挑 剔 數 列

摘要

在一個偶然的機會下，接觸到一種特別的數列，這種數列是由 1~7 等數字組成，其中每個數字都重複使用兩次，在總共 14 格的格子裡排列，而且要符合 1 與 1 之間有 1 個數、2 與 2 之間有 2 個數字、、、6 與 6 之間有 6 個數字、7 與 7 之間有 7 個數字。

例：2 3 7 2 6 3 5 1 4 1 7 6 5 4

依據此種排列規則也找出 1~3 組成的數列 312132、1~4 組成得數列 41312432，將此數列改成由 1~n 所組成的 2n 位數列，並討論此 2n 位數列的各種特性，並將有此特別規則的數列命為”挑剔數列”。

目的 ：

? 證明 n=4k+1 和 4k+2(k 為非負整數)時不存在挑剔數列。
? 找出一種排法能排出 2n 位的挑剔數列。
? 証明此排法並反推 n=4k 和 4k+3 時一定有挑剔數列存在。

為了達到這些目的，我們使用以下方法：

? 以數列對應序數的關係及序數總合證明 n=4k+1 和 4k+2 時無挑剔數列。
? 藉由現有的挑剔數列，發現每一種 2n 的挑剔數列中階有一組挑剔數列有相似的排法。
? 將每一組相似的數列用化簡法化簡之後可得一有規律性的數列，再探討其轉變後的數列的排列。

目前研究內容：

? 試著找出同一 n 值挑剔數列之間的推倒關係。
? 找出每個 n 與組數的關係。

雖然目前已經找到哪些 n 值有挑剔數列存在，也找到排法能排出至少一組挑剔數列，但對於在 2n 位中可以排出多少挑剔數列以及每個挑剔數列之間的關係都還在研究階段，這個挑剔數列還有很多地方可以繼續發展下去。

壹、研究動機

這次的主題探討，靈感主要是來自國小同學間的遊戲，當時只覺得這是個可以打發時間的問題，但現在再次想起，突然發現這個數列好像滿特別的，可能會有一些特定的組成規律，希望能深入探討，了解整個思考的過程，並找尋其中特定的組成與規律。

貳、挑剔數列之定義

2	3	7	2	6	3	5	1	4	1	7	6	5	4

在十四個空格中填入十四個數字，這十四個數字是從 1 到 7 的整數且每個數都重複一遍，也就是 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 等十四個數字，填入時必須遵守 1 跟 1 之間有一個數、2 跟 2 之間有兩個數、3 跟 3 之間有三個數…7 跟 7 之間要有七個數，必須將十四個數字填入且符合上敘條件。

延伸此數列到 2n 個空格，總共填入數字 1~n 各兩次，其中 1 和 1 中間要隔一個數字，2 和 2 中間要隔兩個數字，以此類推， n 和 n 中間要隔 n 個數字，符合以上條件的數列我們就稱之為挑剔數列。

	舉例(n=3)	舉例(n=4)
挑剔數列：	3 1 2 1 3 2	4 1 3 1 2 4 3 2

參、研究目的

一、 證明 n=4k+1 和 4k+2(k 為非負整數)時不存在挑剔數列。

二、 找出一種排法能排出 2n 位的挑剔數列。

三、 証明此排法並反推 n=4k 和 4k+3 時一定有挑剔數列存在。

肆、研究方法

一、證明 n 之值為多少時挑剔數列不存在。

(一)用電腦排挑剔數列。

使用 C 語言設計程式讓電腦試排到 n=20,

其中 n=1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18 時挑剔數列皆不存在。

(二)尋找使挑剔數列不存在之 n 的規律。

經過觀察，n=4k+1 or 4k+2 時挑剔數列皆不存在。

(三)證明 n=4k+1 or 4k+2 時挑剔數列不存在。

方法 1.

※『序數』之定義：

此挑剔數列從左邊開始數來，第一位之序數=1，第二位之序數=2，依序遞增，至第 2n 位時序數=2n

※**挑剔數列中數字與序數之對應關係：**

每個數字都要填兩次，所以一個數字會對應到兩個序數，設一數字為 r，則數字 r 中序數較小的序數表示為 A_r，序數較大的 r 則因為兩個 r 之間相距 r 格所以序數表示為 $A_r+(r+1)$，如下圖所示

數列、、、、、、、、、、、、 r、、、、、、、、、、、、、 r、、、、、、、、、、、

（間隔 r 位）

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

序數 1 2 3 、、、、、 A_r、、、、、、、、、、、、 $A_r+(r+1)$、、、、、、、 2n

證明：

一個需填入 1~n 各兩次的挑剔數列，其序數和為 $1+2+3+4+\ldots+2n=2n^2+n$ —?

且 當 r＝1 時，兩個 1 分別對應序數 A_1、$A_1+(1+1)$

當 r＝2 時，兩個 2 分別對應序數 A_2、$A_2+(2+1)$

當 r＝3 時，兩個 3 分別對應序數 A_3、$A_3+(3+1)$

、 、

、 、

當 r＝n 時，兩個 n 分別對應序數 A_n、$A_n+(n+1)$

數字 1~n 分別對應了所有的序數，所以序數和也可表示為

$A_1+A_1+(1+1)+A_2+A_2+(2+1)+\ldots+A_r+A_r+(r+1)$ —?

? ? =?

? $4n^2+2n=4(A_1+A_2+\ldots+A_r)+n^2+3n \Rightarrow n(3n-1)=4(A_1+A_2+\ldots+A_n)$

得 $n(3n-1)$ 必為 4 的倍數，且 n 有四種情況 n=4k n=4k+1 , n=4k+2 , n=4k+3 分別代入 $n(3n-1)$，當 n=4k+1 or 4k+2 分別代入 $n(3n-1)$ 後，$n(3n-1)$ 並不是 4 的倍數，

故得證： 當 n=4k+1 or 4k+2 時，挑剔數列不存在。 ▩

方法 2.

設 n=4k+1

一個使用數字 1~4k+1(k 為非負整數)各兩次的挑剔數列是由 2k 個偶數和 2k+1 個奇數各填兩次所成，共 8k+2 格，將空格由左而右編號為 1~8k+2，則其中編號為奇數的有 4k+1 格，編號為偶數的有 4k+1 格，

任一偶數填入的位置為 a(設編號為奇數)，則此偶數的第二次填入為 a(奇數)+數字本身(偶數)+1，則為偶數，所以全部的偶數填入後會用掉 2k 個編號為奇數和 2k 個編號為偶數的格子，此時偶數格和奇數格都剩 2k+1 個。

任一奇數填入的位置為 b(設編號為奇數)，則此奇數的第二次填入為 b(奇數)+數字本身(奇數)+1，則為奇數，表示全部的奇數填入時會用掉 2p 個編號為奇數的格子或 2q 個編號為偶數個格子(p+q=2k+1)，今奇數格和偶數格都剩下 2k+1(奇數)格，所以全部的奇數無法完全填入，得證 n=4k+1 無法排出挑剔數列。 ▒

設 n=4k+2
一個使用數字 1~4k+2(k 為非負整數)各兩次的挑剔數列是由 2k+1 個偶數和 2k+1 個奇數各填兩次所成，共 8k+4 格，將空格由左而右編號為 1~8k+4，則其中編號為奇數的有 4k+2 格，編號為偶數的有 4k+2 格，
因為全部的偶數填入後會用掉 2k+1 個編號為奇數和 2k+1 個編號為偶數的格子，所以偶數格和奇數格都剩 2k+1 個。
全部的奇數填入時會用掉 2p 個編號為奇數的格子或 2q 個編號為偶數個格子(p+q=2k+1)，今奇數格和偶數格都剩下 2k+1(奇數)格，所以全部的奇數無法完全填入，得證 n=4k+2 無法排出挑剔數列。 ▒

二、找出一排法能排出 2n 位挑剔數列，並證明 n=4k、4k+3 至少能找到一組挑剔數列。

(一)找出規律，如能證出 k=任意值時皆能找到至少一組挑剔數列，則間接得知 n=4k or 4k+3 時挑剔數列必存在。

1.挑剔數列之化簡

(1)先把挑剔數列中最大的數字 n 寫下，再依造數字的大小順序由第一個 n 的右邊開始空一格依序填入直到第 2 個 n 之左方。

例： 7_6_5_4_7 (n=7)

(2)把步驟一所填入的數字往其右方填入第二次，同時在第一個 n 之左方補上此挑剔數列應有但尚未畫上之空格。

例： _ _ 7_6_5_4_7 6 5 4 (n=7)

(3)把剩餘數字的偶數由左到右遞增填入偶數格中，這些偶數的第 2 次皆填入原先填入之偶數的右方。

偶數格的定義為與第 1 個 n 之序數差為偶數的格子。

奇數格的定義為與第 1 個 n 之序數差為奇數的格子。

例： 2 _ 4 2 11_10 4 9_8_7_6 _ 11 10 9 8 7 6 (n=11)

(4)把剩餘的數字與空格一起作化簡，把剩餘的奇數皆減一再除以二，空格與空格間的距離也減一再除以二，使之變為一新的挑剔數列。

例：原 n=11 的挑剔數列化簡為 _ X _ X _ _ _ _

X 表示此格在原挑剔數列中已被填入過數字。

2.新挑剔數列之排法

※新挑剔數列之定義： 新挑剔數列之形式為 _ X _ _ _ 其中 X 之數量為右方連續空格之數量減 2。

(1)num？X？=4a+1 時的排法

？先把偶數由右往左遞增填入偶數格中，填入這些偶數的第 2 次時，最大偶數的第 2 次往原來的右方填，其餘的往左方填入。

例： _ X _ X _ X _ X _ X 2 4 _ 2 0 0 4

偶數格之定義改為與 X 之序數差為偶數。

奇數格之定義改為與 X 之序數差為奇數。

？剩餘的數字與空格一起作化簡，剩餘的奇數皆減一再除以二，空格與空格間的距離也減一再除以二，使此挑剔數列再做變化。

例：原 num(X)=5 變為_ _ _ _ _ X _

？再把偶數由左往右遞增填入偶數格，這些偶數的第 2 次填入中最大的偶數第 2 次往原來的左方填，其餘的往右方填入

？再化簡一次，則此數列就會變回新挑剔數列，形成一循環過程，每次循環後原 num(X)=4a+1 之 a 值減少 2 (a≧0)。

(2)num？X？=4a+2 時的排法

？把最大的偶數填在最右邊的偶數格，其餘的偶數由右往左遞增填入偶數格，這些偶數的第二次填入皆往原數之左填入，惟第 2 次往左填入會碰到最大偶數的偶數往原數之右填入。

例： _ X _ X _ X _ X 4 X _ X 6 4 _ 2 0 0 2 6

？把剩餘的空格與數字用和前面一樣的方法化簡，則此數列就會變回新挑剔數列，形成一循環過程，每次循環後 原 num (X) = 4a+2 之 a 值減少 1 (a≧0)。

(3)num？X？=4a+3 與 num？X？=4a+4 時的排法

？把偶數由右往左遞增填入偶數格中，這些偶數的第 2 次填入往原數之左方填入。

例： _ X _ X _ X _ X 6 X _ X 4 X _ 6 2 4 _ 2 0 0 _

？把剩餘數字與空格依前面所提之方法化簡。

？把偶數由左往右遞增填入偶數格中，這些偶數的第二次填入皆填往原數之右方，再執行一次化簡的步驟，則此數列就會變回新挑剔數列，每次循環後原 4a+3 or 4a 之 a 值減少 2 (a≧0)。

(二)證明上述新挑剔數列之排列方式中{num(X)=4a、4a+1、4a+2、4a+3}，a 為任意非負整數時此排列方式恆成立。

1.證明 num？X？=4a+1，a 為非負整數時，此排法皆成立。

(1)由於每個 X 之左方必有一個空格，所以設 num[__X]=4a+1

新挑剔數列中右方之連續空格數為 num？X？+**2**，故 num[__]=4a+3

總空格為(4a+1)+4a+3=8a+4，故可填入數字 0~4a+1。

(2)標定序數，最右方為 1，至最左方為 $(4a+1)\times 2+(4a+3)=12a+5$。

(3)跟據排法，偶數皆先填入偶數格中。0 4a+1 中偶數共有 2a+1 個，由於之前已說數字第二次填入所對應之序數表示為 A_r+(r+**1**)，現在 A_r 位於偶數格，而 r 又為偶數，故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中，

形成[XXX__]的情況。

(4)把此數列由右至左每四個劃為一組。

例： _ | X _ X _ | X _ X _ | X _ _ _ _ | _ _ _ _

最大偶數倒填使得前 4 格變為〔2 0 0 4a〕, 0 和 4a 都無法使〔XXX_〕的情況出現，所以 num[XXX__]=2a+1-2=2a-1，而 num[XXXX]=1

故 num[X__]={總格數-4num[XXX_]-4num[XXXX]-最左方一格[_]} ÷2=2a+2。

(5)依之前所提方式化簡：

XXX__ ➔ X__　　XXXX ➔ 消失　　X__➔__　　__➔__

此時化簡後新的數列與原挑剔數列左右顛倒 (連續空格在左方)

而 num[_X]=2a-1　　num[__]=2a+2+1=2a+3

新的數列總空格＝num[__]+num[_X]＝4a+2➔可填入的數字為 0　2a。

(6)再重複一次偶數填偶數格之方法

則 num〔_ XXX〕=a+1-2=a-1　num〔XXXX〕=1

最右方之一格 num〔_〕=1num〔_ X〕=(總格數 - 4(a-1) - 4 - 最右方一格〔_〕)/2=a。

(7)再用之前的方法化簡一次

則新的數列方向變為和原來的一樣

且 num〔_X〕=a-1　num [_]=a+1

兩者差為 2，條件皆和原先的新挑剔數列相符，形成一循環過程。

(8)故得證 a 為任意非負整數時此排法皆成立。 ▩

2.證明 num? X? =4a+2，a 為非負整數時，此排法皆成立。

(1)由於每個 X 之左方必有一個空格，所以設 num[__X]=4a+2

新挑剔數列中右方之連續空格數為 X 之數量+2，故 num[__]=4a+4

總空格數為(4a+2)+4a+4=8a+6，故可填入數字 0~4a+2。

(2)標定挑剔數列的序數，最右方為 1，至最左方為 2×(4a+2)+(4a+4)=12a+8。

(3)跟據排法，偶數皆先填入偶數格中。0　4a+2 中偶數共有 2a+2 個，數字第二次填入所對應之序數表示為A_r+(r+1)，現在A_r位於偶數格，而 r 又為偶數，故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中，形成[XXX__]的情況。

(4)把此數列由右至左每四個劃為一組，惟起始時是 5 個一組，由於最大之偶數 4a+2 是排在第一個偶數格上，使得偶數 2a 要倒填，故 0 和 2a 不會產生〔XXX_〕的形式，而前 5 格之形式為〔XXXXX〕

所以 num[XXX__]=2a+2-2=2a　num〔XXXXX〕=1

最左方之空格 num〔_〕=1

故 num[X__]=(總格數-4×(2a)-5-1) ÷2=2a+1。

(5)依之前所提方式化簡：

XXX__ ➔ X__　　X__➔__　　__➔__

此時化簡後新的數列雖與原挑剔數列左右顛倒 (連續空格在左方)

但 num[_X]=2a　num[__]=2a+1+1=2a+2

兩者差為 2，條件和原先的挑剔數列相符，可視為一循環過程。

(6)故得證 a 為任意非負整數時此排法皆成立。 ▒

3.num? X? =4a+3，a 為非負整數時，此排法皆成立。

(1)由於每個 X 之左方必有一個空格，所以設 num[__X]=4a+3

新挑剔數列中右方之連續空格數為 num? X? +2，故 num[__]=4a+5

總空格數為(4a+3)+4a+5=8a+8，故可填入數字 0~4a+3。

(2)標定序數，最右方為 1，至最左方為 2×(4a+3)+(4a+5)=12a+11。

(3)跟據排法，偶數皆先填入偶數格中。0　4a+3 中偶數共有 2a+2 個，數字第二次填入所對應之序數表示為 $A_r+(r+1)$，現在 A_r 位於偶數格，而 r 又為偶數，故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中，形成[XXX__]的情況。

(4)把此數列由右至左每四個劃為一組

每個偶數的第 2 次填入皆會形成 ﹝XXX_﹞

所以 num[XXX__]=2a+2，最左方之空格 num﹝_﹞=1

故num[X__]=(總格數-4×(2a+2)-1) ÷2=2a+1。

(5)依之前所提方式化簡：

XXX__ ➔ X__　　X__➔__　　__➔__

此時化簡後新的數列與原挑剔數列左右顛倒 (連續空格在左方)

而 num[_X]=2a+2　　num[__]=2a+1+1=2a+2

新的數列總空格數＝num[__]+num[_X]＝4a+4

➔可填入的數字為 0　2a+1。

(6)再重複一次偶數填偶數格之方法。

(7)一開始的﹝0 0 2 _﹞並不產生﹝_XXX﹞的情形

故 num﹝_XXX﹞=a+1-1=a，最右邊留有一空格 num﹝_﹞=1

num﹝_ X﹞=(總格子數 - 4a –3 -1) ÷2=a+1。

(8)再用之前的方法化簡一次。

(9)則新的數列左右方向變為和原來的一樣

且 num﹝_X﹞=a　num [_]=a+2

兩者差為 2，條件皆和原先的挑剔數列相符，形成一循環過程。

(10)故得證 a 為任意非負整數時此排法皆成立。 ▒

4.num﹝X﹞=4a+4，a 為任意非負整數時，此排法皆成立。

(1)由於每個 X 之左方必有一個空格，所以設 num[__X]=4a+4

新挑剔數列中右方之連續空格數為 X 之數量+2，故 num[__]=4a+6

總空格為(4a+4)+(4a+6)=8a+10，故可填入數字 0~4a+4。

(2)標定序數，最右方為 1，至最左方為(4a+4)×2+(4a+6)=12a+14。

(3)跟據排法，由小到大的偶數依序填入由右而左的偶數格。0　4a+4 中偶數共有 2a+3 個，之前已說過第二次填入數字時所對應之序數表示為 $A_r+(r+1)$，現在 A_r 位於偶數格，而 r 又為偶數，故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中，形成[XXX__]的情況。

(4)把此數列由右至左每四個劃為一組，惟一開始先三格一組

因為 4a+4 的最右邊為偶數格，所以填入後的最右邊是[XXX]

所以 num[XXX__]=2a+3-1=2a+2，而 num[XXX]=1

故 num[X__]={總格數-4×num[XXX__]-3×num[XXX]-最右邊的[_]}÷2 =2a+1。

(5)依之前所提方式化簡

XXX__ ➔ X__ XXX ➔ 消失 X__➔__ __➔__

此時化簡後新的數列與原挑剔數列左右顛倒 (連續空格在左方)

而 num[X_]=2a+2 num[__]=2a+2

新的數列總空格＝num[__]+num[_X]＝4a+4

➔可填入的數字為 0 2a+1。

(6)再重複一次偶數填偶數格之方法

則 num〔_ XXX〕=a+1-1=a ,num〔XXX〕=1,最右方之一格 num〔_〕=1

num〔_ X〕=(總格數 - 4(a) - 3 - 最右方一格〔_〕)/2=a+1。

(7)再用之前的方法化簡一次

則新的數列方向變為和原來的一樣，且 num〔_X〕=a num [_]=a+2

兩者差為 2，條件皆和原先的挑剔數列相符，形成一循環過程。

(8)故得證 a 為任意非負整數時此排法皆成立。 ▩

伍、研究結果與討論

一、我們所列的目的都達到了，第一我們已經証出n=4K+1和4K+2是絕對不存在挑剔數列的。

二、為了要完成第二個目的，我們試著找出每個挑剔數列的共通性，也找到了以化減的方法來分類，有效減少了繁雜的挑剔數列，藉由不斷的化簡，快速的找到至少一組挑剔數列，當2n相當大時，也能藉由4、5次化簡就能排出挑剔數列，這可說是目前最大的突破。

三、證出當n=4K+3和4K+4是絕對存在挑剔數列的。原本挑替數列的n值是以四為一個循環(4K+1、4K+2無挑剔數列；4K+3、4K+4有挑剔數列)，經過化簡後，新挑剔數列的num(X)還是以四為循環(4a+1、4a+2、4a+3、4a+4)，相當有規律。

四、當然，目前仍在繼續找尋其它的規律，試圖將挑剔數列分析到最清楚，可是目前還再研究每一個 2n 位能排出多少組挑剔數列，不過從已經知道的組數(n=3 有 2 解；n=4 有 2 解；n=7 有 52 解；n=8 有 300 解)來看，我們推測 n 與挑剔數列組數之關係應該是成指數關係增加，希望能試著找出其奧妙。

陸、目前發展

一、試找出一推導方法使得一組解可以推出同一 n 值的所有解。

(一) 從前面所得的公式可以找出任意 n 的一組解，再找程式跑出來的 n=7 的所有解之相似度。

(相似度的定義：兩 n 值相同的數列，比較數字 1~n，越多位置相同的相似度越高。)

n=7 的所有解：

A: 73625324765141
B: 72462354736151
C: 71416354732652
D: 74151643752362
E: 27423564371516
F: 57416154372632
G: 57263254376141
H: 17126425374635
I: 26721514637543
J: 62742356437151
K: 51716254237643
L: 23726351417654
M: 35743625427161
N: 72632453764151
O: 72452634753161
P: 71316435724625
Q: 73161345726425
R: 37463254276151
S: 57236253471614
T: 57141653472362
U: 17125623475364
V: 36713145627425
W: 52732653417164
X: 41716425327635
Y: 24723645317165
Z: 35723625417164

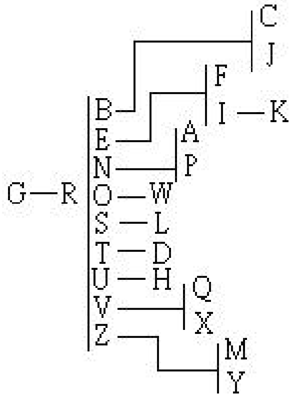
這２６組是完全不重複的，所以總共有５２組（數列左右顛倒也是一新的數列）

(二) **從這 26 組數列中比較之間位置相同的數字數量(相似度)製成下表：**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A		2	1	1	0	0	2	1	1	1	1	1	1	3	2	1	2	1	0	0	2	0	0	0	0	1
B	2		4	1	1	1	2	0	0	4	0	1	1	4	4	1	2	4	0	0	0	0	1	0	0	0
C	1	4		2	1	3	0	1	0	2	2	2	0	2	2	3	1	2	1	1	0	0	0	2	0	0
D	1	1	2		0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	3	1	2	0	0	4	2	0	1	0	2	1
E	0	1	1	0		2	1	1	2	0	0	0	0	0	1	0	0	2	2	1	1	0	0	0	2	0
F	0	1	3	1	2		2	2	0	0	2	1	0	0	1	1	0	1	3	3	1	1	1	2	0	0
G	2	2	0	0	1	2		1	0	2	2	0	1	1	1	0	1	3	2	2	1	0	1	0	1	0
H	1	0	1	0	1	2	1		0	0	1	1	0	1	0	3	1	1	2	1	3	1	0	3	1	1
I	1	0	0	0	2	0	0	0		1	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	1	1
J	1	4	2	0	0	0	2	0	1		1	2	3	3	2	0	0	2	1	1	0	1	2	0	1	1
K	1	0	2	0	0	2	2	1	3	1		2	0	0	0	2	0	1	2	1	0	1	2	3	1	1
L	1	1	2	0	0	1	0	1	2	2	2		1	1	0	1	1	1	2	0	1	1	2	2	2	2
M	1	1	0	1	0	0	1	0	1	3	0	1		1	2	0	0	2	0	2	1	2	2	2	2	3
N	3	4	2	1	0	0	1	1	0	3	0	1	1		2	2	1	2	1	0	0	0	1	0	0	0
O	2	4	2	3	1	1	1	0	0	2	0	0	2	2		1	1	2	0	1	1	0	2	0	1	1
P	1	1	3	1	0	1	0	3	0	0	2	1	0	2	1		3	0	1	0	0	2	0	3	1	0
Q	2	2	1	2	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	3		1	0	1	0	3	0	1	1	0
R	1	4	2	0	2	1	3	1	0	2	1	1	2	2	2	0	1		1	1	1	1	0	0	0	1
S	0	0	1	0	2	3	2	2	0	1	2	2	0	1	0	1	0	1		2	2	0	3	1	0	1
T	0	0	1	4	1	3	2	1	0	1	1	0	2	0	1	0	1	1	2		3	0	2	0	1	1
U	2	0	0	2	1	1	1	3	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	2	3		0	2	0	1	3
V	0	0	0	0	0	1	0	1	2	1	1	1	2	0	0	2	3	1	0	0	0		1	2	2	2
W	0	1	0	1	0	1	1	0	1	2	2	2	2	1	2	0	0	0	3	2	2	1		1	3	4
X	0	0	2	0	0	2	0	3	1	0	3	2	2	0	0	3	1	0	1	0	0	2	1		2	1
Y	0	0	0	2	2	0	1	1	1	1	1	2	2	0	1	1	1	0	0	1	1	2	3	2		3
Z	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	2	3	0	1	0	0	1	1	1	3	2	4	1	3	

註：標黃底的為相似度較高者。

(三) 從表格中可以找出與每一個數列相似度最高的數列，從相似度的高低可以排出一推導的順序。



(四) 從這個推導順序找出 n=7 的數列推導的過程。(參見附錄)

(五) 從 n=7 的推導方法試著找出其它 n 值的推導方法。

二、找尋 n 與挑剔數列組數的關係

(一) 因為前提的數列找尋方式只能找出每個 n 當中的一組解，無法知道每個 n 確實的組數。

(二) 設計程式，找出每個 n 值內符合挑剔數列定義的數列，並計算總數，得到 n=3 有 2 解、n=4 有 2 解、n=7 有 52 解、n=8 有 300 解…..等數據。

(三) 找尋 n 與挑剔數列組數之間的關係。

柒、參考文獻

一、 Nrich數學期刊 http://www.nrich.maths.org.uk/mathsf/journalf/jan00/inspire1/
二、 數據處理入門　陳勝凡　科學出版社
三、 中學數學教學法通論　楊弢亮　浙江教育出版社