

第二十三屆旺宏科學獎

成果報告書

參賽編號：SA23-582

隊伍名稱：鹽有物

作品名稱：『鹽』之有『物』-探討食鹽環
物理機制

參賽類別：物理組

關鍵字：馬倫戈尼流、熱對流、咖啡環

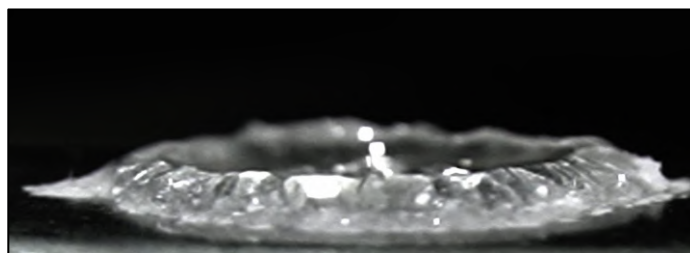
摘要

主要探討食鹽水滴在介面加熱形成環狀結晶的各種因素。藉由多組實驗及所建構的物理模型，推論影響水流的因素有**熱對流**、**滲透壓**及**馬倫戈尼流**，且水滴邊緣的結晶速率最大。在實驗中，測得濃度越高環高越高、在同體積不同濃度下濃度較大(25%)相比濃度較小(5%)開始結晶時間較短，且在同體積不同濃度時濃度越大需要結晶時間越長。還發現了因**毛細管流**所導致食鹽環在結晶時會往外延伸。環內結晶形成機制與表面蒸發不均有關，容易在接觸介面處結晶。加熱板溫度550°C時有發現**萊頓福斯特效應**。邊緣蒸發量不均導致類似冠狀的結構出現。且驗證了楊氏方程式修正的正確性。並利用自創的濃度測量方法測量出水滴內的濃度分佈，水滴邊緣處濃度有上升趨勢。藉由所建構的**物理模型**，推導出**環狀結構的成因為水滴邊緣結晶速率最快、內部流動方向**的綜合結果。**應用部分**，自製濃度測量方法可測得水滴內不同位置、時間的濃度，可應用在關於擴散、對流等領域中。

壹、前言

一、研究動機

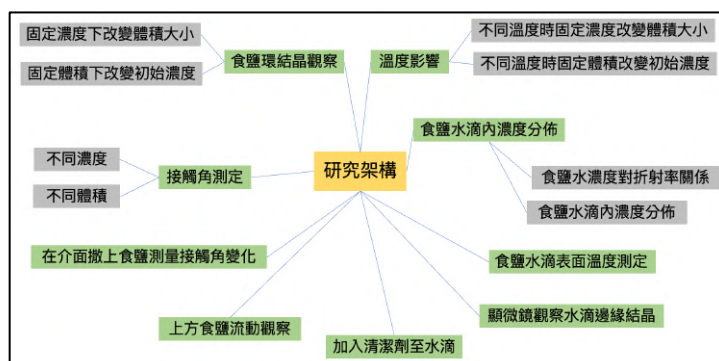
因為本身近視的關係，會有戴角膜塑形片的需求，需要用到生理食鹽水沖洗鏡片。在某天，發現桌上的生理食鹽水滴結晶後會形成一圈的食鹽環，在上網搜尋資料後，才發現此現象類似咖啡環效應。咖啡環效應，是指小液滴滴在固體表面蒸發後，發生顏色由內而外的環型。這個發現，引起了我們對於小食『鹽』水滴各種物理機制的好奇。



圖一、食鹽環示意圖

二、研究目的

研究大致分為觀察圓形對稱食鹽水滴滴在介面上蒸發、加熱後的各種物理機制。



圖二、為研究架構圖綠色為變因，灰色為細項

(一)食鹽環結晶觀察

1. 固定濃度下改變體積大小觀察食鹽環狀態
 2. 固定體積下改變初始濃度觀察食鹽環狀態
- (二) 溫度影響
1. 不同溫度時固定濃度改變體積大小觀察食鹽環狀態
 2. 不同溫度時固定體積改變初始濃度觀察食鹽環狀態
- (三) 食鹽水滴內濃度分佈
1. 食鹽水濃度對折射率關係
 2. 食鹽水滴內濃度分佈
- (四) 接觸角測定
1. 不同濃度、體積接觸角測定
- (五) 在介面撒上食鹽測量接觸角變化
- (六) 加入清潔劑至水滴
- (七) 食鹽水滴表面溫度測定
- (八) 上方食鹽流動觀察
- (九) 顯微鏡觀察水滴邊緣

貳、研究設備及器材

一、實驗裝置及器材

(一) 實驗材料：Tracker、燒杯、食鹽、攪拌棒、微量滴管、線香、加熱板、不鏽鋼介面、相機及鐵尺、滑車、雷射筆、複式顯微鏡、煙霧機及紅外線熱像儀。



圖三、濃度分佈實驗滑車與雷射筆



圖四、煙霧機



圖五、微量吸管

參、研究過程或方法

一、名詞定義

(一) 標準狀態：溫度 90°C ，介面為不鏽鋼的環境定義為標準狀態。

(二) 食鹽水濃度：食鹽水重量百分濃度，即 $\frac{\text{溶質重量}}{\text{溶液重量}} \times 100\%$

(三) 水滴半徑：以食鹽水滴對稱中心至邊緣的距離

(四) 食鹽環半徑：

上半徑：如下圖，上半徑為食鹽環上層左邊緣與右邊緣連線除二(r_1)。

下半徑：如下圖，下半徑為食鹽環與介面交界面左邊緣與右邊緣連線除二(r_2)。

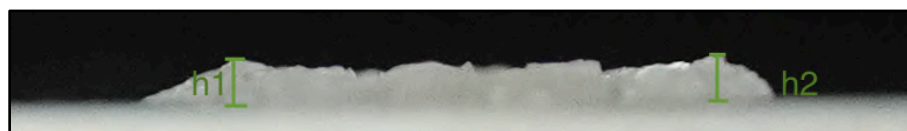


圖六、平均半徑為 $\frac{r_1+r_2}{2}$

(五)食鹽環寬度：即 $r_1 - r_2$ 。

(六)食鹽環高度：如圖六所示，左邊邊緣離介面距離 h_1 ，右邊邊緣離介面距離 h_2

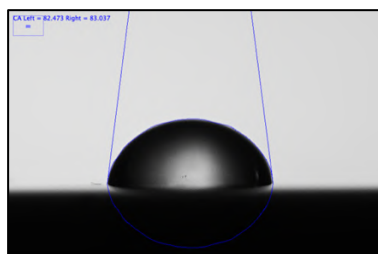
定義環的高度為 $\frac{h_1+h_2}{2}$ 。



圖七、食鹽環高度

(七)表面張力 S ：液體表面上一小線段，與此線段垂直且與表面平行，且 $F = SL$

(八)接觸角：水滴邊緣與介面接觸之夾角，如圖七所示：



圖八、接觸角

二、研究方法

(一)食鹽環結晶觀察

1.固定濃度下改變體積大小食鹽環狀態

(1)配出濃度20%的食鹽水溶液，並把介面（不鏽鋼烤盤）放上加熱板且把溫度調至90°C。

(2)依序滴出體積10 μ L、20 μ L、30 μ L、40 μ L、50 μ L的水滴。

(3)利用相機從側面及上方拍攝縮時攝影。

(4)用tracker、imageJ分析側視縮時影片直徑變化並分析食鹽環的形狀、半徑。

2.固定體積下改變初始濃度食鹽環狀態

(1)依序配出濃度5%、10%、15%、20%、25%的食鹽水溶液。

(2)把介面放上加熱板且把溫度調至90°C。

(3)並依序滴上各個濃度體積30 μ L到介面上。

(4)利用縮時攝影拍攝食鹽水滴蒸發情形。

(5)用tracker、imageJ分析側視縮時影片直徑變化並分析食鹽環的形狀、半徑。

(二)溫度影響

1. 將介面溫度調整為30°C，研究固定濃度下改變體積大小食鹽環狀態

2. 將介面溫度調整為30°C，研究固定體積下改變初始濃度食鹽環狀態

3.把加熱板溫度調至550°C，並將微量吸管換成滴管，從側上方拍攝120fps縮時攝影。
(三)濃度分佈實驗

1.實驗流程

(1)濃度對折射率之關係

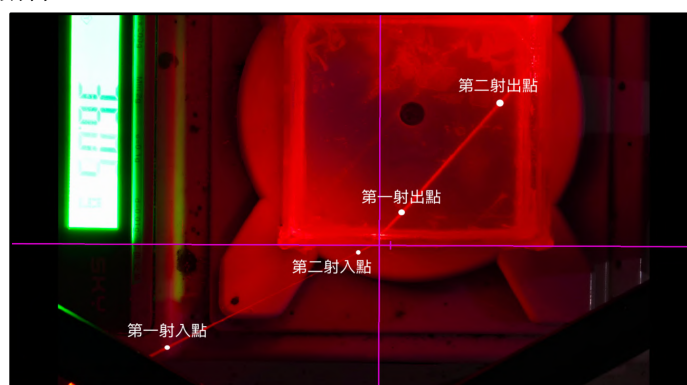
利用自製壓克力盒子，配出不同濃度食鹽水，利用雷射從側方射入並將拍攝的照片丟入tracker後，利用座標算出折射角與入射角，並算出此食鹽水濃度的折射率，以方便我們之後回推內部濃度。

(2)食鹽水滴濃度分佈

將相機架在相機位置後調整雷射使雷射光垂直介面，滴出濃度25%、體積50 μ L的水滴並開啟煙霧機以利拍攝光路。用手緩慢移動滑車使雷射光掃過水滴並拍射照片。最後在用tracker及C++(程式碼在附件二)算出折射率。

2.算法

(1)濃度對折射率關係



圖九、實驗示意圖

我們把壓克力介面定為 $y=0$ ，且 x 軸與壓克力板平行，我們可以從tracker中找出入射光與折射光角度，算法如下：

假設第一入射點為 (x_1, y_1) ，第二入射點為 (x_2, y_2) ，第一射出點為 (x_3, y_3) ，第二射出點為 (x_4, y_4) ，則入射角 θ 的sin值即為：

$$\sin\theta = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

而折射角 θ' 的sin值即為：

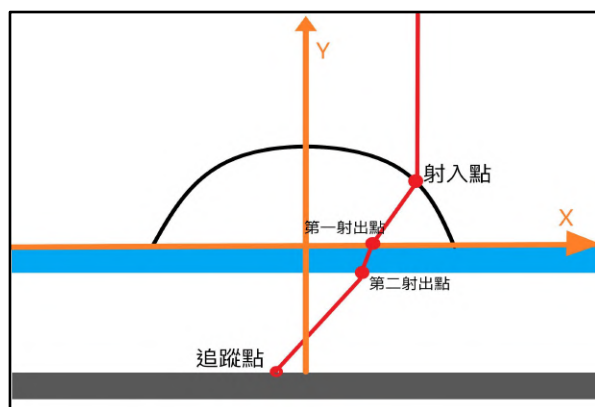
$$\sin\theta' = \frac{|x_3 - x_4|}{\sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}}$$

根據司乃耳定律我們可以得知：

$$n_o \sin\theta = n_i \sin\theta'$$

其中 n_0 為空氣折射率，約1.00027， n_l 為食鹽水在該濃度時的折射率，我們因此可以做出濃度對折射率的關係。

(2)食鹽水滴濃度分佈之關係



圖十

圖十為濃度分佈裝置實驗示意圖，其中雷射光（紅色）垂直射入水滴，經過水滴內折射後第一次打到壓克力板的點定義為第一射出點，經板子折射後射出的點定義為第二射出點，最後光線經空氣折射後打到底板的點定義為追蹤點。因為實驗裝置及各種環境因素的影響，我們難以用錄影的方式測出第一射出點的座標及水滴內折射光路，但我們可以利用以公式導出水滴以圓心往外的濃度分佈測量方法（見附件一）。即可利用射入點 (x_0, y_0) 、第二射出點 (x_2, y_2) 、追蹤點 (x_3, y_3) 得到 n_2 (平均折射率

(位置 x 座標 $\frac{x_0+x_1}{2}$))為：

在 $x_0 > x_2$ 、 $x_1 > x_2$ 時：

$$n_2 = n_l \frac{|x_3 - x_2|}{|x_0 - x_2 - d|} \frac{\sqrt{(x_0 - x_2 - d)^2 + (y_0 - y_2 - r)^2}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

在 $x_0 < x_2$ 、 $x_1 < x_2$ 時：

$$n_2 = n_l \frac{|x_3 - x_2|}{|x_0 - x_2 + d|} \frac{\sqrt{(x_0 - x_2 + d)^2 + (y_0 - y_2 - r)^2}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

我們利用C++程式，以方便我們處理數據，請見附件二。此方法即可得到食鹽水滴內的濃度分佈。

(四)接觸角測定

利用imageJ將食鹽環結晶觀察數據分析初始的接觸角。分別將左邊與右邊接觸角做平均後得到平均接觸角。

(五) 在介面撒上食鹽測量接觸角變化

將濃度25%、體積10 μ L食鹽水水滴，滴在鋪滿食鹽的介面上，觀察相同情形下側視狀態。

(六)加入清潔劑

加熱板溫度30 $^{\circ}$ C，將濃度20%、體積50 μ L 食鹽水滴滴在介面後加入一小滴清潔劑水溶液並觀察其結晶狀態。

(七) 食鹽水滴表面溫度測定

利用紅外線熱像儀垂直拍攝水滴，並分析表面溫度分佈。

(八)上方觀察食鹽流動

體積20 μ L、濃度分別為25%及15%，從上方拍攝縮時攝影

(九)顯微鏡觀察邊緣

利用複式顯微鏡拍攝(倍率40倍) 錄製水滴邊緣結晶狀態

肆、研究結果

一、食鹽環結晶觀察

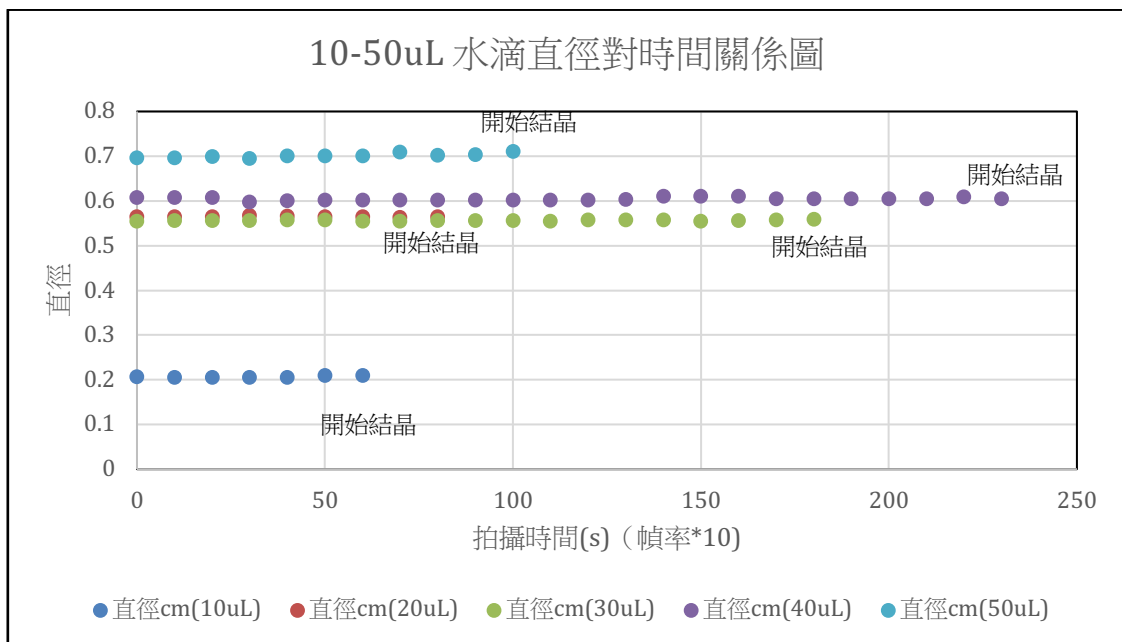
(一)固定濃度下改變體積大小食鹽環狀態

1.實驗演示：濃度20%、體積10 μ L、加熱板溫度90 $^{\circ}$ C

經過分析，左邊邊緣在加熱60秒後開始結晶，如下表格左邊。而在約230秒後結晶完成（右圖）。

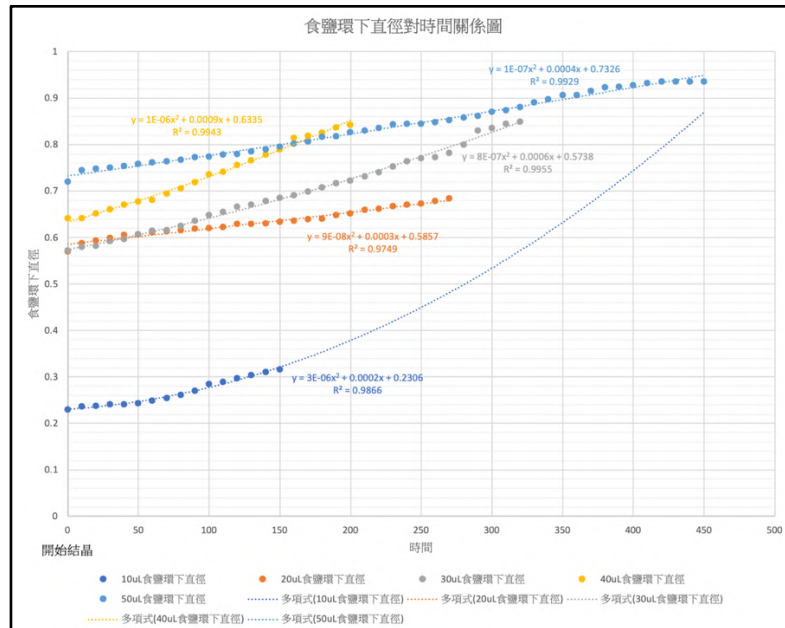


2.實驗數據：



中我們可以看出在邊緣結晶形成前，水滴直徑在加熱過程中幾乎不改變。(註：此時間為拍攝時間，因要調整對焦等因素，會在液滴滴入介面後過一段時間才有可用數據，但皆在結晶開始前就拍攝。且每張照片間隔十秒。)

而之後在將各體積在結晶後食鹽環下直徑 r_j 對時間做圖可得：



橫軸為時間，縱軸為食鹽環下直徑。可以發現開始結晶後，食鹽環下直徑隨時間增加。

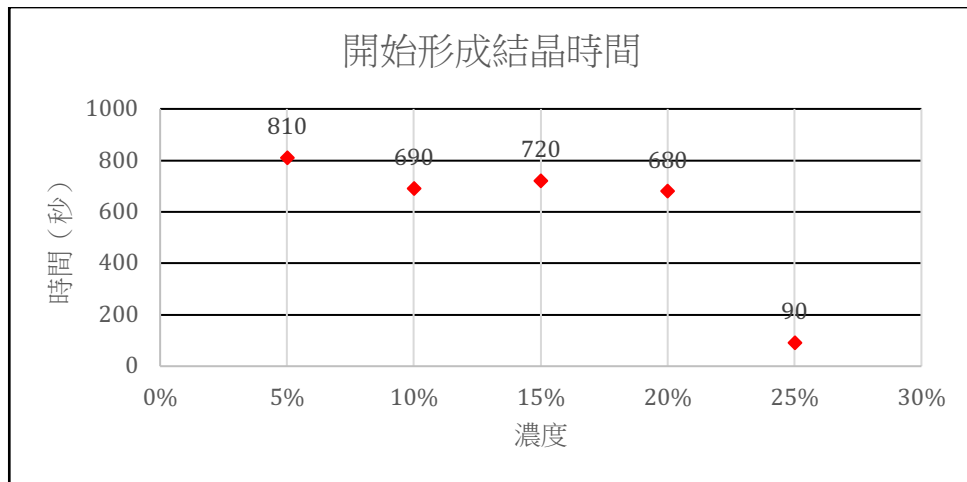


從左至右為濃度20%、體積10-50 μL 食鹽環上視圖，從圖中可看到各個體積的食鹽結晶都有環狀結構，且在20-50 μL 都可看到環中有小顆粒狀食鹽結晶。

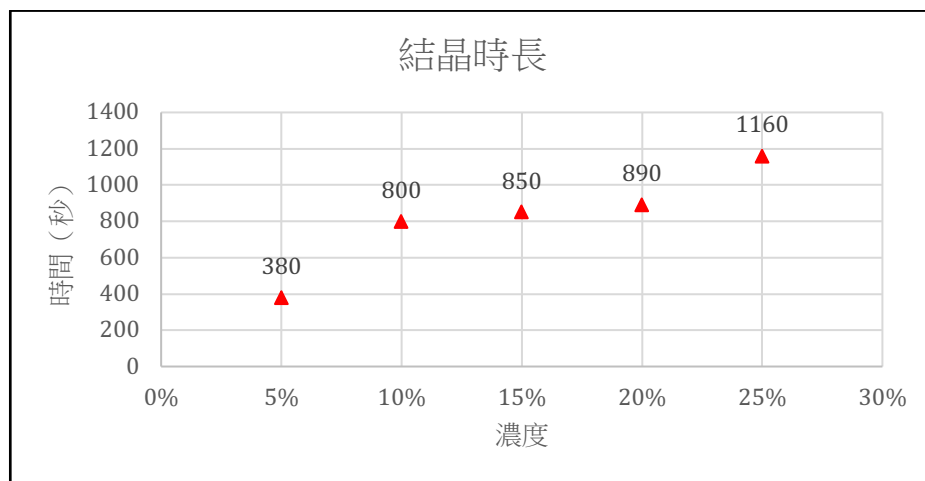
接下來將結晶完成後的各個狀態用下表描述（單位：cm）：

體積	食鹽環下直徑	食鹽環上直徑	食鹽環直徑	食鹽環寬度	食鹽環左高	食鹽環右高	食鹽環高度
10 μL	0.316	0.180	0.248	0.136	0.053	0.055	0.054
20 μL	0.684	0.531	0.608	0.153	0.046	0.045	0.045
30 μL	0.849	0.440	0.645	0.409	0.085	0.071	0.078
40 μL	0.842	0.515	0.679	0.327	0.078	0.078	0.078
50 μL	0.935	0.655	0.795	0.280	0.082	0.077	0.079

(二)固定體積下改變初始濃度食鹽環狀態



上圖為將各濃度開始形成結晶的時間標註出來，可以發現25%開始形成環的時間最短，而5%開始形成環的時間最長。10%-20%的結晶形成時間是差不多的。



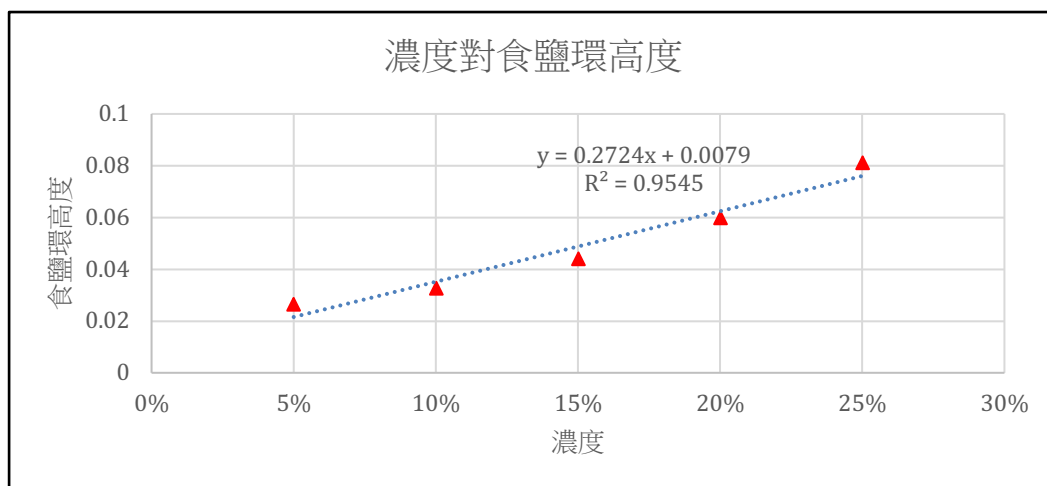
上圖為同體積不同濃度的結晶時長，及完成時間點-開始結晶時間點。可以看出濃度越大需要結晶時間越長。



此圖為結晶完示意圖，將各項這些結晶的各項狀態列在下表：

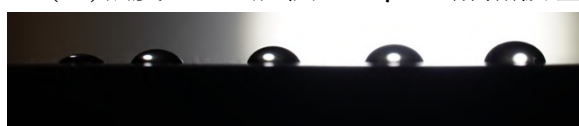
各項數據(cm)/濃度	5%	10%	15%	20%	25%
食鹽環下直徑	0.748	0.854	0.799	0.777	0.776
食鹽環上直徑	0.655	0.728	0.628	0.554	0.552
食鹽環寬度	0.047	0.063	0.086	0.112	0.112
左高	0.027	0.031	0.048	0.057	0.058
右高	0.026	0.034	0.040	0.062	0.082
高	0.027	0.033	0.044	0.060	0.070

現在將食鹽環濃度對高度做圖可得，且會發現濃度越高食鹽環高度越大：



二、溫度影響

(一)濃度20%、體積10-50 μ L、加熱板溫度30 $^{\circ}$ C如下：

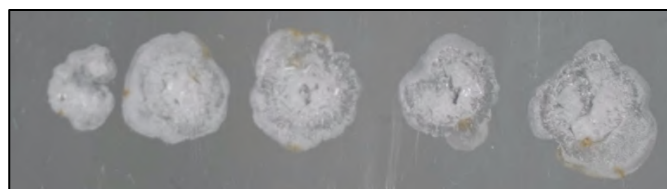


初始狀態



結晶完成狀態

上視圖：



由左至右為體積10 μ L-50 μ L，可看到環狀較不明顯，且結晶顆粒較趨於方形

各項數據/體積	10 μ L	20 μ L	30 μ L	40 μ L	50 μ L
水滴曲面線段長	0.938	1.026	1.138	1.106	1.570
直徑	0.712	1.002	0.970	1.025	1.139

上表為三十度時不同體積水滴曲面線長及直徑

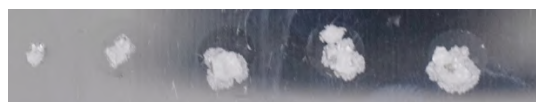
(二)濃度5%-25%、體積30 μ L、加熱板溫度30 $^{\circ}$ C如下：



初始狀態

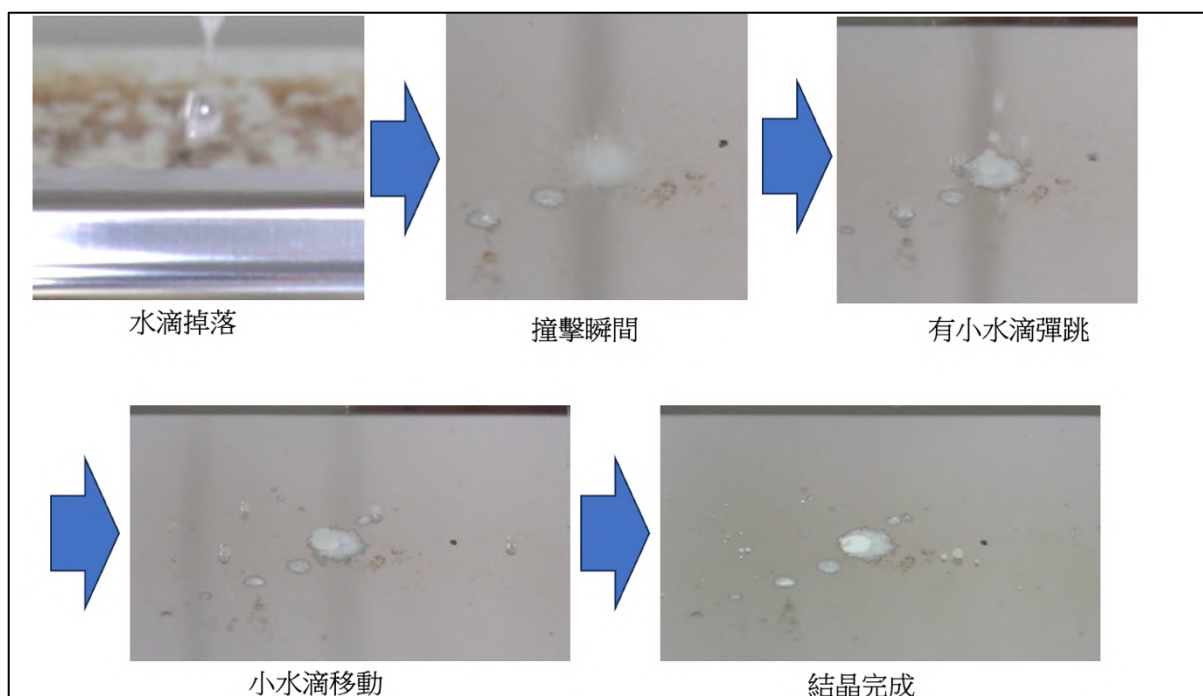


結晶完成狀態



由左至右為濃度5%-25%，可看出環狀不明顯

(三)加熱板溫度55 $^{\circ}$ C、濃度25%

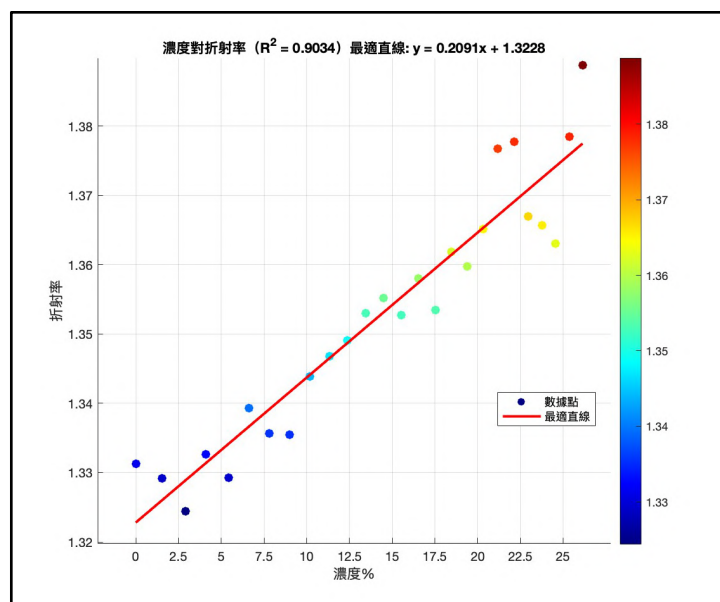


上圖為加熱板溫度550°C，水滴從掉落至結晶完成的過程，發現水滴在撞擊介面時會產生一層薄食鹽結晶，彈出的小水滴能在介面上移動很久直到結晶完成。

三、標準狀態下濃度分佈實驗

(一)食鹽水濃度對折射率關係

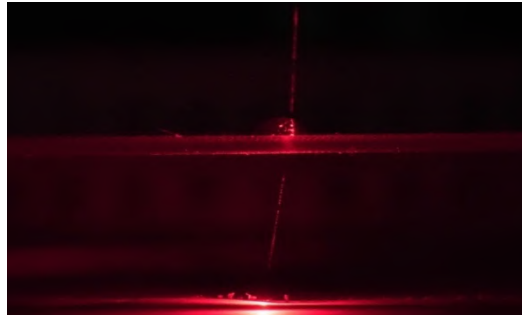
濃度從0%至飽和25.96%對折射率的關係。圖表如下：



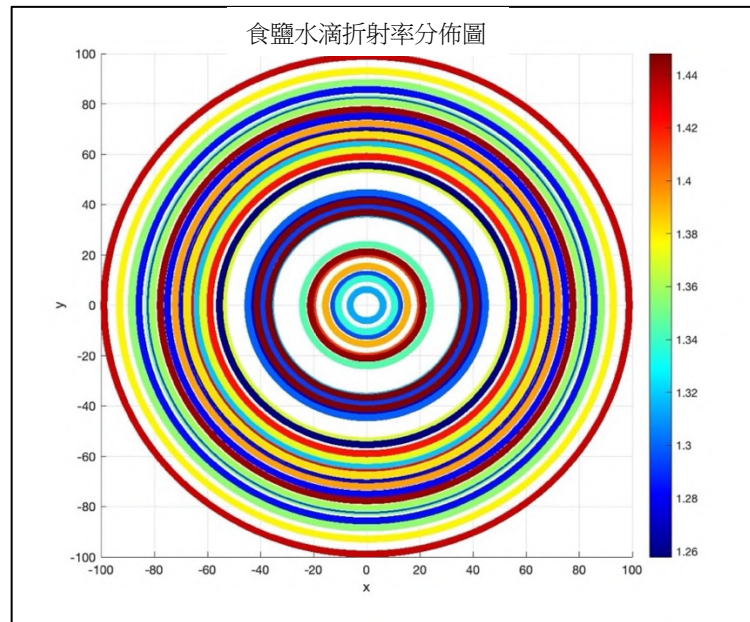
經過測量，可得濃度對折射率圖，其中最適直線為 $y = 0.2091x + 1.3228$ (此方程x要代入一般數值，非百分比)。

(二) 食鹽水滴內濃度分佈情形

測量濃度20%、體積50 μL ，水滴內折射率分佈情形，拍攝照片如下：



將多張拍攝的照片分析折射率後可得水滴內折射率分佈圖：



圓點為水滴中心，從圖中可得知水滴內的折射率是不均等的，換言之，水滴內的濃度分佈是不均等的。而因為我們是將射入及射出點做平均，在水中其實不是直線前進，而是不斷偏折，如果我們觀察最邊緣四個數據點，因靠邊緣，射入及射出點差距小，會較接近光實際路徑，故數據更為精準，且我們會發現越邊緣濃度越大。（藍色到紅色，折射率越大，濃度越大）

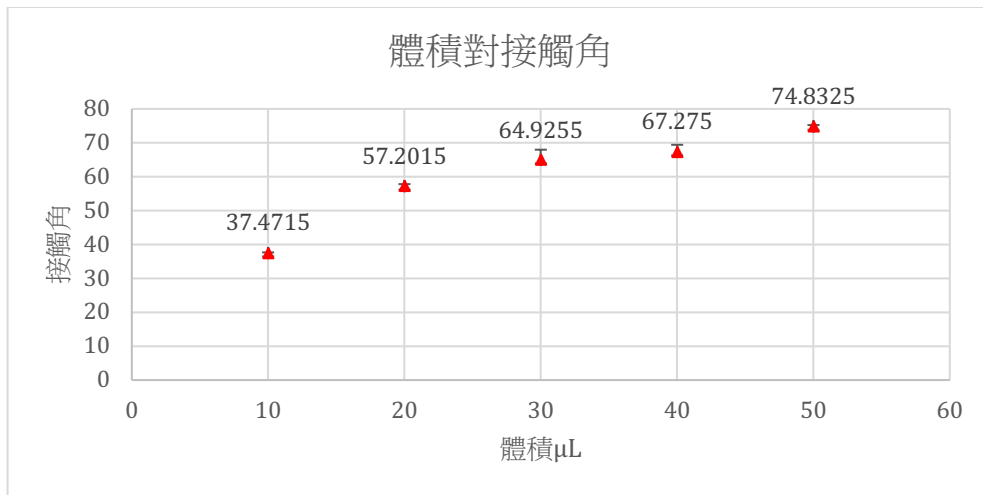
四、接觸角測定

(一)固定濃度改變體積接觸角測量（加熱板溫度30°C、初始接觸角）

實驗數據：

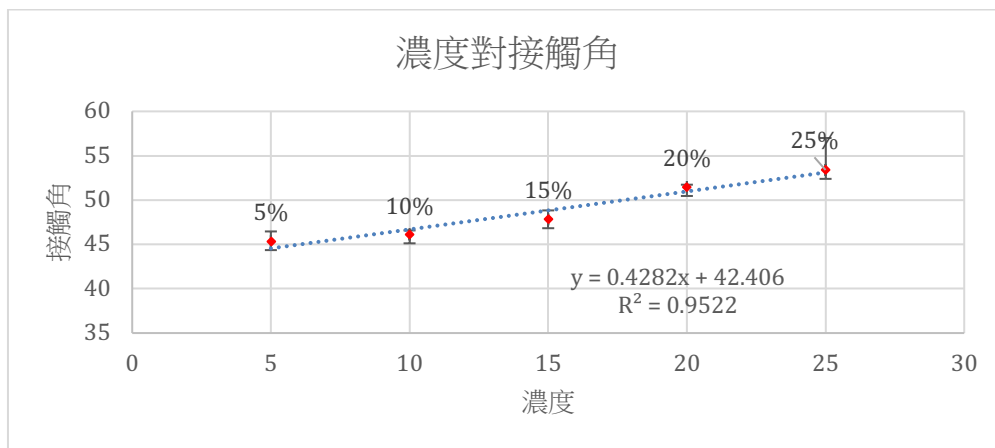
濃度20%	直徑(cm)	半徑	左接觸角	右接觸角	平均接觸角
10 μ L	0.411077	0.20554	37.662	37.281	37.472
20 μ L	0.469489	0.23474	57.808	56.595	57.202
30 μ L	0.472857	0.23643	67.971	61.88	64.926
40 μ L	0.522389	0.26119	69.415	65.135	67.275
50 μ L	0.5510698	0.27553	75.238	74.427	74.833

做圖如下：



上圖為體積對接觸角做圖，會發現體積越大接觸角越大

(二)固定體積改變濃度接觸角測量



圖中可發現濃度越大接觸角越大，且成線性關係。

五、在介面撒上食鹽測量接觸角變化

在濃度20%，體積10 μL 比較介面是否灑鹽，如下：



未撒食鹽



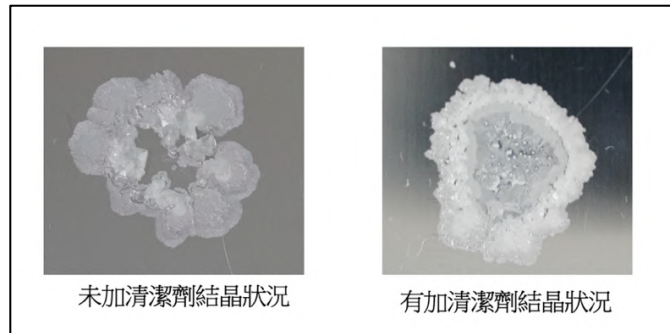
有撒食鹽

會發現有撒食鹽的接觸角明顯較同情形未撒食鹽小

六、加入清潔劑

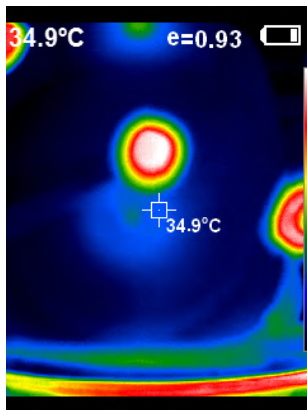


加清潔劑後可發現水滴迅速塌陷

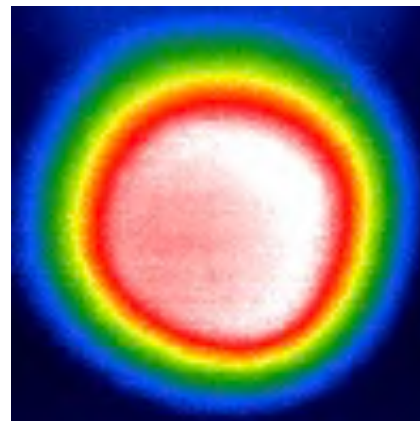


從圖可知在有加清潔劑時環狀比沒加時明顯

七、食鹽水滴表面溫度測定



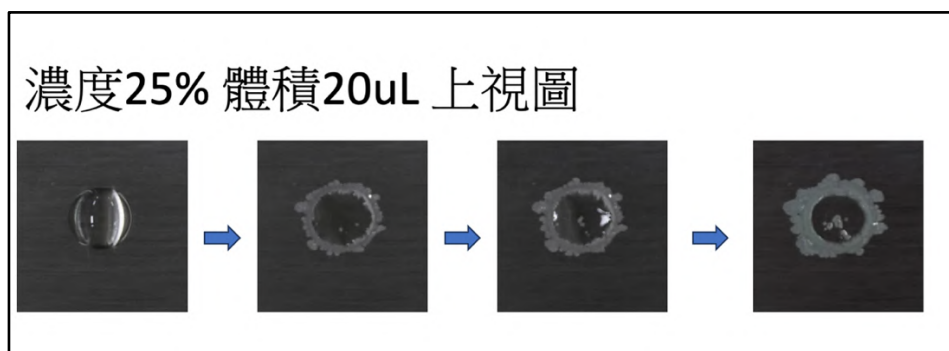
紅外線熱像儀拍攝結果



水滴中心放大

可得知水滴表面上，中心處溫度較高，邊緣溫度較低。

八、上方觀察鹽結晶流動



濃度25%、體積20 μL 、加熱板溫度90°C，會發現在結晶過程中食鹽中心也會產生結晶顆粒。

九、顯微鏡觀察邊緣



水滴（深色）→ 水滴邊緣開始生成食鹽 → 食鹽外擴 → 外擴後有類似冠狀結構

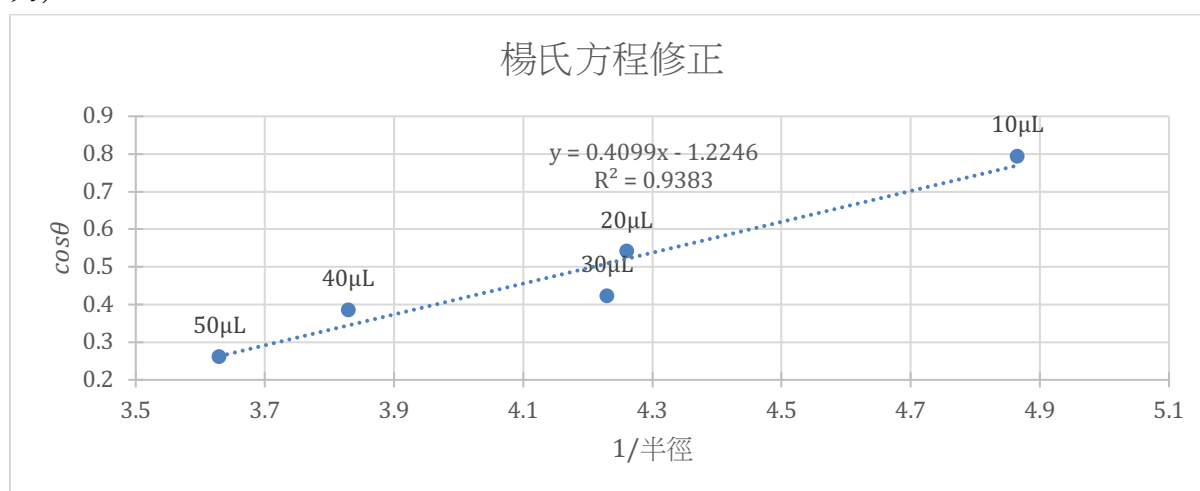
伍、討論

一、楊氏方程式修正

分析固定濃度不同體積的接觸角，與以往體積固定的楊氏方程式違背，經深入查詢資料後，發現修正過後的楊氏方程式（young's equation），描述了接觸角對半徑的關係，如下：

$$\cos\theta = \frac{S_{s-g} - S_{s-l}}{S_{l-g}} + \frac{\kappa}{S_{l-g}} \frac{1}{\alpha}$$

(其中 κ 為線張力(line tension)， α 為半徑， S_{l-g} 、 S_{s-g} 、 S_{s-l} 為三相各兩相接觸的表面張力)

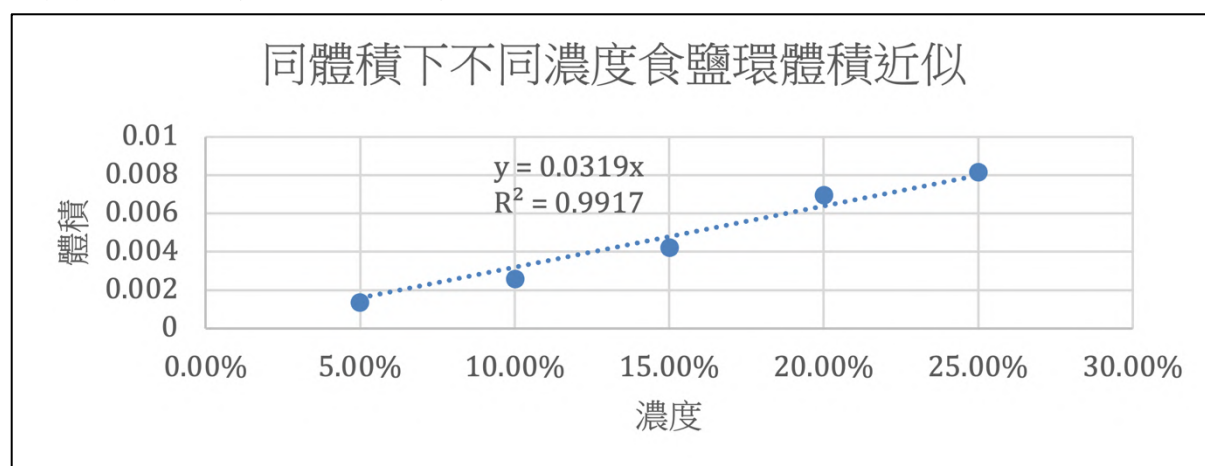


因為濃度固定，所以三項表面張力都固定，故 $\frac{S_{s-g}-S_{s-l}}{S_{l-g}}$ 為定值。將半徑倒數後做圖可得上圖，接近線性關係，顯示實驗數據與理論（呈線性關係）相符，故驗證楊氏方程修正在體積微升尺度下是成立的。

二、環型近似

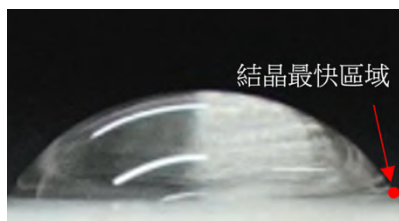
同體積但不同濃度的液滴，其食鹽環體積可近似為：
$$\frac{\text{食鹽環寬} \times \text{高} \times \text{食鹽環平均半徑} \times 2\pi}{2}$$

濃度對食鹽環體積之值做圖如下：



實驗數據顯示食鹽環體積與濃度成正比。因為食鹽環質量正比於 $V \times n\%$ (V 為液滴體積， n 為濃度)，所以理論上食鹽環質量（體積）與濃度成正比，故實驗數據與理論相符。

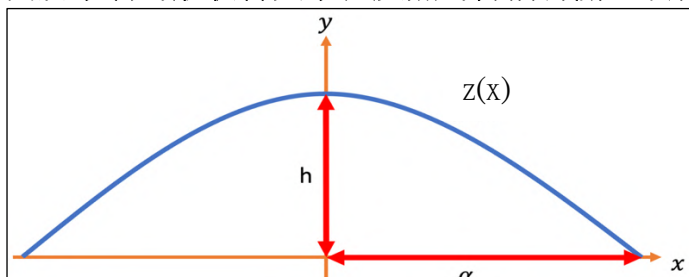
三、模型建構



從實驗中可觀察到邊緣最先結晶，以及食鹽環外擴現象，為了深入探究結晶現象的機制，以下我們嘗試逐步建構結晶的理論模型。

(一) 水滴型態：

由於水滴的形狀會與水流及熱的傳播有關，故我們希望推算液滴表面之曲線方程式。



分析水滴的曲線方程式，水滴曲線 $z(x)$ ，高度為 H ，半徑為 α
水滴整體位能為 U ，可以寫為：

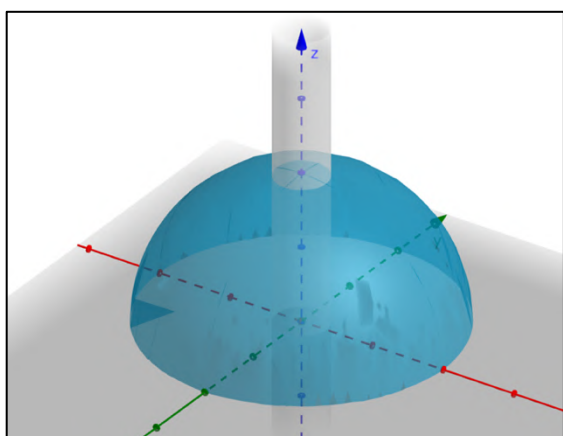
$$U = S_{l-g} \int_0^H 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1} dz + \pi \alpha^2 (S_{s-l} - S_{s-g}) + \int_0^h \pi x^2 \rho g z dz$$

其中前兩項為水表面及底面的表面能，而最後一項為重力位能。有條件： $z(0) = h$ 、 $z(\alpha) = 0$ 、接觸角 $\cos\theta = \frac{S_{s-g} - S_{s-l}}{S_{l-g}} + \frac{\kappa}{S_{l-g}} \frac{1}{\alpha}$ ，及守恆律（體積為定值）： $V = \int_0^h \pi x^2 dz =$

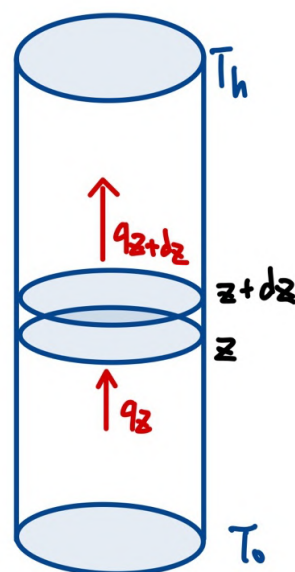
定值。最小化 U ，由 $\delta U = 0$ （變分問題），原則上即可解出 $z(x)$ ，接下來水滴曲線皆用 $z(r)$ 表示（ r 為徑向）。

(二) 溫度曲線數值模擬與假設：

I. 一維度熱傳導分析



我們先簡化問題，在圓心處設置一小塊圓柱，高為其液體高度，接著假設其熱傳導僅為 z 方向，可以得到如右一維度熱傳導示意圖。



分析在高度 z 一小塊圓環的熱傳導，可以列出以下式子：

$$q_z - q_{z+dz} = \rho c A dz \frac{\partial T}{\partial t}$$

其中A為底面積、T為溫度、t為時間、c為比熱、k為熱傳導係數，將q利用傅立葉定律展開後可得：

$$A \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz = \rho c A dz \frac{\partial T}{\partial t}$$

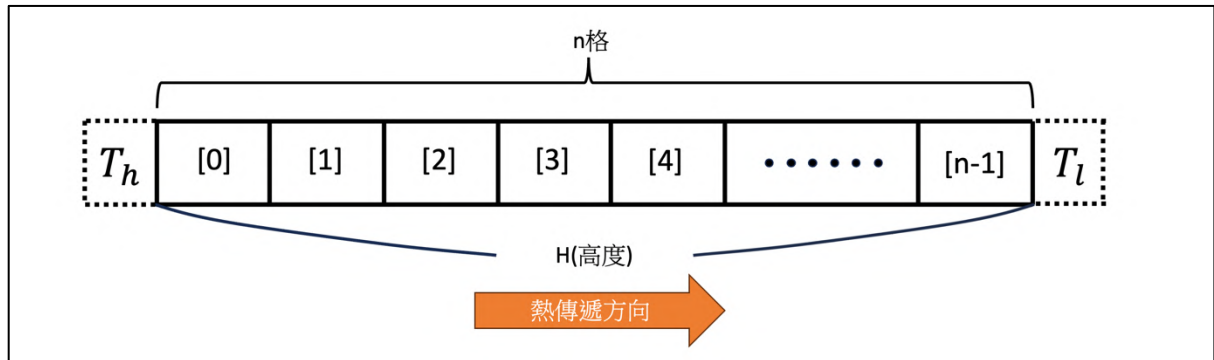
化簡可得：

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

在 $0 \leq z < H$ (水滴柱高度)皆會符合，然而在 $z=H$ 處，還需考慮熱對流的影響。根據牛頓冷卻定律及傅立葉定律，在 $z=H$ 處一小塊體積的熱流可以寫成（其中h為熱對流係數 T_s 為液體表面溫度、 T_l 為環境溫度）：

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} - h(T_s - T_l) = \rho c dz \frac{\partial T}{\partial t}$$

因為想得知溫度與位置、時間的關係，考慮到數學上的複雜性，就先以電腦C++程式來模擬溫度曲線。



如上圖所示，將高度H的水滴柱切分成n個網格，並利用迭代方法來求出不同時間的溫度分佈，每個網格在某瞬間的熱傳導如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{H}{n} \right) \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{(T_{[1]} - T_{[0]})}{H} n \right) - k \left(\frac{(T_{[0]} - T_h)}{H} n \right) \text{—— (位置[0])} \\ \left(\frac{H}{n} \right) \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{(T_{[x+1]} - T_{[x]})}{H} n \right) - k \left(\frac{(T_{[x]} - T_{[x-1]})}{H} n \right) \text{—— (0 < x < n-1)} \\ \left(\frac{H}{n} \right) \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -h(T_{[n-1]} - T_l) - k \left(\frac{(T_{[n-1]} - T_{[n-2]})}{H} n \right) \text{—— (位置H)} \end{array} \right.$$

切割的網格數目與迭代時間會影響模擬的結果，根據參考資料[4]，要符合CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)才能保證數值的穩定性，CFL condition:

$$\frac{k dt}{\rho c dz^2} \leq \frac{1}{2}$$

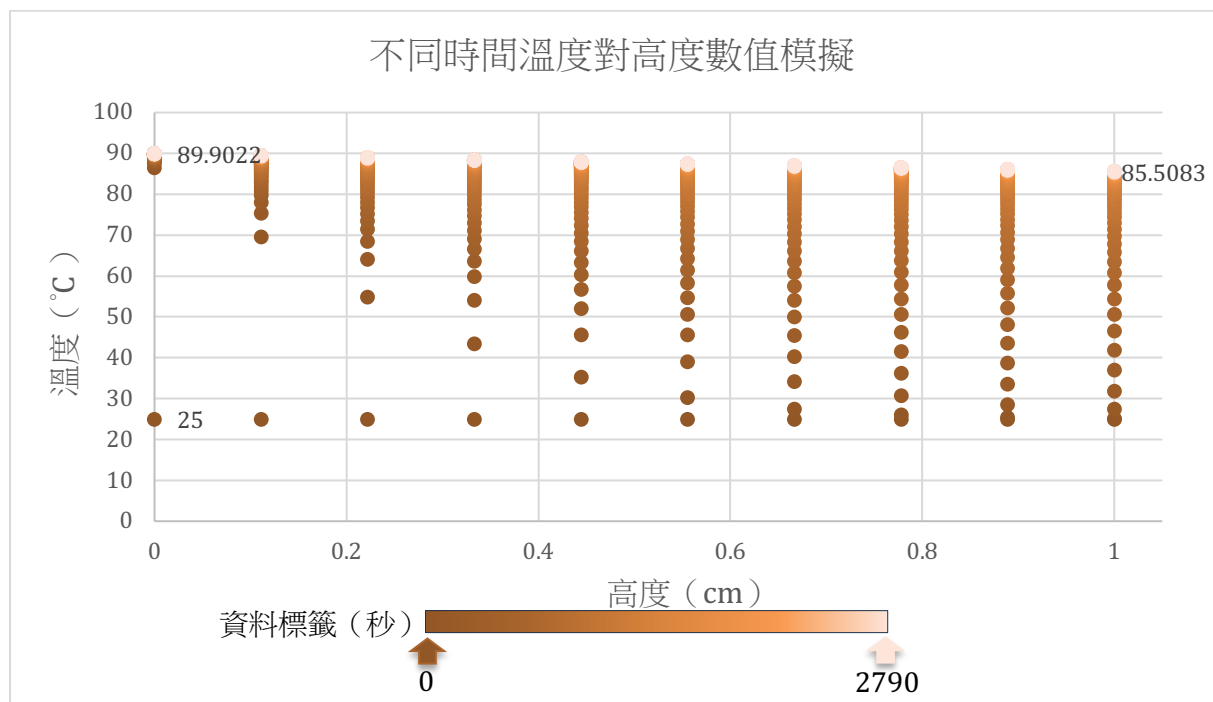
$$k=0.617\text{W/(mK)}、\rho = 997\text{kg/m}^3、c=4200\text{J/(kgK)}、dz = \frac{H}{n}$$

先模擬高度0.01m、迭代時間0.1s，因要符合CFL條件所以切成50個網格(n=50)，並模擬水柱初始溫度25°C、加熱板溫度90°C、環境溫度25°C、柱高1cm、迭代3600秒，程式碼如下：

```
#include<iostream>
using namespace std;

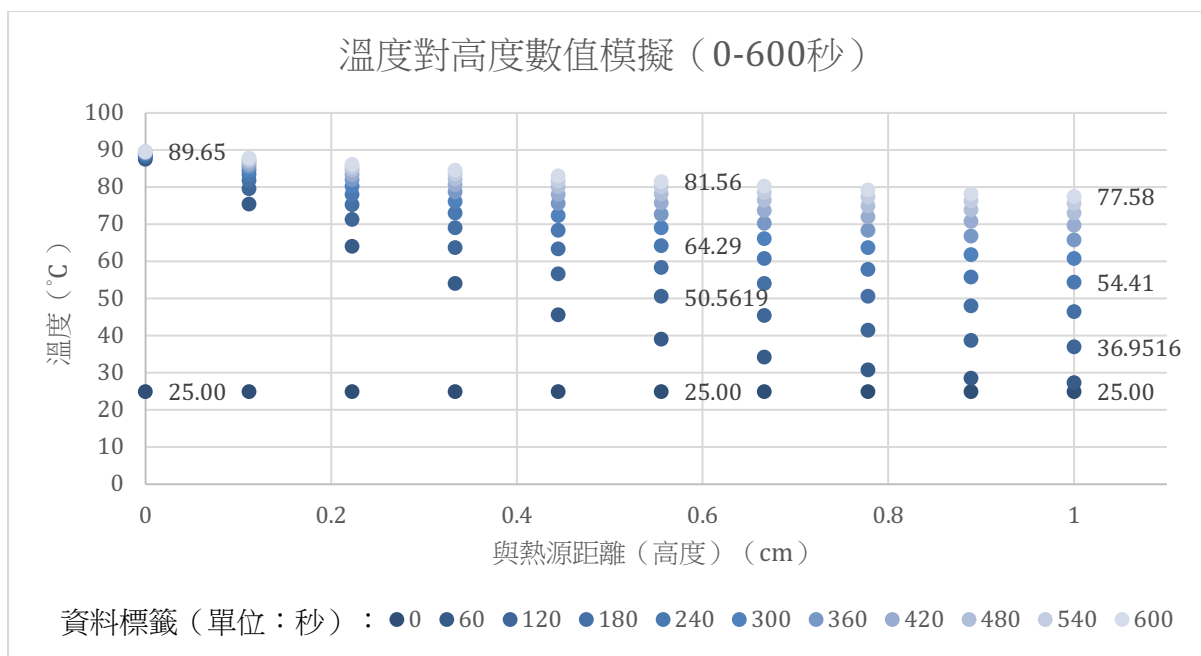
int main(){
    float k=0.617, dt=0.1, th=90.0, tl=25.0, d=0.01, den=997.0, c=4200, h=5.0;
    int time=36000, n=50;
    float a[time][n], dx=d/n;
    for(int i=0;i<n;i++){
        a[0][i]=tl;
    }
    for(int i=0;i<time-1;i++){
        a[i+1][0]=k*((a[i][1]-a[i][0])/dx)-((a[i][0]-th)/dx)*dt/(den*c*dx)+a[i][0];
        for(int m=1;m<n-1;m++){
            a[i+1][m]=k*((a[i][m+1]-a[i][m])/dx)-((a[i][m]-a[i][m-1])/dx)*dt/(den*c*dx)+a[i][m];
        }
        a[i+1][n-1]=(h*(tl-a[i][n-1]))-k*((a[i][n-1]-a[i][n-2])/dx)*dt/(den*c*dx)+a[i][n-1];
    }
    for(int i=0;i<time;i+=300){
        cout<<i<<" ";
        for(int m=0;m<n;m+=5){
            cout<<a[i][m]<<" ";
        }
        cout<<endl;
    }
    return 0;
}
```

II. 一維熱傳導模擬結果



上圖為不同高度、不同時間的溫度分佈（水柱初始溫度25°C、加熱板溫度90°C、環境溫度25°C、柱高1cm的完整模擬）。會發現到初始時溫度遞增快速，然而過一段時間後溫度趨於穩定。

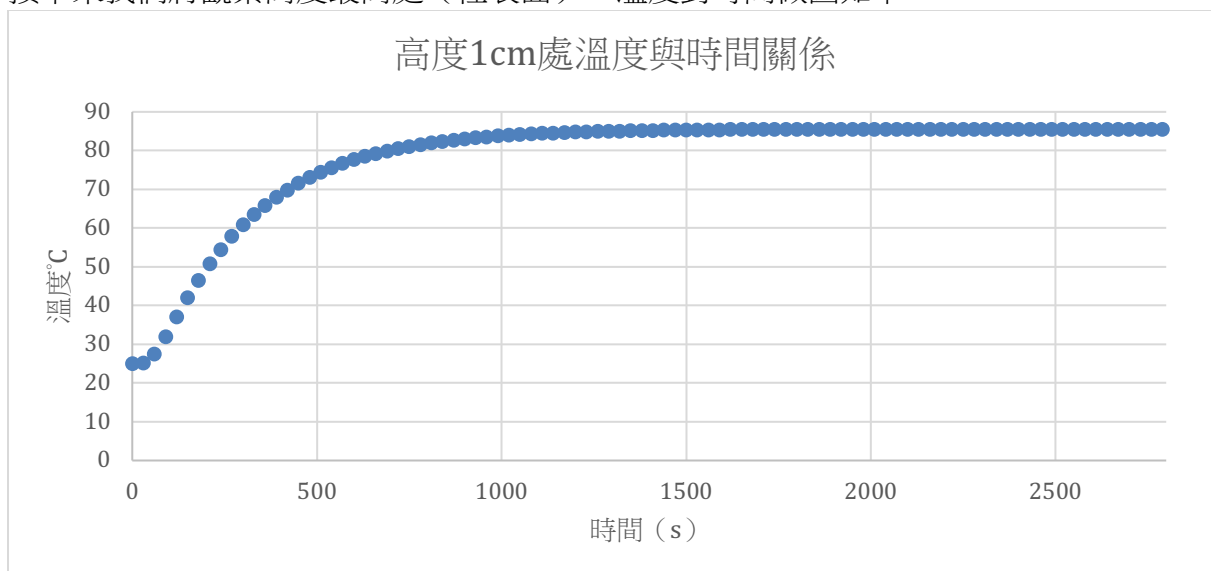
因前段時間溫度變化較大，擷取出0到10分鐘內，結果如下：



橫軸為時間，縱軸為溫度 (°C)，而不同顏色代表著不同時間點。從圖中可看出溫度大致與高度程負相關，而同一個位置溫度隨時間遞增。

III. 溫度曲線假設與比較

接下來我們將觀察高度最高處 (柱表面)，溫度對時間做圖如下：



發現溫度隨時間上升，但是溫度對時間變化率 (斜率) 隨時間而遞減。

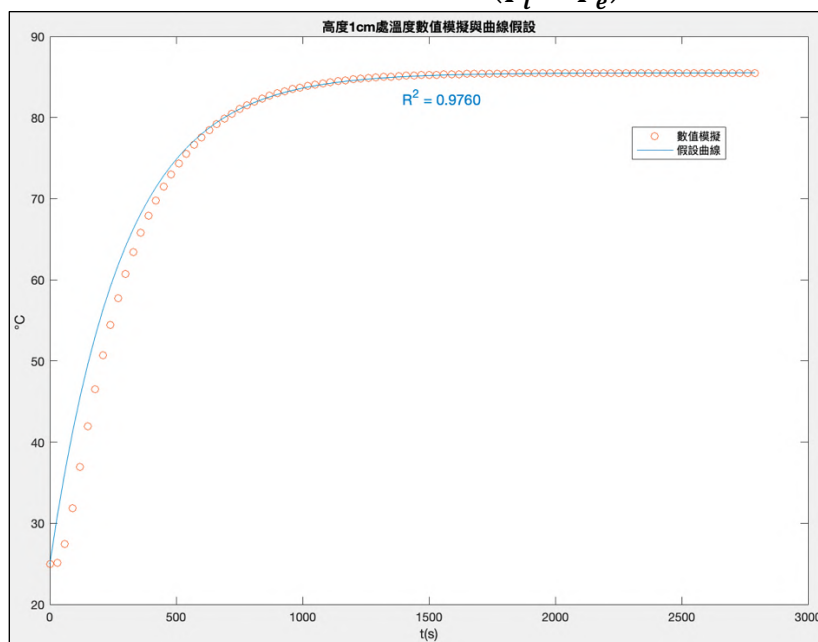
觀察曲線，會發現類似 $y = A - Be^{-Cx}$ 。接著我們利用特殊點來找出函數形式。定義 T_i 為水滴最高點初始時溫度、 T_e 為熱平衡溫度。接著在定義模擬時第一個出現溫度隨時間變化率小於 0.02 ($\frac{\Delta T}{\Delta t} < 0.02$) 的點稱為追蹤點。 t_f 追蹤點時間， T_f 為追蹤點溫度。

設水柱最高點溫度對時間函數為：

$$T_h = A - Be^{-Ct}$$

而函數 T 過點 $(0, T_i)$ 、 (t_f, T_f) ，且當 $\lim_{t \rightarrow \infty} T = T_e$ 。利用這三個條件可得到：

$$T_h = T_e - (T_e - T_i) \left(\frac{T_f - T_e}{T_i - T_e} \right)^{\frac{t}{t_f}}$$

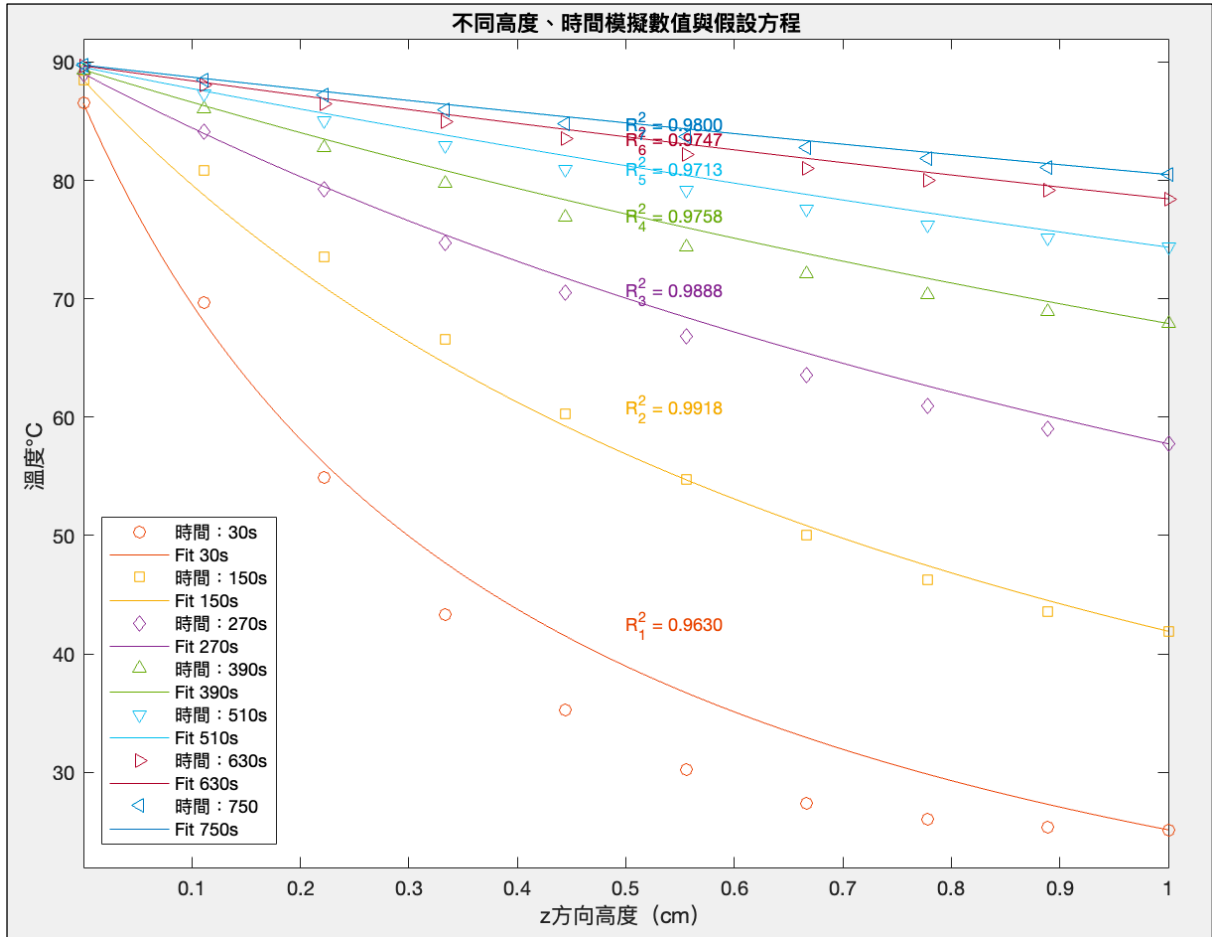


高度1cm模擬數值與假設曲線做圖，會發現假設曲線能很好的貼合模擬數據。

接著觀察同一時間不同高度的溫度曲線，會發現溫度隨高度增加而遞減，其形式與 $xy = k$ 類似，所以我們假設方程式為： $(z + \alpha)T = \beta$ ，其中 α 、 β 為常數，跟據邊界條件我們可以得知 T (推導見附件三)：

$$T = \frac{\frac{hT_h T_0}{T_0 - T_h}}{z + \frac{hT_h}{T_0 - T_h}}$$

h 為水滴高度、 T_h 為在 $z=h$ 處的溫度、 T_0 為 $z=0$ 處的溫度(加熱板溫度)。將模擬數據與假設曲線做圖如下：



上圖為不同時間溫度對高度數值模擬與溫度假設曲線，可以看到假設曲線與模擬數值吻合。

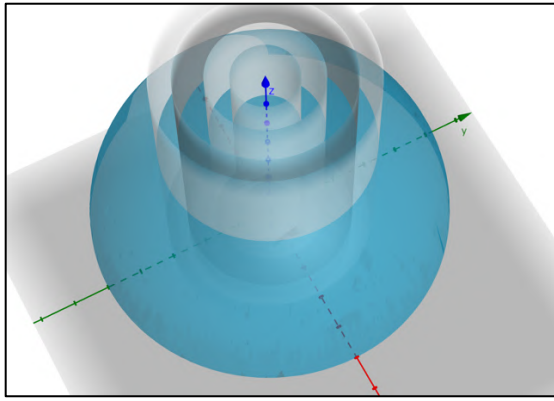
我們即可利用最高點溫度對時間關係（ $T_h = T_e - (T_e - T_i) \left(\frac{T_f - T_e}{T_i - T_e} \right)^{\frac{t}{t_f}}$ ）得知不同時間最高點溫度，再利用所得的最高點溫度帶入不同高度對溫度關係式，即可得到不同位置不同時間的溫度。推導如下（假設 T_0 固定為加熱板溫度（定值））：

在 t 時刻最高點溫度 $T_h = T_e - (T_e - T_i) \left(\frac{T_f - T_e}{T_i - T_e} \right)^{\frac{t}{t_f}}$ ，將 T_h 帶入 $T = \frac{\frac{hT_h T_0}{T_0 - T_h}}{z + \frac{hT_h}{T_0 - T_h}}$ ：

在 t 時刻、高度 z 處的溫度為

$$T = \frac{hT_0 \left(T_e - (T_e - T_i) \left(\frac{T_f - T_e}{T_i - T_e} \right)^{\frac{t}{t_f}} \right)}{zT_0 + (h - z) \left(T_e - (T_e - T_i) \left(\frac{T_f - T_e}{T_i - T_e} \right)^{\frac{t}{t_f}} \right)}$$

IV. 擴展分析水滴整體溫度分佈



如左圖所示，我們可以將水滴切成多塊圓環柱體。而每塊的熱傳導與柱狀體相同：

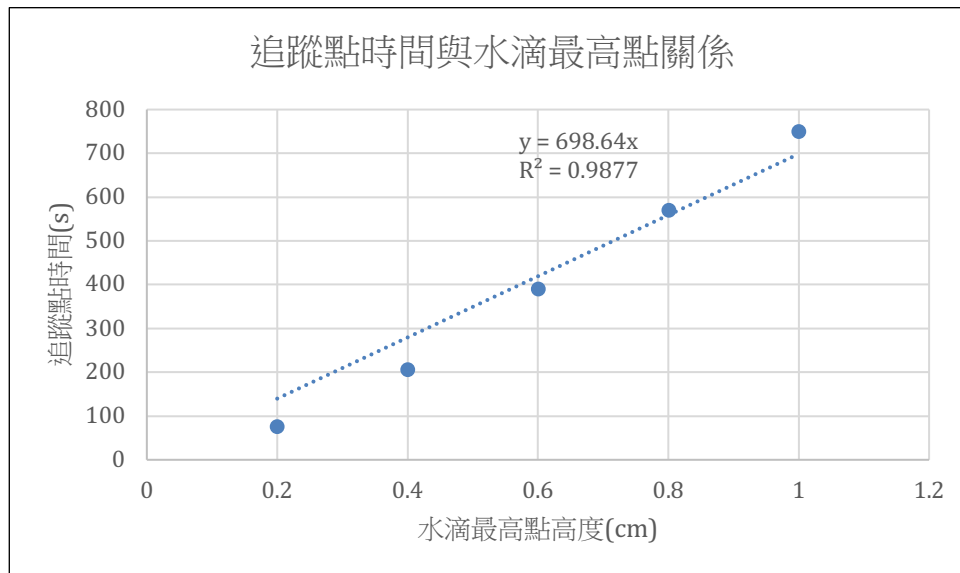
$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{高度} 0 \text{ 到 } h \text{ 處})$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} - h(T_s - T_\infty) = \rho c dz \frac{\partial T}{\partial t} \quad (z=h \text{ 處})$$

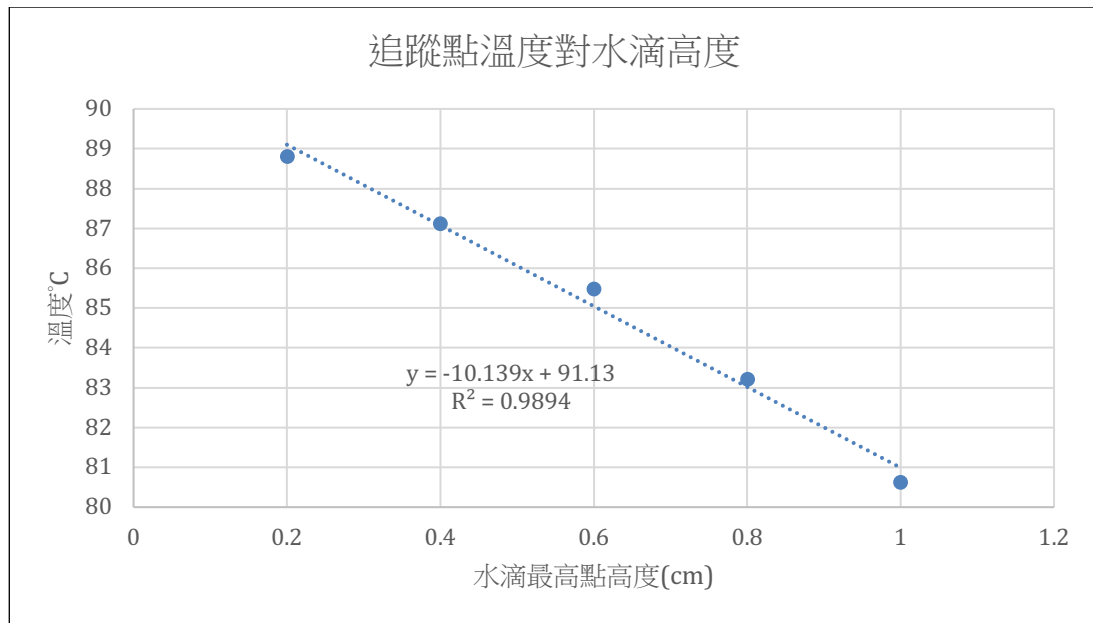
接著可利用先前的電腦模擬程式來模擬不同高度的熱傳導情形。為了與先前一維熱傳導做對照，CFL條件設定與原本的值相同。

$\frac{k dt}{\rho c dz^2} = C \text{ (CFL)}$ ， k 、 ρ 、 c 為定值，而 dt 設為0.1(與先前相同)，所以 dz^2 為定值(即 $\frac{H}{n}$ 為定值)。取高度 h : 0.01、0.008、0.006、0.004、0.002 (cm)，模擬結果如下：

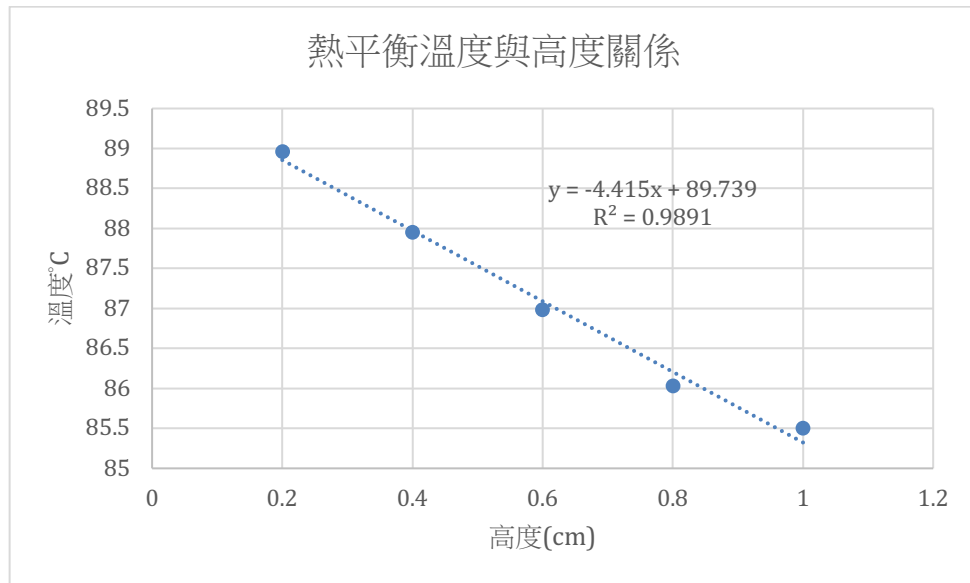
h值 (cm)	1	0.8	0.6	0.4	0.2
n值	50	40	30	20	10
$dz(\frac{H}{n})$	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
Ti(水滴最高點初始溫度℃)	25	25	25	25	25
t_f 追蹤點時間(s)	750	570	390	205	75
T_f (追蹤點時水滴最高點溫度℃)	80.622	83.213	85.4727	87.1122	88.8113



上圖為追蹤點時間對高度做圖，會發現截止時間與高度呈線性關係。



上圖為追蹤點溫度對水滴高度做圖，會發現追蹤點溫度隨高度降低，呈線性關係。



上圖為熱平衡溫度 T_e 對高度做圖，呈線性關係。

根據這三個線性關係，我們可以假設方程式：

$$t_f = \alpha h \text{ (過原點，因高度 } h \text{ 為零時追蹤點時間為零，其中 } \alpha > 0 \text{ 為常數)}$$

$$T_f = \beta h + \gamma \text{ (其中 } \beta < 0, \gamma > 0)$$

$$T_e = Mh + N \text{ (其中 } M < 0, N > 0)$$

(三)溫度函數整合：

我們可以利用先前所得的方程式整合出溫度函數 $T(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ 。現有方程式：

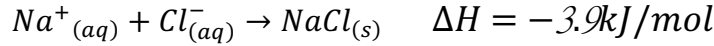
$$T = \frac{hT_0 \left(T_e - (T_e - T_i) \left(\frac{T_f - T_e}{T_i - T_e} \right)^{\frac{t}{t_f}} \right)}{zT_0 + (h - z) \left(T_e - (T_e - T_i) \left(\frac{T_f - T_e}{T_i - T_e} \right)^{\frac{t}{t_f}} \right)}$$

水滴曲線： $z(r) = h$ 、追蹤點時間與高度關係 $t_f = \alpha h$ 、追蹤點溫度與水滴高度 $T_f = \beta h + \gamma$ 及熱平衡溫度 $T_e = Mh + N$ ，帶入T可得：

$$T = \frac{z(r)T_0 \left(Mz(r) + N - (Mz(r) + N - T_i) \left(\frac{(\beta - M)z(r) + \gamma - N}{T_i - Mz(r) - N} \right)^{\frac{t}{\alpha z(r)}} \right)}{zT_0 + (z(r) - z) \left(Mz(r) + N - (Mz(r) + N - T_i) \left(\frac{(\beta - M)z(r) + \gamma - N}{T_i - Mz(r) - N} \right)^{\frac{t}{\alpha z(r)}} \right)}$$

(四)析出食鹽條件：

食鹽從解離態到晶體的化學反應式為：



考慮一小部分水滴從初始到結晶完成的熱傳導可以表示為（忽略水流所造成的濃度、密度變化）：

$$\int_{t_0}^{t_{end}} q dt + \Delta E = \Delta E' \quad \text{—— ①}$$

其中 q 為熱傳遞速率（單位時間吸收的熱量）、 t_{end} 為結束時間（結晶時間）， ΔE 為離子轉為晶體所放出能量、 $\Delta E'$ 為一小塊體積（柱座標下）從初始到結晶吸收的熱量（因對於每一小塊體積而言，需要吸收熱量才會促使食鹽結晶）。

其中 ΔE 可以轉化成（ m 為分子量）：

$$\Delta E = \frac{r d\theta dr dz \rho_0 n}{m} \times (-\Delta H)$$

將 ΔE 代入①並移項整理可得：

$$\int_0^{t_{end}} q dt = \frac{r d\theta dr dz \rho_0 n}{m} \times (\Delta H) + \Delta E'$$

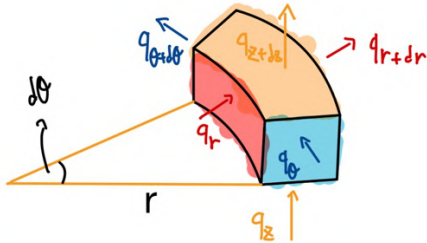
n 、 m 、 ΔH 為定值，且因初始時水滴濃度、溫度分佈均勻，從初始到結晶該小塊體積所吸收的熱量應正比於該小塊體積之質量，故另 $\Delta E' = r d\theta dr dz \rho_0 \varepsilon$ （ ε 為單位質量從初始到結晶完成所需要的熱量）。整理可得：

$$\int_0^{t_{end}} q dt = r d\theta dr dz \rho_0 \left(\frac{n\Delta H}{m} + \varepsilon \right)$$

(五)熱傳導：

現在我們探討在柱座標下的一小塊體積，位置在 (r, θ, z) ，欲計算 t_{end} 與其位置之關係，需利用 T （溫度）與 t （時間）關係式，再搭配傅立葉定律得到。

在柱座標下 q （如下左圖所示）： $q = q_r - q_{r+dr} + q_z - q_{z+dz} + q_\theta - q_{\theta+d\theta}$



因為水滴以 z 軸來看為對稱，在同樣的 r 、 z 溫度一樣，與 θ 無關，故 $q_\theta - q_{\theta+d\theta} = 0$ ，且溫度函數 T 可以用 (r, θ, z, t) 。將傅立葉定律帶入並化簡可得到

$$q_r - q_{r+dr} = r d\theta dz \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr$$

$$q_z - q_{z+dz} = r d\theta dr \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz$$

整理後可得：

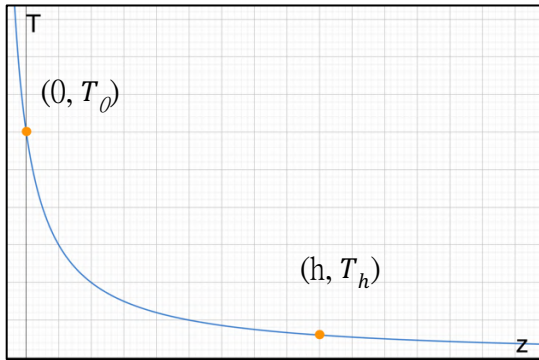
$$q = r d\theta dr dz \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right)$$

將其代入析出條件整理可得：

$$\int_0^{t_{end}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) dt = \rho_0 \left(\frac{n\Delta H}{m} + \varepsilon \right)$$

因 ρ_0 、 n 、 m 、 ΔH 、 ε 對於同一水滴而言皆為常數，故等號右側為定值。

(六)結晶速率：



在任一時刻，對於在位置 (r, z) 的溫度表示為：

$$T = \frac{\frac{hT_h T_0}{T_0 - T_h}}{z + \frac{hT_h}{T_0 - T_h}}$$

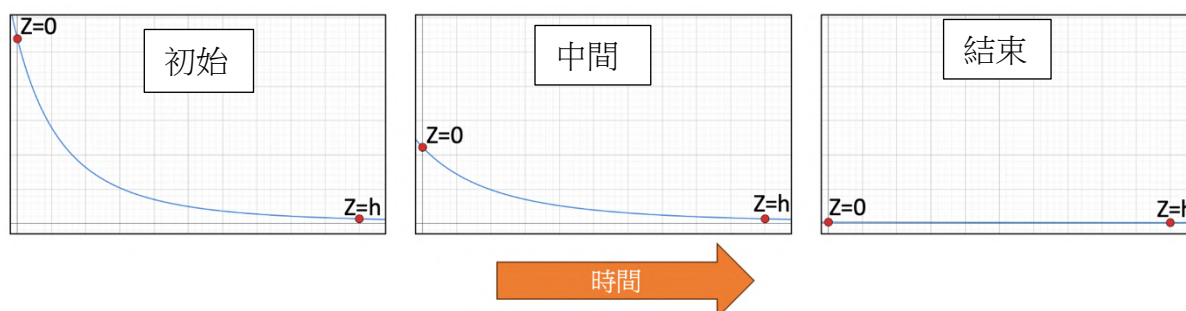
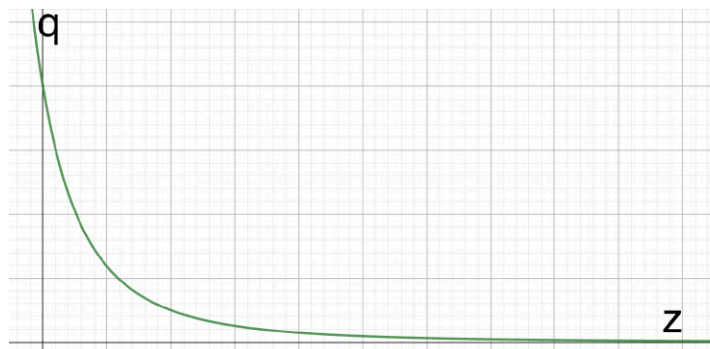
h 為該徑向位置對應的水滴高度（ $z(r)$ ）、 T_h 為在 $z=h$ 處的溫度、 T_0 為 $z=0$ 處的溫度，其中做圖如左邊，與我們預期相符。

我們忽略徑向的熱傳導，只考慮垂直方向的熱傳導，即

$$\int_0^{t_{end}} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dt = \rho_0 \left(\frac{n\Delta H}{m} + \varepsilon \right)$$

$$\text{而} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{2k \frac{hT_o T_o}{T_o - T_h}}{\left(z + \frac{hT_h}{T_o - T_h} \right)^3}, \text{ 做圖}$$

(如右)，可知 $z=0$ 處最大。
對於同一水滴同一位置而言，其 T_h 會隨時間遞增，而 T_o 不變。將 T_h 調整即可得到不同時間對於同一徑向位置、不同高度的熱傳導。利用geogebra做圖如下：

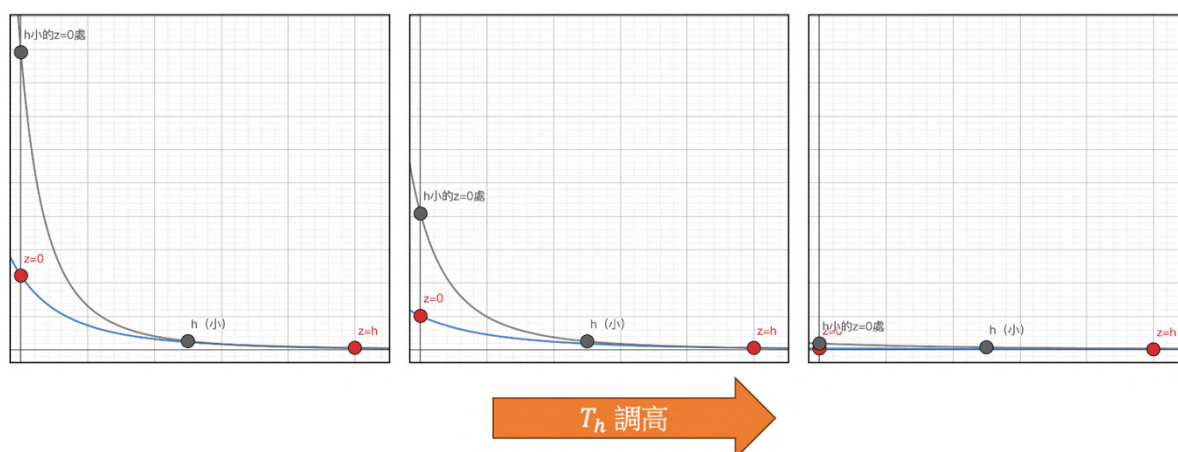


可看出從初始到結束， $z=0$ 處的 $\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ 皆為最大值，而析出條件：

$$\int_0^{t_{end}} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dt = \rho_0 \left(\frac{n\Delta H}{m} + \varepsilon \right)$$

因右式為常數，任何時刻 $\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ 都為最大值，所以位置 $z=0$ 處 t_{end} 為最小。我們可推論，對於同一徑向位置、不同高度而言， $z=0$ 處所需要結晶的時間越短。

接著比較不同高度的熱傳導，設定兩個 h ，並把兩條方程式 T_h 調高，會發現 h 小（即高度小）的 $\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ 皆較大。



從圖形中得知，在狀態一樣下，僅 h 高度改變，對於同高度而言，其徑向位置對應高度越小的 $\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ 越大，故對應高度越小 t_{end} 越小。



所以對於一滴食鹽水滴而言，高度越低、徑向位置對應水滴高度越低處，結晶時間越短。綜合以上推論，水滴與介面交界邊緣應為最先產生晶種之處，此模型對結晶速率的推論也與顯微鏡中所觀察到邊緣最先結晶相符。

(七)水流分析

實驗中可發現食鹽環結構，我們猜想食鹽環的形成應該與水滴內的對流有關，於是我們研究以下幾種可能影響對流的機制。

1. 熱對流：

在柱座標下的連續方程為：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{r \partial \theta} \right)$$

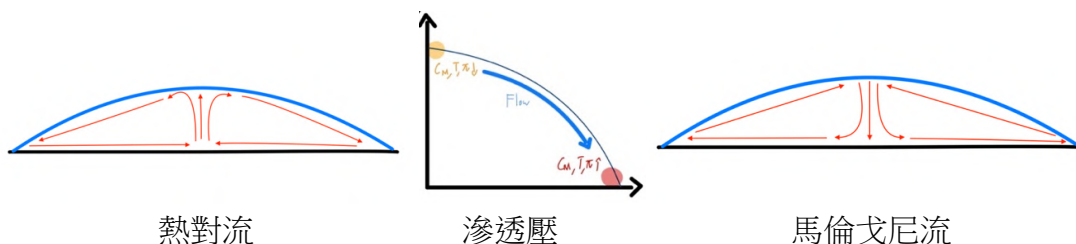
因為水滴從上往下看為對稱圓形，可知 $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ ，又因介面均勻加熱，故假設水平方向溫度梯度為0，僅有z方向有溫度梯度。分析水滴中心z=0處，因 $\frac{\partial T}{\partial z} < 0$ ，可得知一小部分水會升溫，導致密度會降低($\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$)，因為r、 θ 分量沒有溫度差，與四周接觸(相同z)的小部分體積無區別，則 $\frac{\partial \rho V_r}{\partial r}$ 、 $\frac{\partial \rho V_\theta}{r \partial \theta}$ 皆為零。從連續方程，因為z=0接觸介面的緣故，可知 $\frac{\partial \rho V_z}{\partial z} > 0$ ，故水流往上。

2. 滲透壓：

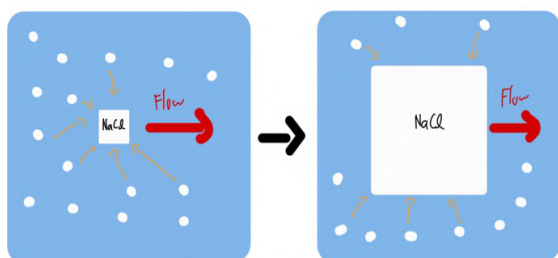
考慮在 $z = 0$ 、邊緣處水滴對比水滴中心表面上一處，從熱傳導分析可知 $q_{edge} > q_{center}$ ，又 $q \propto$ 單位時間水的蒸發量 $\propto$ 濃度變化量，所以邊緣處濃度較大。現在僅分析因濃度差所導致的表面流動，根據滲透壓 $\pi = iC_mRT$ ($i=2$ 、 C_m 為體積莫耳濃度)，可知邊緣處的滲透壓較大，所以水流會流向邊緣如下中間圖片。

3. 馬倫戈尼流：

考慮馬倫戈尼流(Marangoni Flow)，水的溫度越高表面張力越小，水滴表面會有表面張力差，流動方向會由表面張力小流至較大區域，所以我們可知水流流動是這三項的平衡。

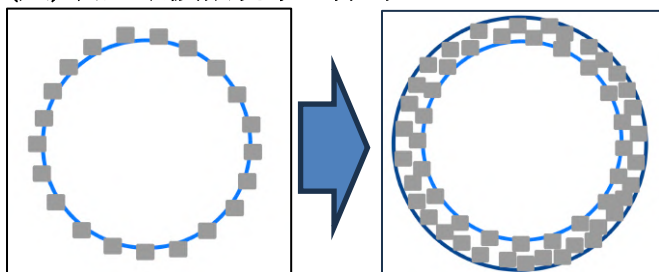


我們觀察紅外線熱像儀圖形可知表面中間溫度高，邊緣溫度低。所以證明熱對流及滲透壓為影響流動的主要因素。



考慮液滴內流動的晶種，因吸引附近的食鹽析出又形成更大的晶體，流動至邊緣處時，因此處結晶速率最快，單位時間內食鹽生成量最大，故晶體在此聚集，形成食鹽環狀結構。

(八) 食鹽環擴張現象之探討



從介面撒鹽實驗可知撒鹽後接觸角變小，推測是因為鹽與水之間的作用力，造成毛細管流，流向指向水滴邊緣。在結晶時，析出的鹽會想把水往外帶，而鹽與鹽之間有水往外帶後又析出鹽，導致食鹽環會有往外擴張的現象。

(九) 模型統整：

藉由建立物理模型，結合了結晶速率、流動，解釋食鹽環形成機制及外擴現象。

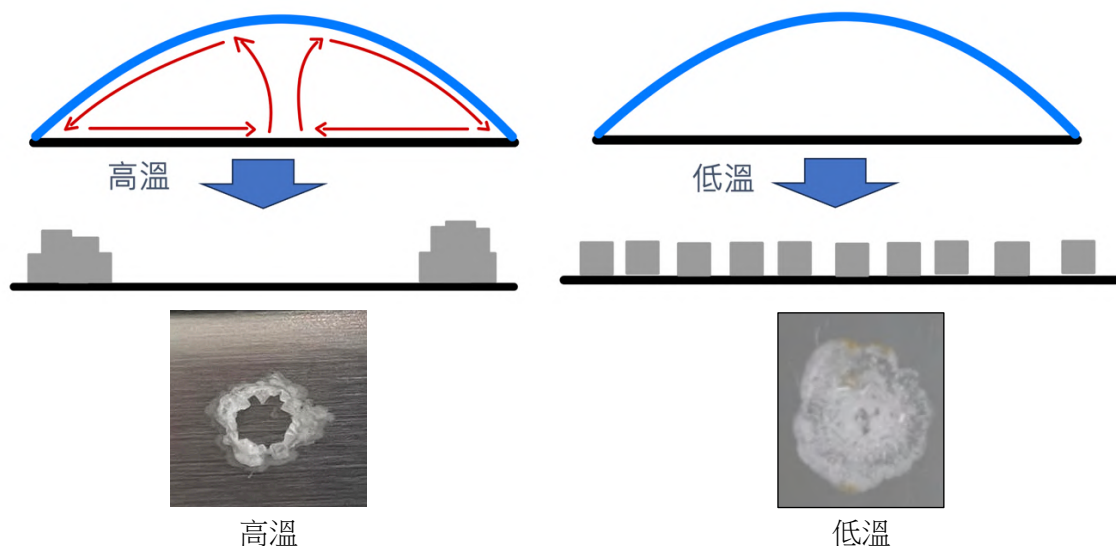
1. **結晶速率**：邊緣較中心結晶快，高度低處較高處快。
2. **流動影響**：熱對流及滲透壓所帶來的流動影響較馬倫戈尼流大。晶種隨著流動吸引附近的食鹽顆粒，聚集直到流動至水滴邊緣，並形成環狀結構。
3. **毛細管流**：造成蒸發時食鹽環會有往外擴張的趨勢。

四、現象探討：

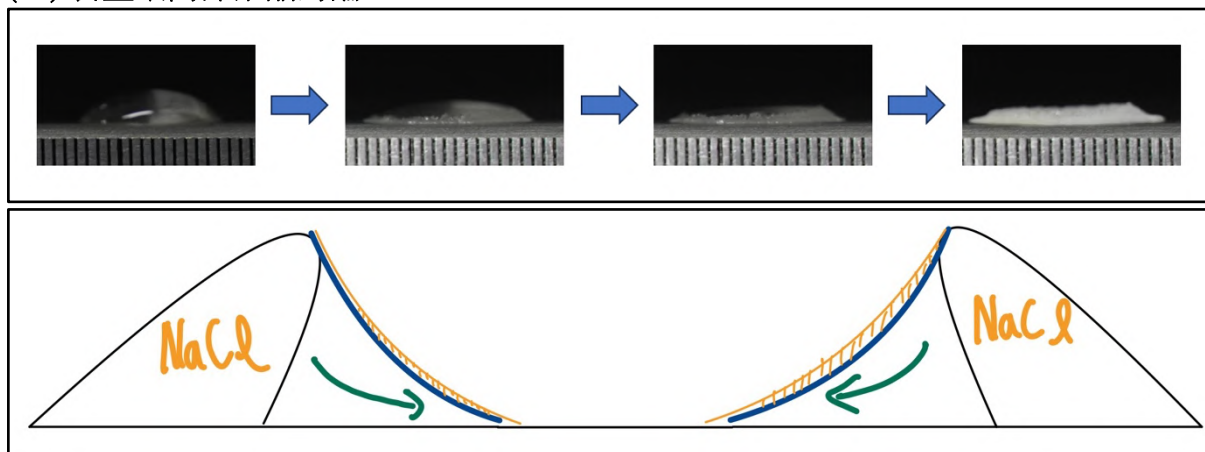
利用建立之模型討論實驗中所觀察的現象。

(一) 高低(常)溫時的食鹽環結晶比較：

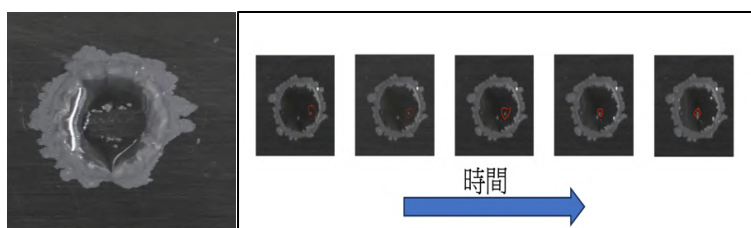
- I. **高溫時**：整體 q 大，因邊緣鹽生成的量大，且內部流動大，所以食鹽聚集至水滴邊緣，易形成環。
- II. **低溫時**：整體 q 小，表面各處結晶均勻，且內部流動小，所以表面各處結晶均勻。



(二) 食鹽環內部結晶討論



如上圖，現在觀察其中一邊，在一小段時間蒸發了一些體積(橘色部分)，因為邊緣處對應高度低，結晶速率快，流動也帶動了鹽粒並在內圓邊緣處結晶。

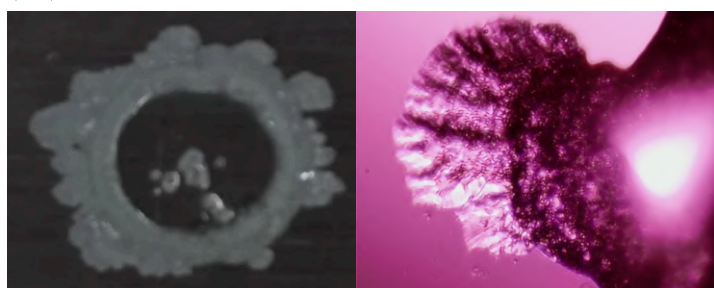


左圖為濃度15%、體積20 μ L、上視圖，在蒸發過程中可以發現內部液體邊緣有結晶產生。甚至有發現食鹽結晶往內流如右圖。右圖為濃度25%、體積20 μ L，上視圖，可以發現有鹽粒由外往內帶動。

(三) 加入清潔劑影響

當界面加入清潔劑時，水的表面張力被破壞，因為清潔劑的表面張力較小，所以會有明顯的馬倫戈尼流，流向指向水滴邊緣。而結晶時的環相比沒有加清潔劑時較明顯，所以可得知馬倫戈尼流會影響食鹽結晶狀態。

(四) 食鹽環冠狀結構



在實驗時，發現食鹽環會出現類似皇冠狀的結構，推論是因為初始水滴邊緣形狀不均勻，使得水滴邊緣各處單位時間內生成的鹽量不一樣，導致毛細管流強度不同，故在食鹽生成量高處形成類似冠狀的結構。

五、在更高溫時的食鹽環結晶討論

在加熱板溫度550度時，當水滴撞擊介面時，會形成扁平形狀，而水滴下會產生一片食鹽結晶，如下左圖。而在撞擊時跳出的小水滴，會因為萊頓弗羅斯特效應，懸浮於介面上如下右圖，且在經過撞擊時結晶的食鹽區域並不會吸附在一起。小水滴底面會隨時間結晶出一小塊，並吸附在水滴底下，直到蒸發完成。



陸、結論

- 一. 食鹽水滴濃度越大則折射率越大，由自行建置的量測系統發現內部濃度分佈不均勻。
- 二. 在加熱時（結晶前）直徑不會隨時間改變。
- 三. 在同體積不同濃度時，濃度較大者開始結晶時間較短，但需要結晶時間越長，且環高、食鹽環體積皆與濃度呈線性關係。
- 四. 固定體積下，接觸角隨濃度增大而變大，且呈線性關係。
- 五. 固定濃度下，接觸角隨體積增大而變大，可用修正後的楊氏方程式描述，滿足：
$$\cos\theta = \frac{S_{s-g}-S_{s-l}}{S_{l-g}} + \frac{\kappa}{S_{l-g}} \frac{l}{\alpha}。$$
- 六. 由實驗及理論推導發現，結晶速率邊緣較中心結晶快，高度低處較高處快。
- 七. 熱對流及滲透壓所帶來的流動影響較馬倫戈尼流大。晶種隨著流動吸引附近的食鹽顆粒，聚集直到流動至水滴邊緣，並形成環狀結構。
- 八. 因鹽與水之間的作用力，造成毛細管流，導致食鹽環會有往外擴張的現象。
- 九. 高溫時易形成環狀結構，而常溫時環狀結構不明顯。
- 十. 十因初始水滴邊緣形狀不均勻，導致毛細管流強度不同，故在食鹽生成量高處形成類似冠狀的結構。
- 十一. 結晶過程中食鹽環中心也會產生結晶顆粒，推測是因為邊緣處對應高度低，結晶速率快，在內圓邊緣處結晶。
- 十二. 介面溫度夠高，小食鹽水滴會在介面彈跳，形成萊頓弗羅斯特效應。

柒、未來展望

- 一、能用更精準的儀器測量
- 二、能更精準的測量內部鹽粒流動
- 三、能利用濃度分佈測量方法測出結晶時的水滴內濃度分佈
- 四、能利用數值方法算出 $\rho_0 \left(\frac{n\Delta H}{m} + \varepsilon \right)$ 的實際值。

捌、應用

濃度測量方法革新

藉由自製的濃度測量方法，可測得水滴內不同位置、時間的濃度。這可應用在關於擴散、對流等領域中。

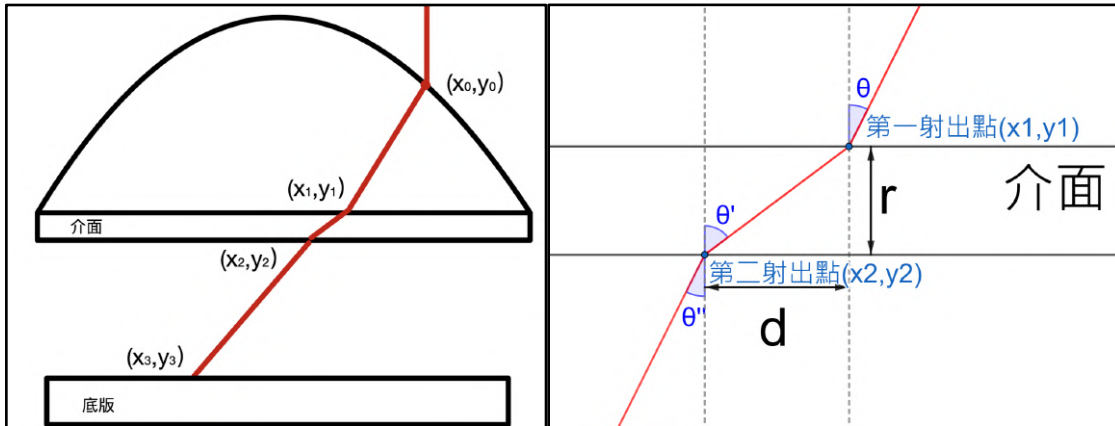
玖、參考資料

- [1] <https://www.nature.com/articles/srep24628>
 [2] <https://jfi.uchicago.edu/~tten/Coffee.drops/Nagel.7.4.pdf>
 [3] https://www.examiner.com.tw/admin/UserFiles/product_pdf/148048659322671700.pdf
 [4] https://aquaulb.github.io/book_solving_pde_mooc/solving_pde_mooc/notebooks/04_PartialDifferentialEquations/04_03_Diffusion_Explicit.html

拾、附件

附件一、濃度分佈推導

假設光在水滴中為直線前進，定義以水滴中心為原點，過水滴直徑且與介面垂直的面作為x-y平面，雷射光以x軸方向來回移動並垂直射入介面，並定義下面各點的座標位置為：



射入點 (x_0, y_0) 、第一射出點 (x_1, y_1) 、
 第二射出點 (x_2, y_2) 、追蹤點 (x_3, y_3) 將介面附近折射點放大示意圖

空氣的折射率定義為 n_1 、在 (x_0, y_0) 與 (x_1, y_1) 之間的平均折射率 $(x, y) = \left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}\right)$ 為 n_2 、界面的折射率為 n_3 。右圖中 r 為介面厚， d 為x方向折射後的位移，即 $d = |x_1 - x_2|$ ，其中 (x_1, y_1) 為未知，由司乃爾定律可得： $n_2 \sin \theta = n_3 \sin \theta' = n_1 \sin \theta'' \rightarrow n_2 = \frac{n_1 \sin \theta''}{\sin \theta}$

$$\text{且 } \sin \theta = \frac{|x_0 - x_1|}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} \quad , \quad \sin \theta'' = \frac{|x_3 - x_2|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

$$\text{由 } n_3 \times \sin \theta' = n_3 \times \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} = n_1 \times \sin \theta'' = n_1 \times \frac{|x_3 - x_2|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \quad \text{--- ①}$$

又 n_3 、 r 是已知，則由①式移項可得 $d = \frac{\frac{n_l}{n_3} \times \frac{|x_3 - x_2|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}}{1 - \left(\frac{n_l}{n_3} \times \frac{|x_3 - x_2|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \right)^2} \times r$

而在 $x_0 > x_2$ 、 $x_l > x_2$ 時， $(x_l, y_l) = (x_2 + d, y_2 + r)$ ，在 $x_0 < x_2$ 、 $x_l < x_2$ 時， $(x_l, y_l) = (x_2 - d, y_2 + r)$ ，由移項 $n_2 \times \sin\theta = n_l \times \sin\theta''$ 可得：

$$n_2 = n_l \times \frac{\sin\theta''}{\sin\theta} = n_l \times \frac{\frac{|x_3 - x_2|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}}{\frac{|x_0 - x_l|}{\sqrt{(x_0 - x_l)^2 + (y_0 - y_l)^2}}}$$

在 $x_0 > x_2$ 、 $x_l > x_2$ 時，將 $(x_l, y_l) = (x_2 + d, y_2 + r)$ 帶入可得：

$$n_2 = n_l \times \frac{\frac{|x_3 - x_2|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}}{\frac{|x_0 - x_2 - d|}{\sqrt{(x_0 - x_2 - d)^2 + (y_0 - y_2 - r)^2}}} = n_l \frac{|x_3 - x_2|}{|x_0 - x_2 - d|} \frac{\sqrt{(x_0 - x_2 - d)^2 + (y_0 - y_2 - r)^2}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

在 $x_0 < x_2$ 、 $x_l < x_2$ 時，將 $(x_l, y_l) = (x_2 - d, y_2 + r)$ 帶入可得：

$$n_2 = n_l \times \frac{\frac{|x_3 - x_2|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}}{\frac{|x_0 - x_2 + d|}{\sqrt{(x_0 - x_2 + d)^2 + (y_0 - y_2 - r)^2}}} = n_l \frac{|x_3 - x_2|}{|x_0 - x_2 + d|} \frac{\sqrt{(x_0 - x_2 + d)^2 + (y_0 - y_2 - r)^2}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

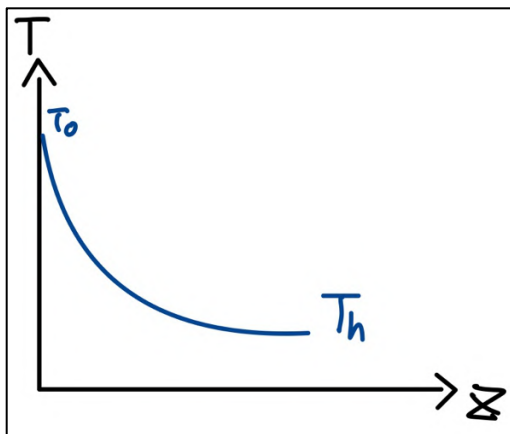
附件二、折射率C++程式


```

1  #include<iostream>
2  #include<math.h>
3  using namespace std;
4
5  int main(){
6      int k;
7      cin>>k;
8      double None=1.000277, Ntwo[k], Nthree=1.559749417, Pzero[k][2],
9      Pone[k][2], Ptwo[k][2], Pthree[k][2], r=0.8660254038, d[k], n[k];
10     double sintheta[k], sinthetapp[k];
11     double m=None/Nthree;
12     cout<<"輸入射入點";
13     for(int i=0;i<k;i++){
14         cin>>Pzero[i][0]>>Pzero[i][1];
15     }
16     cout<<"輸入第二射出點";
17     for(int i=0;i<k;i++){
18         cin>>Ptwo[i][0]>>Ptwo[i][1];
19     }
20     cout<<"追蹤點";
21     for(int i=0;i<k;i++){
22         cin>>Pthree[i][0]>>Pthree[i][1];
23     }
24     for(int i=0;i<k;i++){
25         sinthetapp[i]=fabs(Pthree[i][0]-Ptwo[i][0])/
26         pow(pow(Pthree[i][0]-Ptwo[i][0],2)+pow(Pthree[i][1]-Ptwo[i][1],2),0.5);
27         d[i]=m*sinthetapp[i]*r/(pow(1-pow(m*sinthetapp[i],2),0.5));
28     }
29     for(int i=0;i<k;i++){
30         if(Pzero[i][0]>Ptwo[i][0]){
31             Pone[i][0]=Ptwo[i][0]+d[i];
32             Pone[i][1]=Ptwo[i][1]+r;
33         }
34         else{
35             Pone[i][0]=Ptwo[i][0]-d[i];
36             Pone[i][1]=Ptwo[i][1]+r;
37         }
38     }
39     for(int i=0;i<k;i++){
40         n[i]=None*fabs(Pthree[i][0]-Ptwo[i][0])*pow(pow(Pzero[i][0]-Pone[i][0],2)+pow(Pzero[i][1]-Pone[i][1],2),0.5)
41         /(fabs(Pzero[i][0]-Pone[i][0])*pow(pow(Pthree[i][0]-Ptwo[i][0],2)+pow(Pthree[i][1]-Ptwo[i][1],2),0.5));
42         cout<<n[i]<<" ";
43     }
44     return 0;
45 }

```

附件三、推導



假設 $(z + \alpha)T = \beta$

其中在 $z=0$ 處 $T=T_0$ 、在 $z=h$ 處 $T=T_h$ ，帶入可得：

$$\alpha T_0 = \beta$$

$$(h + \alpha)T_h = \beta$$

$$\text{解聯立可得 } \alpha = \frac{hT_h}{T_0 - T_h}, \beta = \frac{hT_h T_0}{T_0 - T_h}$$