 一、筆記型電腦
- 二、Google試算表

肆、研究過程與方法

一、僅考慮地球為正球體且無大氣影響，計算白天的理論時長：

(一) 考慮一顆球形地球，令地球半徑為 R ，傾斜角為 θ ，太陽光線平行射向地球，如(圖一)所示，其中黃色與紫色線段分別代表白天與黑夜在一天中所佔的比例。

(二) 以北半球為例，取任意緯度 ϕ 的薄圓片，示意圖如(圖二)所示。其中，(圖一)的黃色線段與(圖二)的黃色線段等長。

(三) 由(圖一)和(圖二)計算 α 值，即白天地球自轉軸旋轉之角度：

By (圖一)

$$\frac{\text{length of yellow}}{\text{length of purple+yellow}} = \frac{R(\cos\phi + \sin\phi \tan\theta)}{2R\cos\phi} = \frac{\cos\phi + \sin\phi \tan\theta}{2\cos\phi} \dots (1)$$

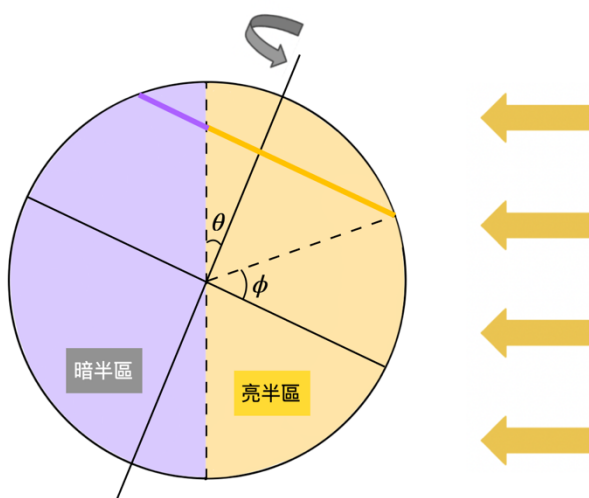
By (圖二)

$$\frac{\text{length of yellow}}{\text{length of purple+yellow}} = \frac{R(1 - \cos(\alpha/2))}{2R} = \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{2} \dots (2)$$

$$\text{By (1)(2)} \quad \frac{\cos\phi + \sin\phi \tan\theta}{2\cos\phi} = \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{2} \dots (3)$$

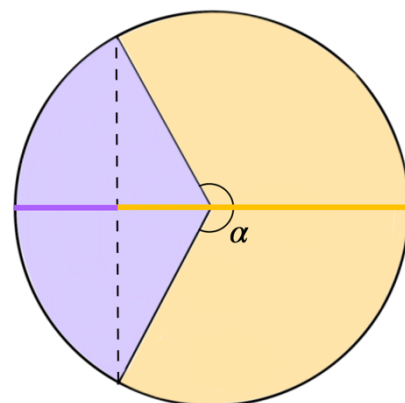
$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = -\tan\phi \tan\theta \dots (4)$$

$$\Rightarrow \alpha = 2\cos^{-1}(-\tan\phi \tan\theta) \dots (5)$$



圖一

僅觀測xy平面，光線照射球形地球之示意圖，未考慮大氣。



圖二

取一緯度為 ϕ 的薄圓片，由北極點觀看，角度 α 為地球白天的自轉角。

(四) 故理論白天總時長為：白天自轉角度(α) $\times$ 地球自轉 1° 所需時間

$$\text{白天總時長} = \alpha \times \frac{\text{各地真太陽時}}{2\pi} = \frac{\cos^{-1}(-\tan\phi\tan\theta)}{\pi} \times \text{各地真太陽時}$$

(五) 取2022年肯亞(經度：37.906193，緯度：-0.023559)春分點的真太陽時23.995小時，代入(四)之公式，可計算出白天時長為11小時59.768分鐘，而資料中的實際日照時間為12小時6.8分鐘，可以看出理論與實際數據相差7.032分鐘。

(六) 推測誤差值7.032分鐘中，部分誤差為太陽視角所造成(圖三)。由文獻資料可知，當地球在近日點時，太陽有最大視角 0.542° ；當地球在遠日點時，太陽有最小視角 0.532° 。於是推測春分點的太陽視角約為 0.537° ，即最大視角與最小視角之平均值。

(七) 將太陽視角 0.537° 的影響列入考量，經計算得知，在春分點考慮太陽視角的情況下，日照時長增加約2.1475分鐘。(肯亞2022春分時的真太陽時 $23.995\text{hr} \times 60 = 1439.7\text{min}$)

$$\frac{0.537^\circ}{360^\circ} \times 1439.7\text{min} = 2.1475\text{min}$$

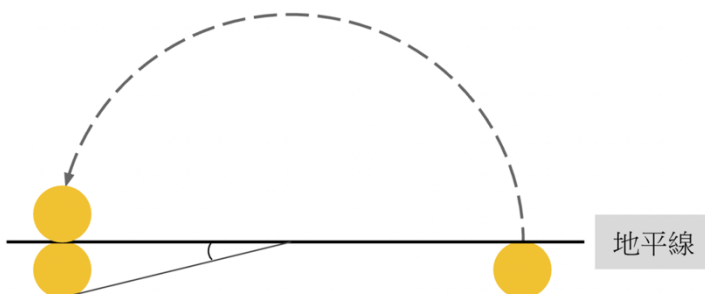
(八) 加入太陽視角後的理論白天總時長約為12小時1.9156分鐘，與實際總時長12小時6.8分鐘仍相差約4.88分鐘，推測剩餘之誤差為光線在大氣中偏折所造成的。為驗證此想法，我們將此4.88分鐘換算成地球自轉之角度，以計算理論蒙氣差數值：

$$\therefore \frac{4.88\text{min}}{1439.7\text{min}} \times 360^\circ = 1.2214^\circ$$

由計算可知，4.88分鐘約可使地球自轉 1.2214° ，又因一天中地球會受太陽日出、日落時各一次蒙氣差影響(圖四)，於是理論蒙氣差數值為：

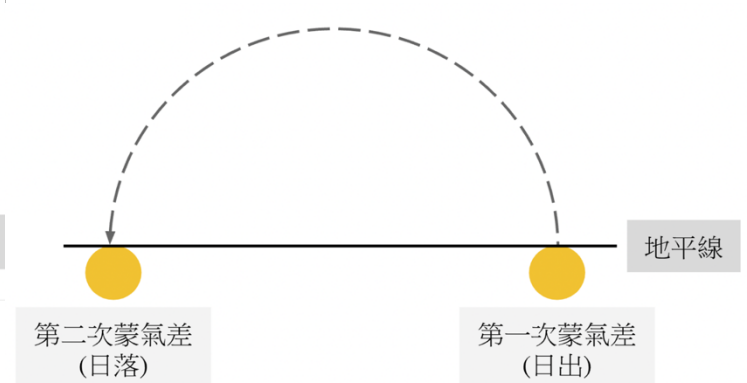
$$\frac{1.2214^\circ}{2} = 0.6107^\circ = 36.642'$$

，與文獻資料中蒙氣差理論值 $34'$ 相近，可知前述假設合理。



圖三

太陽落至地平線時，尚須考慮整個太陽沉到地平線下的時間，即太陽視角的影響。



圖四

日出及日落各會受一次蒙氣差影響，使得太陽即使在地平線下仍能將光線照射到地表。

二、考慮大氣偏折，進行白天時長之理論推導：

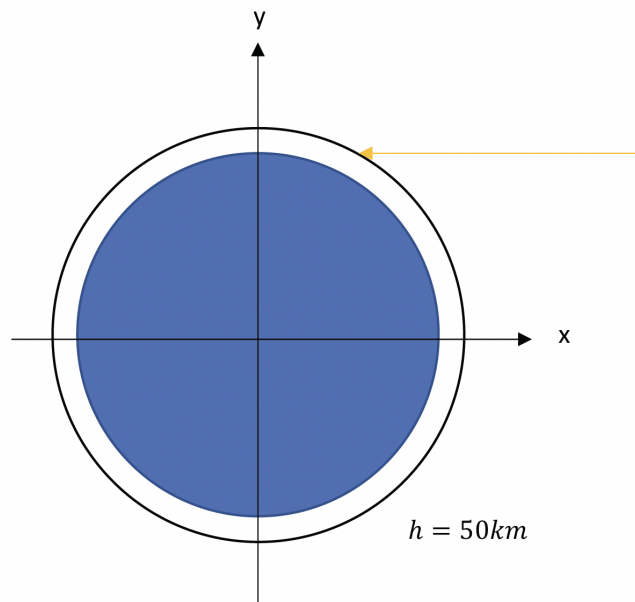
（一）參數設定：

1. 假設地球為一個完美球形，其半徑為 $R_E = 6371km$ 。
2. 由文獻可知，大氣的折射率函數 n 可以以海拔高度表示：

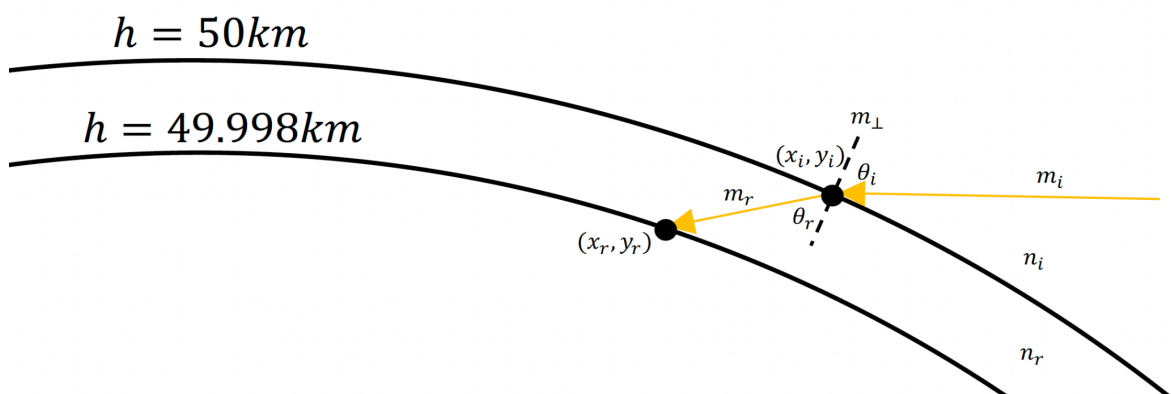
$$n(h) = 1 + 29674 \times 10^{-8} e^{-0.146h} \quad (h \leq 50km)$$
3. 令大氣為球形環繞在地球上，大氣邊界海拔高度 $H_{max} = 50km$ 。
4. 將大氣切成無數海拔為 $0.002km$ 的薄球殼，用以計算折射後光的偏折路徑。

（二）光線折射路徑計算：

1. 考慮一顆球心置於 $(0,0,0)$ 的理想地球，僅觀測 xy 平面，討論無數太陽光的其中一條沿 $(-1,0,0)$ 的方向向地球最外圍的大氣 ($h = 50km$) 射向大氣層，示意圖如下：



2. 由於在大氣層外即為真空狀態，折射率皆為1，故直到碰觸到大氣層才開始發生折射。若聚焦於光線經過的區域，可得到以下圖形。 (x_i, y_i) 為光線和最外層大氣 ($h = 50km$) 的交點，令入射光的斜率為 m_i 、折射角為 θ_r 、折射介質折射率為 n_r 、折射光的斜率為 m_r 、折射光與下一層薄球殼 ($h = 49.998km$) 的交點為 (x_r, y_r) 。



3. 當光線剛進入大氣時， $m_i = 0$ ，交點為 (x_i, y_i) ，且滿足 $x_i^2 + y_i^2 = (R_E + 50)^2$ ，

其法線斜率 $m_{\perp}$ 可表示為： $m_{\perp} = \frac{y_i}{x_i}$

故入射角 θ_i 可表示為： $\theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{m_{\perp} - m_i}{1 + m_{\perp} m_i}\right)$

又此時 $n_i = 1$ ， $n_r = 1 + 29674 \times 10^{-8} e^{-0.146 \times 50}$

於是折射角 θ_r 由司乃耳定律可以表示為： $\theta_r = \sin^{-1}\left(\frac{n_i \sin \theta_i}{n_r}\right)$

4. 由 3. 可得到折射線的斜率 m_r 為： $m_r = \frac{m_{\perp} - \tan \theta_r}{1 + m_{\perp} \tan \theta_r}$

進一步可得到折射線的方程式： $y - y_i = m_r(x - x_i)$

5. 藉由上述的折射線方程式，可和下一層薄球殼($h = 49.998 \text{ km}$)的圓方程式解聯立，求得光線與下層大氣交點 (x_r, y_r) 。

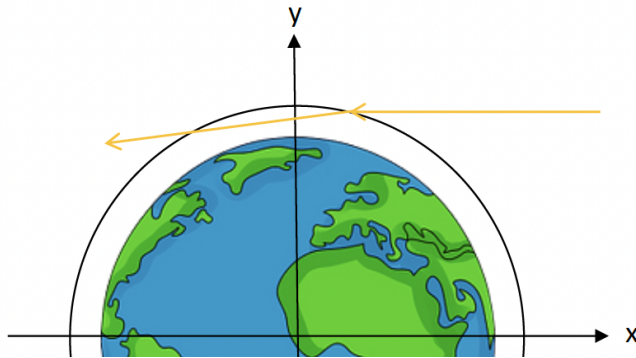
6. 由 4. 5. 求得的 (x_r, y_r) 和 m_r ，可重返第 2.，將原本的 (x_i, y_i) 替換為 (x_r, y_r) 、 m_i 替換成 m_r ，便可重複進行光線在各層大氣中的交點之計算。以此模式反覆求得 (x_r, y_r) 和 m_r ，直到 (x_r, y_r) 滿足：

$x_r^2 + y_r^2 = R_E^2$ ，並記錄下最後的 (x_r, y_r) 和 m_r 。

7. 仔細討論第 6. 後會發現，隨著光進入大氣層的初始 y_i 值的不同，會有以下三種情形：

a. y_i 值過高：

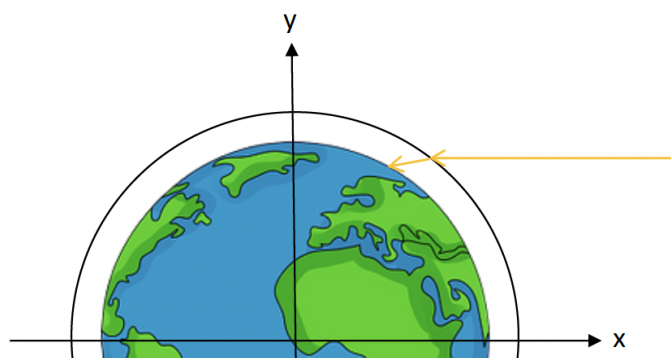
如(圖五)所示，此情況下，光線偏折後僅從地表上空略過，沒有碰觸到地表，故無法得到日照臨界位置。



圖五 光線入射時的 y 值過高，光線無法接觸到地表。

b. y_i 值過低：

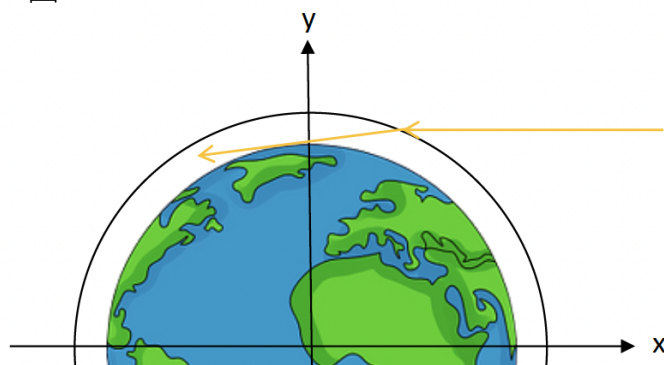
如(圖六)所示，此情況下，光線會偏折射入地表，地表能接受到太陽光即為白天。但因光線未能與地表相切，故仍無法求得日照臨界位置。



圖六 光線入射時的 y 值過低，未能與地表相切。

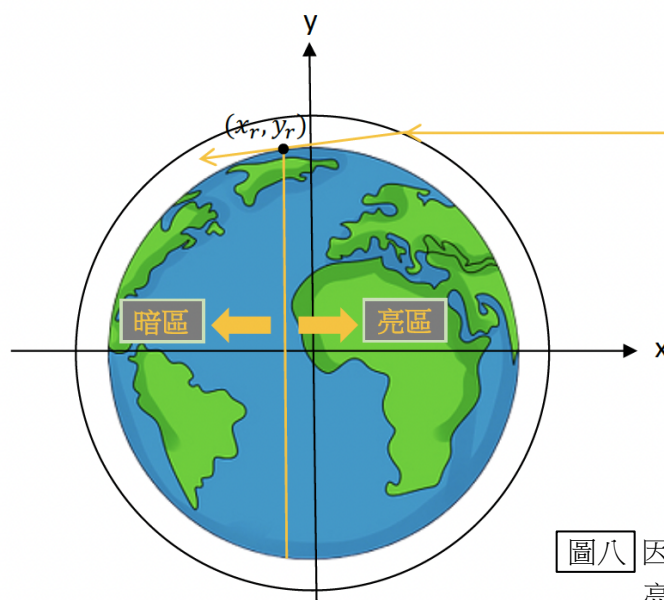
c. y_i 值恰好：

如(圖七)所示，此情況下，光線偏折後會恰好與地表相切，過切點的鉛直線即為亮區與暗區的分界。若找到恰好的 y_i 值，即可得到考慮大氣後的亮區範圍。



圖七 光線入射時的 y 值恰好可使光線與地表相切。

8. 由於(一)參數設定中提到，此計算中所假設的地球為完美球形。因此不論地球沿任意軸向的自轉軸旋轉，亮暗區的分界恆為 $x = x_r$ ，如(圖八)所示。



圖八 因假設地球為完美球形，故亮暗區分界恆為 $x = x_r$ 。

(三) 實際計算

上述 (二) 的計算雖複雜卻有規律性。由於大氣折射率的值非常小，計算上需要較高的精確度，於是我們利用 Google 試算表來計算光線的路徑。但使用試算表計算的缺點為需手動調整光線與最外層大氣的交點y座標(y_i)，且需計算到約25000行才能求出光線與地表的切點座標。

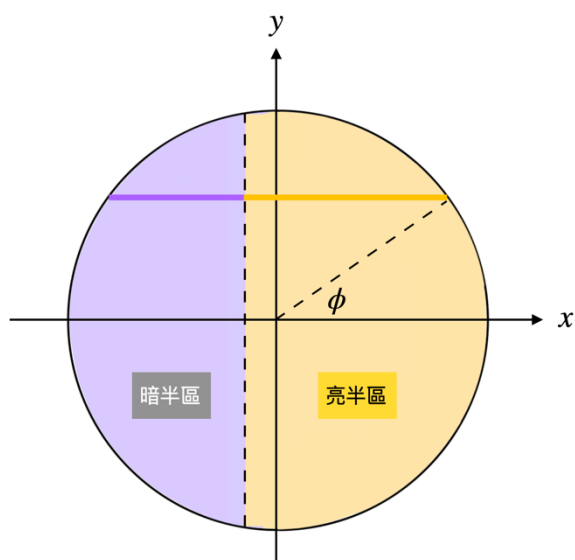
下圖為 google 試算表計算狀況，邏輯與 (二) 相同：

		畫光線：		高度h (km 法線m)		入射光m	入射角 θ (弧度)	折射率n	折射角 θ (弧度)	折射光m	一元二次方程式		
		x	y								a	b	c
地球半徑	6371	784.547207	6372.88997859000	50.000	8.1230166	0	1.448305666	1.0000000200	1.448304038	1.63E-06	1	2.08E-02	-615504.91948319
height_max	50	784.530839	6372.88997856335	49.998	8.1231861	1.63E-06	1.448306568	1.0000000201	1.448306567	1.63E-06	1	2.08E-02	-615479.24025040
x0	784.547207	784.514470	6372.88997853668	49.996	8.1233556	1.63E-06	1.448309097	1.0000000201	1.448309097	1.63E-06	1	2.08E-02	-615453.56102697
y0	6372.889979	784.498101	6372.88997851001	49.994	8.1235251	1.63E-06	1.448311627	1.0000000201	1.448311627	1.63E-06	1	2.08E-02	-615427.88181295
m_light_i	0	784.481731	6372.88997848334	49.992	8.1236946	1.63E-06	1.448314157	1.0000000201	1.448314157	1.63E-06	1	2.08E-02	-615402.20260832
n(h)	$1+2967.4 \times 10^{-8} \times \text{EXP}(-0.146 \times h)$	784.465361	6372.88997845665	49.990	8.1238641	1.63E-06	1.448316687	1.0000000201	1.448316686	1.63E-06	1	2.08E-02	-615376.52341308
n_initial	1	784.448991	6372.88997842996	49.988	8.1240336	1.63E-06	1.448319217	1.0000000201	1.448319216	1.63E-06	1	2.08E-02	-615350.84422723
delta_h	0.002	784.432620	6372.88997840325	49.986	8.1242032	1.63E-06	1.448321747	1.0000000201	1.448321746	1.63E-06	1	2.08E-02	-615325.16505077
		784.416249	6372.88997837654	49.984	8.1243727	1.63E-06	1.448324277	1.0000000201	1.448324276	1.63E-06	1	2.08E-02	-615299.48588370
		784.399878	6372.88997834982	49.982	8.1245423	1.63E-06	1.448326807	1.0000000201	1.448326806	1.63E-06	1	2.08E-02	-615273.80672603
		784.383506	6372.88997832309	49.980	8.1247119	1.63E-06	1.448329337	1.0000000201	1.448329337	1.63E-06	1	2.08E-02	-615248.12757774
		784.367134	6372.88997829635	49.978	8.1248815	1.63E-06	1.448331867	1.0000000201	1.448331867	1.63E-06	1	2.08E-02	-615222.44843885
		784.350762	6372.88997826961	49.976	8.1250510	1.63E-06	1.448334398	1.0000000201	1.448334397	1.63E-06	1	2.08E-02	-615196.76930934
		784.334389	6372.88997824285	49.974	8.1252207	1.63E-06	1.448336928	1.0000000201	1.448336927	1.63E-06	1	2.08E-02	-615171.09018924
		784.318016	6372.88997821609	49.972	8.1253903	1.63E-06	1.448339458	1.0000000201	1.448339458	1.63E-06	1	2.08E-02	-615145.41107852
		784.301643	6372.88997818932	49.970	8.1255599	1.63E-06	1.448341989	1.0000000201	1.448341988	1.64E-06	1	2.08E-02	-615119.73197720
		784.285269	6372.88997816254	49.968	8.1257295	1.64E-06	1.448344519	1.0000000201	1.448344519	1.64E-06	1	2.09E-02	-615094.05288528
		784.268895	6372.88997813576	49.966	8.1258992	1.64E-06	1.448347050	1.0000000201	1.448347049	1.64E-06	1	2.09E-02	-615068.37380276
		784.252521	6372.88997810896	49.964	8.1260688	1.64E-06	1.44834958	1.0000000202	1.44834958	1.64E-06	1	2.09E-02	-615042.69472960
		784.236146	6372.88997808216	49.962	8.1262385	1.64E-06	1.448352111	1.0000000202	1.448352111	1.64E-06	1	2.09E-02	-615017.01566587
		784.219771	6372.88997805534	49.960	8.1264082	1.64E-06	1.448354641	1.0000000202	1.448354641	1.64E-06	1	2.09E-02	-614991.33661152
		784.203396	6372.88997802852	49.958	8.1265779	1.64E-06	1.448357172	1.0000000202	1.448357172	1.64E-06	1	2.09E-02	-614965.65756658

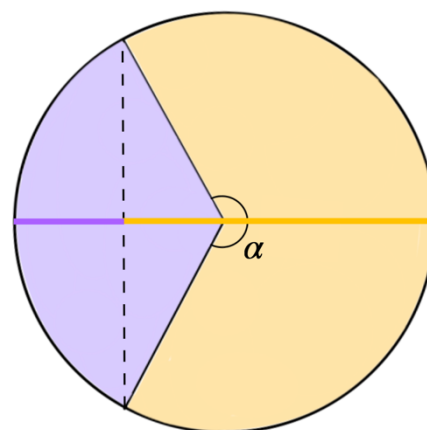
由 Google 試算表可計算出亮暗區分界為 $x = -80.97514499\text{km}$ 。

(四) 將前述計算之亮暗區分界加入考量，推算理論日照時長公式：

以春分為例，示意圖如下：



圖九 考慮大氣後，春分時的亮區較理論值大。



圖十 取一緯度為 ϕ 的薄圓片，由北極點觀看，角度 α 為地球白天的自轉角。

與肆、一的討論方式類似，將亮暗區分界代入：

$$\frac{\text{length of yellow}}{\text{length of purple + yellow}} = \frac{6371\cos\phi + 80.975145}{2 \times 6371\cos\phi} = \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha/2) = -\frac{0.012710}{\cos\phi} \Rightarrow \alpha = 2\cos^{-1}\left(-\frac{0.012710}{\cos\phi}\right)$$

故考慮大氣層後的理論日照總時長 (粗略考慮太陽視角) 為：

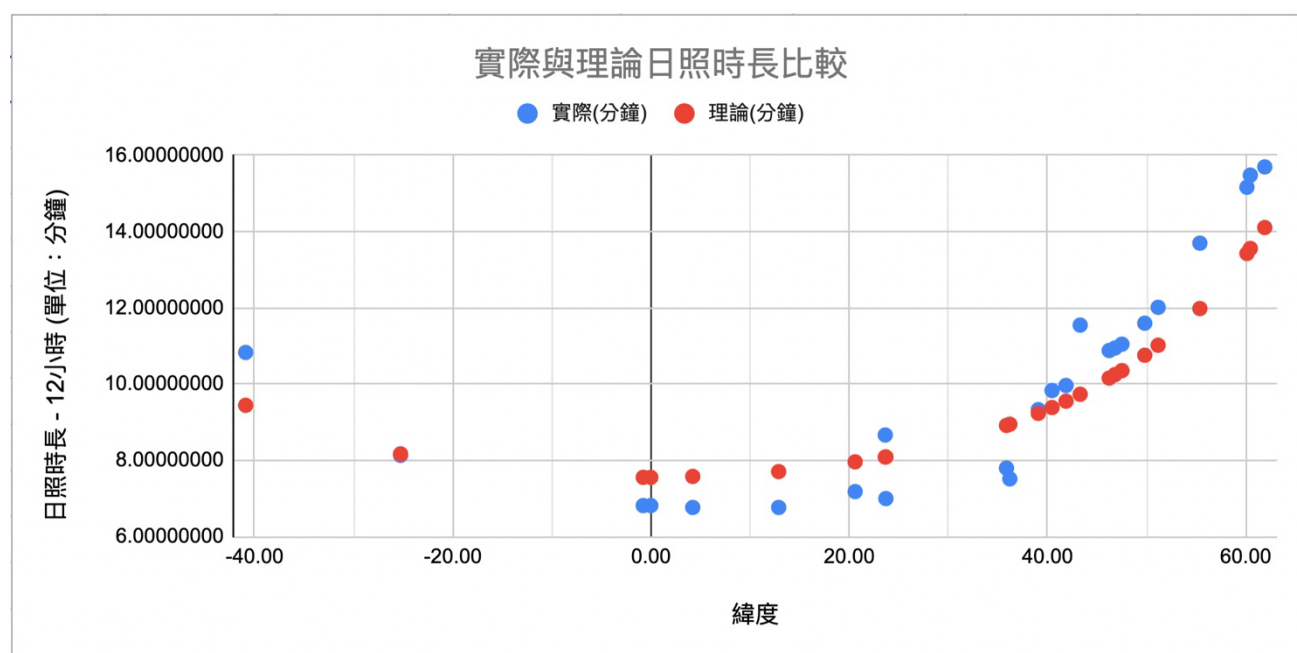
$$\frac{\alpha}{2\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475\text{min} = \frac{\cos^{-1}\left(-\frac{0.012710}{\cos\phi}\right)}{\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475\text{min}$$

伍、研究結果

為確認理論的正確性，我們將理論白天時長與24個國家在2022年春分(3/20)的實際白天時長做比較。結果如以下表格所示，理論與實際之日照時長約相差2分鐘以內：

國家	緯度	日出時間	日落時間	實際日照時長(hr)	實際(min)	理論日照時長(hr)	理論(min)	相差時間(min)	太陽時(hr)
紐西蘭	-40.90	上午 7:22:39	下午 7:33:29	12.18055556	10.83333333	12.15744201	9.44652032	1.38681301	23.99527778
澳洲	-25.27	上午 6:38:22	下午 6:46:30	12.13555556	8.13333333	12.13621576	8.17294544	-0.03961210	23.99500000
印尼	-0.79	上午 5:28:24	下午 5:35:13	12.11361111	6.81666667	12.12594636	7.55678189	-0.74011523	23.99500000
肯亞	-0.02	上午 6:32:21	下午 6:39:10	12.11361111	6.81666667	12.12593716	7.55622959	-0.73956292	23.99500000
馬來西亞	4.21	上午 7:16:12	下午 7:22:58	12.11277778	6.76666667	12.12633993	7.58039585	-0.81372918	23.99527778
菲律賓	12.88	上午 5:57:02	下午 6:03:48	12.11277778	6.76666667	12.12844311	7.70658636	-0.93991969	23.99500000
印度	20.59	上午 6:18:00	下午 6:25:11	12.11972222	7.18333333	12.13270537	7.96232214	-0.77898881	23.99527778
墨西哥	23.63	上午 6:53:02	下午 7:01:42	12.14444444	8.66666667	12.13482709	8.08962512	0.57704155	23.99500000
台灣	23.70	上午 6:00:10	下午 6:07:10	12.11666667	7.00000000	12.13487842	8.09270538	-1.09270538	23.99500000
中國	35.86	上午 7:06:49	下午 7:14:37	12.13000000	7.80000000	12.14864885	8.91893123	-1.11893123	23.99500000
日本	36.20	上午 5:50:46	下午 5:58:17	12.12527778	7.51666667	12.14917199	8.95031956	-1.43365289	23.99500000
希臘	39.07	上午 6:35:23	下午 6:44:43	12.15555556	9.33333333	12.15391211	9.23472661	0.09860672	23.99500000
西班牙	40.46	上午 7:17:24	下午 7:27:14	12.16388889	9.83333333	12.15646234	9.38774027	0.44559306	23.99500000
義大利	41.87	上午 6:12:05	下午 6:22:03	12.16611111	9.96666667	12.15923536	9.55412164	0.41254503	23.99500000
美國	43.30	上午 6:58:18	下午 7:09:51	12.19250000	11.55000000	12.16225609	9.73536535	1.81463465	23.99500000
法國	46.23	上午 6:53:02	下午 7:03:55	12.18138889	10.88333333	12.16933681	10.16020860	0.72312473	23.99527778
瑞士	46.82	上午 6:28:57	下午 6:39:54	12.18250000	10.95000000	12.17087096	10.25225740	0.69774260	23.99527778
奧地利	47.52	上午 6:03:37	下午 6:14:40	12.18416667	11.05000000	12.17260756	10.35645365	0.69354635	23.99500000
捷克共和國	49.82	上午 5:59:39	下午 6:11:15	12.19333333	11.60000000	12.17932756	10.75965350	0.84034650	23.99500000
德國	51.17	上午 6:19:31	下午 6:31:32	12.20027778	12.01666667	12.18368465	11.02107917	0.99558749	23.99500000
英國	55.38	上午 6:14:12	下午 6:27:54	12.22833333	13.70000000	12.19974201	11.98452046	1.71547954	23.99500000
瑞典	60.13	上午 5:45:11	下午 6:00:21	12.25277778	15.16666667	12.22379873	13.42792356	1.73874311	23.99500000
挪威	60.47	上午 6:25:43	下午 6:41:12	12.25805556	15.48333333	12.22600246	13.56014750	1.92318584	23.99527778
芬蘭	61.92	上午 6:16:31	下午 6:32:13	12.26166667	15.70000000	12.23515988	14.10959288	1.59040712	23.99500000

下圖為實際與理論日照時長的散佈圖。由數據分佈可知，兩者僅存在些微差異，且趨勢皆是緯度愈高，日照時長愈長：



陸、討論

一、影響日照時長的條件，除已納入計算的太陽視角與大氣折射外，還可能包含：

1. 地球實際形狀

由於地球實際形狀為橢球體而非正球體，可能因此造成白天時間的誤差。

2. 大氣變化複雜

實際上大氣中的壓力、溫度、水氣分布複雜，故大氣折射率函數之假設可能失準。由

「大氣折射率之氣候特性研究」此篇文獻得知大氣折射率經驗式為：

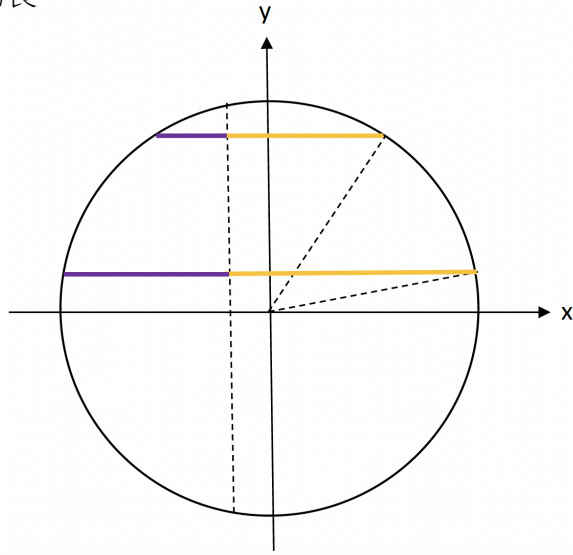
$$n = 1 + N = 1 + 77.6 \times \frac{P}{T} + 3.73 \times 10^5 \times \frac{e}{T^2} \quad (P: \text{大氣壓力 hPa}, T: \text{空氣溫度 K}, e: \text{水氣壓力 hPa})$$

故水氣壓力增加、大氣壓力增加及空氣溫度降低皆會使大氣折射率增加，使得日照時長變短。且真實地球大氣還有區分對流層、平流層、中氣層、增溫層，而考量大氣層中99%的空氣存在於對流層與平流層中，故大氣層厚度則僅考慮至50公里 (平流層頂端)。

二、由實際與理論日照時長比較的圖表可知：

愈往高緯度，日照時長愈長。

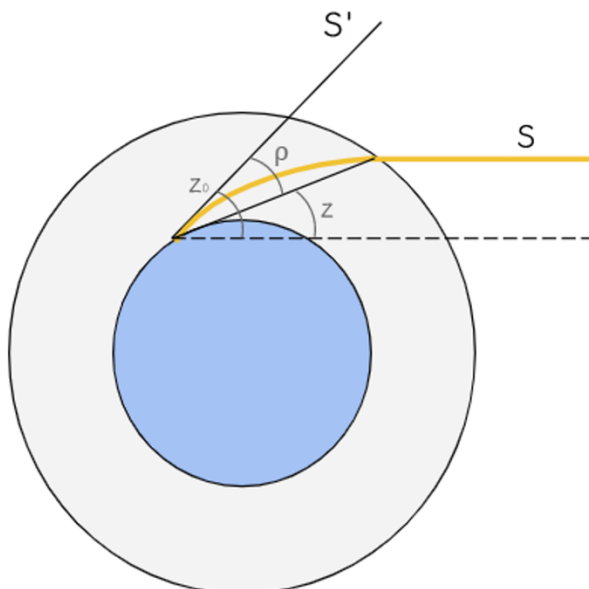
由下圖可知，高緯度地區的 $\frac{\text{length of yellow}}{\text{length of purple+yellow}}$ 較低緯度地區大，故高緯度地區的日照時長較低緯度地區的長。



三、藉由考量大氣分層的日照情形，得出日光平行進入大氣層，到最後與地表相切，受影響的蒙氣差數值為下圖中的 $\angle z_0$ 。利用理論數據，得出蒙氣差理論值約為 $0.728^\circ = 43.700'$ ，與來源資料中蒙氣差數據 $34'$ 相差了約 $9.7'$ 。推論此誤差為大氣實際厚度比計算時假設之厚度薄所導致，以下為粗略之驗證：

對流層平均厚度 = 12km，兩極對流層平均厚度 = 9km

$$\frac{12-9}{12} \times 43.700' = 10.925', \text{ 與誤差值 } 9.7' \text{ 相近。}$$



四、考量蒙氣差之誤差，我們使用與前述相似的驗證方法，進行理論數據之修正：

地球兩極平均對流層高度為8km，赤道平均對流層高度為17km，可藉由分點公式求出各緯度的平均對流層高度。以紐西蘭(緯度：40.90°S)為例，其平均對流層高度為：

$$8 \times \frac{40.90-0}{90} + 17 \times \frac{90-40.90}{90} = 12.9099443\text{km} \approx 12.91\text{km}$$

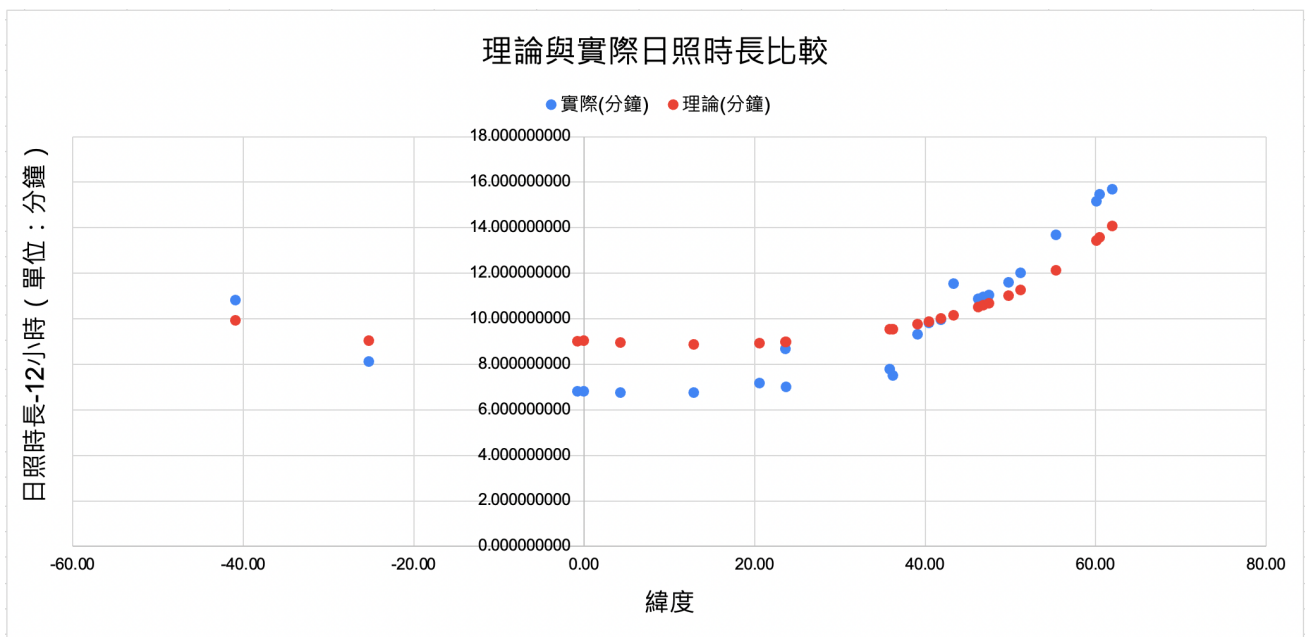
故應較理論多出的偏折角度為：

$$\frac{12.91-12}{12} \times 43.7' \approx 3.3139'$$

理論上應多出的日照時長：

$$\left(\frac{3.3139}{60 \times 360} \right) \times 24 \times 60 \times 2 \approx 0.44 \text{ min}$$

以上述方式將理論數據進行修正，得到以下圖表。由圖表中數據分佈可知，當緯度小於40度，理論數據呈現正偏差；緯度大於40度，理論數據呈現負偏差：



推測誤差原因為理論計算中之大氣折射率函數： $n(h) = 1 + 29674 \times 10^{-8} e^{-0.146h} (h \leq 50\text{km})$ 未能考量溫度、濕度與氣壓之影響。而由「大氣折射率之氣候特性研究」此篇文獻之大氣折射率經驗式： $n = 1 + N = 1 + 77.6 \times \frac{P}{T} + 3.73 \times 10^5 \times \frac{e}{T^2}$ 可知，緯度越靠近赤道，年均溫較高，則n較小，蒙氣差應較小，故理論高估；而緯度大於40度，年均溫較低，則n較大，蒙氣差應較大，故理論低估。

柒、結論

一、不考慮光線射入大氣層時產生的折射時，理論日照時長為：

$$\text{日照總時長} = \frac{\alpha}{2\pi} \times \text{各地真太陽時} = \frac{\cos^{-1}(-\tan\phi\tan\theta)}{\pi} \times \text{各地真太陽時}$$

二、太陽最大視角為 0.542° (近日點)、最小視角為 0.532° (遠日點)，所以春分點的太陽視角約為 0.537° 。而太陽視角影響的時間約為 2.1475min ：

$$\frac{0.537^\circ}{360^\circ} \times 1439.7\text{min} = 2.1475\text{min}$$

三、考慮光線進入大氣層的偏折，可得亮暗區臨界位置為： $x = -80.975145\text{km}$

四、得知亮暗區分界後，可以得出理論日照時長(考慮粗略的太陽視角)為：

$$\frac{\alpha}{2\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475\text{min} = \frac{\cos^{-1}(-\frac{0.012710}{\cos\phi})}{\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475\text{min}$$

五、將考慮大氣的理論日照時長與24個國家於2022年春分(3/20)時的實際日照時長做比對，可以發現兩者僅有些微差距，而趨勢皆是愈高緯度，日照時長愈長。

六、影響日照時長的條件，除了已納入計算的太陽視角與大氣折射外，還可能包含：

1. 地球實際形狀為橢球體而非正球體。
2. 並未將實際上大氣中的壓力、溫度、水氣的複雜分布納入計算，且只考慮至50公里處的平流層頂端（因考量大氣層中99%的空氣存在於對流層與平流層中）。

捌、參考資料

一、MAPLOGS (2016)。日出日落時間表。<https://sunrise.maplogs.com/zh-TW/>

二、許晨妍、許湘筠(2021)。由紅月亮談蒙氣差。

三、張惠民(1990)。地球科學概論。明文書局。

四、Global Monitoring Laboratory (1972)。NOAA Solar Calculator。<https://reurl.cc/qkrWbp>

五、崑山科技大學(無日期)。地球的大氣層 (Atmosphere)。<http://eportfolio.lib.ksu.edu.tw/user/4/9/4980K028/repository/%E5%9C%B0%E7%90%83%E7%A7%91%E5%AD%B8%E6%A6%82%E8%AB%96/%E7%AC%AC%E4%BA%94%E7%AB%A0.pdf>

- 六、陳政和、曾仁佑 (2000)。大氣折射率之氣候特性研究。中央大學大氣物理研究所：碩士論文。
- 七、SUNRISE AND SUNSET(1992)。UNIVERSAL TIME FOR MERIDIAN OF GREENWICH。https://www.suntoday.org/sunrise-sunset/1992/january/18.html。