# 無規則中找規則 – 螞蟻與布朗運動

## 一、　動機：

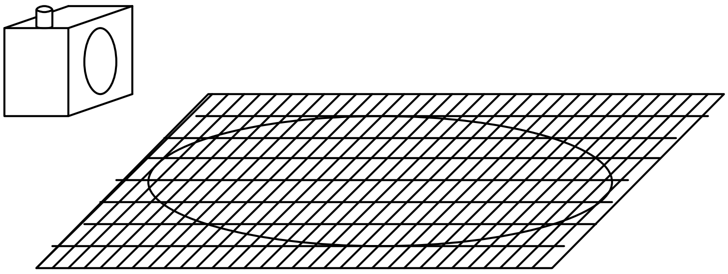
在一堂有關布朗運動的物理課上，老師提到：一個喝醉的水手從酒吧出來，他任一步和前一步所走的方向完全無規，然而平均而言，他離酒吧的距離竟然可由費因曼物理學下的布朗運動推展而得。對於物理學中的無規行走理論，可否運用在生物體上，我們以螞蟻為觀察目標，設計一個簡易的實驗，並且試著把物理的分析方式應用在所得的數據中。

## 二、　實驗目的：

將螞蟻自空中落下後的軌跡加以拍攝，記錄其軌跡，整理各個時距下的均方距離並繪製成表。利用無規行走下距離原點的均方距離與步數成正比的理論，應用在數據上，對此一理論的適用性進行研究。

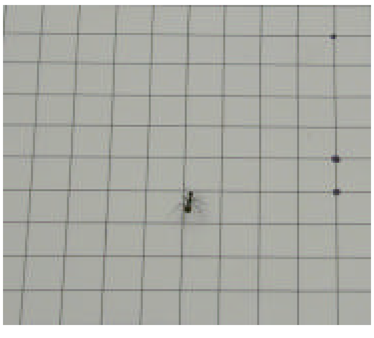
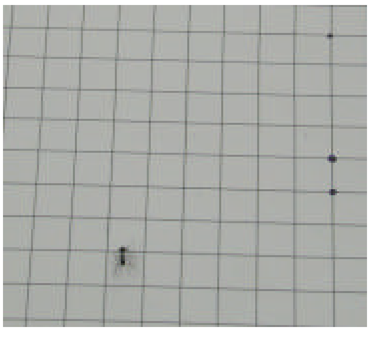
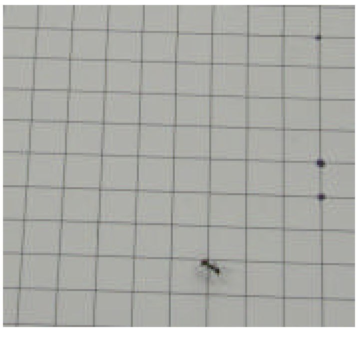
## 三、　器材：

圓形壓克力板……………………..1 片
方格紙……………………………..1 張
數位照相機………………………..1 台
桌上型電腦………………………..1 台



## 四、　實驗步驟：

1. 把方格紙壓在壓克力板的下方，並且將方格紙上以黑點標出的原點對準壓克力板的中心。
2. 將捉來的螞蟻對準壓克力板的中心，自固定高度使其墜落至板上。
3. 用數位照相機連拍功能，將螞蟻行走的軌跡拍下來。（每次連拍十張）
4. 將拍來的照片放進電腦，並將螞蟻的座標紀錄下來。
5. 重複上面步驟，直到獲取十次完整的數據為止。

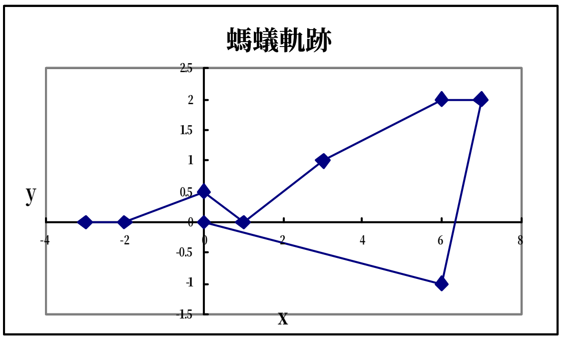




# 五、　實驗數據：

## 1. 蟻蟻軌跡圖

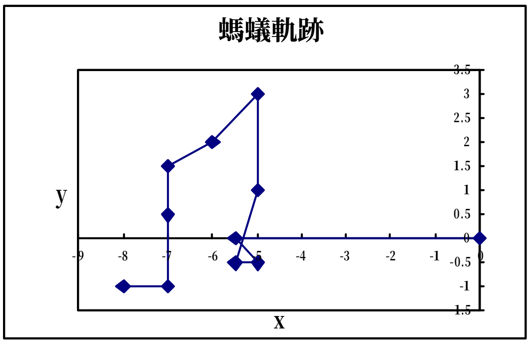
### 軌跡一

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 6 | 7 | 6 | 3 | 1 | 1 | 0 | -2 | -3 |
| y | 0 | -1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0 |



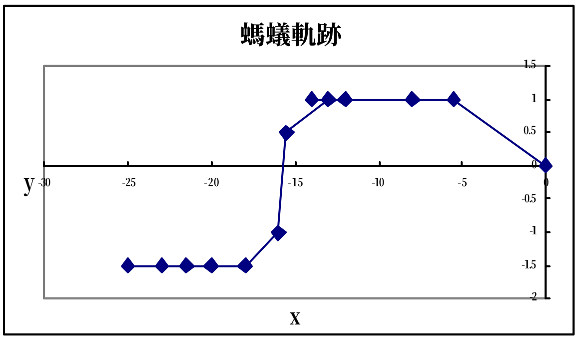

### 軌跡四

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | -5.5 | -5 | -5 | -5.5 | -5 | -5 | -6 | -7 | -7 |
| y | 0 | 0 | -0.5 | -0.5 | -0.5 | 1 | 3 | 2 | 1.5 | 1.5 |



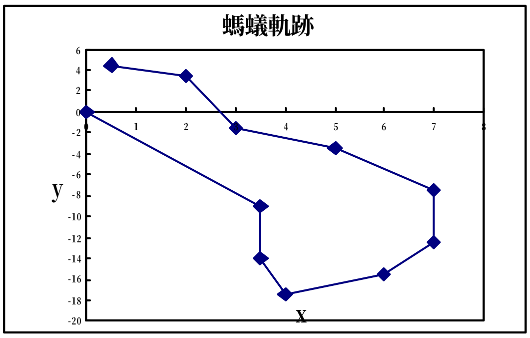

### 軌跡二

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | -5.5 | -8 | -12 | -14 | -13 | -16 | -16 | -18 | -20 |
| y | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.5 | -1 | -1.5 | -1.5 |



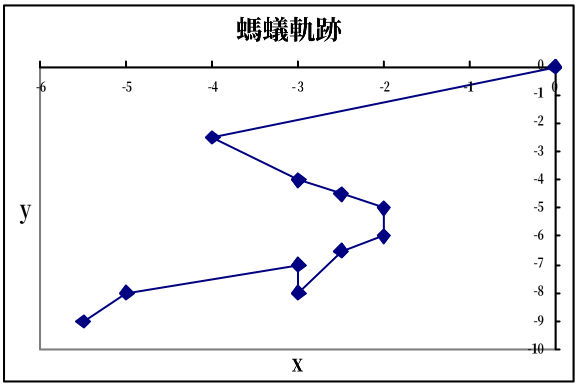

### 軌跡五

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 3.5 | 3.5 | 4 | 6 | 7 | 7 | 5 | 3 | 2 |
| y | 0 | -9 | -14 | -18 | -16 | -13 | -7.5 | -3.5 | -1.5 | 3.5 |



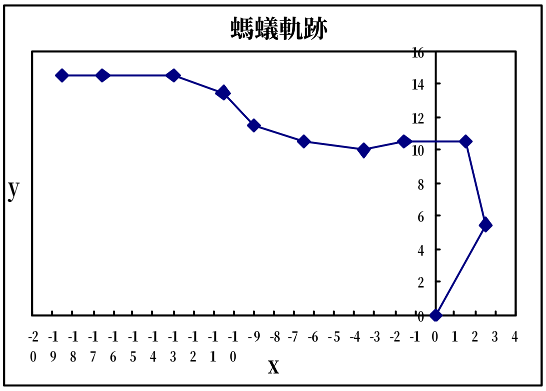

### 軌跡三

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | -4 | -3 | -2.5 | -2 | -2 | -2.5 | -3 | -3 | -5 |
| y | 0 | -2.5 | -4 | -4.5 | -5 | -6 | -6.5 | -8 | -7 | -8 |



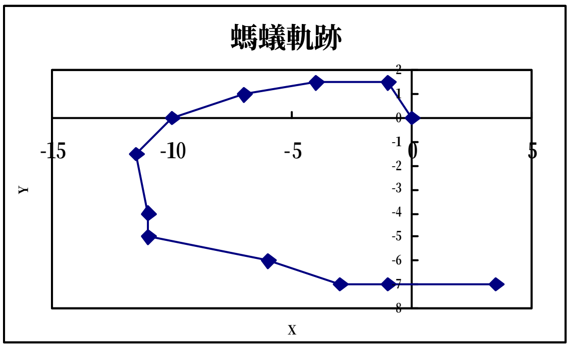

### 軌跡六

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 2.5 | 1.5 | -1.5 | -3.5 | -6.5 | -9 | -11 | -13 | -17 |
| y | 0 | 5.5 | 11 | 11 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 15 |



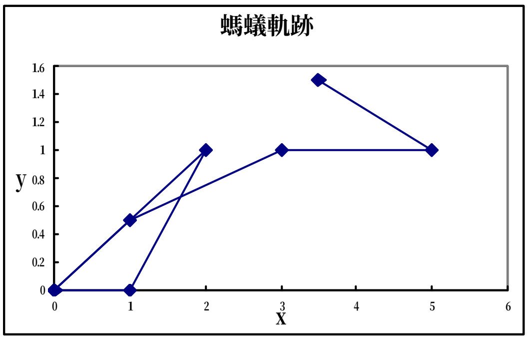
### 軌跡七

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | -1 | -4 | -7 | -10 | -12 | -11 | -11 | -6 | -3 |
| y | 0 | 1.5 | 1.5 | 1 | 0 | -1.5 | -4 | -5 | -6 | -7 |



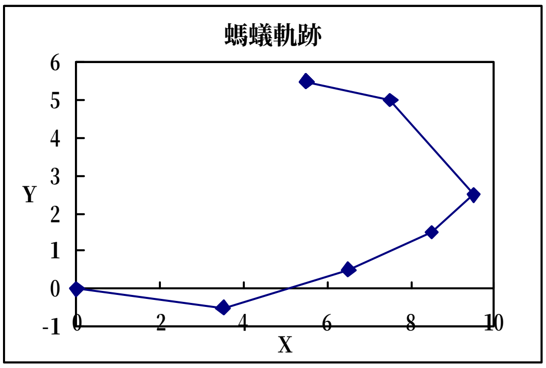

### 軌跡九

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 3 | 5 | 3.5 |
| y | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | 1 | 1.5 |



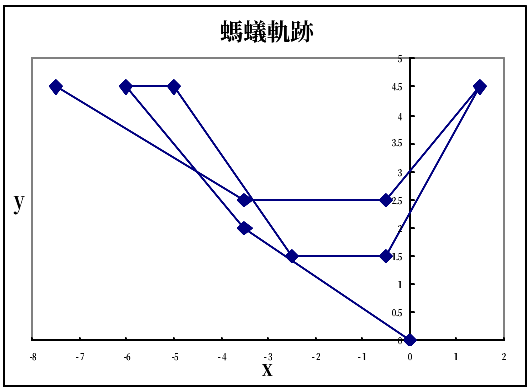

### 軌跡八

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 3.5 | 6.5 | 8.5 | 9.5 | 7.5 | 5.5 | 5.5 | 5.5 | 5.5 |
| y | 0 | -0.5 | 0.5 | 1.5 | 2.5 | 5 | 5.5 | 5.5 | 5.5 | 5.5 |




### 軌跡十

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | -3.5 | -6 | -5 | -2.5 | -0.5 | 1.5 | -0.5 | -3.5 | -7.5 |
| y | 0 | 2 | 4.5 | 4.5 | 1.5 | 1.5 | 4.5 | 2.5 | 2.5 | 4.5 |




## 六、 理論模型與分析整理：

根據無規行走的理論，設 $\vec{R}_N$ 表示 N 步之後距原點的距離向量，則距離原點的均方距離< $R_N{}^2$ >與步數 N 成正比，亦即< $R_N{}^2$ >=N $L^2$，其中 L 表示平均每一步的長度(平均路徑長)。

證明如下：

螞蟻第 N 步距原點的距離 $\vec{R}_N$，為前一步距原點之距離 $\vec{R}_{N-1}$ 再加上走一步增加的距離 $\vec{L}$，所以

$$\vec{R}_N = \vec{R}_{N-1} + \vec{L}$$

取 $\vec{R}_N$ 的平方可得：

$$R_N{}^2 = R_{N-1}{}^2 + 2\,\vec{R}_{N-1} \cdot \vec{L} + L^2$$

由第一步加到第 N 步：

$$R_N{}^2 = R_{N-1}{}^2 + 2\,\vec{R}_{N-1} \cdot \vec{L} + L^2$$

$$R_{N-1}{}^2 = R_{N-2}{}^2 + 2\,\vec{R}_{N-2}\cdot\vec{L} + L^2$$

$$\vdots$$

$$+)\qquad R_1{}^2 = 0^2 + 2\cdot 0\cdot\vec{L} + L^2$$

$$R_N{}^2 = \sum_{N=1}^{N} 2\vec{R}_{N-1}\cdot\vec{L} + NL^2$$

假定螞蟻在慌亂中決定下一步的方向是隨機的，則 $\vec{R}_{N-1}$． $\vec{L}$ 中兩向量的夾角為任意值，則多次平均之後的值為零，所以$<\sum_{N=1}^{N} 2\vec{R}_{N-1}\cdot\vec{L}>=0$，則可推得多次平均後的 $R_N{}^2$ 與的 L 關係式為$<R_N{}^2>=NL^2$ 。

將上述結果套用在本實驗中，可把 L 視為平均路徑長，即相鄰兩張照片上螞蟻位移大小的平均值。而行走的步數 N，則以時間間隔的長短，也就是照片的次序排列序號。

## 七、 數據分析：

1.平均距離的分析：

我們先將九次測量所得螞蟻的均方距離$<R_N{}^2>$整理如下:

＜螞蟻軌跡各點與原點之距離和均方距離＞

| | 螞蟻 1 | 螞蟻 2 | 螞蟻 3 | 螞蟻 4 | 螞蟻 5 | 螞蟻 6 | 螞蟻 7 | 螞蟻 8 | 螞蟻 9 | 螞蟻 10 | 均方距離 $<R_N{}^2>$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 相片序號 1 | 6.1 | 5.6 | 4.7 | 5.5 | 9.7 | 6.0 | 1.8 | 3.5 | 0.0 | 4.0 | 27.0 |
| 相片序號 2 | 7.3 | 8.1 | 5.0 | 5.0 | 14.4 | 10.6 | 4.3 | 6.5 | 0.0 | 7.5 | 55.7 |
| 相片序號 3 | 6.3 | 12.0 | 5.1 | 5.0 | 18.0 | 10.6 | 7.1 | 8.6 | 2.2 | 6.7 | 80.8 |
| 相片序號 4 | 3.2 | 14.0 | 5.4 | 5.5 | 16.6 | 10.6 | 10.0 | 9.8 | 1.0 | 2.9 | 85.5 |
| 相片序號 5 | 1.0 | 13.0 | 6.3 | 5.1 | 14.3 | 12.3 | 11.6 | 9.0 | 0.0 | 1.6 | 81.2 |
| 相片序號 6 | 1.0 | 15.5 | 7.0 | 5.8 | 10.3 | 14.6 | 11.7 | 7.8 | 1.1 | 4.7 | 84.6 |
| 相片序號 7 | 0.5 | 16.0 | 8.5 | 6.3 | 6.1 | 17.1 | 12.1 | 7.8 | 3.2 | 2.5 | 91.9 |
| 相片序號 8 | 2.0 | 18.1 | 7.6 | 7.2 | 3.4 | 19.5 | 8.5 | 7.8 | 5.1 | 4.3 | 99.3 |
| 相片序號 9 | 3.0 | 20.1 | 9.4 | 7.2 | 4.0 | 22.0 | 7.6 | 7.8 | 3.8 | 8.7 | 119.2 |

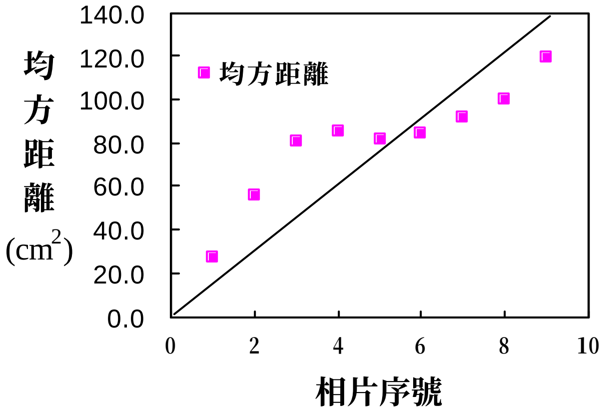
雖然螞蟻在下墜後行走的速度不一(包括停頓不行走)，我們仍相信在相同的時距內存在一個螞蟻行走的平均步數，而螞蟻在每一時距下所行走的步數必十分接近此平均值，因為步數與時間成正比，故均方距離也與時間成正比，而且又正比於相片的拍攝張數序號。因此可利用時間與均方距離的關係繪出一張$<R_N{}^2>$—時間的關係圖。

從圖表中我們可以看出下列幾點結果:

2.線性關係的存在：

圖形中的點大致成線性分佈，拍攝時間愈久，螞蟻離遠點的均方距離$<R_N{}^2>$也就愈大。分析出的點在一線性函數附近，相關性相當明顯，基本上可認為$<R_N{}^2>=NL^2 \propto N$ 的關係是存在螞蟻行走的此一事件上。

均方距離與時間關係圖

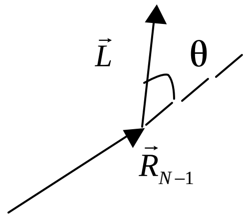


3.行走的隨機性：

由實驗結果可明顯看出螞蟻行走步數 N 與移動距離平方的期望值$<R_N{}^2>$存在著一個近似線性的關係。這證明螞蟻在慌亂中移動行走時確實是無規則的。否則，上述理論中的$<\sum_{N=1}^{N} 2\vec{R}_{N-1}\cdot\vec{L}>=0$ 便不成立。反之，若螞蟻行走時是有意識性的，也就是下一步的位移向量 $\vec{L}$ 與前一步的總位移向量 $\vec{R}_{N-1}$ 的夾角 θ 並非真正的混亂，而是具有方向性，則：

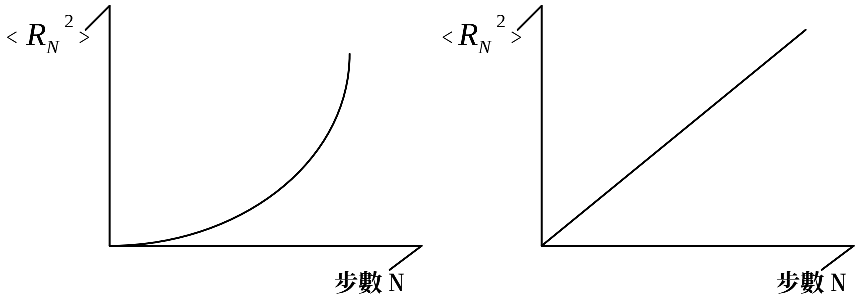
$$\vec{R}_N \quad (N-1)\,\vec{L}+\vec{L}$$

$$<R_N{}^2> \quad N^2L^2$$




那麼實驗結果將呈現出近似於拋物線的關係$<\vec{R}_N>\propto N^2$。

有意識性　　　　無意識性




由以上推論可知，藉由觀測$<R_N{}^2>$與N的關係，我們渴望對生物在移動時，是否具有意識，還是只是隨機運動，做一個較為數學化的探討，提供生物學一個可參考的分析模式。

4.照片序號為行走步數作為螞蟻實際行走步數的合理性：

在前述理論均方距離$<R_N{}^2>$與步數 N 的關係式中，斜率值為 $L^2$，但是由於本實驗無法測得螞蟻行走時的步數，而是由行走時間間隔替代行走步數，假設螞蟻相同時間間隔內，走相同的步數，則相片序號 N 與行走步數 S 的關係為

$$S = N\cdot m \Rightarrow N = S/m$$

其中 m 為每張照片時間間隔內行走的平均步數，則上述均方距離的公式可改寫為:

$$<R_N{}^2>=N\cdot L^2=(S/m)\cdot<L^2>。$$

設螞蟻每步的行走距離為$l_0$，則$<L^2>=m\cdot l_0{}^2$，代入上式可得

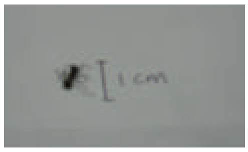
$$<R_N{}^2>=N\cdot L^2=(S/m)L^2=(S/m)m\cdot l_0{}^2=S\cdot l_0{}^2$$

則可證明出以照片的張數 N 所得的公式$<R_N{}^2>=N\cdot L^2$與螞蟻實際上行走的步數 S 得的公式$<R_N{}^2>=S\cdot l_0{}^2$是全等的。

5.螞蟻的行走頻率：

在公式$< R_N^{\ 2} >= N \cdot L^2 = N \cdot (m \cdot l_0^{\ 2})$中，可得斜率為$\tan q = m \cdot l_0^{\ 2}$。已知螞蟻身長約為 1cm，我們定義其六隻腳皆移動一次為一個循環，並假設螞蟻每走完一個循環約移動與身體長度相等的距離 1cm~2cm，則上述公式中的$l_0 = 1 \sim 2$。

由圖表中可得斜率 tan$q$　16，則

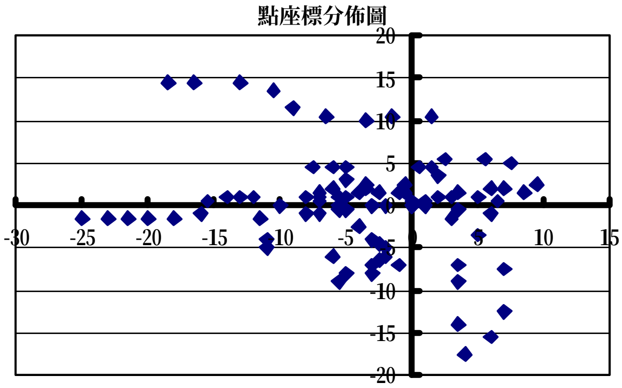



$$\tan\theta = 16 = m \cdot l_0^{\ 2} \Rightarrow m = 4 \sim 16$$

即每張照片間格時間內螞蟻約前進 4~16 循環，又每張照片的時間間格$\Delta t = 0.67$秒，可推得螞蟻每秒行走的循環數約為$m/\Delta t = 4 \sim 16$循環/0.67秒$= 6 \sim 24$(循環/秒)

6.空間分佈的探討：

我們將螞蟻在座標上分佈點全部繪出，如右圖所示，我們發現螞蟻分佈在一、二象限較多，這是否是因為實驗室光線所造成的，還是樣本事件取的不夠多，或是另有其他因素造成，有待日後探討。




# 八、　結論：

1. 我們將物理學中的無規則行走理論用在研究螞蟻行走中的研究上，提出一種分析模式，使得生物學中有關此類的現象得以被量化分析。
2. 本實驗以方程式和數據分析，證明出螞蟻在慌亂中的行走是無規則的。
3. 從理論所建立模型應用在本實驗數據中，我們推估螞蟻每秒約行走 6~24 循環。
4. 無規則行走理論除了應用在本實驗中以外，我們還認為也可以應用在葉子的成長、生物體的擴散分佈等其他範圍，這有待日後更多的投入與研究。

# 九、　參考資料：

1.費因曼物理學(第一部　一上)--第六章……………徐氏基金會出版