

壹.研究動機

老師在課堂上曾講授球體做純滾動的現象及滾動摩擦小於滑動摩擦的概念，但找了很多教科書都沒有這方面的詳細資料，所以我們希望藉由一個簡單的實驗設計來探討滾動運動的特性，並求出滾動摩擦係數 r 值，進而了解滾動摩擦的影響。

貳.研究目的

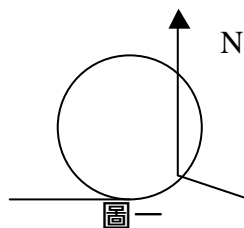
- 一. 驗證從傾斜軌道滾下的鋼球，其質心做等加速度直線運動。
- 二. 計算重力加速度 g 值，並檢驗滾動理論之正確性。
- 三. 找出鋼球由純滾動過渡到又滾又滑的臨界角(臨界高度)。
- 四. 計算滾動摩擦係數 r 值，並探討 r 值與鋼球半徑及軌道材質的關係。
- 五. 藉由滾動摩擦所作功，修正純滾動中的力學能守恆關係，並計算鋼球轉動慣量的幾何常數 K 值。
- 六. 探討靜摩擦力和滾動摩擦在純滾動中扮演的角色。

參.理論模型

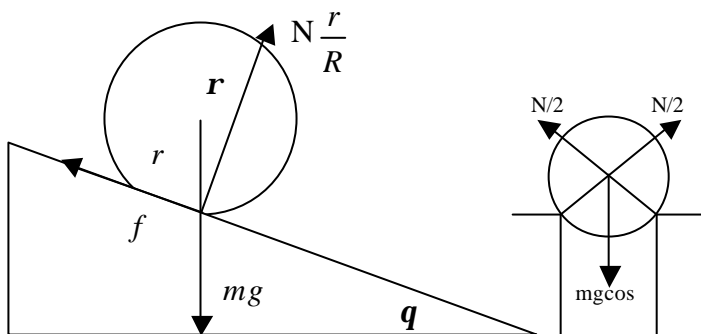
在水平面上滾動的鋼球會造成接觸面稍微產生形變，導致正向力不通過質心，而產生反向力矩阻止其轉動，我們假設滾動摩擦 T_r 以力矩方式呈現。(如圖一)

$$T_r = rN$$

r : 滾動摩擦係數
 N : 正向力



我們在實驗中所使用的是有凹槽的傾斜軌道如圖二，因此實驗中鋼球繞通過球心轉軸轉動的有效半徑是 r 而不是鋼球半徑 R 。



R : 鋼球半徑

$2W$: 軌道寬

$$r \text{ (有效半徑)} = \sqrt{R^2 - W^2}$$

$$I \text{ (鋼球的轉動慣量)} = \frac{2}{5} mR^2$$

θ : 軌道傾斜角

m : 鋼球質量

圖二

一.動力分析

根據質心定理 (如圖二)

$$ma = mg \sin \mathbf{q} - f \dots\dots\dots(1)$$

a : 質心加速度

f : 摩擦力

g : 重力加速度

以垂直紙面通過球心的軸線為轉軸, 由轉動定理得

$$I\mathbf{a} = rf - T_r \dots\dots\dots(2)$$

\mathbf{a} : 鋼球繞通過球心轉軸之角加速度

$$\text{滾動摩擦力矩 } T_r = rN \left(\frac{r}{R} \right) \quad \text{又 } N \left(\frac{r}{R} \right) = mg \cos \mathbf{q}$$

$$T_r = r mg \cos \mathbf{q} \dots\dots\dots(3)$$

(一)純滾動階段

當鋼球作純滾動時,

$$r\mathbf{a} = a \dots\dots\dots(4)$$

且 f 為靜摩擦力

由式(1)、(2)、(3)、(4)可得

$$a = g \left[\frac{\sin \mathbf{q} - \frac{r}{R} \cos \mathbf{q}}{1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{r} \right)^2} \right] \dots\dots\dots(5)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\cos \mathbf{q}} = \left[\frac{g}{1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{r} \right)^2} \right] \tan \mathbf{q} - \left[\frac{g \frac{r}{R}}{1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{r} \right)^2} \right] \dots\dots\dots(6)$$

(二)又滾又滑階段

當鋼球又滾又滑時,

$$a \neq r\mathbf{a} \text{ 且 } f = \mu N = \mu mg \left(\frac{R}{r} \right) \cos \mathbf{q} \dots\dots\dots(7)$$

f : 動摩擦力 μ : 動摩擦係數

由式(1)、(7)可得

$$a = g \left[\sin \mathbf{q} - \mu \left(\frac{R}{r} \right) \cos \mathbf{q} \right] \dots\dots\dots(8)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\cos \mathbf{q}} = g \tan \mathbf{q} - \mu g \left(\frac{R}{r} \right) \dots\dots\dots(9)$$

二. 能量分析

一般教科書都忽略滾動摩擦的作用，將鋼球從高度 h 的傾斜軌道滾下的過程視為力學能守恆，則：

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 \dots\dots\dots(10)$$

v_f : 鋼球在軌道底部的速率 ω_f : 鋼球在軌道底部的角速率

一般可以將圓形物體相對質心的轉動慣量 I 寫成 $I = KmR^2$ ，其中 K 值我們定義為幾何常數，而實心圓球的理論 K 值為 0.4。

鋼球作純滾動從傾斜軌道上滾下時，將 $\omega_f = \frac{v_f}{r}$ 代入式(10)，由力學能守恆可

導出幾何常數 K ：

$$K = \left(\frac{2gh}{v_f^2} - 1 \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2 \dots\dots\dots (11)$$

實際上，滾動摩擦會消耗力學能，其所做負功

$$W = -T_g \Delta f = -(rmg \cos q) \Delta f \quad \Delta f : \text{角位移的量值}$$

$$\Delta f = \frac{s}{r} \quad s : \text{鋼球行經的軌道長度}$$

根據功能定理加入滾動摩擦後的修正式應為

$$mgh + W = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 \dots\dots\dots(12)$$

可導出幾何常數 K

$$K = \left[\frac{2gh + \frac{2W}{m}}{v_f^2} - 1 \right] \left(\frac{r}{R} \right)^2 \dots\dots\dots (13)$$

肆. 研究器材

1. 鋼球×6 (大、中、小各二)
2. 光電計時器
3. 電磁鐵
4. 木軌道
5. 玻璃軌道
6. 直尺
7. 千斤頂
8. 量角器
9. 擺錘
10. 水平儀
11. 游標尺

伍.研究過程及方法

一.實驗步驟

- (一).測量鋼球的直徑 $2R$ 及軌道的寬度 $2W$, 求出鋼球與軌道間的有效半徑 r (表一)。

木軌道			
	$2W$ (cm)	$2R$ (cm)	r (cm)
小球	1.430	2.145	0.799
中球	1.450	2.465	0.997
大球	1.470	3.020	1.319

玻璃軌道			
	$2W$ (cm)	$2R$ (cm)	r (cm)
小球	1.200	2.145	0.889
中球	1.200	2.465	1.077
大球	1.200	3.020	1.386

鋁軌道			
	$2W$ (cm)	$2R$ (cm)	r (cm)
小球	1.050	2.145	0.935
中球	1.060	2.465	1.113
大球	1.090	3.020	1.408

表一

- (二).利用水平儀調整軌道至水平。
- (三).在軌道上設置光電閘，而每個光電閘以 20 公分為間隔，將起始端到終止端的 100 公分等分成 5 組，分別測量鋼球通過 0~20、20~40、40~60、60~80、80~100 公分的時間間隔。
- (四).調整電磁鐵的位置，使其吸附鋼球時，鋼球的前沿恰好與標尺的零刻度對齊，並調整軌道，讓鋼球的起始端至離地高度 2 公分處。
- (五).靜止釋放鋼球，令其滾動行經的軌道長度為 100 公分。
- (六).記錄步驟(三)中的時間間隔，並重複步驟(五)10 次。
- (七).以 2 公分為單位，改變鋼球釋放的高度，並重複實驗步驟(五)及(六)到高度 70 公分為止。
- (八).改變大、中、小球重複步驟(二)至(七)。

二.數據處理

- (一) 若物體做等加速直線運動，則平均速度 \bar{v} 、時間間隔 Δt 、加速度 a 及終止端的末速 v_f 會滿足：

$$\bar{v} = v_f - \frac{1}{2} a \Delta t \dots\dots\dots(14)$$

將鋼球在同一釋放高度滾下時，測得的 \bar{v} 對 Δt 做圖
並利用線性迴歸法計算圖形的斜率(M)及Y截距(b)以導出不同釋放高度時鋼球的加速度 a 及末速 v_f ：

$$a = 2(-M) \quad , \quad v_f = b$$

- (二) 同一軌道上同一鋼球在不同釋放高度 (傾斜角) 滾動下所測得的加速度 a ，將 $a/\cos q$ 對 $\tan q$ 作圖，並利用線性迴歸法計算斜率(M)和Y截距(b)

(1). 根據式(6)可得:鋼球純滾動時，

$$\text{重力加速度 } g = \left[1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] (M) \dots\dots\dots(15)$$

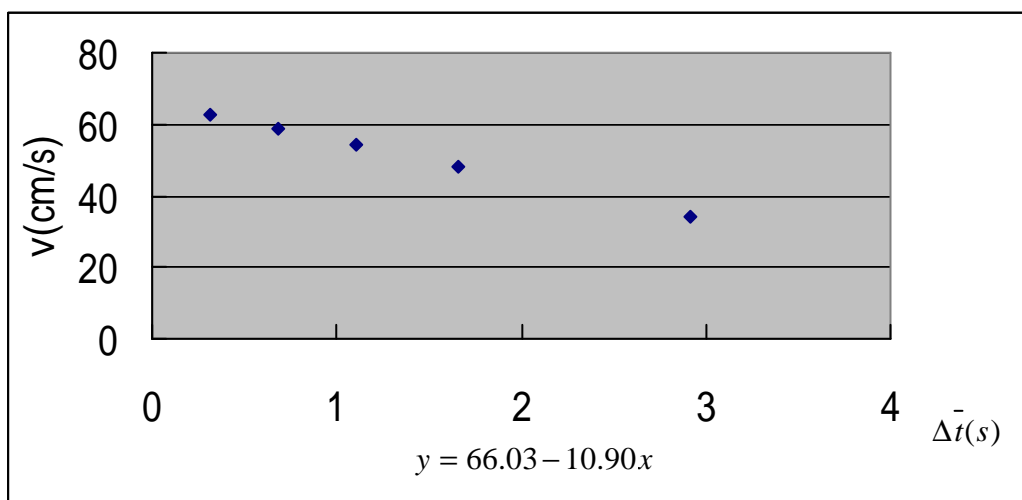
$$\text{滾動摩擦係數 } r = \frac{(-b)}{M} r \dots\dots\dots(16)$$

(2). 根據式(9)可得:鋼球又滾又滑時，

$$\text{重力加速度 } g = M \dots\dots\dots(17)$$

陸.實驗結果與討論

- 一. 由鋼球從同一釋放高度滾下測得的 \bar{v} 對 Δt 畫出的圖形是一條直線，配合式(14)可證實鋼球的質心是做等加速直線運動。如圖三、表二。



圖三 玻璃軌道-大球(釋放高度 h=4cm)

斜率(M)	相關係數平方值	a (cm/s ²)	v_f (cm/s)
-10.90	0.999	21.80	66.03

表二

二. 由鋼球從軌道不同釋放高度（不同傾斜角）滾下所測得的數據，繪出其 $a/\cos q$ 對 $\tan q$ 所得到的圖形(如圖四~十二)，可看出圖形大致上可分為兩段直線，正如我理論所預測：隨著軌道傾斜角的變化，鋼球的運動將呈現“純滾動”及“又滾又滑”兩種類型。藉由線性迴歸法可得其相關係數的平方值均非常接近 1，且：

(一)由第一段直線(圖四-1~十二-1)及式(15)計算出重力加速度 g 值均非常接近理論值 $980\text{cm}/\text{s}^2$ (表四~十二)，可佐證我們在純滾動方面的理論推導。

(二)由第二段直線(圖四-2~十二-2)及式(17)計算出重力加速度 g 值，從表四~十二中發現鋼球在玻璃軌道上所測得的 g 值較接近理論值 $980\text{cm}/\text{s}^2$ ，但在木軌道及鋁軌道上測得的 g 值與理論值間有較大的差距。可見在“又滾又滑”方面的理論推導，可能少考慮了某些因素，才會造成 g 值低估的結果。我們推測：在又滾又滑階段的摩擦力不單為動摩擦力，可能是靜摩擦力和動摩擦力交錯存在。

三. 由圖四~十二可看出鋼球在傾斜軌道上的運動，大致可分為兩種類型，以某一個釋放高度為分界，圖形會有兩段不同的斜率。推測第一階段鋼球是做純滾動，當到達一定的釋放高度時，鋼球開始滑動，也就是進入第二階段又滾又滑。而此一釋放高度稱為「臨界高度」，相對底部的軌道傾斜角稱為「臨界角」。由圖形可看出玻璃軌道的臨界高度大約在釋放高度 34cm 附近(臨界角約 20°)，木軌道大約在釋放高度 42cm 附近(臨界角約 24°)，而鋁軌道釋放高度則是在 24cm 附近（臨界角約 14° ）。

四.由式(16)計算出鋼球在各種軌道上的滾動摩擦係數 r 值，發現：

- (1) 玻璃軌道及木軌道 r 值的數量級為 10^{-2}cm (表三)。而鋁軌道的 r 值太小，不可計算（小於誤差值）。
- (2) r 值有隨鋼球半徑增加而增大的趨勢。
- (3) 木軌道的 r 值最大，而鋁軌道最小。由木、玻璃、鋁三種材質的體彈性係數(bulk modulus) 可知，變形難易程度是木最容易，玻璃與木接近，而鋁最不易。此一結果亦能符合前述滾動摩擦是由於接觸面間稍微變形所產生的假設。

	玻璃軌道	木軌道
	$r \times 10^{-2}(\text{cm})$	
小球	0.98	1.08
中球	1.02	1.21
大球	1.12	1.34

表三 滾動摩擦係數 r 值

五. 由式(11)及(13)分別計算出鋼球的轉動慣量之幾何常數 K 值，由圖十三~十五可看出：對玻璃軌道和木軌道而言，鋼球在釋放高度低於臨界高度的傾斜軌道上作純滾動時，由力學能守恆公式計算出的 K 值與理論值 0.4 不甚吻合，有偏高的趨勢；而加入滾動摩擦的修正後，計算出的 K 值與理論值相當接近（差距約在 ± 0.02 之間）。對鋁軌道而言因為 r 太小，不需加入滾動摩擦的修正，計算出的 K 值即相當接近理論值 0.4。此一結果再次驗證滾動摩擦是存在的，且我們算出的 r 值亦相當正確。

在釋放高度大於臨界高度時，計算出的 K 值不管修正與否，都會和理論值有明顯的落差。這是因鋼球已由純滾動變成又滾又滑，此時 $v_f > rw_f$ ，且牽涉到動摩擦力做功，所以大於臨界高度後 K 值公式必須再另做修正。

六. 從能量觀點來看：

(一)由圖十六~圖十八，在臨界高度以下， $e_i - e_f$ 之值都相差不大，但在臨界高度以上， $e_i - e_f$ 開始變小，甚至變成負值。可見臨界高度附近為一分界，鋼球由純滾動過渡到又滾又滑的階段。(至於在高度大於臨界高度後， $e_i - e_f$ 會變成負值，是因鋼球已進入又滾又滑階段，此時 $v_f > rw_f$ ，造成 e_f 有高估的結果)。

(二)由圖十九~圖二十(釋放高度低於臨界高度)，鋼球在純滾動階段， e 值幾乎都很小，且不隨高度增加而大幅變化。因此可推測靜摩擦力在純滾動中不消耗力學能，而力學能的耗損是滾動摩擦所造成。

從力的分析來說，純滾動時，球與接觸面間必須存在有靜摩擦力，其作用有二：一是減慢球的平移速度，一是提供力矩增快球的角速度，將部分平移動能轉換成轉動動能，所以並不消耗力學能。而滾動摩擦是提供一反向力矩，減慢球的角速度，並消耗少量的力學能。

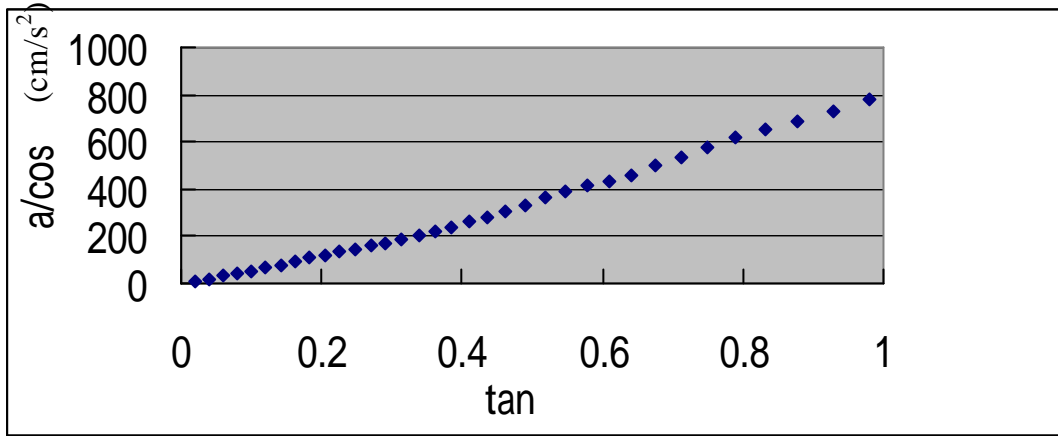
七. 由圖十三~十四中我們發現，玻璃軌道的第一點(釋放高度 $h=2\text{cm}$)及木軌道的第一及第二點($h=2\sim 4\text{cm}$)，修正後 K 值會低於理論值 0.4，而在釋放高度升高後修正 K 值才接近 0.4。所以推測在高度很低時，鋼球並不是做純滾動，而是又滾又滑，隨著釋放高度升高，鋼球開始純滾動，最後到達臨界高度後再次進入又滾又滑的階段。

柒. 結論與展望

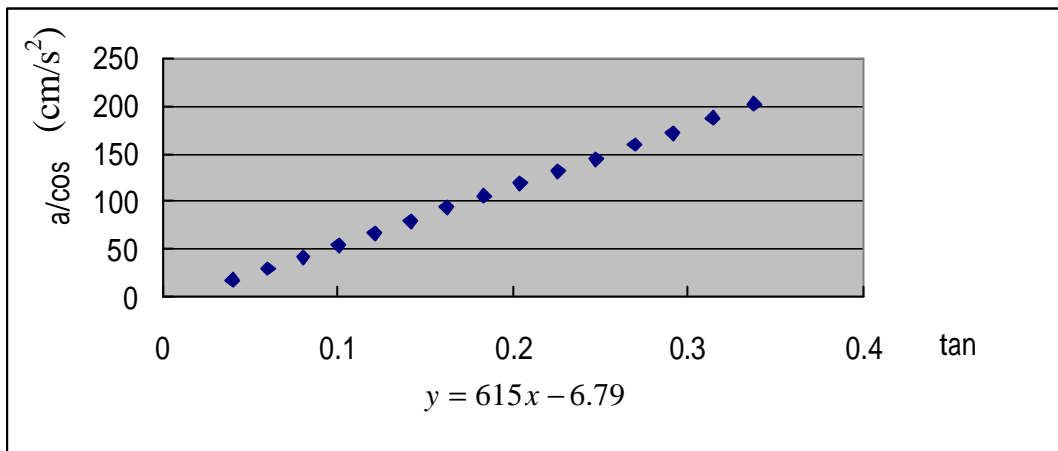
- 一、 準確的時間測量是本實驗的關鍵。除了利用光電計時器提高計時精確度及增加測量次數以減少計時誤差外，尚須注意下列各點：
 - (一).各光電閘的透光孔高度一定要相同，否則將造成誤差。
 - (二).為減少電磁鐵的殘磁效應對實驗的影響，可在電磁鐵的尖端處，纏上適當厚度的膠帶，使其通電時恰能吸住鋼球即可。
 - (三).使用光電計時器時應盡量關閉實驗室中的多餘電器(例如電扇) 以減少計時器之誤差產生。
- 二、 鋼球滾動時，滾動摩擦是因接觸面的稍微變形所造成，以力矩的方式呈現，阻止鋼球轉動。而滾動摩擦係數 值與軌道的變形難易程度有關；並隨著鋼球半徑增加，值有增大的趨勢。
- 三、 鋼球在傾斜軌道上運動時，有純滾動及又滾又滑兩種類型。木軌道的臨界角約在 24° 附近，玻璃軌道的臨界角在 20° 附近，而鋁軌道的臨界角則在 14° 附近。
- 四、 在純滾動階段，力學能並不守恆，應加入滾動摩擦的效應，藉此修正後，測得鋼球轉動慣量中的幾何常數 K 值相當接近理論值 0.4。所以欲利用力學能守恆關係測量轉動慣量者需注意兩個條件：(1) 軌道的傾斜角不可太高（超過臨界角便不是純滾動了）。(2) 需視情形加入滾動摩擦的修正。
- 五、 純滾動時，靜摩擦力僅將鋼球質心的平移動能轉化成轉動動能，並不消耗力學能，而是滾動摩擦做功消耗力學能。但滾動摩擦效應並不大，唯有軌道傾斜角較小(或水平時)，影響才會明顯。
- 六、 希望能以這些實驗資料與一般教材內容作比較，讓同學更認識滾動運動，和其中各種作用力的影響效應，以便釐清一些容易迷失的觀念。
- 七、 在本實驗中對純滾動階段著墨較深，而又滾又滑階段的理論似乎尚不完備，有待更深入的探討。在實驗方面，若能進一步測量出鋼球滾動的角速率，則更能清晰地描述在滾動運動中滑動摩擦與滾動摩擦所扮演的角色。

玖. 參考資料

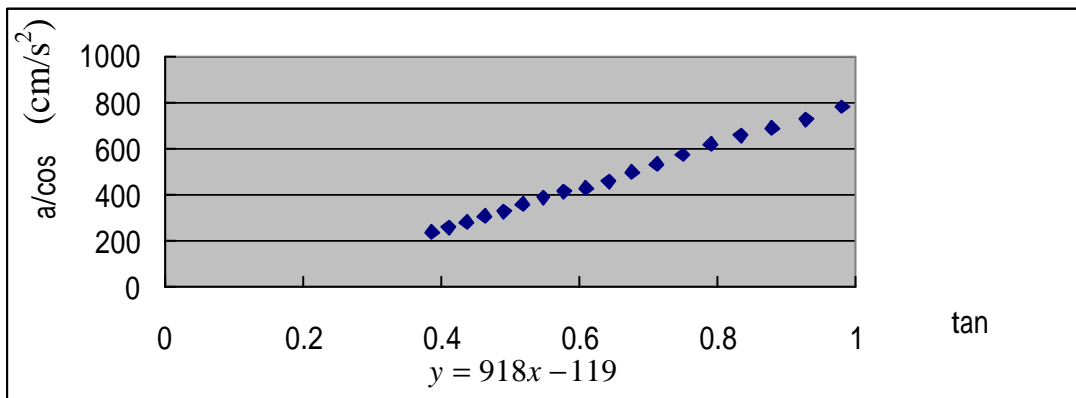
- | | |
|-------------------------|--------------------|
| 物質科學物理篇(上) | 褚德三/龍騰文化 |
| 物質科學物理篇(上) | 林明瑞/南一出版社 |
| 大學物理之-力學 | 陳錫桓/中央圖書出版社 |
| FUNDAMENTALS OF PHYSICS | HALLIDAY.RESNICK |
| 斜面上的滾動實驗 | 賈至達/科學教育月刊 第 233 期 |



圖四 小球-玻璃軌道(h=2~70cm)



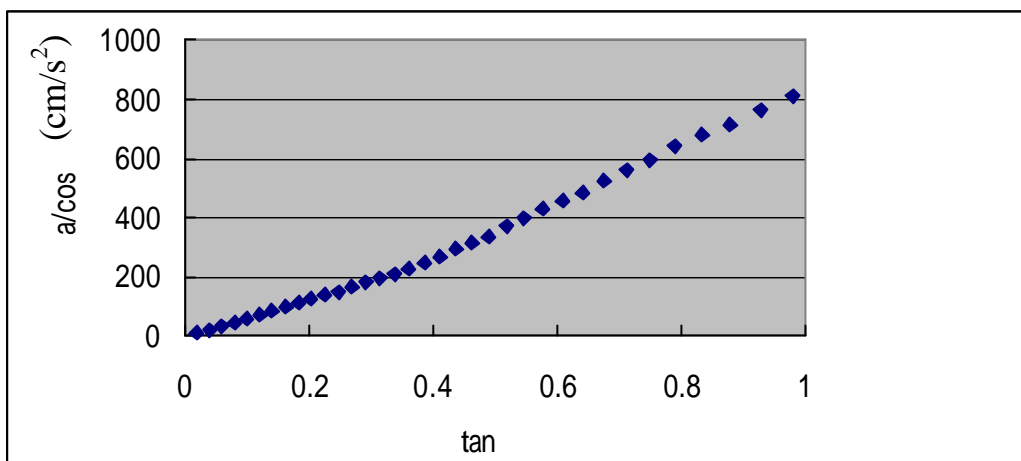
圖四-1 小球-玻璃軌道(h=4~32cm)



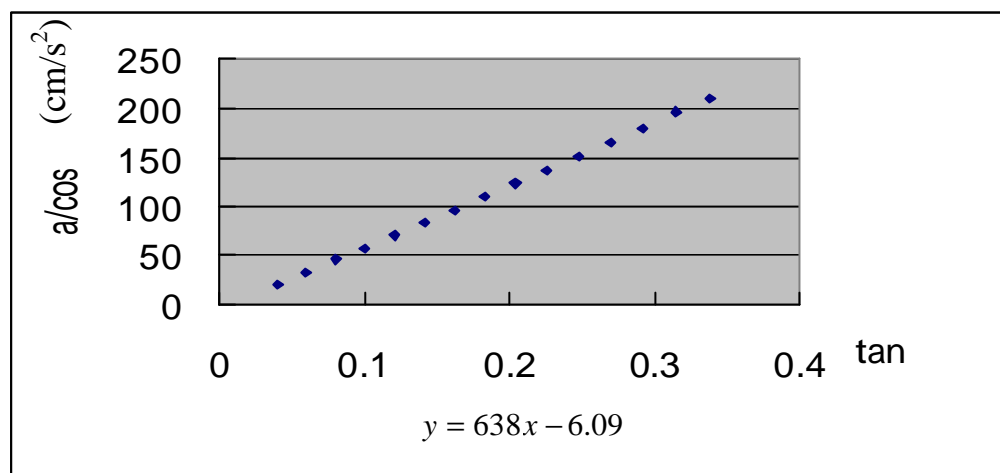
圖四-2 小球-玻璃軌道 (h=36~70cm)

迴歸高度(cm)	4~32	36~70
相關係數平方值	0.999	0.998
測量 g 值(cm/s ²)	973	918
理論 g 值(cm/s ²)	980	
相對誤差	0.7%	6.3%

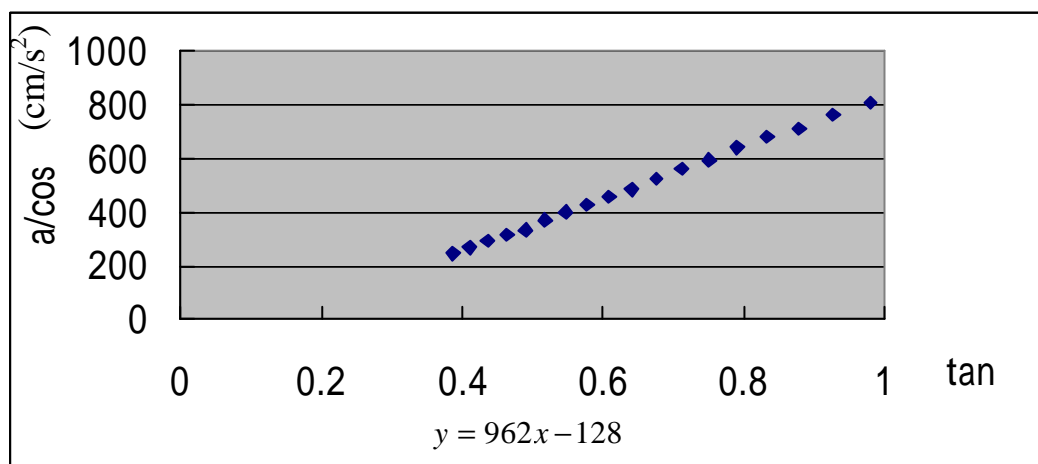
表四 小球-玻璃軌道



圖五 中球-玻璃軌道(h=2~70cm)



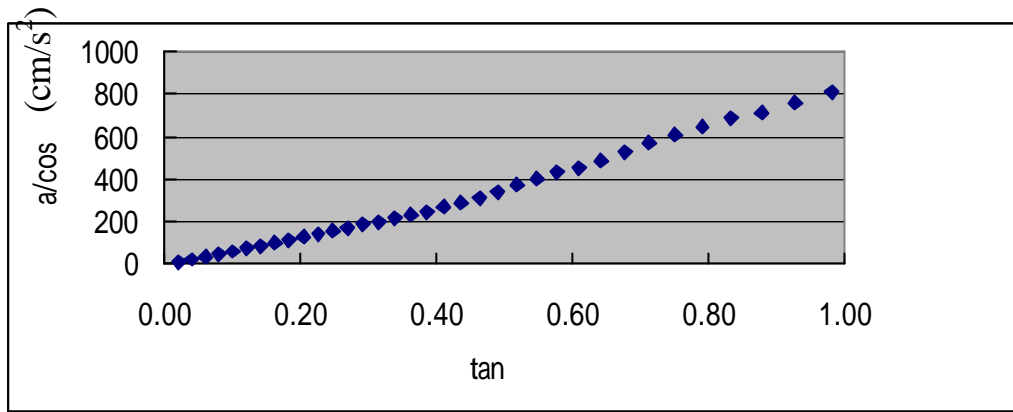
圖五-1 中球-玻璃軌道 (h=4~32cm)



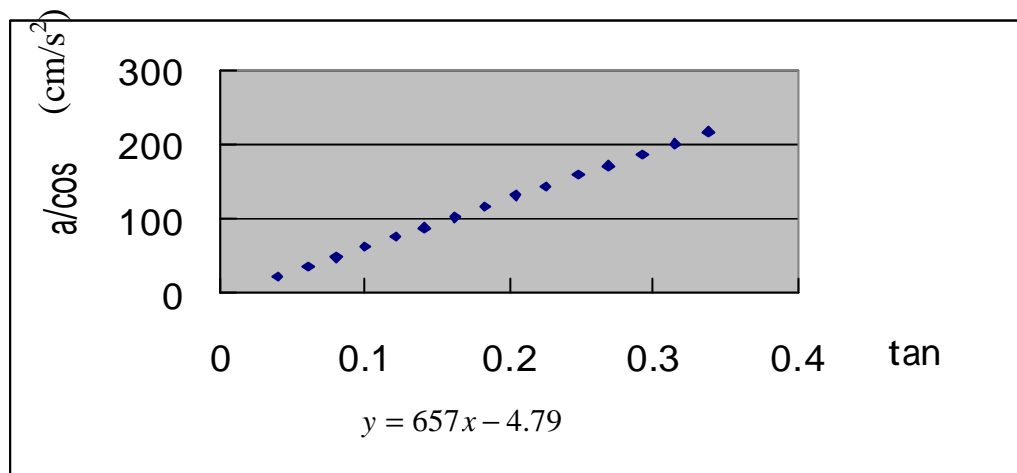
圖五-2 中球-玻璃軌道(h=36~70cm)

迴歸高度(cm)	4~32	36~70
相關係數平方值	0.999	0.999
測量 g 值(cm/s ²)	973	962
理論 g 值(cm/s ²)	980	
相對誤差	0.7%	1.8%

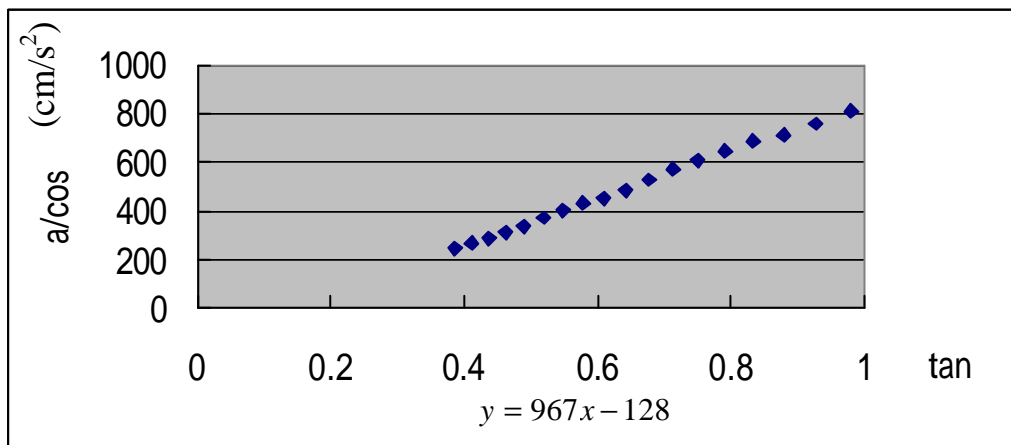
表五 中球-玻璃軌道



圖六 大球-玻璃軌道(h=2~70cm)



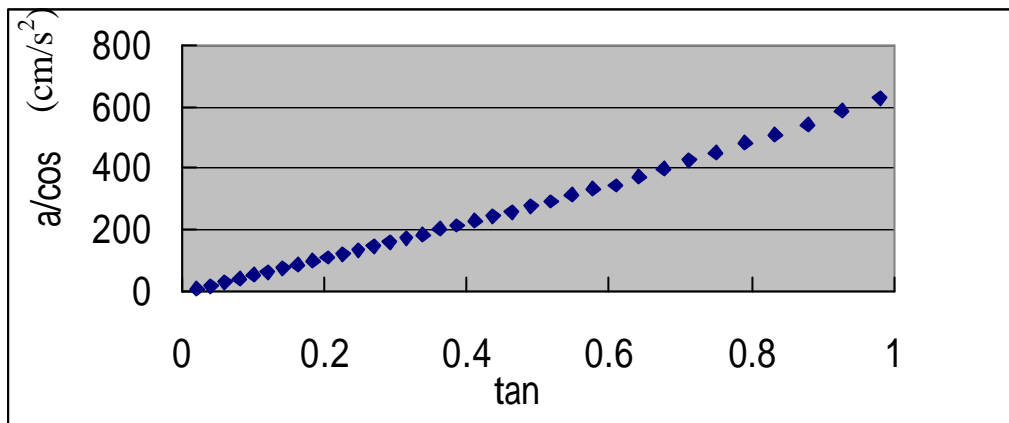
圖六-1 大球-玻璃軌道(h=4~32cm)



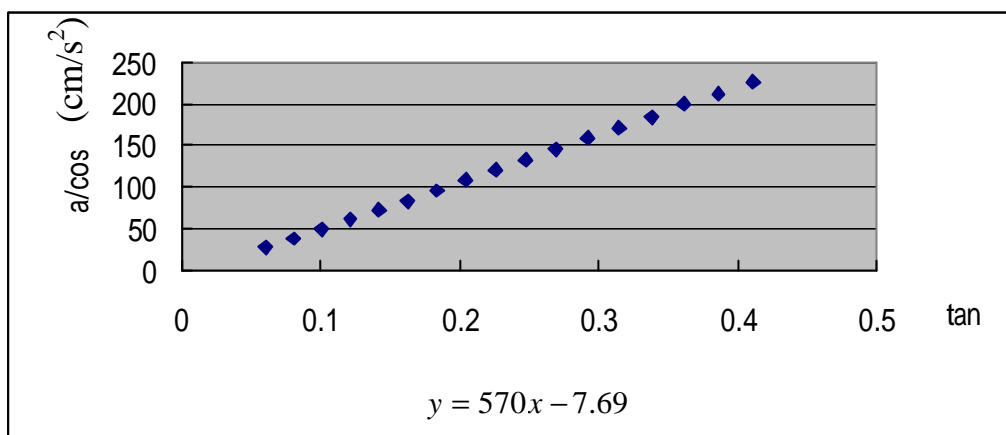
圖六-2 大球-玻璃軌道(h=36~70cm)

迴歸高度(cm)	4~32	36~70
相關係數平方值	0.999	0.996
測量 g 值(cm/s ²)	969	967
理論 g 值(cm/s ²)	980	
相對誤差	1.1%	1.3%

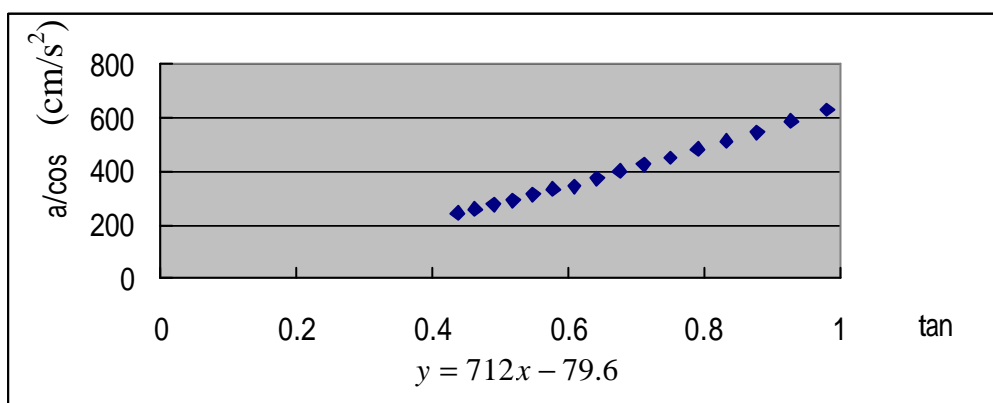
表六 大球-玻璃軌道



圖七 小球-木軌道(h=2~70cm)



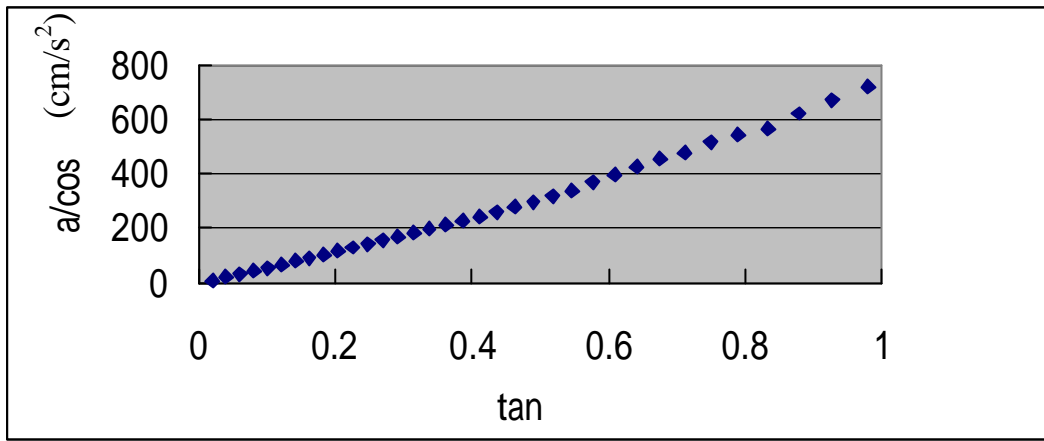
圖七-1 小球-木軌道(h=6~38cm)



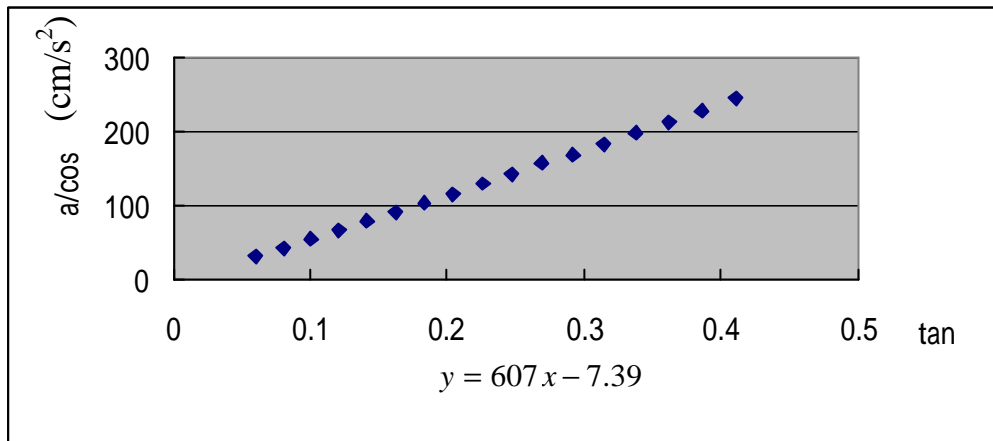
圖七-2 小球-木軌道 (h=42~70cm)

迴歸高度(cm)	6~38	42~70
相關係數平方值	0.999	0.997
測量 g 值(cm/s ²)	980	712
理論 g 值(cm/s ²)	980	
相對誤差	0%	27%

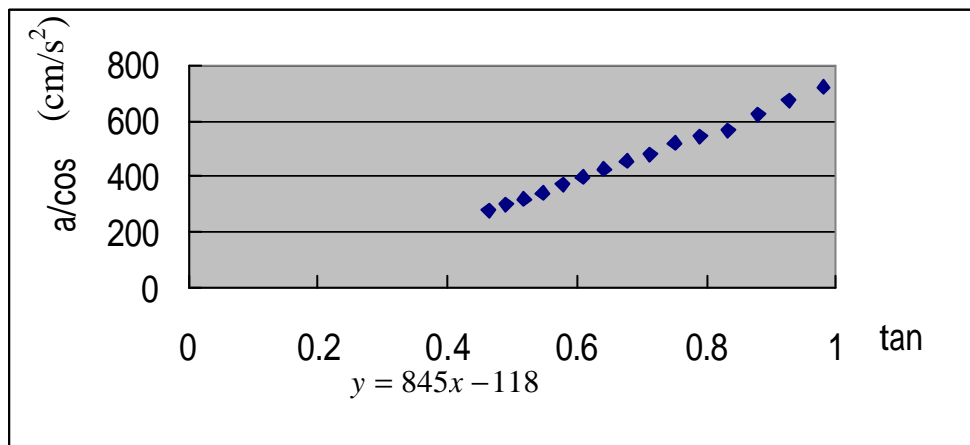
表七 小球-木軌道



圖八 中球-木軌道(h=2~70cm)



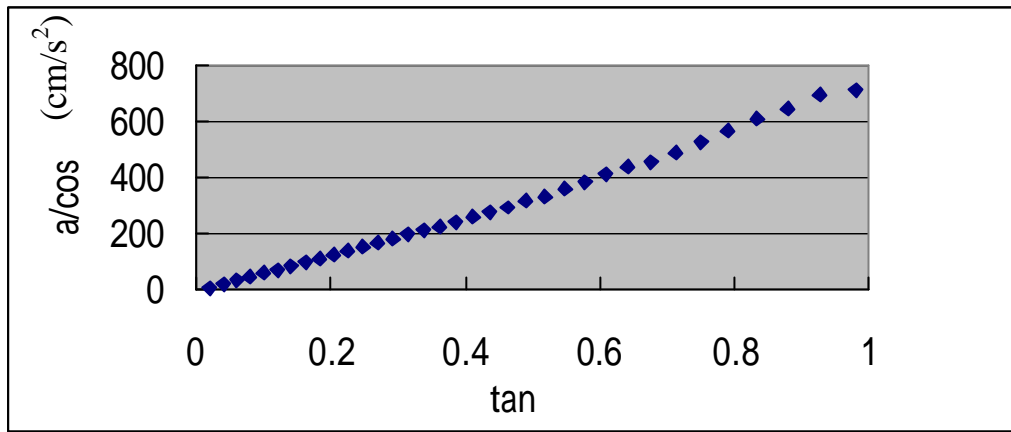
圖八-1 中球-木軌道(h=6~38cm)



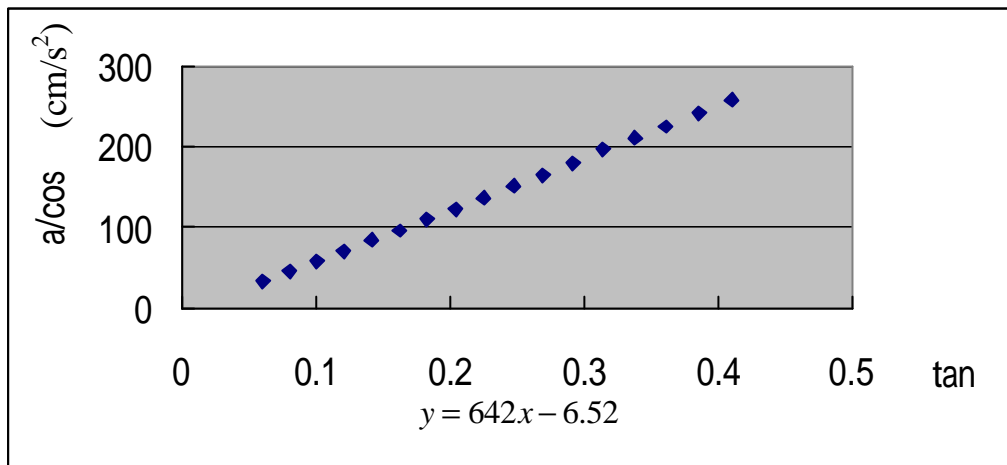
圖八-2 中球-木軌道(h=42~70cm)

迴歸高度(cm)	6~38	42~70
相關係數平方值	0.999	0.996
測量 g 值(cm/s ²)	979	845
理論 g 值(cm/s ²)	980	
相對誤差	0.1%	14%

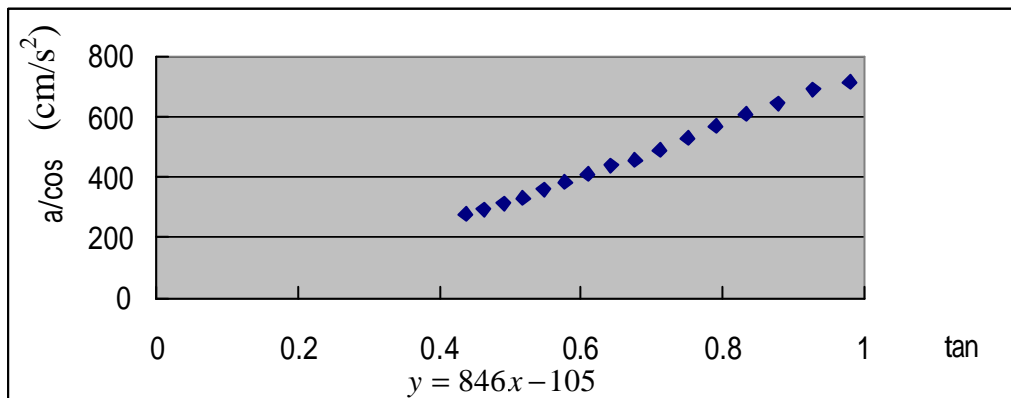
表八 中球-木軌道



圖九 大球-木軌道(h=2~70cm)



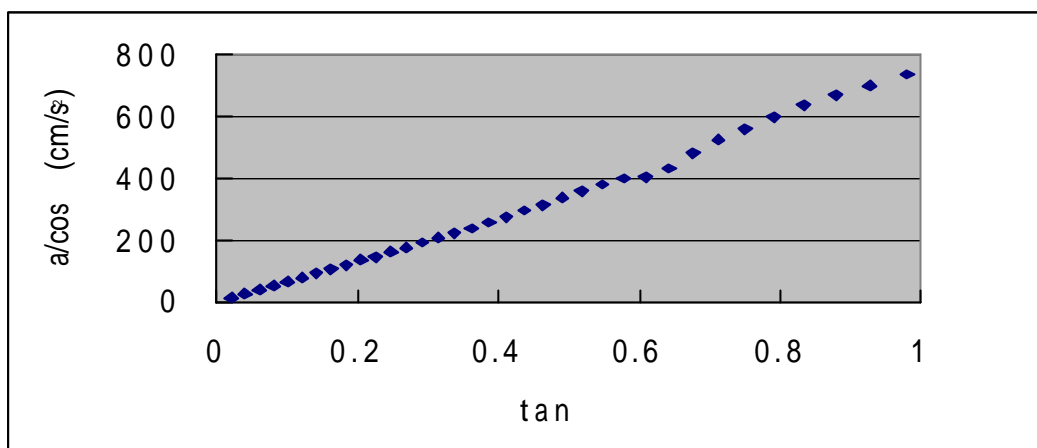
圖九-1 大球-木軌道(h=6~38cm)



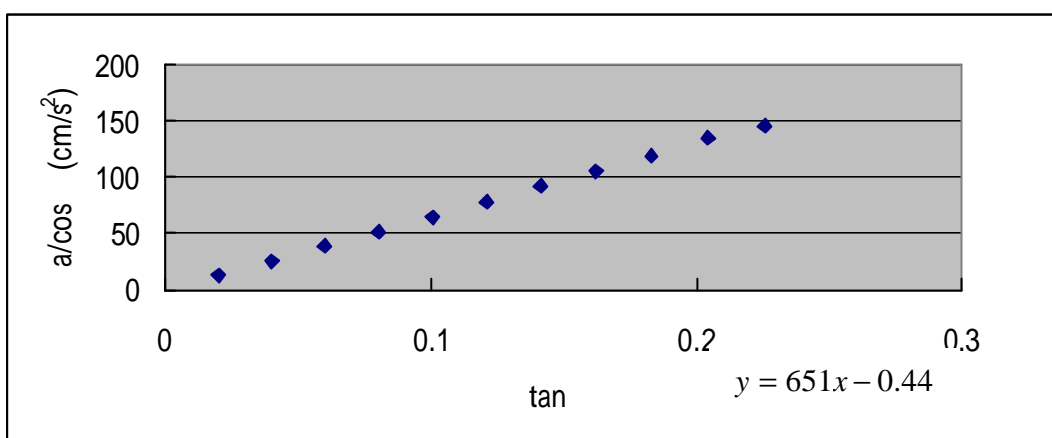
圖九-2 大球-木軌道(h=42~70cm)

迴歸高度(cm)	6~38	42~70
相關係數平方值	0.999	0.998
測量 g 值(cm/s ²)	978	846
理論 g 值(cm/s ²)	980	
相對誤差	0.9%	14%

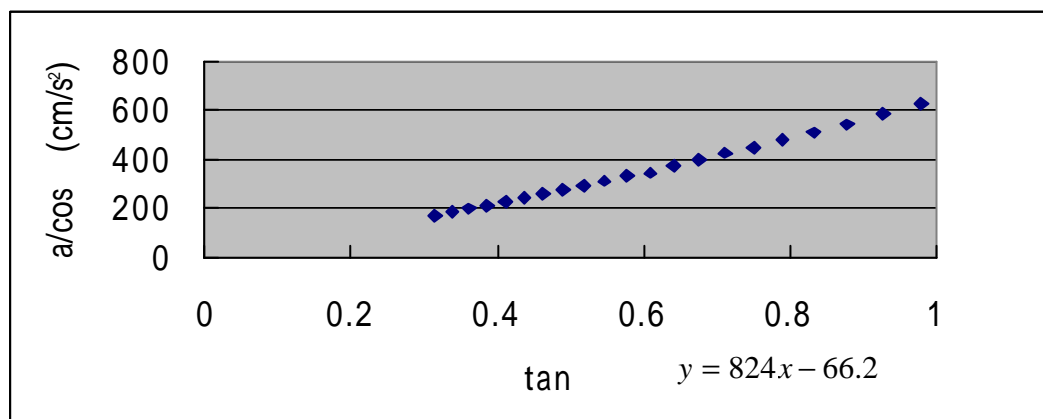
表九 大球-木軌道



圖十 小球-鋁軌道(h=2~70 cm)



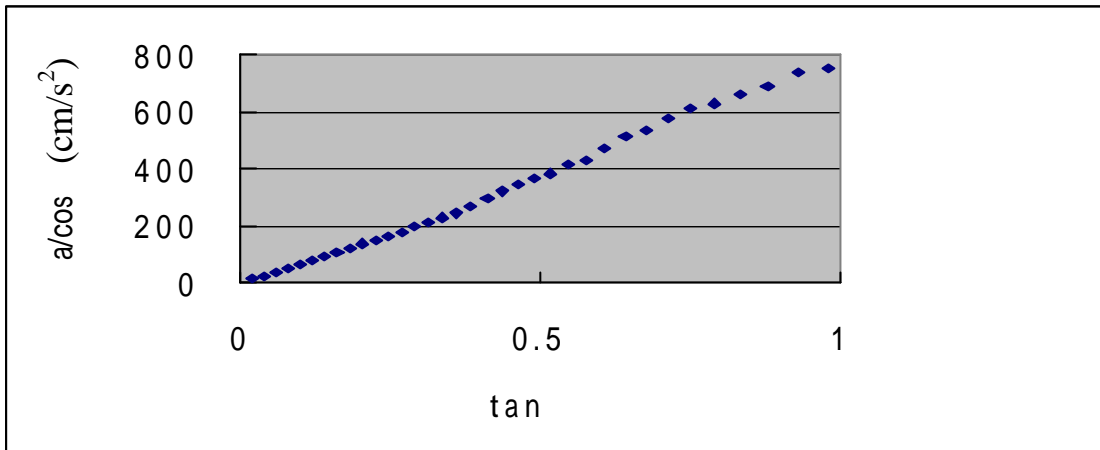
圖十-1 小球-鋁軌道(h=2~22 cm)



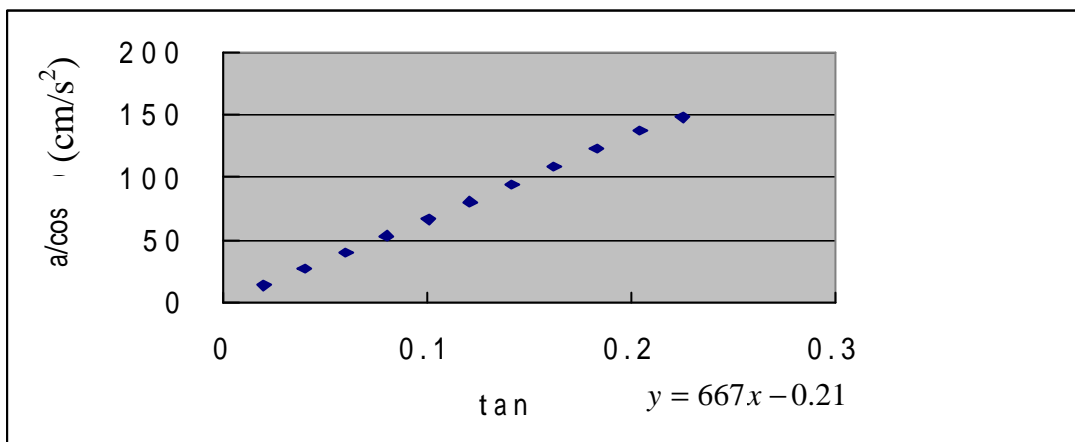
圖十-2 小球-鋁軌道(h=30~70 cm)

迴歸高度(cm)	2~22	30~70
相關係數平方值	0.999	0.994
測量 g 值(cm/s ²)	994	824
理論 g 值(cm/s ²)	980	
相對誤差	1.4%	16%

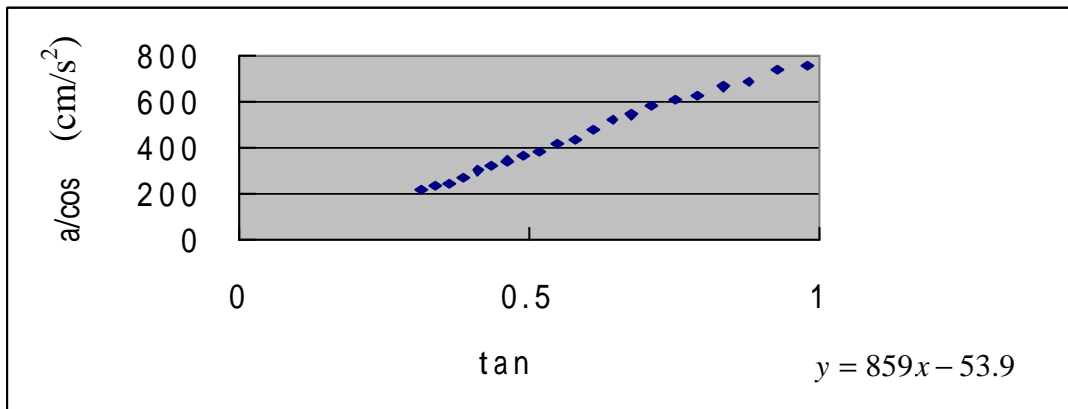
表十 小球-鋁軌道



圖十一 中球-鋁軌道(h=2~70 cm)



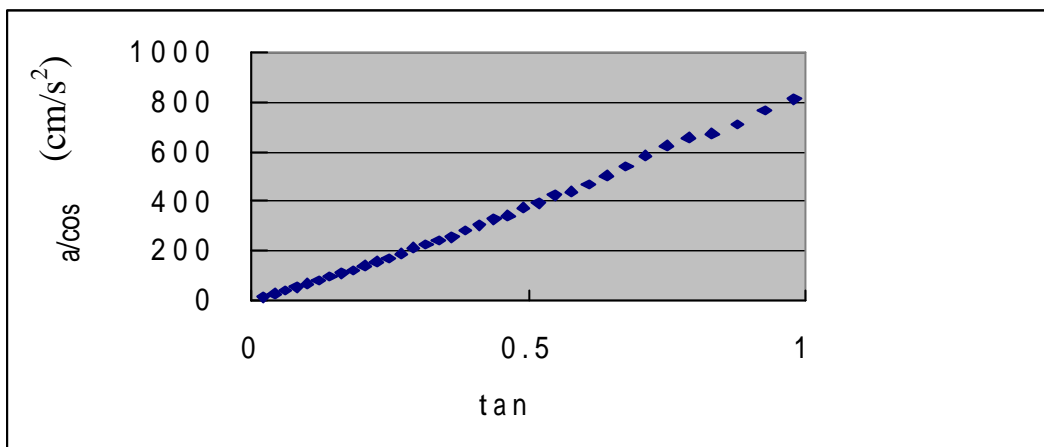
圖十一-1 中球-鋁軌道(h=2~22 cm)



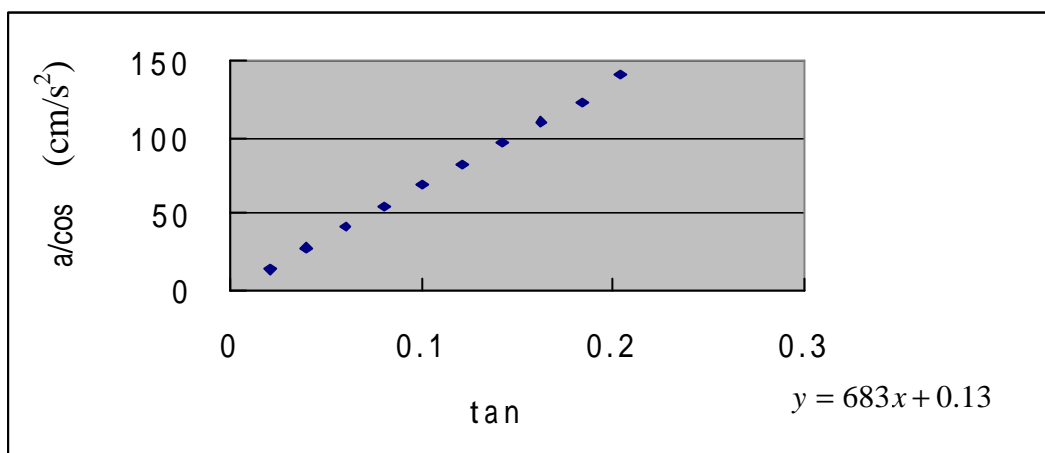
圖十一-2 中球-鋁軌道(h=30~70 cm)

迴歸高度(cm)	2~22	30~70
相關係數平方值	0.999	0.995
測量 g 值(cm/s ²)	994	859
理論 g 值(cm/s ²)	980	
相對誤差	1.4%	12%

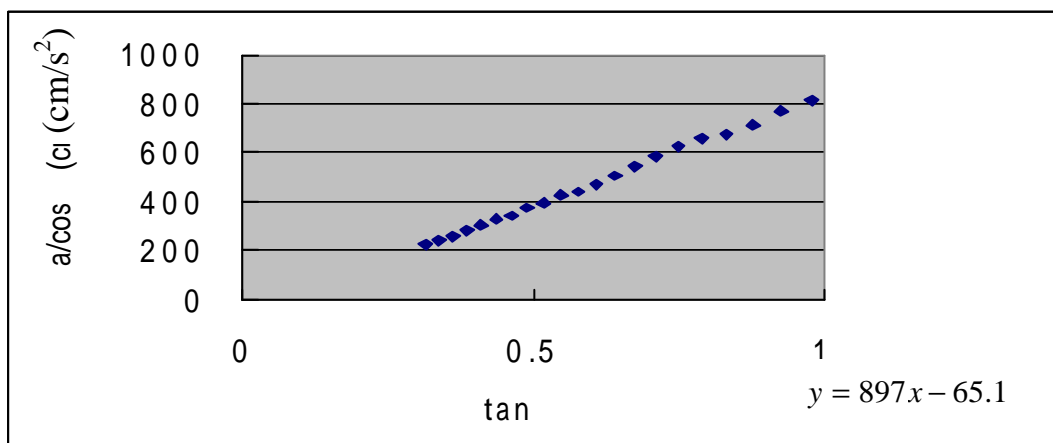
表十一 中球-鋁軌道



圖十二 大球-鋁軌道(h=2~70 cm)



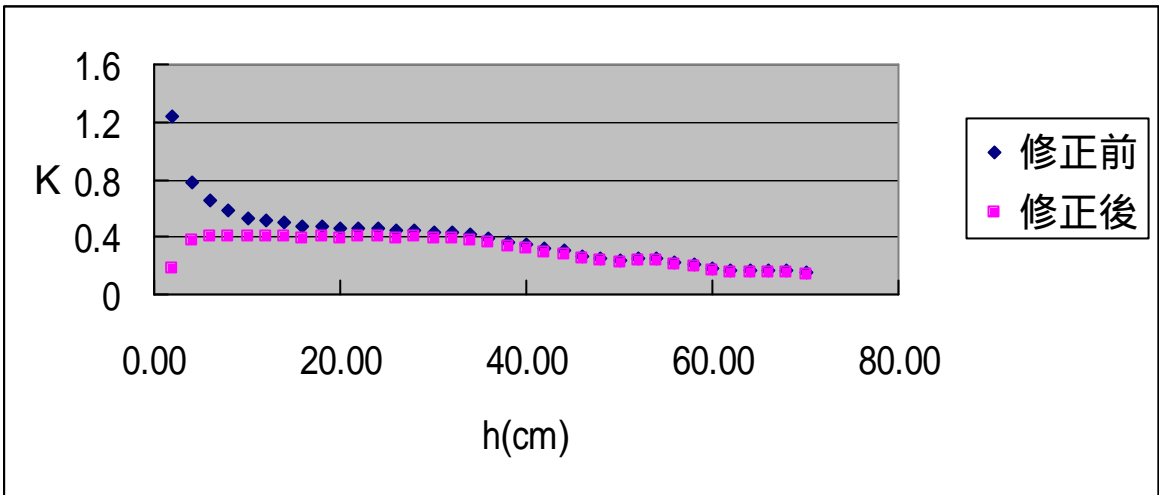
圖十二-1 大球-鋁軌道(h=2~20 cm)



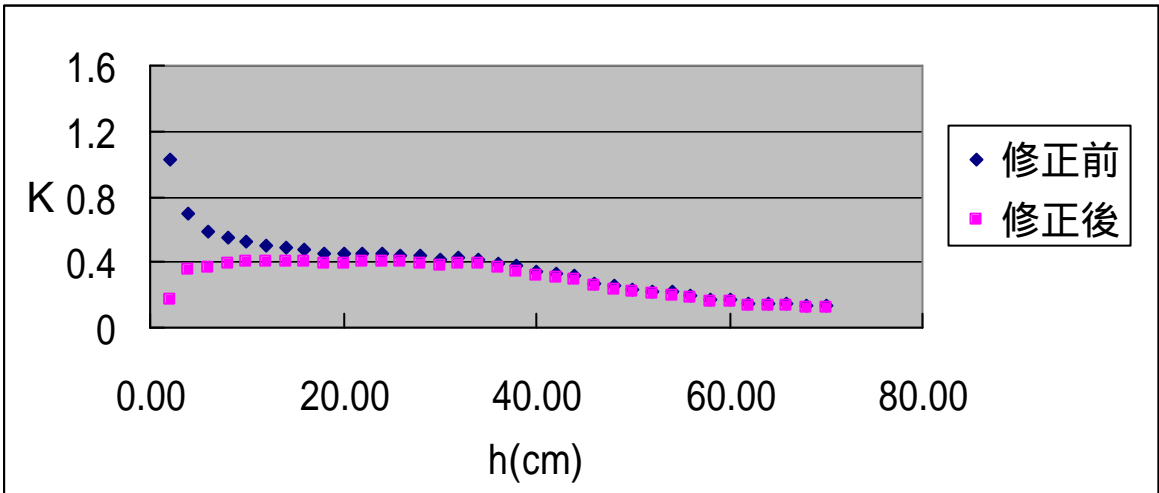
圖十二-2 大球-鋁軌道(h=30~70 cm)

迴歸高度(cm)	2~20	30~70
相關係數平方值	0.999	0.998
測量 g 值(cm/s ²)	997	897
理論 g 值(cm/s ²)	980	
相對誤差	1.7%	8.5%

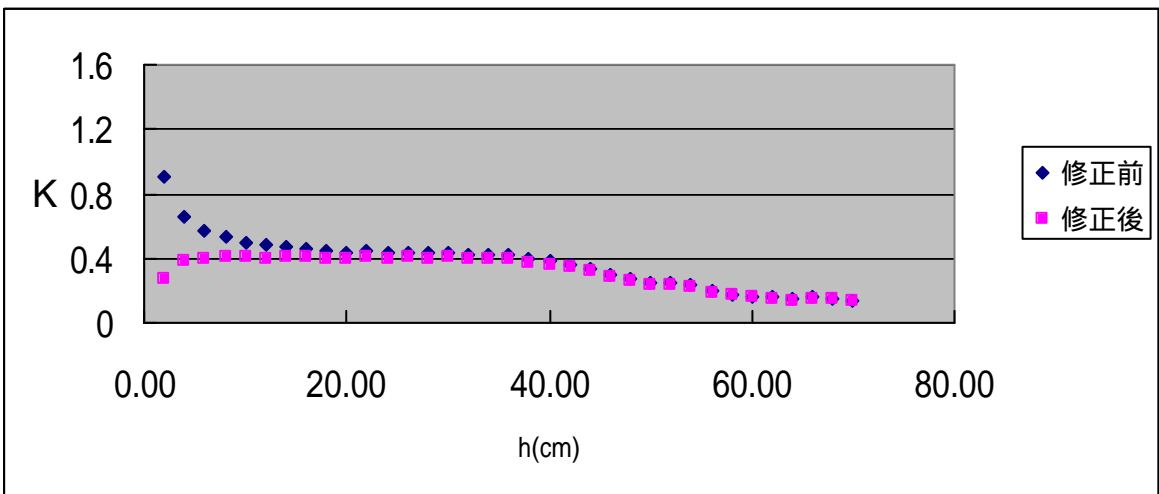
表十二 大球-鋁軌道



小球-玻璃軌道

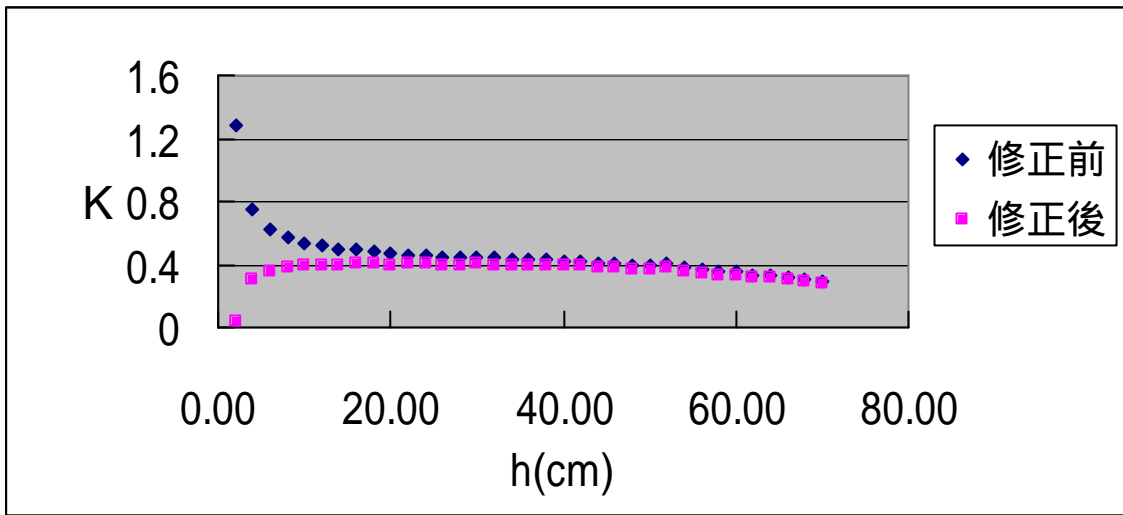


中球-玻璃軌道

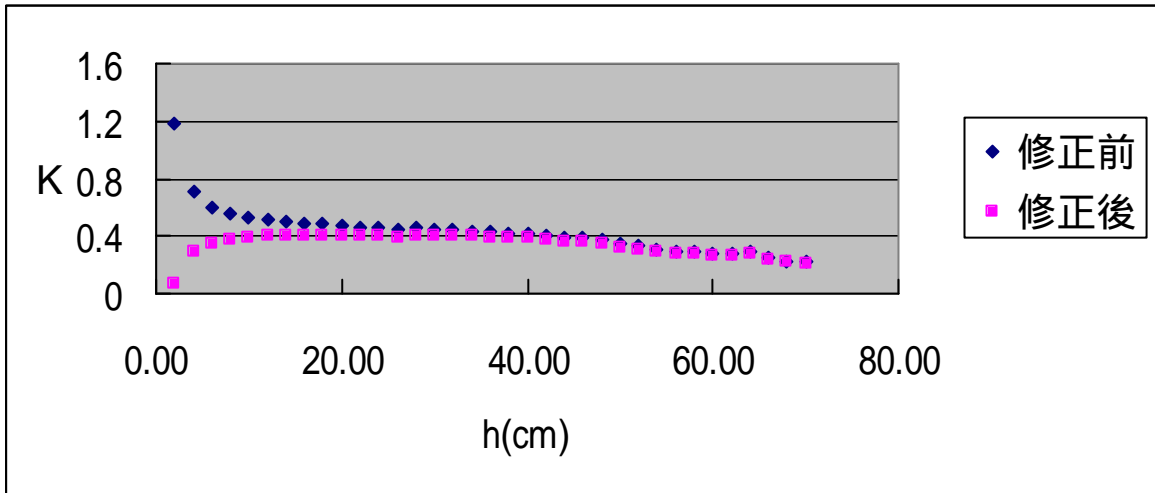


大球-玻璃軌道

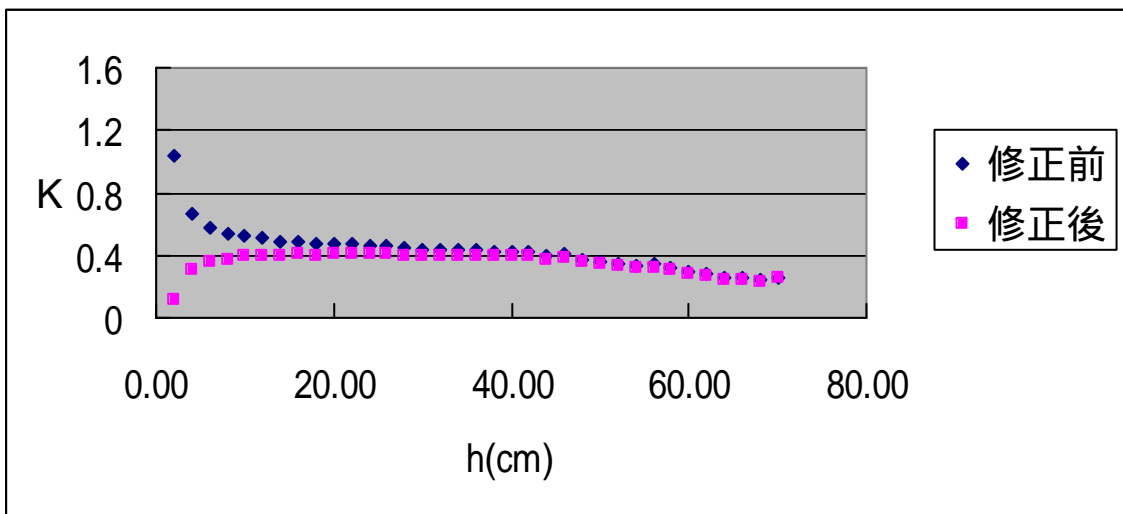
圖十三 K 值 (h : 釋放高度)



小球-木軌道

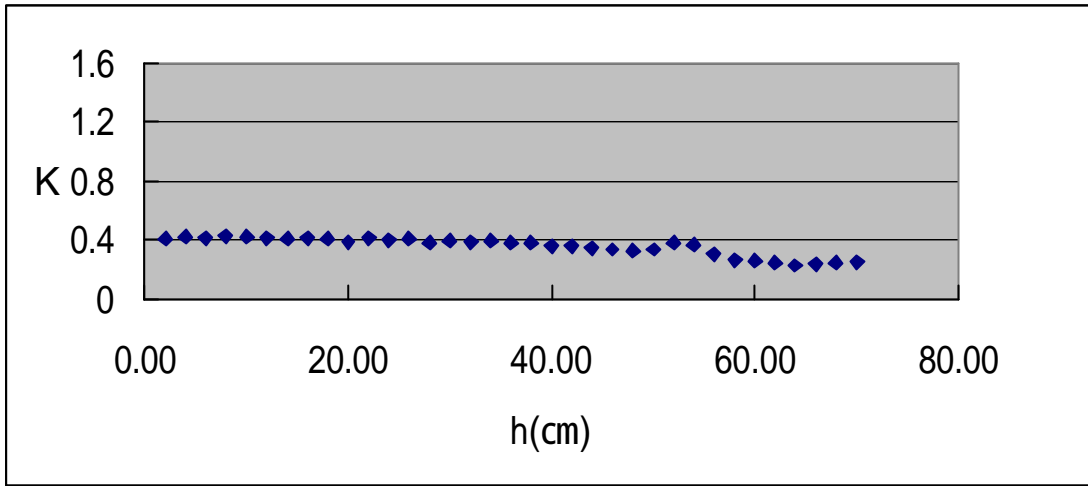


中球-木軌道

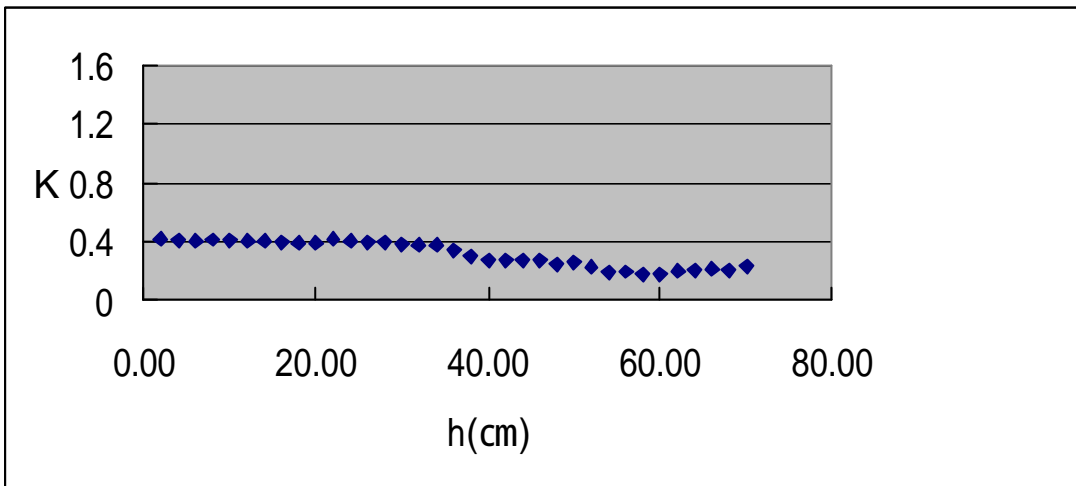


大球-木軌道

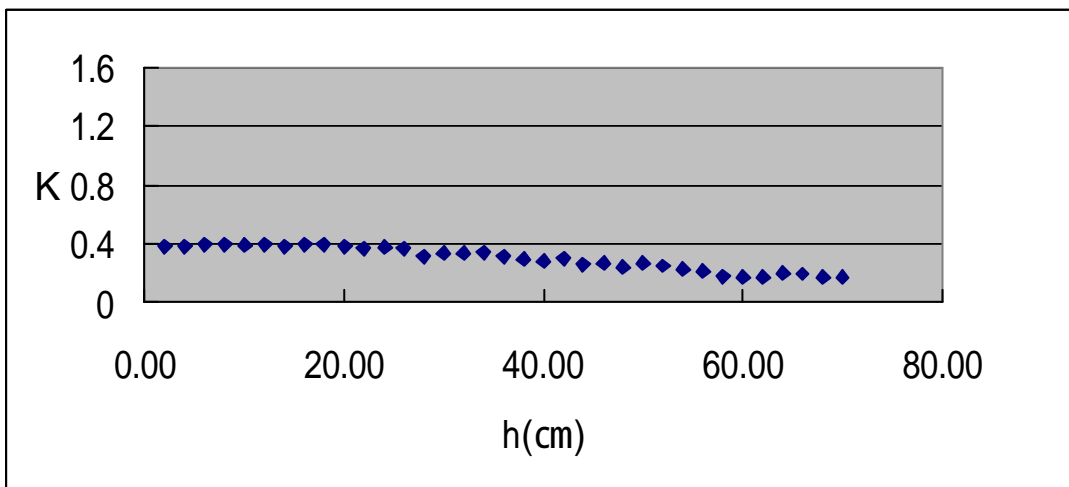
圖十四 K 值 (h : 釋放高度)



小球-鋁軌道



中球-鋁軌道



大球-鋁軌道

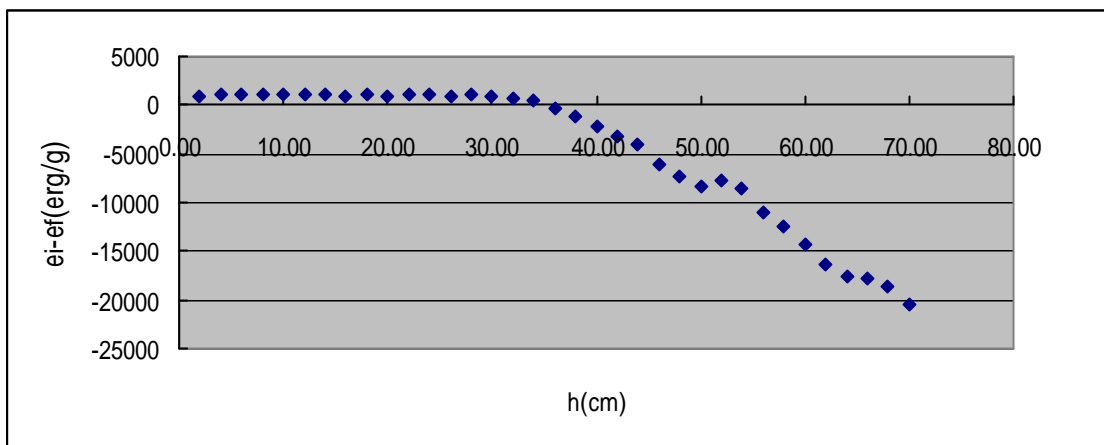
圖十五 K 值 (h : 釋放高度)

* $e_i=gh$ ：鋼球在頂端時單位質量的力學能

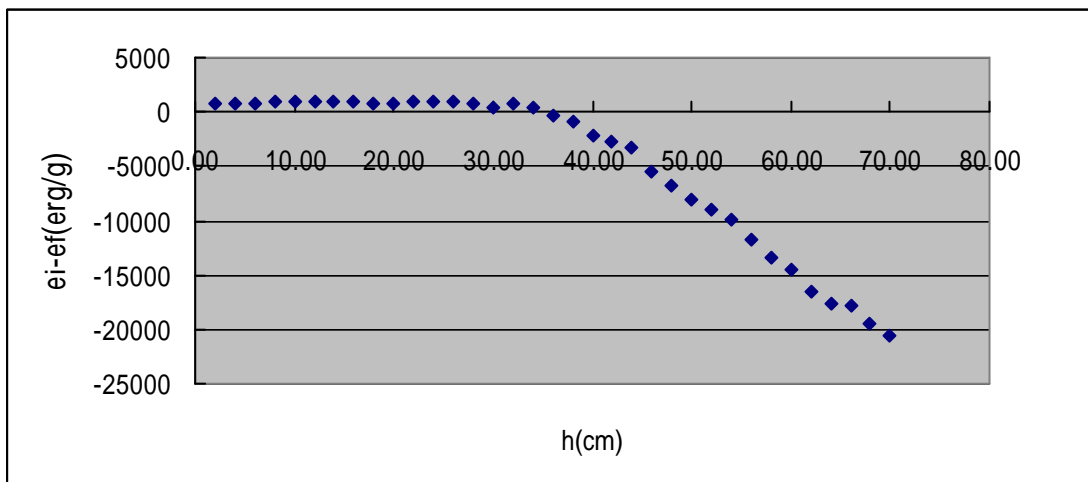
$$e_f = \frac{1}{2}v_f^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{m}w^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]v_f^2$$

：純滾動假設下鋼球在底部時單位

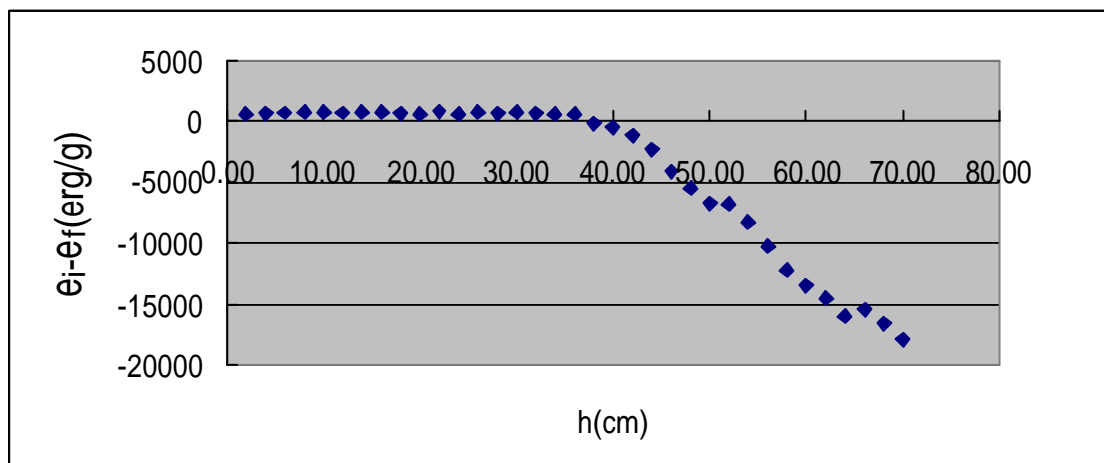
質量的力學能



小球-玻璃軌道

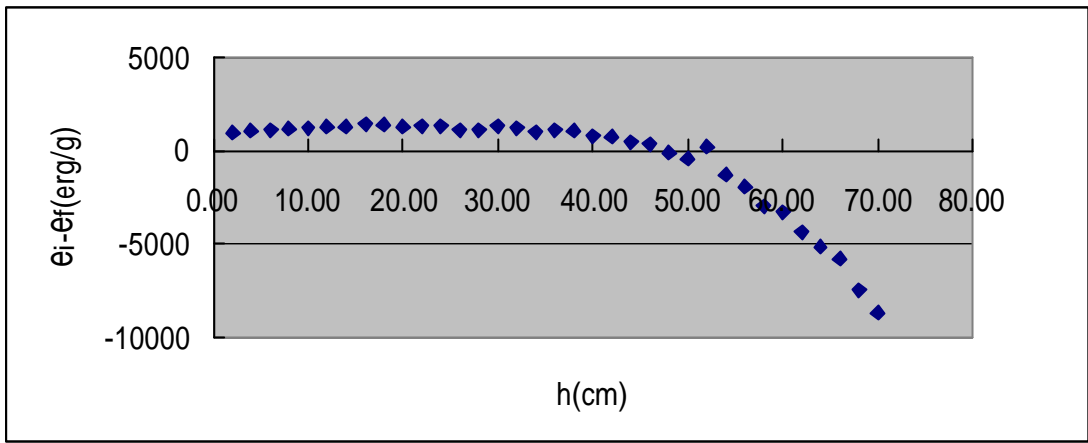


中球-玻璃軌道

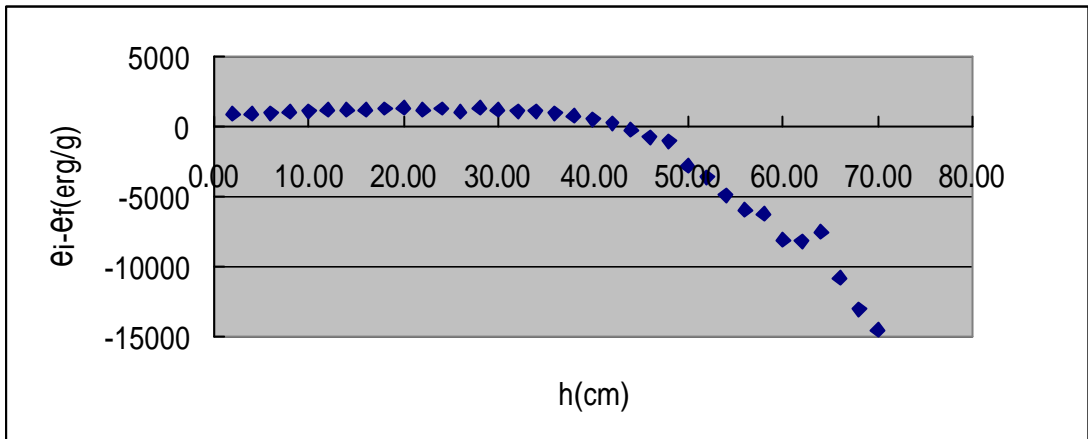


大球-玻璃軌道

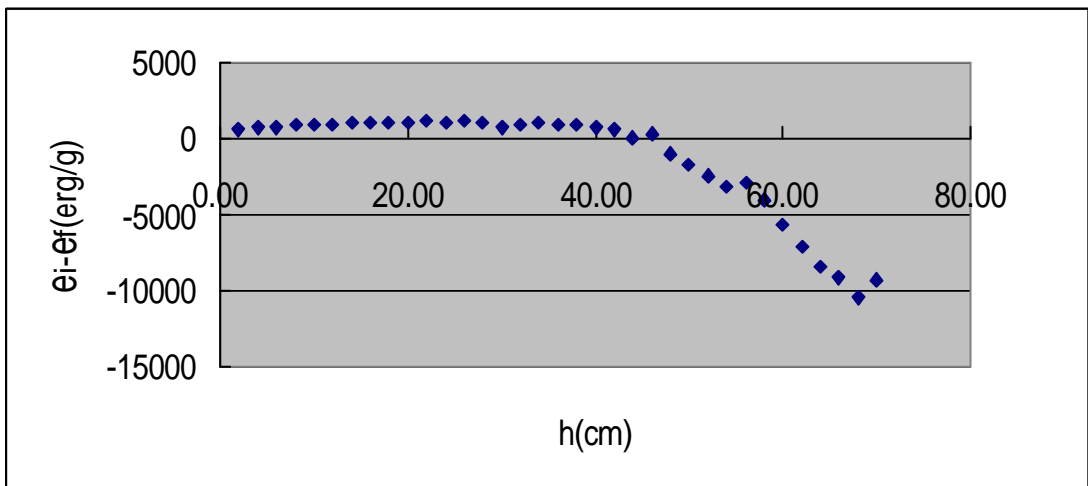
圖十六 (ei-ef) 值 (h：釋放高度)



小球-木軌道

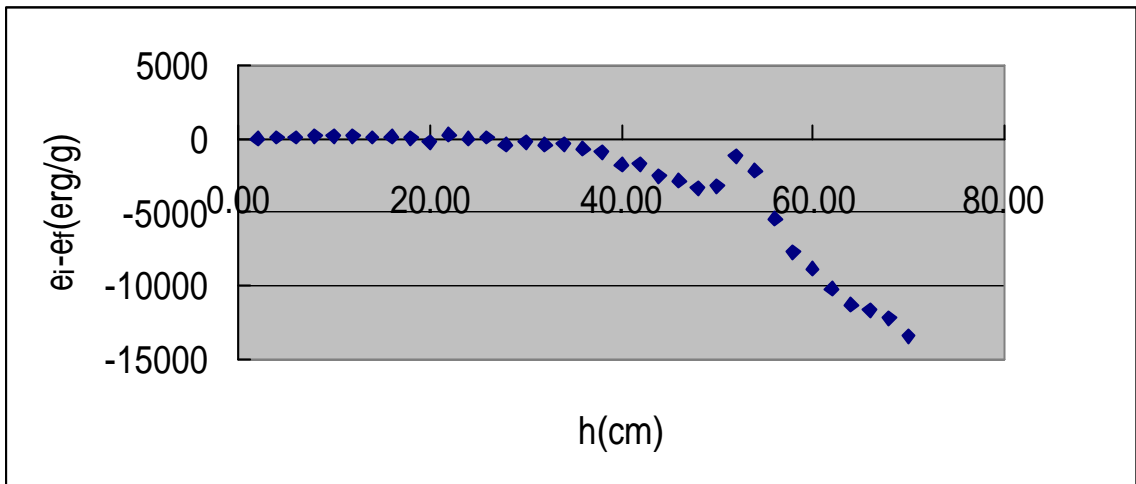


中球-木軌道

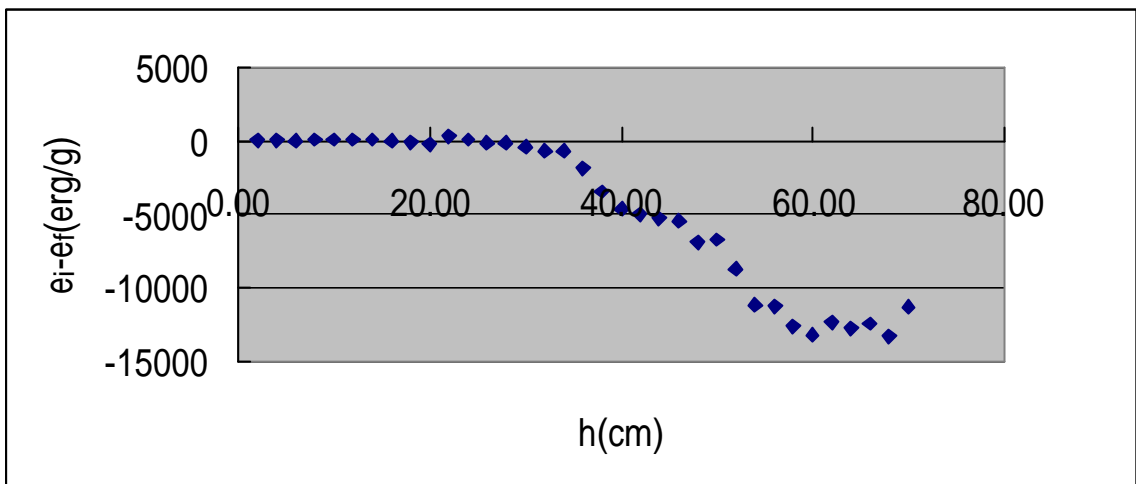


大球-木軌道

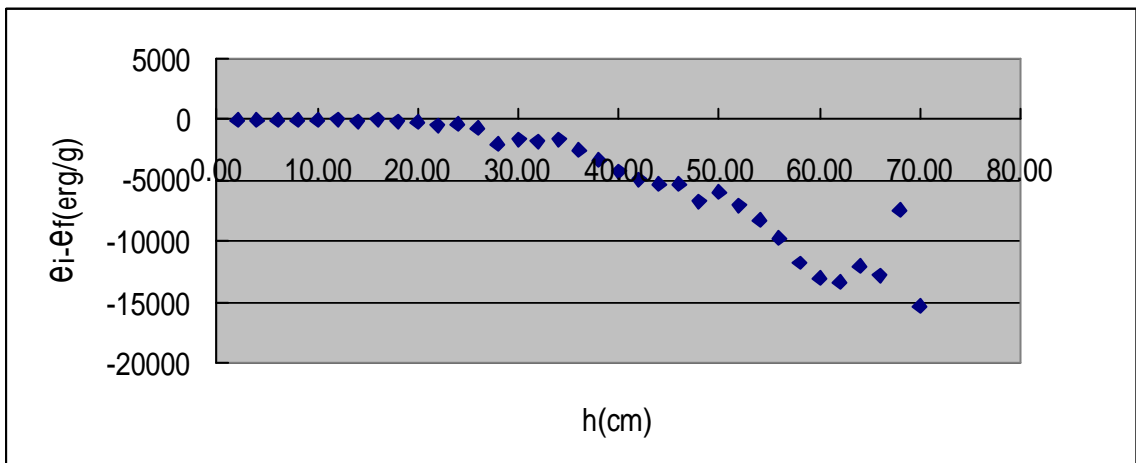
圖十七 ($e_i - e_f$) 值 (h : 釋放高度)



小球-鋁軌道



中球-鋁軌道



大球-鋁軌道

圖十八 (ei-ef) 值 (h : 釋放高度)

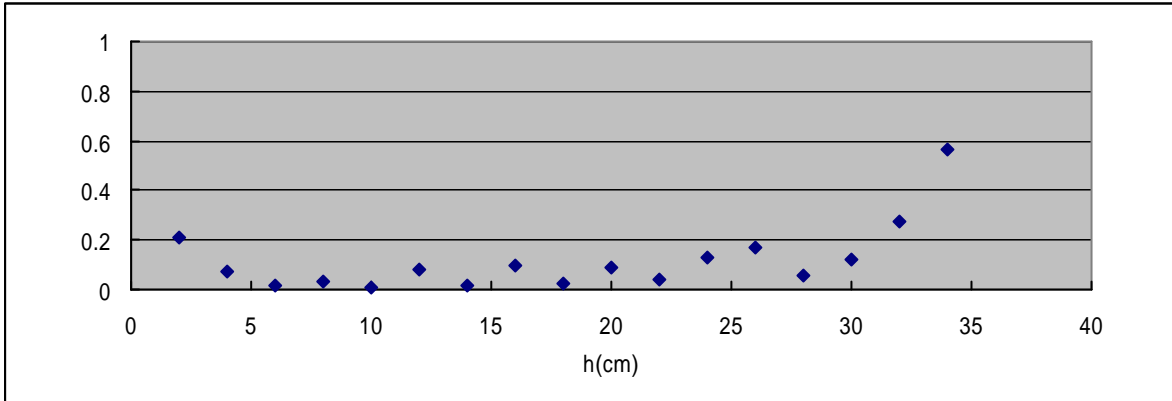
* $e_i=gh$: 鋼球在頂端時單位質量的力學能

$$e_f = \frac{1}{2}v_f^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]v_f^2 : \text{純滾動假設下鋼球在底部時單位質$$

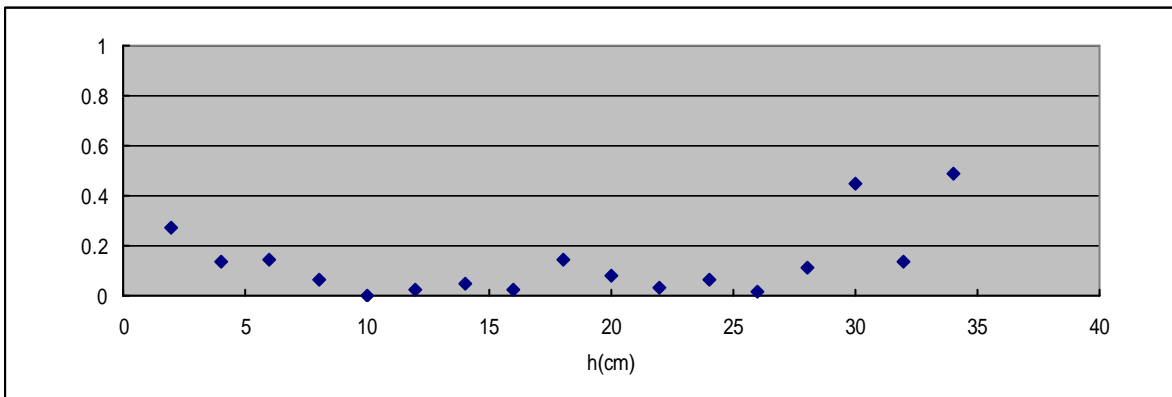
量的力學能

$$w = \frac{W}{m} : \text{單位質量滾動摩擦所做的負功}$$

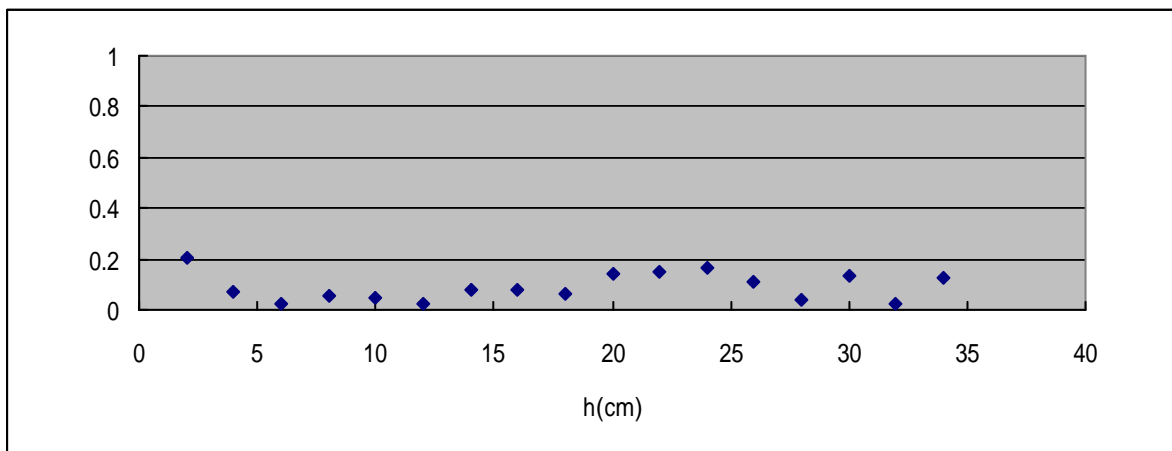
$$e = \frac{|e_i - e_f + w|}{w}$$



小球-玻璃軌道

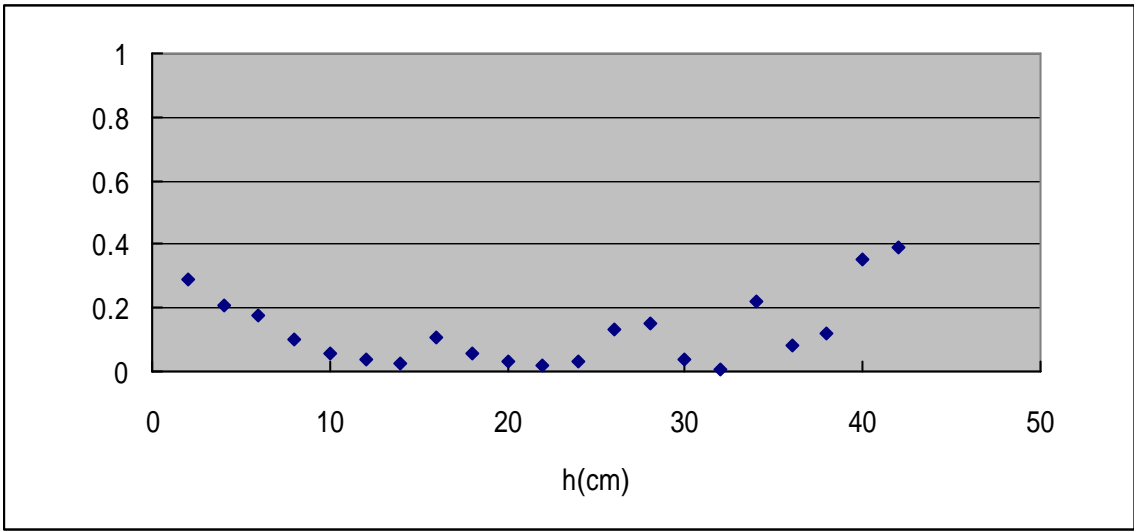


中球-玻璃軌道

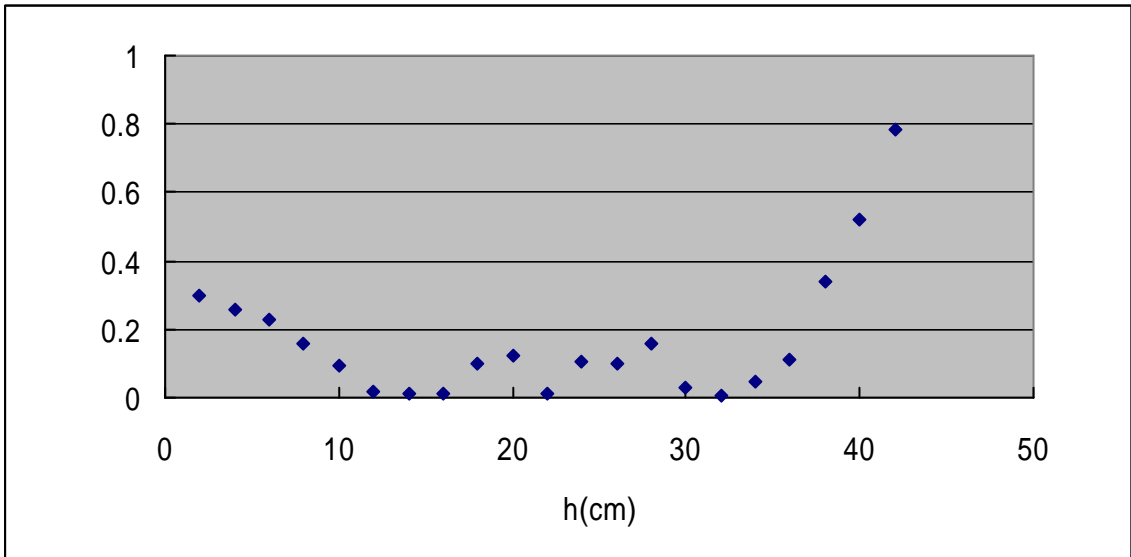


大球-玻璃軌道

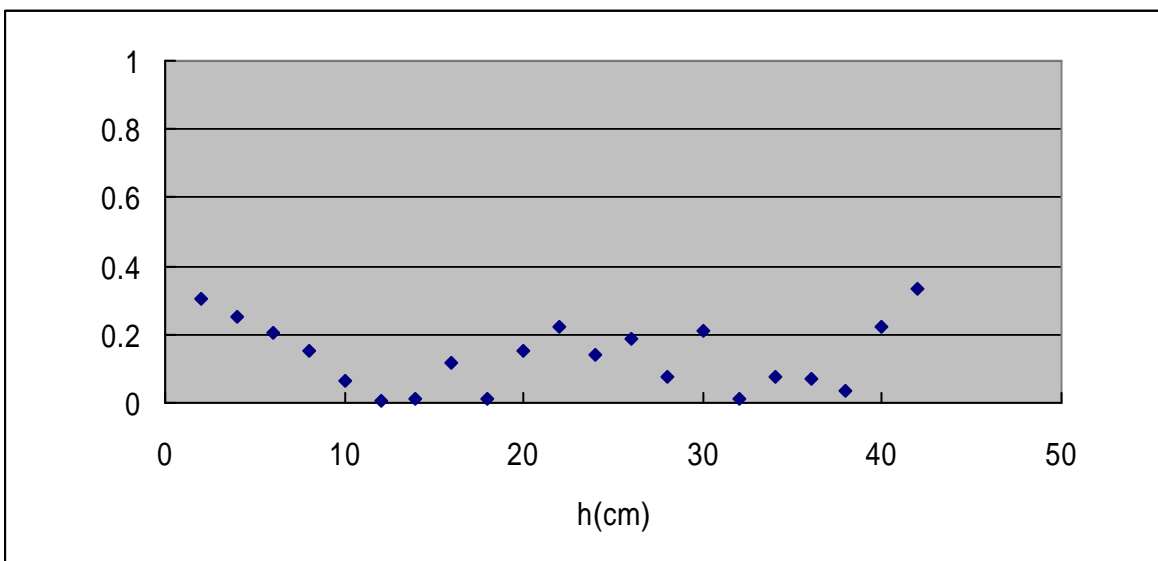
圖十九 值 (h : 釋放高度)



小球-木軌道



中球-木軌道



大球-木軌道

圖二十 值 (h : 釋放高度)